ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2015. Т. 25. Вып. 1

УДК 519.175, 519.115.5

© *Х. Ш. Аль Джабри*

ГРАФ РЕФЛЕКСИВНО-ТРАНЗИТИВНЫХ ОТНОШЕНИЙ И ГРАФ КОНЕЧНЫХ ТОПОЛОГИЙ

Любое бинарное отношение $\sigma \subseteq X^2$ (где X — произвольное множество) порождает на множестве X^2 характеристическую функцию: если $(x,y) \in \sigma$, то $\sigma(x,y) = 1$, а иначе $\sigma(x,y) = 0$. В терминах характеристических функций на множестве всех бинарных отношений множества X вводится понятие бинарного рефлексивного отношения смежности и определяется алгебраическая система, состоящая из всех бинарных отношений множества и из всех неупорядоченных пар различных смежных бинарных отношений. Если X — конечное множество, то эта алгебраическая система — граф («граф графов»).

Показано, что если σ и τ — смежные отношения, то σ является рефлексивно-транзитивным отношением тогда и только тогда, когда τ является рефлексивно-транзитивным отношением. Исследованы некоторые особенности строения графа $G(X)$ рефлексивно-транзитивных отношений. В частности, если X состоит из n элементов, а $T_0(n)$ — это число помеченных T_0-топологий, определенных на множестве X, то количество компонент связности равно $\sum_{m=1}^{n} S(n,m)\,T_0(m-1)$, где $S(n,m)$ — числа Стирлинга 2-го рода. (Хорошо известно, что количество вершин в графе $G(X)$ равно $\sum_{m=1}^{n} S(n,m)\,T_0(m)$.)

Ключевые слова: граф, рефлексивно-транзитивное отношение, конечная топология.

1. Смежность бинарных отношений. Пусть $B \doteq \{0,1\}$ — булево множество, X — произвольное множество, а $X^2 \doteq X \times X$ — прямое произведение. Функции $X^2 \to B$ будем называть *характеристическими*. Всякое подмножество $R \subseteq X^2$, называемое *бинарным отношением* (или просто *отношением*) на множестве X, порождает характеристическую функцию

$$\chi_R\colon\ X^2 \to B, \qquad \chi_R(x,y) \doteq \begin{cases} 1, & \text{если} \quad (x,y) \in R, \\ 0, & \text{если} \quad (x,y) \notin R. \end{cases}$$

Далее, функцию $\chi_R(\cdot,\cdot)$ будем обозначать через $R(\cdot,\cdot)$. С другой стороны, всякая характеристическая функция $\chi\colon\ X^2 \to B$ порождает бинарное отношение $R_\chi \subseteq X^2$ такое, что $(x,y) \in R_\chi$, если $\chi(x,y) = 1$. Очевидно, отображение $R \to R(\cdot,\cdot)$ является биекцией между множеством бинарных отношений и множеством характеристических функций.

На множестве 2^{X^2} всех бинарных отношений множества X (на множестве характеристических функций) введем бинарное рефлексивное отношение смежности.

Определение 1. Пусть $X = Y \cup Z$ — дизъюнктное объединение двух подмножеств (допускается, что $Y = \varnothing$ или $Z = \varnothing$). Предположим, что отношение $\sigma \subseteq X^2$ таково, что $\sigma(x,y) = 0$ для всех $(x,y) \in Y \times Z$. Оно порождает отношение $\tau \subseteq X^2$ такое, что

$$\tau(x,y) = 1 - \sigma(y,x) \ \text{ для всех } \ (x,y) \in Y \times Z,$$

$$\tau(x,y) = 0 \ \text{ для всех } \ (x,y) \in Z \times Y,$$

$$\tau(x,y) = \sigma(x,y) \ \text{ для всех } \ (x,y) \in Y^2 \cup Z^2.$$

Отношение τ называется *смежным* с отношением σ.

Замечание 1. Из определения следует, что если отношение τ смежно с отношением σ, то и σ смежно с τ, и этот факт мы записываем в виде диаграммы $\sigma \xleftrightarrow{Y\times Z} \tau$, или

$$\begin{array}{|c|c|c|} & Y & Z \\ \hline Y & & 0 \\ \hline Z & \sigma(x,y) & \\ \hline \end{array} = \sigma \xleftrightarrow{Y\times Z} \tau = \begin{array}{|c|c|c|} & Y & Z \\ \hline Y & & 1-\sigma(y,x) \\ \hline Z & 0 & \\ \hline \end{array} \ .$$

Здесь и далее в диаграммах мы отмечаем значения характеристических функций в тех точках, которые априори известны. Например, в блоке $Y \times Z$ для отношения σ пишем «обобщенный» ноль, и это означает, что $\sigma(x,y)=0$ для всех $(x,y)\in Y\times Z$, а в таком же блоке для отношения τ пишем $1-\sigma(y,x)$, и это означает, что $\tau(x,y)=1-\sigma(y,x)$ для всех $(x,y)\in Y\times Z$.

Например, $X=\{\,1,\ldots,6\,\},\ Y=\{\,1,2\,\},\ Z=\{\,3,4,5,6\,\}$,

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix} & 0 \\ \hline \begin{smallmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\1&1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{smallmatrix} \\ \hline \end{array} = \sigma \xleftrightarrow{Y\times Z} \tau = \begin{array}{|c|c|}\hline \begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&0\end{smallmatrix} \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{smallmatrix} \\ \hline \end{array}\,.$$

2. Рефлексивно-транзитивные отношения. Через $V(X)$ обозначим совокупность всех рефлексивно-транзитивных отношений, определенных на множестве X. Другими словами, отношение $\sigma\subseteq X^2$ принадлежит множеству $V(X)$, если оно удовлетворяет аксиомам рефлексивности $\big((x,x)\in\sigma\big)$ и транзитивности $\big($если $(x,y)\in\sigma,\ (y,z)\in\sigma$, то $(x,z)\in\sigma\big)$. В терминах характеристических функций имеем: $\sigma\in V(X)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sigma(x,x)=1 \ \text{для всех}\ x\in X,$$

$$\sigma(x,y)\,\sigma(y,z)\leqslant\sigma(x,z)\ \text{для всех}\ x,y,z\in X.$$

Для любых $\sigma\in V(X)$ и $x\in X$ множество

$$U_\sigma(x)\doteq\big\{\,y\in X\colon\ \sigma(x,y)=1\,\big\} \tag{1}$$

не пусто $\big($так как $x\in U_\sigma(x)\big)$.

