УДК 519.6

© *А. Г. Ченцов*

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УЛЬТРАФИЛЬТРОВ, СВЯЗАННЫЕ С КОНСТРУКЦИЯМИ РАСШИРЕНИЙ [1]

Рассматриваются общие свойства ультрафильтров π-систем с нулем и единицей, используемые при построении расширений абстрактных задач о достижимости для получения оценок множеств притяжения в топологическом пространстве. Обсуждаются возможности использования упомянутых ультрафильтров в качестве обобщенных элементов. Среди последних выделяются допустимые по отношению к ограничениям асимптотического характера исходной задачи. Целевой оператор данной задачи при очень общих условиях продолжается до непрерывного отображения, сопоставляющего каждому ультрафильтру π-системы предел соответствующего образа. При этом основное множество притяжения (асимптотический аналог множества достижимости) оценивается снизу непрерывным образом аналогичного вспомогательного множества в пространстве ультрафильтров. В частном случае реализации пространства Стоуна (когда используемая π-система является алгеброй множеств) упомянутая оценка превращается в равенство, связывающее искомое и вспомогательное множества притяжения; для последнего указано достаточно простое представление. Обсуждается вариант применения (в оценочных целях) расширения Волмэна.

Ключевые слова: множество притяжения, топология, ультрафильтр.

Введение

Используем следующие сокращения: БФ (база фильтра), ИП (измеримое пространство), МП (множество притяжения), п/м (подмножество), ТП (топологическое пространство), у/ф (ультрафильтр).

При исследовании абстрактных задач о достижимости в топологическом пространстве, наряду с компактификациями пространства обычных решений, можно применять и более слабые в логическом отношении конструкции, связанные с использованием обобщенных элементов нужного типа в оценочных целях. Характерное построение такого рода имеет следующий вид: непрерывный образ некоторого вспомогательного МП реализуется в виде п/м основного МП. Используя эту конструкцию, мы оцениваем основное МП снизу. При условии, что вспомогательное МП конструируется в компактном ТП, упомянутая оценка вырождается в равенство.

Настоящая статья продолжает серию работ автора, связанных с использованием у/ф широко понимаемых ИП при построении вспомогательного МП. Для этих целей использовалась схема, допускающая естественные аналогии с компактификацией Стоуна–Чеха, но отличающаяся большей (потенциально) реализуемостью за счет применения «неполных» у/ф, а точнее у/ф соответствующего ИП. Наиболее понятно применение в этих целях компактов Стоуна, что отвечает случаю использования у/ф алгебры множеств. Аналогичный результат достигается при использовании у/ф ИП с полуалгеброй множеств, поскольку при этом реализуется гомеоморф компакта Стоуна, соответствующего алгебре, порожденной исходной полуалгеброй множеств. В то же время на промежуточных этапах нередко возникали построения, в которых упомянутое (широко понимаемое) ИП связывалось с применением «всего лишь» π-системы с нулем и единицей.

В настоящей работе последний случай является предметом самостоятельного рассмотрения. В качестве основного варианта измеримой структуры используется отделимая π-система

[1]Работа выполнена в рамках программ Президиума РАН (проекты 12–П–1–1019, 12–П–1–1012) и при финансовой поддержке РФФИ (проект 13–01–00304).

(с нулем и единицей). Свойство отделимости заключается в следующем: для каждого «измеримого» множества и точки, ему не принадлежащей, существует другое «измеримое» множество, содержащее эту точку и не пересекающееся с первым. Разумеется, алгебры и полуалгебры множеств являются отделимыми π-системами. Другой пример можно получить, рассматривая семейство замкнутых множеств в ТП, удовлетворяющем аксиоме T_1; в данном случае имеем топологическую версию, а точнее расширение Волмэна.

Отмеченные обстоятельства мотивируют специальное исследование конструкции, оперирующей у/ф отделимой π-системы (следует добавить к этому и то полезное обстоятельство, что тривиальные фильтры отделимой π-системы максимальны; более того, данное свойство имеет место только в классе отделимых π-систем). Правда, в столь общем случае при использовании естественной (и согласующейся с топологией пространства Стоуна в случае, когда π-система есть алгебра множеств) топологии мы, вообще говоря, не получаем компакта и в вопросах построения МП в задаче о достижимости вынуждены ограничиваться оценочными описаниями, что, впрочем, также является полезным. Тем не менее с точки зрения общей логики исследования такого рода задач специальное изучение упомянутой возможности представляется целесообразным. Оно позволяет выделить и наиболее существенные моменты для осуществления компактификаций в соответствующих частных случаях.

