УДК 514.3

© ***А. С. Шарипов***

О ГРУППЕ ИЗОМЕТРИЙ СЛОЕНОГО МНОГООБРАЗИЯ [1]

Пусть M — гладкое многообразие с римановой метрикой g. Вопрос о группе изометрий риманова многообразия (M, g) является основной классической задачей римановой геометрии. Обозначим через G группу всех изометрий риманова многообразия (M, g) размерности n с римановой метрикой g. Структура группы G зависит от фиксированной римановой метрики g. Известно, что для «плохих» римановых метрик группа G может быть очень бедной. Известны примеры, когда группа G состоит из одного элемента. В общем случае известно, что группа G с компактно-открытой топологий является группой Ли.

В данной статье обсуждается вопрос о существовании изометрических отображений слоеного многообразия (M, F). Обозначим через G_F группу всех изометрий слоеного риманова многообразия (M, F). Структура группы G_F зависит не только от римановой метрики g, но и от данной слоеной структуры. Изучение структуры группы G_F слоеного многообразия (M, F) является новой и интересной задачей. Впервые эта задача рассмотрена в работе А. Я. Нарманова и автора, где было показано, что группа G_F с компактно-открытой топологией является топологической группой.

В работе доказывается, что группа изометрий слоеного евклидова пространства является подгруппой группы изометрий евклидова пространства (то есть $G_F \subset G$), если слоение порождено поверхностями уровня гладкой функции, которая не является метрической.

Ключовие слова: риманово многообразие, слоение, изометрическое отображение, слоеное многообразие, группа изометрий, метрическая функция.

Пусть M, N — гладкие многообразия размерности n, на которых заданы k-мерные слоения F_1, F_2 соответственно. Если для некоторого диффеоморфизма $\phi\colon M \to N$ образ $\phi(L_\alpha)$ каждого слоя L_α слоения F_1 является слоем слоения F_2, то отображение ϕ называется диффеоморфизмом слоеных многообразий (M, F_1), (N, F_2) и записывается в виде $\phi\colon (M, F_1) \to (N, F_2)$. Если $M = N$ и $F_1 = F_2$, то ϕ называется диффеоморфизмом, сохраняющим слоение F (диффеоморфизмом слоеного многообразия (M, F)). Диффеоморфизмы, сохраняющие слоение, изучены в работах [1, 2].

Пусть M — гладкое риманово многообразие размерности n с римановой метрикой g, на котором задано слоение F размерности k. Обозначим через $L(p)$ слой слоения F, проходящий через точку p, через $F(p)$ — касательное пространство слоя $L(p)$ в точке p, а через $H(p)$ — ортогональное дополнение $F(p)$ в T_pM. Возникают два подрасслоения $TF = \{F(p)\colon\ p \in M\}$, $H = \{H(p)\colon\ p \in M\}$ касательного расслоения TM такие, что $TM = TF \oplus H$. Каждое векторное поле X разложимо в виде $X = X^h \oplus X^v$, где $X^h \in H$, $X^v \in TF$. Векторное поле X называется горизонтальным (вертикальным), если составляющий $X^v = 0$ $(X^h = 0)$.

Сужение римановой метрики g на $F(p)$ для всех точек $p \in L_0$ определяет риманову метрику на слое L_0. Таким образом, каждое слоение F является римановым многообразием относительно индуцированной метрики.

Определение 1. Диффеоморфизм $\phi\colon (M, F) \to (M, F)$ называется изометрией слоеного многообразия (M, F), если сужение отображения ϕ на каждый слой слоения F является изометрическим отображением, то есть для каждого слоя L_α отображение $\phi\colon L_\alpha \to f(L_\alpha)$ является изометрией между многообразиями $L_\alpha, \phi(L_\alpha)$.

Напомним, что дифференцируемое отображение $f\colon M \to B$ максимального ранга, где M, B — гладкие многообразия размерности n, m соответственно, $n > m$, называется субмер-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке МВССО Республики Узбекистан (грант по фундаментальным наукам ОТФ–01–04 «Геометрия и топология слоеных многообразий»).