Предложение 1. *Пусть $\sigma\in V(X)$ и $x,y\in X$. Включение $y\in U_\sigma(x)$ имеет место тогда и только тогда, когда $U_\sigma(y)\subseteq U_\sigma(x)$.*

Доказательство. Пусть $y\in U_\sigma(x)$, тогда $\sigma(x,y)=1$. Если $z\in U_\sigma(y)$, то $\sigma(y,z)=1$, поэтому $\sigma(x,z)=1$ и $z\in U_\sigma(x)$. Значит, $U_\sigma(y)\subseteq U_\sigma(x)$. Обратное утверждение очевидно. □

Отношение $\sigma\in V(X)$ порождает на множестве X отношение эквивалентности: пишем $x\sim y$ (или $x\overset{\sigma}{\sim}y$) тогда и только тогда, когда $U_\sigma(x)=U_\sigma(y)$. Класс эквивалентности, содержащий элемент $x\in X$, обозначаем $[x]_\sigma$ (или $\overline{x}$).

Предложение 2. *Пусть $\sigma\in V(X)$ и $x,y\in X$. Справедливы следующие утверждения:*
1) $[x]_\sigma\subseteq U_\sigma(x)$;
2) *если $y\in U_\sigma(x)$, то $[y]_\sigma\subseteq U_\sigma(x)$; следовательно,*

$$U_\sigma(x)=\bigcup_{[\xi]_\sigma\subseteq U_\sigma(x)}[\xi]_\sigma; \tag{2}$$

3) $\sigma(\xi,\eta)=1$ *для всех* $(\xi,\eta)\in[x]_\sigma^2$;
4) $\sigma(\xi,\eta)=\sigma(x,y)$ *для всех* $(\xi,\eta)\in[x]_\sigma\times[y]_\sigma$;
5) *если $[x]_\sigma\neq[y]_\sigma$, то $\sigma(\xi,\eta)\,\sigma(\eta,\xi)=0$ для всех $(\xi,\eta)\in[x]_\sigma\times[y]_\sigma$.*

Доказательство. 1. Включение $\xi\in[x]_\sigma$ влечет $\xi\sim x$ и $\xi\in U_\sigma(\xi)=U_\sigma(x)$.

2. В силу первого пункта и предложения 1 справедливо $[y]_\sigma\subseteq U_\sigma(y)\subseteq U_\sigma(x)$. Обозначим правую часть (2) через S. Если $z\in S$, то $z\in[\xi]_\sigma$ для некоторого ξ такого, что $[\xi]_\sigma\subseteq U_\sigma(x)$, поэтому $z\in U_\sigma(x)$. Обратно: если $z\in U_\sigma(x)$, то $[z]_\sigma\subseteq U_\sigma(x)$ и $z\in[z]_\sigma\subseteq S$.

3. Так как $\xi\sim\eta$, то $U_\sigma(\xi)=U_\sigma(\eta)$, значит, $\eta\in U_\sigma(\xi)$ и $\sigma(\xi,\eta)=1$.

4. Если $\sigma(\xi,\eta)=0$ для всех $\xi\in[x]_\sigma$, $\eta\in[y]_\sigma$, то утверждение очевидно. Предположим теперь, что $\sigma(z,w)=1$ для некоторых $z\in[x]_\sigma$ и $w\in[y]_\sigma$, тогда $w\in U_\sigma(z)$. Следовательно,

$[w]_\sigma \subseteq U_\sigma(w) \subseteq U_\sigma(z)$, значит, $\eta \in U_\sigma(z)$ для любого $\eta \in [y]_\sigma = [w]_\sigma$. Так как $\xi \in [x]_\sigma = [z]_\sigma$, то $U_\sigma(\xi) = U_\sigma(z)$, поэтому $\eta \in U_\sigma(\xi)$. Таким образом, $\sigma(\xi, \eta) = 1$ для всех $\xi \in [x]_\sigma$, $\eta \in [y]_\sigma$.

5. Предположим противное, то есть $\sigma(\xi, \eta) = 1$, $\sigma(\eta, \xi) = 1$. Тогда $\eta \in U_\sigma(\xi)$, $\xi \in U_\sigma(\eta)$ и $U_\sigma(\eta) \subseteq U_\sigma(\xi) \subseteq U_\sigma(\eta)$, значит, $\xi \sim \eta$, что противоречит условию $[\xi]_\sigma = [x]_\sigma \neq [y]_\sigma = [\eta]_\sigma$. $\square$

3. Граф рефлексивно-транзитивных отношений

Предложение 3. *Пусть σ и τ — смежные отношения, определенные на множестве X, то есть $\sigma \xleftrightarrow{Y \times Z} \tau$. Включение $\sigma \in V(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\tau \in V(X)$.*

Доказательство. В силу симметрии утверждения достаточно показать импликацию $\sigma \in V(X) \Longrightarrow \tau \in V(X)$. Пусть $\sigma \in V(X)$. Поскольку σ и τ — смежные отношения, то $\tau(x, x) = \sigma(x, x) = 1$ для всех $x \in X$, что доказывает рефлексивность отношения τ.

Транзитивность. Пусть $x, y, z \in X$ таковы, что $\tau(x, y) = \tau(y, z) = 1$, и предположим сначала, что $y \in Y$. Поскольку $\tau(\xi, y) = 0$ для всех $\xi \in Z$, то $x \in Y$. Если $z \in Y$, то $\sigma(x, y) = \tau(x, y) = 1$ и $\sigma(y, z) = \tau(y, z) = 1$, а так как $\sigma \in V(X)$, то $\sigma(x, z) = 1$, поэтому $\tau(x, z) = 1$. Если же окажется, что $z \in Z$, то $\sigma(x, y) = \tau(x, y) = 1$ и $\sigma(z, y) = 1 - \tau(y, z) = 0$; поскольку $\sigma \in V(X)$, то $\sigma(z, x) = \sigma(z, x)\,\sigma(x, y) \leqslant \sigma(z, y) = 0$, значит, $\sigma(z, x) = 0$, поэтому $\tau(x, z) = 1$.

Полагаем теперь, что $y \in Z$. Поскольку $\tau(y, \eta) = 0$ для всех $\eta \in Y$, то $z \in Z$. Если $x \in Z$, то $\sigma(x, y) = \tau(x, y) = 1$ и $\sigma(y, z) = \tau(y, z) = 1$, а так как $\sigma \in V(X)$, то $\sigma(x, z) = 1$, поэтому $\tau(x, z) = 1$. Если же $x \in Y$, то $\sigma(y, z) = \tau(y, z) = 1$ и $\sigma(y, x) = 1 - \tau(x, y) = 0$, а поскольку $\sigma \in V(X)$, то $\sigma(z, x) = \sigma(y, z)\,\sigma(z, x) \leqslant \sigma(y, x) = 0$, значит, $\sigma(z, x) = 0$, поэтому $\tau(x, z) = 1$.