Заметим, что сама потребность в построении расширений возникает, в частности, в связи с неустойчивостью экстремальных задач и задач о достижимости при ослаблении ограничений. В этой связи напомним построения [1, гл. III], где были введены точные, приближенные и обобщенные решения задач управления; приближенные решения определялись в виде последовательностей обычных решений. В [2, 3] отмечалось (для задач математического программирования), что в ряде случаев решений-последовательностей может оказаться недостаточно и потребуются направленности обычных решений. По ряду причин здесь оказалось более естественным использовать фильтры и, в частности, у/ф пространства обычных решений; см. [4,5] и целый ряд других работ. В этой связи имеет смысл отметить использование в [4] компактификации Стоуна–Чеха для целей расширения абстрактной задачи о достижимости, что уже упоминалось выше наряду с замечаниями о применении «неполных» у/ф в целях получения более конструктивных построений.

Отметим, что в работах свердловской школы Н.Н. Красовского по теории управления конструкции расширений традиционно занимали важное место. В этой связи отметим оригинальный подход, предложенный Н.Н. Красовским и связанный с применением обобщенных функций в задачах импульсного управления (см. [6]), а также применение скользящих режимов в игровых задачах управления, что наряду с правилом экстремального сдвига сыграло важную роль при доказательстве фундаментальной теоремы об альтернативе Н.Н. Красовского и А.И. Субботина (см. [7]).

§ 1. Определения и обозначения общего характера

В дальнейшем используем стандартную теоретико-множественную символику, включая кванторы и пропозициональные связки. При этом def заменяет конструкцию «по определению», через $\stackrel{\triangle}{=}$ обозначаем равенство по определению; как обычно, $\exists!$ заменяет выражение «существует и единственно», $\varnothing$ — пустое множество. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Для произвольного объекта x через $\{x\}$ обозначаем синглетон, содержащий x; при этом в качестве объекта может использоваться множество и, в частности, семейство.

Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X; через $\mathrm{Fin}(X)$ обозначаем семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$. Если A и B — множества, то через B^A обозначаем множество всех отображений, действующих из A в B (то есть отображений $f : A \to B$); если к тому же $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \stackrel{\triangle}{=} \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ C; $f^1(C) \neq \varnothing$ при $C \neq \varnothing$. Для всяких множеств $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ отображения $f \in \mathbb{B}^{\mathbb{A}}$ и (непустого) семейства $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbb{A})\big)$

$$f^1[\mathfrak{A}] \triangleq \big\{f^1(A) : A \in \mathfrak{A}\big\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbb{B})\big)$$

рассматриваем как образ семейства $\mathfrak{A}$.

Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$ и $\overline{1,n} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant n\} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Полагая, что элементы $\mathbb{N}$ (натуральные числа) не являются множествами, используем для всяких множества Y и числа $n \in \mathbb{N}$ «обычное» соглашение $Y^n \triangleq Y^{\overline{1,n}}$, получая множество всех кортежей в Y «длины» n. Используем индексную форму записи отображений и, в частности, кортежей.

Специальные семейства. В пределах настоящего и двух последующих пунктов фиксируем непустое множество I, получая в виде $\mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big)$ семейство всех непустых подсемейств $\mathcal{P}(I)$ и полагая

$$\pi[I] \triangleq \big\{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big) \,|\, (\varnothing \in \mathcal{I})\,\&\,(I \in \mathcal{I})\,\&\,(A \cap B \in \mathcal{I} \ \ \forall A \in \mathcal{I} \ \ \forall B \in \mathcal{I})\big\} \tag{1.1}$$

(введено семейство всех π-систем [8, с. 14] п/м I с «нулем» и «единицей»). В виде частных случаев π-систем из семейства (1.1) имеем алгебры п/м I и топологии на I:

$$(\mathrm{alg})[I] \triangleq \{\mathcal{A} \in \pi[I] \mid I \setminus A \in \mathcal{A} \ \ \forall A \in \mathcal{A}\}, \qquad (\mathrm{top})[I] \triangleq \left\{\tau \in \pi[I] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\right\};$$