сией. По теореме о ранге дифференцируемой функции для каждой точки $p \in B$ полный прообраз $f^{-1}(p)$ является подмногообразием размерности $k = n - m$. Таким образом, субмерсия $f\colon M \to B$ порождает слоение F размерности $k = n - m$ на многообразии M, слоями которого являются подмногообразия $L_p = f^{-1}(p)$, $p \in B$. Изучению геометрии и топологии слоений, порожденных субмерсиями, посвящены многочисленные исследования [3,4], в частности, в работе [5] получены фундаментальные уравнения субмерсии.

В случае когда слоение порождено субмерсий $f\colon M \to B$, подпространство T_qF совпадает с подпространством $\operatorname{Ker} df_q$ касательного пространства T_qM, где df_q — дифференциал отображения f в точке q.

Перейдем к изучению геометрии субмерсий, когда многообразие B одномерно.

Пусть $f\colon M \to R$ — дифференцируемая функция, $\operatorname{Crit} f$ — множество критических точек функции f. Тогда на многообразии $M \setminus \operatorname{Crit} f$ возникают слоение F размерности $n-1$ (или коразмерности один). Без ограничения общности предположим, что множество $\operatorname{Crit} f$ пусто.

В работе [4] изучена геометрия слоения F, когда для каждого вертикального векторного поля X выполнено условие $X(|\operatorname{grad} f|^2) = 0$, то есть когда длина градиентного векторного поля постоянна на каждом слое (на каждой поверхности уровня). В частности, показано, что при выполнении условия $X(|\operatorname{grad} f|^2) = 0$ слоение F является римановым.

Напомним, что слоение F называется римановым, если геодезическая, ортогональная к слою слоения F в одной точке, остается ортогональной к слоению F во всех точках [4].

Мы рассмотрим вопрос о структуре группы G_F, когда $M = R^n$ и слоение F порождено компонентами связности поверхностей уровня некоторой гладкой функции $f\colon R^n \to R$.

Изучение структуры группы G_F слоеного многообразия (M, F) является новой и интересной задачей. Впервые эта задача рассмотрена в работе [2]. В работе [2] доказывается, что группа G_F с компактно-открытой топологией является топологической группой.

Определение 2. Пусть M — гладкое многообразие размерности n. Функция $f\colon M \to R^1$ из класса $C^2\left(M, R^1\right)$, длина градиента которой постоянна на компонентах связности множеств уровня, называется метрической функцией.

Теорема 1. *Пусть F — слоение евклидова пространства R^n, порожденное поверхностями уровня функции $f\colon R^n \to R^1$, которая не является метрической функцией. Тогда группа G_F является подгруппой группы G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\phi\colon\ (R^n, F) \to (R^n, F)$ — изометрическое отображение слоеного евклидова пространства R^n, где слоение F порождено поверхностями уровня функции f.

Для значения c функции f обозначим через L_c поверхность уровня, определяемую уравнением $f = c$, через Z — единичное градиентное векторное поле функции f. Матрицу Якоби в точке $p \in R^n$ отображения $\phi\colon R^n \to R^n$ обозначим через $B(p) = \left\{b_i^j\right\}$.

Покажем, что диффеоморфизм $\phi\colon R^n \to R^n$ является движением R^n. Пусть $p_0 \in R^n$, $\phi\left(p_0\right) = q_0$. Отображение $\phi\colon R^n \to R^n$ является изометрией между поверхностями L_{c_1}, L_{c_2}, где $f\left(p_0\right) = c_1$, $f\left(q_0\right) = c_2$.

Фиксируем ортонормированный базис $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ касательного пространства $T_{p_0}L_{c_1}$ поверхности L_{c_1}, а в пространстве фиксируем ортонормированный базис $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, Z\left(p_0\right)$. Положим $Y_i = B\left(p_0\right) X_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Тогда семейство $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}$ является ортонормированным базисом касательного пространства $T_{q_0}L_{c_2}$ поверхности L_{c_2}.