Итак, во всех случаях имеет место равенство $\tau(x, z) = 1$. $\square$

Таким образом, множество X порождает пару $\langle V(X), E(X) \rangle$, где $V(X)$ — это множество вершин, состоящее из всех рефлексивно-транзитивных отношений множества X, а $E(X)$ — множество ребер, состоящее из неупорядоченных пар различных смежных рефлексивно-транзитивных отношений множества X. Пару $G(X) \doteq \langle V(X), E(X) \rangle$ будем называть (неориентированным) графом рефлексивно-транзитивных отношений множества X.

Определение 2. Будем говорить, что рефлексивно-транзитивные отношения σ и τ принадлежат одной *компоненте связности* графа $G(X)$, если существует конечная последовательность рефлексивно-транзитивных отношений $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m = \tau$, в которой отношения σ_{k-1} и σ_k смежны при всех $k = 2, \ldots, m$. Через $G_\sigma(X)$ будем обозначать ту компоненту связности графа $G(X)$, которая содержит данное рефлексивно-транзитивное отношение σ.

4. Особенности строения графа рефлексивно-транзитивных отношений. Пусть $\sigma \in V(X)$. Через $[X]_\sigma$ обозначим совокупность всех классов эквивалентности множества X, то есть $[X]_\sigma = \{[x]_\sigma\}_{x \in X} = \{\overline{x}\}_{x \in X}$. В силу пункта 4 предложения 2 определена характеристическая функция $\overline{\sigma}\colon [X]_\sigma^2 \to B$ такая, что

$$\overline{\sigma}(\overline{x}, \overline{y}) \doteq \sigma(\xi, \eta), \text{ где } (\xi, \eta) \text{ — произвольная пара из прямого произведения } \overline{x} \times \overline{y}.$$

Очевидно,

$$\overline{\sigma}(\overline{x}, \overline{x}) = \sigma(x, x) = 1 \text{ для всех } \overline{x} \in [X]_\sigma;$$

$$\overline{\sigma}(\overline{x}, \overline{y})\,\overline{\sigma}(\overline{y}, \overline{z}) = \sigma(x, y)\,\sigma(y, z) \leqslant \sigma(x, z) = \overline{\sigma}(\overline{x}, \overline{z}) \text{ для всех } \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in [X]_\sigma;$$

$$\overline{\sigma}(\overline{x}, \overline{y})\,\overline{\sigma}(\overline{y}, \overline{x}) = \sigma(x, y)\,\sigma(y, x) = \delta_{\overline{x}\,\overline{y}} \text{ для всех } \overline{x}, \overline{y} \in [X]_\sigma \text{ (где } \delta_{\overline{x}\,\overline{y}} \text{ — символ Кронекера).}$$

Значит, σ порождает на множестве $[X]_\sigma$ частичный порядок $\overline{\sigma}$ (см. аксиомы (1) в [1]). Следовательно, в соответствии с [1] σ порождает граф $G_0([X]_\sigma) \doteq \langle V_0([X]_\sigma), E([X]_\sigma) \rangle$, где $V_0([X]_\sigma)$ — это множество частичных порядков, определенных на множестве $[X]_\sigma$, а $E([X]_\sigma)$ — множество ребер, состоящее из неупорядоченных пар различных смежных частичных порядков множества $[X]_\sigma$. Таким образом, $\overline{\sigma} \in V_0([X]_\sigma)$ и определена компонента связности графа $G_0([X]_\sigma)$, содержащая частичный порядок $\overline{\sigma}$ (обозначим ее $G_0^{\overline{\sigma}}([X]_\sigma)$).

Пример 1. Пусть $X = \{1,2,3\}$, $\sigma = \left[\begin{smallmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&1\end{smallmatrix}\right]$. Тогда $G_\sigma(X) = \left\langle \begin{smallmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&1\end{smallmatrix} — \begin{smallmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix} — \begin{smallmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&1&1\end{smallmatrix} \right\rangle$,

$$[X]_\sigma = \{\,\overline{1},\overline{3}\,\} = \{\,\{1,2\},\{3\}\,\}, \quad \overline{\sigma} = \left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right], \quad G_0([X]_\sigma) = G_0^{\overline{\sigma}}([X]_\sigma) = \left\langle \begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix} — \begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix} — \begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix} \right\rangle.$$

Будем говорить, что отношения $\sigma,\tau \in V(X)$ являются рефлексивно-транзитивными отношениями *одного и того же типа*, если $[X]_\sigma = [X]_\tau$.

Предложение 4. *Если σ и τ — смежные рефлексивно-транзитивные отношения, определенные на множестве X, то $[X]_\sigma = [X]_\tau$ (то есть σ и τ имеют один и тот же тип).*

Доказательство. В силу смежности отношений σ и τ существует дизъюнктное объединение $Y \cup Z = X$ такое, что $\sigma \xleftrightarrow{Y\times Z} \tau$. Пусть $x,y \in X$. В силу симметрии утверждения достаточно показать импликацию $x \overset{\sigma}{\sim} y \Longrightarrow x \overset{\tau}{\sim} y$, или $[x]_\sigma = [y]_\sigma \Longrightarrow [x]_\tau = [y]_\tau$.

Пусть $[x]_\sigma = [y]_\sigma$, и предположим, что $[x]_\tau \neq [y]_\tau$. Тогда в соответствии с пунктом 5 предложения 2 имеет место равенство $\tau(x,y)\,\tau(y,x) = 0$. С другой стороны, в силу пункта 3 этого же предложения справедливы равенства $\sigma(x,y) = \sigma(y,x) = 1$, следовательно, $(x,y) \notin Y \times Z$ и $(y,x) \notin Y \times Z$. Значит, $(x,y),(y,x) \in Y^2 \cup Z^2$, поэтому $\tau(x,y) = \sigma(x,y) = 1$, $\tau(y,x) = \sigma(y,x) = 1$. Полученное противоречие доказывает утверждение. $\square$

Замечание 2. В процессе доказательства мы показали, в частности, что если $\sigma \xleftrightarrow{Y\times Z} \tau$, то для любого $x \in X = Y \cup Z$ имеет место альтернатива: *либо* $\overline{x} \subseteq Y$, *либо* $\overline{x} \subseteq Z$. Другими словами, множество $[X] \doteq [X]_\sigma = [X]_\tau$ представимо в виде дизъюнктного объединения

$$[X] = [Y] \cup [Z], \text{ где } [Y] \doteq \{\,\overline{x} \in [X]\colon \overline{x} \subseteq Y\,\}, \quad [Z] \doteq \{\,\overline{x} \in [X]\colon \overline{x} \subseteq Z\,\}. \tag{3}$$

Замечание 3. В итоге мы установили, что всякое отношение $\sigma \in V(X)$ порождает компоненту связности $G_\sigma(X)$ графа $G(X)$, совокупность $[X]_\sigma$ классов эквивалентности, частичный порядок $\overline{\sigma} \in V_0([X]_\sigma)$, граф $G_0([X]_\sigma)$ и его компоненту связности $G_0^{\overline{\sigma}}([X]_\sigma)$. Кроме того, если $\tau \in G_\sigma(X)$, то $G_\tau(X) = G_\sigma(X)$ и $[X]_\tau = [X]_\sigma$, а в приводимом ниже предложении 5 доказано равенство $G_0^{\overline{\tau}}([X]_\tau) = G_0^{\overline{\sigma}}([X]_\sigma)$.