при $\mathfrak{A} \in (\mathrm{alg})[I]$ (при $\tau \in (\mathrm{top})[I]$) в виде $(I, \mathfrak{A})$ (в виде (I, τ)) имеем ИП с алгеброй множеств (ТП). Если $\mathcal{J} \in \pi[I], A \in \mathcal{P}(I)$ и $n \in \mathbb{N}$, то через $\Delta_n(A, \mathcal{J})$ обозначаем множество всех кортежей $(J_k)_{k \in \overline{1,n}} \in \mathcal{J}^n$ таких, что: 1) A есть объединение всех множеств $J_k, k \in \overline{1,n}$; 2) $J_p \cap J_q = \varnothing \ \ \forall p \in \in \overline{1,n} \ \ \forall q \in \overline{1,n} \setminus \{p\}$. Тогда

$$\Pi[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[I] \mid \forall J \in \mathcal{I} \ \exists n \in \mathbb{N} : \ \Delta_n(I \setminus J, \mathcal{I}) \neq \varnothing\}$$

есть семейство всех полуалгебр п/м I; при $\mathcal{J} \in \Pi[I]$ в виде $(I, \mathcal{J})$ имеем ИП с полуалгеброй множеств, $\mathbf{a}_I^0(\mathcal{J}) \triangleq \{A \in \mathcal{P}(I) \mid \exists m \in \mathbb{N} : \Delta_m(A, \mathcal{J}) \neq \varnothing\} \in (\mathrm{alg})[I]$ есть алгебра п/м I, порожденная полуалгеброй $\mathcal{J}$. Наконец,

$$\tilde{\pi}^0[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[I] \mid \forall J \in \mathcal{I} \ \ \forall x \in I \setminus J \ \exists X \in \mathcal{I} : \ (x \in X)\,\&\,(J \cap X = \varnothing)\}$$

есть семейство всех отделимых π-систем п/м I. Имеем цепочку вложений

$$(\mathrm{alg})[I] \subset \Pi[I] \subset \tilde{\pi}^0[I] \subset \pi[I] \subset \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big). \tag{1.2}$$

Фильтры и базы фильтров. Через $\beta[I]$ (через $\beta_0[I]$) обозначаем семейство всех $\mathcal{B} \in \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(I)\big)$ (всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}'(I)\big)$), для каждого из которых

$$\forall B_1 \in \mathcal{B} \ \ \forall B_2 \in \mathcal{B} \ \exists B_3 \in \mathcal{B} : \ B_3 \subset B_1 \cap B_2;$$

тем самым введены направленные семейства и среди них (имеем $\beta_0[I] \subset \beta[I]$) БФ, составляющие семейство $\beta_0[I]$. В виде

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[I] \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}'(I)\big) \,|\, &(A \cap B \in \mathcal{F} \ \forall A \in \mathcal{F} \ \forall B \in \mathcal{F})\,\& \\ &\&\,(\forall F \in \mathcal{F} \ \forall H \in \mathcal{P}(I) \ \ (F \subset H) \Rightarrow (H \in \mathcal{F}))\}\end{aligned} \tag{1.3}$$

имеем семейство всех фильтров множества I, а в виде

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}[I] \mid \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[I] \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{F}[I]) \tag{1.4}$$

множество всех у/ф I. Конечно, при $\mathcal{B} \in \beta_0[I]$ семейство

$$(I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \triangleq \{F \in \mathcal{P}(I) \mid \exists\, B \in \mathcal{B}:\ B \subset F\} \in \mathfrak{F}[I] \tag{1.5}$$

есть фильтр, порожденный базой $\mathcal{B}$. Отметим очевидную цепочку вложений

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \subset \mathfrak{F}[I] \subset \beta_0[I] \subset \beta[I]. \tag{1.6}$$

Наконец, точки I отождествляются с тривиальными у/ф:

$$(I - \mathrm{ult})[x] \triangleq \{F \in \mathcal{P}(I) \mid x \in F\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \quad \forall\, x \in I. \tag{1.7}$$

Элементы топологии, 1. В пределах настоящего пункта фиксируем $\tau \in (\mathrm{top})[I]$. Итак, (I, τ) есть ТП. Если $x \in I$, то, как легко видеть, $N_\tau^0(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\} \in \beta_0[I]$ и согласно (1.5) $N_\tau(x) \triangleq (I - \mathbf{fi})[N_\tau^0(x)] \in \mathfrak{F}[I]$ есть фильтр окрестностей [15, гл. I] точки x; кроме того,

$$(x - \mathrm{bas})[\tau] \triangleq \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}\big(N_\tau(x)\big) \mid \forall\, A \in N_\tau(x)\ \exists\, B \in \mathcal{B} : B \subset A\}$$