Пусть $A\left(p_0\right) = \left\{a_i^j\right\}$ — матрица Якоби в точке $p_0 \in R^n$ движения $F : R^n \to R^n$, которое переводит точку p_0 в точку q_0, а ортонормированный базис $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, Z\left(p_0\right)$ в ортонормированный базис $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}, Z\left(q_0\right)$. Мы имеем равенства

$$A\left(p_0\right) X_i = Y_i, \quad A\left(p_0\right) Z\left(p_0\right) = Z\left(q_0\right). \tag{1}$$

Так как отображение $\phi\colon R^n \to R^n$ переводит касательные векторы в касательные и сужение $\phi\colon L_{c_1} \to L_{c_2}$ является изометрией, вектор $B\left(p_0\right) Z\left(p_0\right)$ параллелен вектору $Z\left(q_0\right)$, то есть существует ненулевое число $\lambda(p_0)$ такое, что имеет место $B(p_0)Z(p_0) = \lambda(p_0)Z(q_0)$. Таким образом, мы имеем систему равенств

$$B(p_0)X_i = Y_i, \quad B(p_0)Z(p_0) = \lambda(p_0)Z(q_0). \tag{2}$$

Система равенств (1) состоит из n^2 равенств. Если известны векторы $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, Z(p_0)$ и векторы $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}, Z(q_0)$, то систему (1) можно рассмотреть как систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $\left\{a_i^j\right\}$. Так как векторы $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, Z(p_0)$ линейно независимы, система (1) имеет единственное решение. Если систему (2) перепишем в виде

$$B(p_0)X_i = Y_i, \quad \frac{1}{\lambda(p_0)}B(p_0)Z(p_0) = Z(q_0), \tag{3}$$

то основной определитель системы (3) получается умножением последней строки основного определителя системы (1) на $\frac{1}{\lambda(p_0)}$. В системе (1) и системе (3) напишем равенства только для первых координат векторов правой и левой частей и получим систему уравнений для $a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^n$ и $b_1^1, b_1^2, \ldots, b_1^n$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_1^k x_i^k = y_i^1, \quad \sum_{k=1}^{n} a_1^k z^k = z^1, \quad \sum_{k=1}^{n} b_1^k x_i^k = y_i^1, \quad \sum_{k=1}^{n} \mu b_1^k z^k = z^1,$$

где $\mu = \frac{1}{\lambda}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Так как векторы $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, Z(p_0)$ — единичные базисные векторы, из этих систем мы получим, что $b_n^n = \lambda(p_0)\,a_n^n$, а остальные элементы матрицы $B(p_0) = \{b_i^j\}$ совпадают с соответствующими элементами матрицы $A(p_0) = \left\{a_i^j\right\}$.

Теперь рассмотрим другую точку $p \in R^n$ и такой ортонормированный базис $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$ касательного пространства T_pL_c поверхности L_c $(f(p) = c)$, что ортонормированный базис $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}, Z(p)$ пространства имеет такую же ориентацию, что и базис X_1, X_2, $\ldots$, X_{n-1}, $Z(p_0)$.

Положим $W_i = B(p)U_i$ для $i = 1, 2 \ldots, n-1$. Тогда семейство $W_1, W_2, \ldots, W_{n-1}$ является ортонормированным базисом касательного пространства $T_qL_{c^*}$ поверхности L_{c^*}, где $q = \phi(p)$, $f(p) = c^*$.

Пусть $A(p) = \left\{a_i^j\right\}$ — матрица Якоби в точке $p \in R^n$ движения $F\colon R^n \to R^n$, которое переводит точку p в точку q, а ортонормированный базис $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}, Z(p)$ в ортонормированный базис $W_1, W_2, \ldots, W_{n-1}, Z(q)$.