Предложение 5. *Пусть рефлексивно-транзитивные отношения σ и τ определены на множестве X, а $\overline{\sigma}$ и $\overline{\tau}$ — это порожденные ими частичные порядки, определенные на множествах $[X]_\sigma$ и $[X]_\tau$ соответственно. Отношения σ и τ смежны тогда и только тогда, когда смежны отношения $\overline{\sigma}$ и $\overline{\tau}$.*

Доказательство. Так как $\sigma,\tau \in V(X)$, то $\overline{\sigma} \in G_0^{\overline{\sigma}}([X]_\sigma)$, $\overline{\tau} \in G_0^{\overline{\tau}}([X]_\tau)$.

Предположим, что σ и τ смежны, тогда существует дизъюнктное объединение $Y \cup Z = X$ такое, что $\sigma \xleftrightarrow{Y\times Z} \tau$. В силу предложения 4 имеем $[X]_\sigma = [X]_\tau$, а в силу (3) справедливо $[X] \doteq [X]_\sigma = [X]_\tau = [Y] \cup [Z]$. Из определения 1 следует, что

$$\overline{\sigma}\,(\overline{x},\overline{y}) = \sigma(x,y) = 0 \text{ для всех } (\overline{x},\overline{y}) \in [Y] \times [Z],$$

$$\overline{\tau}\,(\overline{x},\overline{y}) = \tau(x,y) = 1 - \sigma(y,x) = 1 - \overline{\sigma}\,(\overline{y},\overline{x}) \text{ для всех } (\overline{x},\overline{y}) \in [Y] \times [Z],$$

$$\overline{\tau}\,(\overline{x},\overline{y}) = \tau(x,y) = 0 \text{ для всех } (\overline{x},\overline{y}) \in [Z] \times [Y],$$

$$\overline{\tau}\,(\overline{x},\overline{y}) = \tau(x,y) = \sigma(x,y) = \overline{\sigma}\,(\overline{x},\overline{y}) \text{ для всех } (\overline{x},\overline{y}) \in [Y]^2 \cup [Z]^2.$$

Следовательно, $\overline{\sigma} \xleftrightarrow{[Y]\times[Z]} \overline{\tau}$, то есть частичные порядки $\overline{\sigma}$ и $\overline{\tau}$ смежны.

Обратно: если $\overline{\sigma}$ и $\overline{\tau}$ смежны, то $G_0^{\overline{\sigma}}([X]_\sigma) = G_0^{\overline{\tau}}([X]_\tau)$ и, в частности, $[X]_\sigma = [X]_\tau$. Пусть $[X] \doteq [X]_\sigma = [X]_\tau$. В силу смежности отношений $\overline{\sigma}$ и $\overline{\tau}$ существует дизъюнктное объединение $[Y] \cup [Z] = [X]$ такое, что $\overline{\sigma} \xleftrightarrow{[Y]\times[Z]} \overline{\tau}$. Из определения 1 следует, что если $Y \doteq \{\,x \in X\colon \overline{x} \in [Y]\,\}$ и $Z \doteq \{\,x \in X\colon \overline{x} \in [Z]\,\}$, то

$$\sigma(x,y) = \overline{\sigma}\,(\overline{x},\overline{y}) = 0 \text{ для всех } (x,y) \in Y \times Z,$$

$$\tau(x,y) = \overline{\tau}\,(\overline{x},\overline{y}) = 1 - \overline{\sigma}\,(\overline{y},\overline{x}) = 1 - \sigma(y,x) \ \text{ для всех } \ (x,y) \in Y \times Z,$$

$$\tau(x,y) = \overline{\tau}\,(\overline{x},\overline{y}) = 0 \ \text{ для всех } \ (x,y) \in Z \times Y,$$

$$\tau(x,y) = \overline{\tau}\,(\overline{x},\overline{y}) = \overline{\sigma}\,(\overline{x},\overline{y}) = \sigma(x,y) \ \text{ для всех } \ (x,y) \in Y^2 \cup Z^2.$$

Следовательно, $\sigma \xleftrightarrow{Y\times Z} \tau$, то есть отношения σ и τ смежны. □

Предложение 6. *Пусть $\sigma \in V(X)$. Связные графы $G_\sigma(X)$ и $G_0^{\overline{\sigma}}([X]_\sigma)$ изоморфны.*

Действительно, в силу предложения 5 отображение $G_\sigma(X) \ni \tau \to \overline{\tau} \in G_0^{\overline{\sigma}}([X]_\sigma)$ является изоморфизмом алгебраических систем $G_\sigma(X)$ и $G_0^{\overline{\sigma}}([X]_\sigma)$.

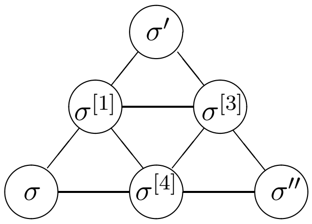
Предложение 7. *Пусть $\sigma \in V(X)$ и $x \in X$. Существует единственное $\tau \in G_\sigma(X)$ такое, что $\tau(x,y) = \tau(y,x) = \delta_{\overline{x}\,\overline{y}}$ для всех $y \in X$. (Будем обозначать это рефлексивно-транзитивное отношение через $\sigma^{[x]}$, то есть $\tau = \sigma^{[x]}$.)*

Доказательство. Графы $G_\sigma(X)$ и $G_0^{\overline{\sigma}}([X]_\sigma)$ изоморфны, а в силу следствия 1 [1] существует единственное $\overline{\tau} \in G_0^{\overline{\sigma}}([X]_\sigma)$ такое, что $\overline{\tau}\,(\overline{x},\overline{y}) = \overline{\tau}\,(\overline{y},\overline{x}) = \delta_{\overline{x}\,\overline{y}}$ для всех $\overline{y} \in [X]_\sigma$. Через τ обозначим прообраз отношения $\overline{\tau}$ при изоморфизме графов $G_\sigma(X) \to G_0^{\overline{\sigma}}([X]_\sigma)$. Тогда $\tau \in G_\sigma(X)$, $\tau(x,y) = \overline{\tau}\,(\overline{x},\overline{y}) = \delta_{\overline{x}\,\overline{y}}$ и $\tau(y,x) = \overline{\tau}\,(\overline{y},\overline{x}) = \delta_{\overline{y}\,\overline{x}}$ для всех $y \in X$. □

Таким образом, при фиксированном $\sigma \in V(X)$ определено отображение $X \to G_\sigma(X)$, сопоставляющее элементу $x \in X$ рефлексивно-транзитивное отношение $\sigma^{[x]}$ $\big($очевидно, если $x \sim y$, то $\sigma^{[x]} = \sigma^{[y]}$, но может оказаться, что $\sigma^{[x]} = \sigma^{[y]}$ и при $[x]_\sigma \neq [y]_\sigma\big)$.