есть множество всех локальных баз (I, τ) в точке x, причем $(x - \mathrm{bas})[\tau] \subset \beta_0[I]$ (локальные базы являются БФ). Если $A \in \mathcal{P}(I)$, то $\mathrm{cl}(A, \tau)$ есть def замыкание [15,16] множества A в ТП (I, τ); ясно, что $\mathrm{cl}(A, \tau) \in \mathbf{C}_I[\tau]$, где $\mathbf{C}_I[\tau] \triangleq \{I \setminus G :\ G \in \tau\}$ есть семейство всех п/м I, замкнутых в (I, τ). Если $\mathcal{B} \in \beta_0[I]$ и $x \in I$, то [15, гл. I]

$$\Big(\mathcal{B} \overset{\tau}{\Rightarrow} x\Big) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \big(N_\tau(x) \subset (I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]\big). \tag{1.8}$$

Элементы топологии, 2. Полагаем в дальнейшем, что

$$(\mathcal{D} - \mathrm{top})[I] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \forall\, x_1 \in I\ \ \forall\, x_2 \in I \setminus \{x_1\}\ \exists\, H \in N_\tau(x_1):\ x_2 \notin H\},$$

$$(\mathrm{top})_0[I] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \forall\, x_1 \in I\ \ \forall\, x_2 \in I \setminus \{x_1\}\ \exists\, H_1 \in N_\tau(x_1)\ \exists\, H_2 \in N_\tau(x_2):\ H_1 \cap H_2 = \varnothing\},$$

$$(\mathbf{r} - \mathrm{top})[I] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid N_\tau(x) \cap \mathbf{C}_I[\tau] \in (x - \mathrm{bas})[\tau]\ \ \forall\, x \in I\},$$

$$(\mathbf{top})[I] \triangleq (\mathcal{D} - \mathrm{top})[I] \cap (\mathbf{r} - \mathrm{top})[I] = (\mathrm{top})_0[I] \cap (\mathbf{r} - \mathrm{top})[I],$$

$$(\mathbf{c} - \mathrm{top})[I] \triangleq \left\{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \forall\, \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\quad \left(I = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G\right) \Rightarrow \left(\exists\, \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{G}):\ I = \bigcup_{G \in \mathcal{K}} G\right)\right\},$$

$$(\mathbf{c} - \mathrm{top})_0[I] \triangleq (\mathbf{c} - \mathrm{top})[I] \cap (\mathrm{top})_0[I].$$

При вышеупомянутом перечислении, связанном, в частности, с аксиомами отделимости, следуем [16, гл. 4], выделяя сначала T_1- и T_2-пространства, затем регулярные ТП и, наконец, T_3-пространства; затем характеризуются компактные ТП и, в заключение, — компакты (компактные T_2-пространства).

Элементы топологии, 3. В пределах настоящего пункта фиксируем непустые множества X и Y, а также топологии $\tau_1 \in (\mathrm{top})[X]$ и $\tau_2 \in (\mathrm{top})[Y]$. В виде $C(X, \tau_1, Y, \tau_2) \triangleq \{f \in Y^X \mid f^{-1}(G) \in \tau_1\ \ \forall\, G \in \tau_2\}$ имеем множество всех (τ_1, τ_2)-непрерывных отображений из Y^X. Отметим, что [16, гл. 3]

$$C(X, \tau_1, Y, \tau_2) = \{f \in Y^X \mid f^1\big(\mathrm{cl}(A, \tau_1)\big) \subset \mathrm{cl}\big(f^1(A), \tau_2\big)\ \ \forall\, A \in \mathcal{P}(X)\}. \tag{1.9}$$

§ 2. Фильтры π-систем

В настоящем разделе фиксируем непустое множество $\mathbf{I}$ и π-систему $\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]$. В виде

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{F})\,\&\,(A \cap B \in \mathcal{F} \ \ \forall\, A \in \mathcal{F} \ \ \forall\, B \in \mathcal{F})\,\&\, \\ \&\,\big(\forall\, F \in \mathcal{F} \ \ \forall\, J \in \mathcal{I} \ \ (F \subset J) \Rightarrow (J \in \mathcal{F})\big)\big\} \quad (2.1)$$