Мы имеем равенства

$$A(p)U_i = W_i, \quad A(p)Z(p) = Z(q). \tag{4}$$

Как и выше, получим систему равенств

$$B(p)U_i = W_i, \quad B(p)Z(p) = \lambda(p)Z(q). \tag{5}$$

Если касательный вектор $Z(p)$ параллелен $Z(p_0)$, то базисные векторы $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$ линейно выражаются через векторы $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$. В этом случае матрицы $A(p)$, $B(p)$ и скалярная величина $\lambda(p)$ совпадают с матрицами $A(p_0)$, $B(p_0)$ и величиной $\lambda(p_0)$ соответственно.

Предположим, что касательный вектор $Z(p)$ не параллелен $Z(p_0)$. В этом случае касательная плоскость T_pL_c не параллельна плоскости $T_{p_0}L_{c_1}$, и, следовательно, векторы $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$ не выражаются через векторы $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$. Поэтому из систем (3) и (4) получим, что $\lambda(p) = 1$.

Таким образом, возникают две возможные ситуации:

а) единичный градиентный вектор $Z(p)$ параллелен $Z(p_0)$ и $\lambda(p) \neq 1$;

б) единичный градиентный вектор $Z(p)$ не параллелен $Z(p_0)$ и $\lambda(p) = 1$.

Обозначим через G множество точек $p \in R^n$, для которых $\lambda(p) \neq 1$. Это множество является открытым в силу непрерывности функции $\lambda(p)$.

С другой стороны, множество G совпадает с множеством точек $p \in R^n$, для которых вектор $Z\,(p)$ параллелен $Z\,(p_0)$ и в силу непрерывности функции $Z\,(p)$ является замкнутым множеством. Таким образом, множество G одновременно является открытым и замкнутым множеством. Поэтому в силу связности пространства R^n множество G либо пусто, либо совпадает с R^n.

Предположим, что G совпадает с R^n. Тогда всюду вектор $Z\,(p)$ параллелен $Z\,(p_0)$ и, следовательно, градиентные линии являются параллельными прямыми.

Покажем, что в этом случае функция f является метрической функцией. Для этого положим $W = \operatorname{grad} f$. Покажем, что $|W|$ постоянна вдоль кривых, лежащих на поверхностях уровня.

Пусть γ — кривая, лежащая на поверхности уровня, параметризованная уравнениями $x_i = x_i\,(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как $f \in C^2(R^n, R^1)$, имеет место равенство $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$. Вычислим $\frac{d}{dt} f_{x_i} = \sum\limits_{j=1}^{n} f_{x_i x_j} x'_i = \sum\limits_{j=1}^{n} f_{x_j x_i} x'_j$. Из равенства $W = \operatorname{grad} f = gZ\,(p_0)$ получим, что $f_{x_i} = g a_i$, где $Z\,(p_0) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, g — гладкая функция, равная длине вектора $\operatorname{grad} f$. Таким образом, $\frac{d}{dt} f_{x_i} = \sum\limits_{j=1}^{n} f_{x_j x_i} x'_j = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x'_j \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$. Отсюда следует, что $\frac{d}{dt} \langle W, W \rangle = 2 \left\langle W, \frac{d}{dt} W \right\rangle = 0$. Таким образом, длина градиента $\operatorname{grad} f$ постоянна на каждой поверхности уровня, то есть функция f является метрической.

Это противоречие показывает, что множество G пусто и для всех $p \in R^n$ имеет место $\lambda\,(p) = 1$. Это означает, что для всех $p \in R^n$ матрица Якоби $B\,(p_0) = \left\{ b_i^j \right\}$ отображения $\phi\colon R^n \to R^n$ совпадает с ортогональной матрицей.

Таким образом, мы показали, что отображение $\phi\colon R^n \to R^n$ является изометрией евклидова пространства R^n. □

Замечание 1. Как показывают примеры, для метрических функций теорема не верна.

Замечание 2. В общем случае известно, что группа G с компактно-открытой топологий является группой Ли [6].