Пример 2. В примере 1 графы $G_\sigma(X)$ и $G_0^{\overline{\sigma}}([X]_\sigma)$ изоморфны и $\sigma^{[1]} = \sigma^{[2]} = \sigma^{[3]} = \begin{bmatrix} 1&1&0 \\ 1&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix}$. Если $X = \{\,1,2,3,4\,\}$, $\sigma = \begin{bmatrix} 1&1&1&1 \\ 1&1&1&1 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$, то $\sigma^{[1]} = \sigma^{[2]} = \begin{bmatrix} 1&1&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$, $\sigma^{[3]} = \begin{bmatrix} 1&1&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 1&1&0&1 \end{bmatrix}$, $\sigma^{[4]} = \begin{bmatrix} 1&1&1&0 \\ 1&1&1&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$,

$G_\sigma(X)$:



$$\sigma' = \begin{bmatrix} 1&1&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 1&1&1&1 \\ 1&1&0&1 \end{bmatrix}, \ \ \sigma'' = \begin{bmatrix} 1&1&1&0 \\ 1&1&1&0 \\ 0&0&1&0 \\ 1&1&1&1 \end{bmatrix}.$$

5. Биекция между конечными рефлексивно-транзитивными отношениями и конечными топологиями. Отношение $\sigma \in V(X)$ будем назвать *конечным*, если множество $[X]_\sigma$ состоит из конечного числа классов эквивалентности, то есть $\operatorname{card}[X]_\sigma < \infty$. Совокупность всех таких отношений обозначим через $W(X)$. Очевидно, $W(X) \subseteq V(X)$.

Зафиксируем произвольное множество X. Совокупность T его подмножеств называется *топологией* на X (мы придерживаемся определений [2, с. 84]), если: 1) $\varnothing, X \in \mathrm{T}$; 2) объединение произвольного семейства множеств, принадлежащих T, принадлежит T; 3) пересечение конечного семейства множеств, принадлежащих T, принадлежит T. Множества, принадлежащие совокупности T, называются *открытыми множествами*. Если $\operatorname{card}\mathrm{T} < \infty$, то говорят, что T является *конечной топологией*.

Далее считаем, что T — конечная топология на множестве X. Тогда для любого $x \in X$ существует наименьшее открытое множество $S_{\mathrm{T}}(x)$, содержащее точку x, где $S_{\mathrm{T}}(x)$ — это пересечение всех открытых множеств, содержащих точку x.

Предложение 8. *Пусть T — конечная топология на множестве X, $S \in \mathrm{T}$ и $x,y,z \in X$.*

1. *Если $x \in S$, то $S_{\mathrm{T}}(x) \subseteq S$. Справедливо равенство $S = \bigcup\limits_{x\in S} S_{\mathrm{T}}(x)$.*
2. *Включение $y \in S_{\mathrm{T}}(x)$ имеет место тогда и только тогда, когда $S_{\mathrm{T}}(y) \subseteq S_{\mathrm{T}}(x)$.*
3. *Если $y \in S_{\mathrm{T}}(x)$, $z \in S_{\mathrm{T}}(y)$, то $z \in S_{\mathrm{T}}(x)$.*

Доказательство. 1. Пусть $x \in S$. Так как $S_{\text{T}}(x)$ — это пересечение всех открытых множеств, содержащих точку x, то $S_{\text{T}}(x) \subseteq S$. Кроме того, $S = \bigcup\limits_{x \in S} \{x\} \subseteq \bigcup\limits_{x \in S} S_{\text{T}}(x) \subseteq S$.

2. Пусть $y \in S_{\text{T}}(x)$, тогда $S_{\text{T}}(y) \subseteq S_{\text{T}}(x)$. Обратное утверждение очевидно.

3. Так как $S_{\text{T}}(y) \subseteq S_{\text{T}}(x)$ и $S_{\text{T}}(z) \subseteq S_{\text{T}}(y)$, то $S_{\text{T}}(z) \subseteq S_{\text{T}}(x)$, поэтому $z \in S_{\text{T}}(x)$. $\square$

Зафиксируем на множестве X конечную топологию Т и построим функцию $\sigma\colon X^2 \to B$ такую, что $\sigma(x, y) = 1$, если $y \in S_{\text{T}}(x)$, а иначе $\sigma(x, y) = 0$. Покажем, что σ *является характеристической функцией для некоторого рефлексивно-транзитивного отношения.* Действительно, для любого $x \in X$ справедливо $x \in S_{\text{T}}(x)$, поэтому $\sigma(x, x) = 1$. Докажем неравенство $\sigma(x, y)\,\sigma(y, z) \leqslant \sigma(x, z)$. Если $\sigma(x, y) = 1$, $\sigma(y, z) = 1$, то $y \in S_{\text{T}}(x)$, $z \in S_{\text{T}}(y)$, следовательно, $z \in S_{\text{T}}(x)$ (см. предложение 8), значит, $\sigma(x, z) = 1$. Остальные случаи тривиальны. Таким образом, $\sigma \in V(X)$. Покажем, что *справедливо включение* $\sigma \in W(X)$. Действительно, для любого $x \in X$ справедливо равенство $S_{\text{T}}(x) = \{\, y \in X\colon \sigma(x, y) = 1 \,\}$, поэтому в силу (1)

$$U_\sigma(x) = S_{\text{T}}(x), \tag{4}$$

а так как $S_{\text{T}}(x) \in \text{T}$, то всякое множество $U_\sigma(x)$ принадлежит конечной топологии Т, значит, их количество конечно. Поскольку $[x]_\sigma = \{\, y \in X : U_\sigma(y) = U_\sigma(x) \,\}$, то количество классов эквивалентности $[x]_\sigma$ тоже конечно, следовательно, $\sigma \in W(X)$.