имеем множество всех фильтров ИП $(\mathbf{I}, \mathcal{I})$; разумеется, сам термин ИП понимается здесь и далее расширительно (см. (1.2)). Тогда [9, (5.8)]

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \mid \forall\, \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} = \\ = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \mid \forall\, L \in \mathcal{I} \ \ (L \cap U \neq \varnothing \ \ \forall\, U \in \mathcal{U}) \Rightarrow (L \in \mathcal{U})\} \quad (2.2)$$

есть множество всех у/ф $(\mathbf{I}, \mathcal{I})$. Заметим, что $\mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{I}) \stackrel{\triangle}{=} \{(\mathbf{I} - \mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{I} : \ x \in \mathbf{I}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathbb{F}^*(\mathcal{I})\big)$ есть множество всех тривиальных фильтров ИП $(\mathbf{I}, \mathcal{I})$. При этом

$$\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{I}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \mid \bigcap_{L \in \mathcal{U}} L = \varnothing\} = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \setminus \mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{I}), \quad (2.3)$$

есть, в свою очередь, множество всех свободных у/ф $(\mathbf{I}, \mathcal{I})$. Легко видеть, что (см. (2.2)) $\forall\, L \in \mathcal{I}$

$$\Phi_{\mathcal{I}}(L) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \mid L \in \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \cap U \neq \varnothing \ \ \forall\, U \in \mathcal{U}\}. \quad (2.4)$$

Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I} | \, \mathcal{J}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \mid \mathcal{J} \subset \mathcal{U}\} \ \ \forall\, \mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}).$$

Легко видеть, что при $\mathcal{S} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I})$ $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I} \mid \mathcal{S})$ есть пересечение всех множеств $\Phi_{\mathcal{I}}(S)$, $S \in \mathcal{S}$. В терминах множеств (2.4) определяется π-система множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})$:

$$(\mathbb{UF})[\mathbf{I}; \mathcal{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{I}}(J) : \ J \in \mathcal{I}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})]. \quad (2.5)$$

В частности, семейство (2.5) есть база топологии (непустого) множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})$; эта топология $\mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[\mathbf{I}] \in (\mathrm{top})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})]$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[\mathbf{I}] = \{G \in \mathcal{P}\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})\big) \mid \forall\, \mathcal{U} \in G \ \exists\, U \in \mathcal{U} : \ \Phi_{\mathcal{I}}(U) \subset G\}$$

и превращает $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})$ в T_2-пространство (если $\mathcal{I} \in (\mathrm{alg})[\mathbf{I}]$, то $\mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[\mathbf{I}] \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})]$ превращает $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})$ в компакт Стоуна). Легко видеть, что $\Phi_{\mathcal{I}}(J) \neq \varnothing \ \ \forall\, J \in \mathcal{I} \setminus \{\varnothing\}$.

Замечание 1. Если $\mathcal{I} = \mathcal{P}(\mathbf{I})$, то $\mathcal{I} \in (\mathrm{alg})[\mathbf{I}]$, $\mathbb{F}^*(\mathcal{I}) = \mathfrak{F}[\mathbf{I}]$, $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}]$, $\mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{I}) = \{(\mathbf{I} - \mathrm{ult})[x] : \ x \in \mathbf{I}\}$ и $\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{I}) = \left\{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}] \mid \bigcap\limits_{L \in \mathcal{U}} L = \varnothing\right\}$. $\square$

Отметим, что в общем случае $\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]$, как легко видеть, $\mathcal{F} \cap \mathcal{I} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \ \ \forall\, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[\mathbf{I}]$. В частности, можно рассматривать случай $\mathcal{F} = (\mathbf{I} - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]$, где $\mathcal{B} \in \beta_0[\mathbf{I}]$, получая, что

$$(\mathbf{I} - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \cap \mathcal{I} = \{J \in \mathcal{I} \mid \exists\, B \in \mathcal{B} : \ B \subset J\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}). \quad (2.6)$$

Впрочем, во многих случаях в (2.6) можно ограничиться тем вариантом, когда $\mathcal{B} \subset \mathcal{I}$. С учетом этого введем $\beta_{\mathbf{I}}^0[\mathcal{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \beta_0[\mathbf{I}] \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{I}\}$, получая, что

$$(\mathbf{I} - \mathbf{fi})[\mathfrak{B} | \mathcal{I}] \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{I} - \mathbf{fi})[\mathfrak{B}] \cap \mathcal{I} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \ \ \forall\, \mathfrak{B} \in \beta_{\mathbf{I}}^0(\mathcal{I}) \quad (2.7)$$