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \exp(A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n)$, заданную в евклидовом пространстве, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — постоянные. Поверхности уровня этой функции порождают слоение F, состоящее из параллельных плоскостей. Отображение $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$, где $\lambda \neq 0$ — константа, является диффеоморфизмом слоеного многообразия (R^n, F). Введем новую декартову систему координат $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ такую, что поверхности уровня этой функции задаются уравнениями $y_n = \text{const}$. Диффеоморфизм $\varphi\colon R^n \to R^n$, определенный формулой $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \lambda y_n)$ является изометрией слоеного многообразия (R^n, F), но не является изометрией евклидова пространства.

Пример 2. Функция

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n$$

не является метрической. Поверхности уровня порождают слоение F, состоящее из параболоидов. Изометриями этого слоения являются только параллельные переносы вида $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + \lambda)$, которые являются изометриями евклидова пространства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тамура И. Топология слоений. М.: Мир, 1979. 317 с.
2. Narmanov A., Sharipov A. On the group of foliation isometries // Methods of Functional Analysis and Topology. 2009. Vol. 15. P. 195–200.
3. Narmanov A., Kaypnazarova G. Metric functions on Riemannian manifolds // Uzbek. Math. J. 2010. № 2. P. 113–120.

4. Tondeur Ph. Foliations on Riemannian manifolds. New York: Springer-Verlag, 1988.
5. O'Neil B. The fundamental equations of a submersion // Michigan Mathematical Journal. 1966. Vol. 13. P. 459–469.
6. Myers S.B., Steenrod N. The group of isometrics of a Riemannian manifold // Ann. of Math. 1939. Vol. 40. P. 400–416.

Поступила в редакцию 05.02.2014

Шарипов Анваржон Солиевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра геометрии, Национальный университет Узбекистана, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 4.
E-mail: asharipov@inbox.ru

A. S. Sharipov
On the group of isometries of foliated manifold

Keywords: Riemannian manifold, foliation, isometric mapping, foliated manifold, the group of isometries, metric function.

Mathematical Subject Classifications: 53C12, 53C22

The question of the group of isometries of a Riemannian manifold is the main problem of the classical Riemannian geometry. Let G denote the group of isometries of a Riemannian manifold M of dimension n with a Riemannian metric g. It is known that the group G with the compact-open topology is a Lie group. This paper discusses the question of the existence of isometric maps of the foliated manifold (M, F). We denote the group of all isometries of the foliated Riemannian manifold (M, F) by G_F. Studying the structure of the group G_F of the foliated manifold (M, F) is a new and interesting problem. First, this problem is considered in the paper of A. Y. Narmanov and the author, where it was shown that the group G_F with a compact-open topology is a topological group. We consider the question of the structure of the group G_F, where $M = R^n$ and F is foliation generated by the connected components of the level surfaces of the smooth function $f \colon R^n \to R$. It is proved that the group of isometries of foliated Euclidean space is a subgroup of the isometry group of Euclidean space, if the foliation is generated by the level surfaces of a smooth function, which is not a metric.

REFERENCES

1. Tamura I. *Topology of foliations: an introduction*, American Mathematical Society, 1992, 193 p.
2. Narmanov A., Sharipov A. On the group of foliation isometries, *Methods of Functional Analysis and Topology*, 2009, vol. 15, pp. 195–200.
3. Narmanov A., Kaypnazarova G. Metric functions on Riemannian manifolds, *Uzbek. Math. J.*, 2010, no. 2, pp. 113–120.
4. Tondeur Ph. *Foliations on Riemannian manifolds*, New York: Springer-Verlag, 1988.
5. O'Neil B. The fundamental equations of a submersion, *Michigan Mathematical Journal*, 1966, vol. 13, pp. 459–469.
6. Myers S. B., Steenrod N. The group of isometrics of a Riemannian manifold, *Ann. of Math.*, 1939, vol. 40, pp. 400–416.

Received 05.02.2014

Sharipov Anvarzhon Solievich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Geometry, National University of Uzbekistan, ul. Universitetskaya, 4, Tashkent, 100174, Uzbekistan.
E-mail: asharipov@inbox.ru