Итак, всякое топологическое пространство (X, T), $\operatorname{card} \text{T} < \infty$, порождает бинарное отношение $\sigma \in W(X)$. Другими словами, если $T(X)$ — это совокупность всех конечных топологий, определенных на множестве X, то определено отображение $\Phi\colon T(X) \to W(X)$, $\text{T} \to \sigma$.

Предложение 9. *Отображение* $\Phi\colon T(X) \to W(X)$ *биективно.*

Доказательство. Если $\text{T}, \text{T}' \in T(X)$, $\text{T} \neq \text{T}'$, то существует множество $S \subseteq X$ такое, что $S \in \text{T}$ и $S \notin \text{T}'$. Тогда $S = \bigcup\limits_{x \in S} S_{\text{T}}(x)$ и найдется $y \in S$ такое, что $S_{\text{T}}(y) \neq S_{\text{T}'}(y)$ $\big($предположив противное, получим противоречие $S = \bigcup\limits_{x \in S} S_{\text{T}}(x) = \bigcup\limits_{x \in S} S_{\text{T}'}(x) \in \text{T}'\big)$. Следовательно, если $\sigma = \Phi(\text{T})$, $\sigma' = \Phi(\text{T}')$, то существует $z \in X$ такое, что $\sigma(y, z) \neq \sigma'(y, z)$. Значит, $\sigma \neq \sigma'$, поэтому Φ — инъективное отображение.

Сюръективность. Зафиксируем $\sigma \in W(X)$. Через Т обозначим совокупность всех тех подмножеств множества X, каждое из которых является объединением конечного числа множеств вида (1). Другими словами, $S \in \text{T}$, если существует такое $A \subseteq X$, что $\operatorname{card} A < \infty$ и $S = \bigcup\limits_{x \in A} U_\sigma(x)$. Очевидно, $\varnothing \in \text{T}$. Так как $X = \bigcup\limits_{[x]_\sigma \subseteq X} [x]_\sigma \subseteq \bigcup\limits_{[x]_\sigma \subseteq X} U_\sigma(x) \subseteq X$, то имеет место равенство $X = \bigcup\limits_{[x]_\sigma \subseteq X} U_\sigma(x)$. Поскольку $\operatorname{card}[X]_\sigma < \infty$, то $X \in \text{T}$. Если $F, G \in \text{T}$, то, очевидно, $F \cup G \in \text{T}$. Справедлива импликация

$$F = \bigcup_{x \in A} U_\sigma(x), \quad G = \bigcup_{y \in B} U_\sigma(y) \quad \Longrightarrow \quad F \cap G = \bigcup_{x \in A,\, y \in B} \big(U_\sigma(x) \cap U_\sigma(y)\big).$$

Если $S \doteq U_\sigma(x) \cap U_\sigma(y) \neq \varnothing$, то включение $z \in S$ влечет $z \in U_\sigma(x)$, $z \in U_\sigma(y)$, следовательно, $U_\sigma(z) \subseteq U_\sigma(x)$, $U_\sigma(z) \subseteq U_\sigma(y)$, поэтому $[z]_\sigma \subseteq U_\sigma(z) \subseteq S$ и $S = \bigcup\limits_{z \in S} \{z\} \subseteq \bigcup\limits_{z \in S} U_\sigma(z) \subseteq S$. Значит, $S = \bigcup\limits_{z \in S} U_\sigma(z)$. Пусть, далее, $Q \doteq \bigcup\limits_{[z]_\sigma \subseteq S} U_\sigma(z)$. $\big($Поскольку $\operatorname{card}[X]_\sigma < \infty$, то $Q \in \text{T}$.$\big)$ Если $w \in Q$, то найдется $z \in S$ такое, что $[z]_\sigma \subseteq S$ и $w \in U_\sigma(z)$, поэтому $w \in S$ и, следовательно, $Q \subseteq S$. Если же $w \in S$, то найдется $z \in S$ такое, что $w \in U_\sigma(z)$. Выше мы доказали импликацию $z \in S \Longrightarrow [z]_\sigma \subseteq S$, значит, $w \in Q$ и, следовательно, $S \subseteq Q$. Таким образом, $S = Q \in \text{T}$, а так как $\operatorname{card} A < \infty$ и $\operatorname{card} B < \infty$, то $F \cap G \in \text{T}$. Следовательно, $\text{T} \in T(X)$.

Из определения совокупности Т следует, что $U_\sigma(x) \in \text{T}$ для всех $x \in X$, то есть $U_\sigma(x)$ — это открытые множества топологии Т. Так как $x \in U_\sigma(x)$, а $S_{\text{T}}(x)$ — это пересечение всех открытых множеств, содержащих точку x, то $S_{\text{T}}(x) \subseteq U_\sigma(x)$. С другой стороны, для множества $S_{\text{T}}(x)$

(как элемента совокупности Т) справедливо представление $S_{\mathrm{T}}(x) = \bigcup_{z \in A} U_\sigma(z)$, $\operatorname{card} A < \infty$, а так как $x \in S_{\mathrm{T}}(x)$, то найдется $z \in A$ такое, что $x \in U_\sigma(z)$, следовательно, $U_\sigma(x) \subseteq U_\sigma(z) \subseteq S_{\mathrm{T}}(x)$. Значит, $S_{\mathrm{T}}(x) = U_\sigma(x)$ для всех $x \in X$. Пусть $\sigma' \doteq \Phi(\mathrm{T})$. В силу (4) имеем $U_{\sigma'}(x) = S_{\mathrm{T}}(x)$, поэтому $U_{\sigma'}(x) = U_\sigma(x)$ для всех $x \in X$. Значит, $\sigma' = \sigma$ и $\Phi(\mathrm{T}) = \sigma$. □

6. Граф конечных топологий. Пусть $\operatorname{card} X < \infty$ (будем считать, что $X = \{1, \ldots, n\}$ — отрезок натурального ряда). Очевидно, всякая топология Т, заданная на X, конечна, то есть $\mathrm{T} \in T(X)$. Для любого $\sigma \in V(X)$ справедливо $\operatorname{card} [X]_\sigma < \infty$, поэтому $\sigma \in W(X)$. Значит, $W(X) = V(X)$ и $\operatorname{Im} \Phi = V(X)$.

В силу биекции $\Phi^{-1}\colon V(X) \to T(X)$ можно считать, что вершинами графа $\langle V(X), E(X) \rangle$ являются конечные топологии (элементы множества $T(X)$). При этом можно говорить, что топологии $\mathrm{T}, \mathrm{T}' \in T(X)$ *смежны*, если смежны отношения $\Phi(\mathrm{T}), \Phi(\mathrm{T}') \in V(X)$. Можно также говорить, что $\langle T(X), E(X) \rangle$ — это *граф конечных топологий*.