(частный случай (2.6)). Отметим, наконец, что

$$\beta^{00}_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \beta^{0}_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}] \mid (\mathbf{I}-\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{I}] \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{I})\} = \\ = \{\mathcal{B} \in \beta^{0}_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}] \mid \forall\, J \in \mathcal{I}\ \ (J \cap B \neq \varnothing\ \ \forall\, B \in \mathcal{B}) \Rightarrow (\exists\, B \in \mathcal{B}:\ B \subset J)\} \tag{2.8}$$

(в связи с (2.8) отметим свойство, упомянутое в (2.2)), причем

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}) \subset \beta^{00}_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}] \subset \beta^{0}_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}] \subset \beta_0[\mathbf{I}]. \tag{2.9}$$

Итак, у/ф ИП $(\mathbf{I},\mathcal{I})$ являются БФ в смысле раздела 1. Отметим также полезное свойство: если $J_1 \in \mathcal{I}$ и $J_2 \in \mathcal{I}$, то

$$(J_1 \cap J_2 = \varnothing) \Rightarrow \big(\Phi_{\mathcal{I}}(J_1) \cap \Phi_{\mathcal{I}}(J_2) = \varnothing\big).$$

С учетом этого, а также (2.4) легко устанавливается, что

$$\Phi_{\mathcal{I}}(L) \in \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{I})}\big[\mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}]\big]\ \ \forall\, L \in \mathcal{I}. \tag{2.10}$$

Поэтому $\big(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[I]\big)$ есть нульмерное ТП. Если $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{I})$, то

$$\{\Phi_{\mathcal{I}}(U) :\ U \in \mathcal{U}\} \in (\mathcal{U}-\mathrm{bas})\big[\mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}]\big]. \tag{2.11}$$

§ 3. Отделимые π-системы и свойства плотности

В настоящем разделе фиксируем непустое множество $\mathbf{I}$ и (отделимую) π-систему $\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^0[\mathbf{I}]$, получая, в частности, ИП $(\mathbf{I},\mathcal{I})$ предыдущего раздела. В этом случае (и только в этом) $\big((\mathbf{I},\mathcal{I})-$ $-\mathrm{ult}\big)[x] \overset{\triangle}{=} (\mathbf{I}-\mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{I} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{I})\ \ \forall\, x \in \mathbf{I}$. С учетом этого определяем оператор $\big((\mathbf{I},\mathcal{I})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]$ в виде

$$x \mapsto \big((\mathbf{I},\mathcal{I})-\mathrm{ult}\big)[x] :\ \mathbf{I} \to \mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}) \tag{3.1}$$

(оператор (3.1) используется ниже только в случае $\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^0[I]$, хотя подобный оператор со значениями в $\mathbb{F}^*(\mathcal{I})$ можно было бы ввести и в общем случае π-системы $\mathcal{I}$). Заметим, что $\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{t}}(\mathcal{I}) = \big((\mathbf{I},\mathcal{I})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(\mathbf{I})$ (множество-образ).

Сейчас, несколько обобщая (2.4), полагаем, что

$$\mathbf{F}^*_0[\mathcal{I} \mid A] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}) \mid A \cap U \neq \varnothing\ \ \forall\, U \in \mathcal{U}\}\ \ \forall\, A \in \mathcal{P}(\mathbf{I}). \tag{3.2}$$

Разумеется, из (2.4) и (3.2) следует, что

$$\Phi_{\mathcal{I}}(L) = \mathbf{F}^*_0[\mathcal{I}|\, L]\ \ \forall\, L \in \mathcal{I}.$$

Предложение 1. *Если $A \in \mathcal{P}(\mathbf{I})$, то справедливо равенство*

$$\mathbf{F}^*_0[\mathcal{I} \mid A] = \mathrm{cl}\Big(\big((\mathbf{I},\mathcal{I})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}]\Big). \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω множество в правой части (3.3). Сравним множества $\mathbf{F}^*_0[\mathcal{I} \mid A]$ и Ω.

Пусть $\mathcal{W} \in \mathbf{F}^*_0[\mathcal{I}|\, A]$, то есть $\mathcal{W} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{I})$ и при этом $A \cap U \neq \varnothing\ \forall\, U \in \mathcal{W}$. Выберем произвольно $W \in \mathcal{W}$, получая, что $A \cap W \neq \varnothing$. С учетом этого выберем произвольно $w \in A \cap W$; тогда, поскольку $w \in A$,

$$\big((\mathbf{I},\mathcal{I})-\mathrm{ult}\big)[w] \in \big((\mathbf{I},\mathcal{I})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A)$$

и, с другой стороны, $W \in \big((\mathbf{I},\mathcal{I})-\mathrm{ult}\big)[w]$, так как, в частности, $W \in \mathcal{I}$. Как следствие (см. (2.4)), $\big((\mathbf{I},\mathcal{I})-\mathrm{ult}\big)[w] \in \Phi_{\mathcal{I}}(W)$. Получили свойство

$$\Phi_{\mathcal{I}}(W) \cap \big((\mathbf{I},\mathcal{I})-\mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A) \neq \varnothing.$$

Поскольку выбор W был произвольным, установлено, что

$$\Phi_{\mathcal{I}}(U) \cap \big((\mathbf{I}, \mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A) \neq \varnothing \ \ \forall U \in \mathcal{W}.$$

С учетом (2.11) имеем свойство $\mathcal{W} \in \Omega$, чем завершается проверка вложения

$$\mathbf{F}_0^*[\mathcal{I} \mid A] \subset \Omega. \tag{3.4}$$

Выберем произвольно $\mathfrak{U} \in \Omega$. Тогда $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})$ и согласно (2.11) $\{\Phi_{\mathcal{I}}(U) : U \in \mathfrak{U}\} \in$ $\in (\mathfrak{U} - \mathrm{bas})\big[\mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[\mathbf{I}]\big]$. Следовательно (по определению Ω),

$$\Phi_{\mathcal{I}}(U) \cap \big((\mathbf{I}, \mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A) \neq \varnothing \ \ \forall U \in \mathfrak{U}.$$

Пусть $V \in \mathfrak{U}$. Тогда, в частности, $V \in \mathcal{I}$ и $\Phi_{\mathcal{I}}(V) \cap \big((\mathbf{I}, \mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A) \neq \varnothing$. С учетом этого выберем у/ф $\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{I}}(V) \cap \big((\mathbf{I}, \mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A)$. Тогда $V \in \mathcal{V}$ и, кроме того, $\mathcal{V} \in \big((\mathbf{I}, \mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]^1(A)$. Последнее означает, что для некоторого $a \in A$ справедливо равенство $\mathcal{V} = \big((\mathbf{I}, \mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[a]$ (см. определение (3.1)). Получили, что $\big((\mathbf{I}, \mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[a] \in \Phi_{\mathcal{I}}(V)$ и $V \in \big((\mathbf{I}, \mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[a]$, что означает, в частности, справедливость включения $a \in V$. Получили свойство $A \cap V \neq \varnothing$. Поскольку выбор V был произвольным, установлено, что $A \cap U \neq \varnothing \ \ \forall U \in \mathfrak{U}$. С учетом (3.2) получаем включение $\mathfrak{U} \in \mathbf{F}_0^*[\mathcal{I} \mid A]$. Итак, $\Omega \subset \mathbf{F}_0^*[\mathcal{I} \mid A]$, откуда с учетом (3.4) получаем равенство $\mathbf{F}_0^*[\mathcal{I} \mid A] = \Omega$. □

В качестве очевидного следствия отметим, что

$$\Phi_{\mathcal{I}}(J) = \mathrm{cl}\left(((\mathbf{I}, \mathcal{I}) - \mathrm{ult})\,[\cdot]^1(J), \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[\mathbf{I}]\right) \ \ \forall J \in \mathcal{I}. \tag{3.5}$$

В частности, из (3.5) непосредственно следует, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) = \Phi_{\mathcal{I}}(\mathbf{I}) = \mathrm{cl}\left(\mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{I}), \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[\mathbf{I}]\right). \tag{3.6}$$

В [10] указаны некоторые другие свойства ТП $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}), \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[\mathbf{I}])$. Свойство, установленное в предложении 1, ранее формулировалось в менее общем случае (см., например, [17]).