Пример 3. В примере 2 топология $\Phi^{-1}(\sigma) = \{ \varnothing, \{1,2,3,4\}, \{3,4\}, \{4\} \}$ смежна с топологиями

$$\Phi^{-1}(\sigma^{[1]}) = \{ \varnothing, \{1,2\}, \{3,4\}, \{4\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\} \},$$
$$\Phi^{-1}(\sigma^{[4]}) = \{ \varnothing, \{1,2,3\}, \{3\}, \{4\}, \{3,4\}, \{1,2,3,4\} \},$$

которые, в свою очередь, тоже смежны.

Семейство $\{ X_1, \ldots, X_m \}$, состоящее из подмножеств множества X, будем называть его *разбиением*, если $\bigcup_{k=1}^m X_k = X$ и $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$. (Очевидно, $m \leqslant n$.) Совокупность всех разбиений множества X обозначим через $\mathcal{P}(X)$, а через $\mathcal{P}_m(X)$ обозначим семейство всех тех разбиений, которые имеют ровно m компонент. Имеет место равенство $\operatorname{card} \mathcal{P}_m(X) = S(n,m)$, где $S(n,m)$ — числа Стирлинга 2-го рода (см., например, [3, с. 102]). Заметим еще, что в [3, с. 121] приведена явная формула

$$S(n,m) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^n.$$

Очевидно, для любого $\sigma \in V(X)$ семейство $[X]_\sigma$ является разбиением множества X.

Через $V_0(X)$ обозначим совокупность всех частичных порядков, определенных на множестве X. Существует взаимно однозначное соответствие между множеством $V_0(X)$ и множеством всех помеченных транзитивных графов, определенных на X (см., например, [4, с. 28]); в свою очередь, существует взаимно однозначное соответствие между этим множеством и множеством всех помеченных T_0-топологий, определенных на X (см., например, [5, с. 256]). Обозначим через $T_0(n)$ число таких топологий. Полагаем $T_0(0) = 1$.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $G(X) \doteq \langle V(X), E(X) \rangle$ — граф рефлексивно-транзитивных отношений, определенных на множестве $X \doteq \{1, \ldots, n\}$. Тогда*

$$\operatorname{card} V(X) = \sum_{m=1}^{n} S(n,m)\, T_0(m),$$

а если $[\,G(X)\,]$ — это совокупность связных компонент графа $G(X)$, то

$$\operatorname{card} [\,G(X)\,] = \sum_{m=1}^{n} S(n,m)\, T_0(m-1).$$

Доказательство. Первая формула следует из равенств $\operatorname{card} V(X) = \operatorname{card} T(X)$ и $\operatorname{card} T(X) = \sum_{m=1}^{n} S(n,m)\, T_0(m)$ (см., например, [6–8]).

В силу предложения 4 все вершины связной компоненты $G_\sigma(X)$ графа $G(X)$ имеют один и тот же тип $[X]_\sigma$, поэтому для любого $\{ X_1, \ldots, X_m \} \in \mathcal{P}(X)$ определено семейство связных графов $G(X_1, \ldots, X_m) \doteq \{ G_\sigma(X)\colon [X]_\sigma = \{ X_1, \ldots, X_m \} \}$.

Очевидно,

$$[\,G(X)\,] = \bigcup_{\{X_1,\ldots,X_m\}\in\mathcal{P}(X)} G(X_1,\ldots,X_m),$$

$$\operatorname{card}[\,G(X)\,] = \sum_{\{X_1,\ldots,X_m\}\in\mathcal{P}(X)} \operatorname{card} G(X_1,\ldots,X_m) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\{X_1,\ldots,X_m\}\in\mathcal{P}_m(X)} \operatorname{card} G(X_1,\ldots,X_m).$$

Зафиксируем разбиение $P \doteq \{X_1,\ldots,X_m\}$. Очевидно, $P\in\mathcal{P}_m(X)$. Кроме того, P порождает семейство $G(X_1,\ldots,X_m)$ и граф $G_0(P)$, вершинами которого являются частичные порядки, определенные на множестве P. Через $[\,G_0(P)\,]$ обозначим совокупность связных компонент графа $G_0(P)$. В силу теоремы 1 [1] имеет место равенство $\operatorname{card}[\,G_0(P)\,] = T_0(m-1)$.

Зафиксируем компоненту $G_\sigma(X)\in G(X_1,\ldots,X_m)$, и пусть $\sigma'\in V(X)$ — ее представитель (без ограничения общности можно считать, что $\sigma'=\sigma$). Очевидно, $[X]_\sigma = P$. В силу замечания 3 отношение σ порождает частичный порядок $\overline{\sigma}\in V_0([X]_\sigma) = V_0(P)$ и связную компоненту $G_0^{\overline{\sigma}}([X]_\sigma) = G_0^{\overline{\sigma}}(P)$ графа $G_0([X]_\sigma) = G_0(P)$. Значит, определено отображение $\varphi\colon G_\sigma(X)\to G_0^{\overline{\sigma}}(P)$, действующее из $G(X_1,\ldots,X_m)$ в $[\,G_0(P)\,]$.

Инъективность φ. Допустим, что $G_0^{\overline{\sigma}}(P) = G_0^{\overline{\tau}}(P)$ для некоторых $\sigma,\tau\in V(X)$. Следовательно, $\overline{\tau}\in G_0^{\overline{\sigma}}(P)$, и без ограничения общности можно считать, что $\overline{\sigma}$ и $\overline{\tau}$ — смежные частичные порядки. В силу предложения 5 отношения σ и τ тоже смежны, поэтому $G_\sigma(X) = G_\tau(X)$.

Сюръективность φ. Пусть $G_0^{\overline{\tau}}(P)\in[\,G_0(P)\,]$ для некоторого частичного порядка $\overline{\tau}\in V_0(P)$. Он порождает функцию $\sigma\colon X^2\to B$ такую, что $\sigma(x,y)\doteq\overline{\tau}\,(X_i,X_j)$ для всех $(x,y)\in X_i\times X_j$. Если $(x,y,z)\in X_i\times X_j\times X_k$, то

$$\sigma(x,x) = \overline{\tau}\,(X_i,X_i) = 1,$$

$$\sigma(x,y)\,\sigma(y,z) = \overline{\tau}\,(X_i,X_j)\,\overline{\tau}\,(X_j,X_k) \leqslant \overline{\tau}\,(X_i,X_k) = \sigma(x,z),$$

следовательно, $\sigma\in V(X)$ и определено разбиение $[X]_\sigma$. Зафиксируем индекс i и $x\in X_i$.

Для всех $y\in X_i$, $\eta\in X$ справедливо $\sigma(x,\eta) = \overline{\tau}\,(X_i,X_j) = \sigma(y,\eta)$ (где j таково, что $\eta\in X_j$). Следовательно, $U_\sigma(x) = U_\sigma(y)$, $x\sim y$, $y\in[x]_\sigma$. Значит, $X_i\subseteq[x]_\sigma$. Пусть, далее, $z\in[x]_\sigma$, а j таково, что $z\in X_j$. Так как $x\sim z$, то $\sigma(x,\eta) = \sigma(z,\eta)$ для всех $\eta\in X$. Следовательно,

1) если $\eta\in X_j$, то $\overline{\tau}\,(X_i,X_j) = \sigma(x,\eta) = \sigma(z,\eta) = \overline{\tau}\,(X_j,X_j) = 1$;

2) если $\eta\in X_i$, то $\overline{\tau}\,(X_j,X_i) = \sigma(z,\eta) = \sigma(x,\eta) = \overline{\tau}\,(X_i,X_i) = 1$;

поэтому $\overline{\tau}\,(X_i,X_j)\,\overline{\tau}\,(X_j,X_i) = 1$, значит, $i=j$ (поскольку $\overline{\tau}$ — частичный порядок) и $z\in X_i$. Следовательно, $[x]_\sigma\subseteq X_i$, поэтому $[x]_\sigma = X_i$ и справедлива импликация $x\in X_i \Longrightarrow [x]_\sigma = X_i$. Обратная импликация очевидна. Таким образом, $[X]_\sigma = P$ и $G_\sigma(X)\in G(X_1,\ldots,X_m)$. Так как $\big(\xi\in X_i \Longleftrightarrow \overline{\xi} = X_i\big)$, то $\overline{\sigma}\,(\overline{x},\overline{y}) = \sigma(x,y) = \overline{\tau}\,(X_i,X_j) = \overline{\tau}\,(\overline{x},\overline{y})$, поэтому $\overline{\sigma} = \overline{\tau}$. Следовательно, $\varphi\big(G_\sigma(X)\big) = G_0^{\overline{\sigma}}(P) = G_0^{\overline{\tau}}(P)$, то есть $\operatorname{Im}\varphi = [\,G_0(P)\,]$. Итак, φ — биекция, поэтому множества $G(X_1,\ldots,X_m)$ и $[\,G_0(P)\,]$ равномощны. Значит, $\operatorname{card} G(X_1,\ldots,X_m) = T_0(m-1)$ и

$$\operatorname{card}[\,G(X)\,] = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\{X_1,\ldots,X_m\}\in\mathcal{P}_m(X)} T_0(m-1) = \sum_{m=1}^{n} \operatorname{card}\mathcal{P}_m(X)\,T_0(m-1) = \sum_{m=1}^{n} S(n,m)\,T_0(m-1).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аль Джабри Х.Ш., Родионов В.И. Граф частичных порядков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 3–12.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.
3. Айгнер М. Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982. 558 с.
4. Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1980. 336 с.
5. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. М.: Мир, 1977. 324 с.
6. Comtet L. Recouvrements, bases de filtre et topologies d'un ensemble fini // C. R. Acad. Sci. 1966. Vol. AB262. P. A1091–A1094.

7. Evans J.W., Harary F., Lynn M.S. On the computer enumeration of finite topologies // Comm. ACM. 1967. Vol. 10. P. 295–297.
8. Gupta H. Number of topologies on a finite set // Res. Bull. Panjab. Univ. (N.S.). 1968. Vol. 19. P. 231–241.

Поступила в редакцию 12.11.2014

Аль Джабри Халид Шиа Хайралла, аспирант, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1; преподаватель, Аль-Кадисия университет, Ирак, г. Аль-Дивания, ул. Вавилония, 29.
E-mail: khalidaljabrimath@yahoo.com

Kh. Sh. Al' Dzhabri

The graph of reflexive-transitive relations and the graph of finite topologies

Keywords: graph, reflexive-transitive relation, finite topology.

MSC: 05C30

Any binary relation $\sigma \subseteq X^2$ (where X is an arbitrary set) generates on the set X^2 a characteristic function: if $(x, y) \in \sigma$, then $\sigma(x, y) = 1$, otherwise $\sigma(x, y) = 0$. In terms of characteristic functions we introduce on the set of all binary relations of the set X the concept of a binary reflexive relation of adjacency and determine an algebraic system consisting of all binary relations of the set and of all unordered pairs of various adjacent binary relations. If X is a finite set then this algebraic system is a graph («the graph of graphs»).

It is shown that if σ and τ are adjacent relations then σ is a reflexive-transitive relation if and only if τ is a reflexive-transitive relation. Several structure features of the graph $G(X)$ of reflexive-transitive relations are investigated. In particular, if X consists of n elements, and $T_0(n)$ is the number of labeled T_0-topologies defined on the set X, then the number of connected components is equal to $\sum_{m=1}^{n} S(n,m)\, T_0(m-1)$, where $S(n, m)$ are Stirling numbers of second kind. (It is well known that the number of vertices in a graph $G(X)$ is equal to $\sum_{m=1}^{n} S(n,m)\, T_0(m)$.)

REFERENCES

1. Al' Dzhabri Kh.Sh., Rodionov V.I. The graph of partial orders, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 4, pp. 3–12 (in Russian).
2. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of theory of functions and functional analysis), Moscow: Nauka, 1981, 544 p.
3. Aigner M. *Combinatorial theory*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1979, 492 p. Translated under the title *Kombinatornaya teoriya*, Moscow: Mir, 1982, 558 p.
4. Ore O. *Theory of graphs*, Providence: Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1962, vol. 18, 270 p. Translated under the title *Teoriya grafov*, Moscow: Nauka, 1980, 336 p.
5. Harary F., Palmer E. *Graphical enumeration*, New York–London: Academic Press, 1973, 272 p. Translated under the title *Perechislenie grafov*, Moscow: Mir, 1977, 324 p.
6. Comtet L. Recouvrements, bases de filtre et topologies d'un ensemble fini, *C. R. Acad. Sci.*, 1966, vol. AB262, pp. A1091–A1094 (in French).
7. Evans J.W., Harary F., Lynn M.S. On the computer enumeration of finite topologies, *Comm. ACM*, 1967, vol. 10, pp. 295–297.
8. Gupta H. Number of topologies on a finite set, *Res. Bull. Panjab. Univ.* (*N.S.*), 1968, vol. 19, pp. 231–241.

Received 12.11.2014

Al' Dzhabri Khalid Shea Khairalla, Post-graduate student, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia; Lecturer, University of Al-Qadisiyah, ul. Babilon, 29, Al Diwaniyah, Iraq.
E-mail: khalidaljabrimath@yahoo.com