§ 4. Множества притяжения в пространстве ультрафильтров

В настоящем разделе в отношении ИП $(\mathbf{I}, \mathcal{I})$ следуем соглашениям предыдущего раздела ($\mathbf{I} \neq \varnothing, \mathcal{I} \in \tilde{\pi}^0[\mathbf{I}]$). Будем рассматривать те или иные семейства $\mathcal{J} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbf{I})\big)$ в качестве ограничений асимптотического характера; в качестве целевого отображения здесь будем использовать оператор (3.1). С точки зрения решения задачи о достижимости в ТП при ограничениях вышеупомянутого типа мы рассматриваем здесь вспомогательное МП, выделяя этот этап в самостоятельную задачу. Однако сначала приведем следующее весьма общее

Замечание 2. Пусть E и $\mathbf{H}$ — непустые множества, $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}], s \in \mathbf{H}^E$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$. Введем в рассмотрение

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\,\mathcal{E}] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] |\, \mathcal{E} \subset \mathcal{U}\} \tag{4.1}$$

(семейство всех у/ф E, допустимых относительно $\mathcal{E}$). Напомним, что $s^1[\mathcal{B}] \in \beta_0[\mathbf{H}]$ при $\mathcal{B} \in$ $\in \beta_0[E]$; в частности, $s^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[\mathbf{H}]$ при $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ (см. (1.6)). Поэтому при $h \in \mathbf{H}$ определено свойство $s^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Rightarrow} h$, которое, конечно, может иметь или не иметь места при конкретном выборе $\mathcal{U}$ и h. Тогда в соответствии с [9, 10]

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; s; \mathcal{E}] \overset{\triangle}{=} \Big\{h \in \mathbf{H} \mid \exists\, \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\,\mathcal{E}] : s^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Rightarrow} h\Big\} \tag{4.2}$$

есть МП на значениях h, отвечающее «ограничениям» в виде $\mathcal{E}$. Отметим, что при $\mathcal{E} \in \beta[E]$

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; s; \mathcal{E}] = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathrm{cl}\big(s^1(\Sigma), \tau\big) \tag{4.3}$$

(см. [9, (3.7)]). Здесь же заметим, что в [9, с. 119] приведено представление МП (4.2) в терминах сходимости по Мору–Смиту и, стало быть, использующее не фильтры, а направленности. В этой связи совсем кратко напомним данное представление, придерживаясь обозначений [9].

Направленностью в множестве $\mathbb{S}$ называем всякий триплет $(D, \preceq, f)$, где $(D, \preceq)$ есть непустое направленное множество (см. [16, гл. 2]) и $f \in \mathbb{S}^D$; при этом для $d_1 \in D$ и $d_2 \in D$ имеем $(d_1 \preceq d_2) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \big((d_1, d_2) \in \preceq\ \big)$ (напомним, что $\preceq \in \mathcal{P}'(D \times D)$). Сопоставляем направленности $(D, \preceq, f)$ в (непустом) множестве $\mathbb{S}$ ассоциированный фильтр

$$(\mathbb{S} - \text{ass})[D; \preceq; f] \overset{\triangle}{=} \{M \in \mathcal{P}(\mathbb{S}) | \, \exists\, d_1 \in D \ \ \forall\, d_2 \in D \ \ (d_1 \preceq d_2) \Rightarrow \big(f(d_2) \in M\big)\} \in \mathfrak{F}[\mathbb{S}];$$

если к тому же $\mathbf{t} \in (\text{top})[\mathbb{S}]$ и $x \in \mathbb{S}$, то

$$\Big((D, \preceq, f) \overset{\mathbf{t}}{\to} x\Big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \Big((E - \text{ass})[D; \preceq; f] \overset{\mathbf{t}}{\Rightarrow} x\Big).$$

Тогда, возвращаясь к рассматриваемому в данном замечании МП, имеем [9, определение 3.1], что $(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; s; \mathcal{E}]$ есть множество всех $h \in \mathbf{H}$, для каждого из которых существует такая направленность $(D, \preceq, f)$ в E, что $\mathcal{E} \subset (E - \text{ass})[D; \preceq; f]$ и

$$(D, \preceq, s \circ f) \overset{\tau}{\longrightarrow} h.$$

Наконец, в [11] указаны условия, при которых исчерпывающее описание МП (4.2) реализуется в классе последовательностей в E, что соответствует подходу Дж. Варги (см. [1, гл. III]). $\square$

Рассмотрим теперь следующий вариант МП: $(\mathbf{as})[\mathbf{I}; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}); \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[\mathbf{I}]; \big((\mathbf{I}, \mathcal{I}) - \text{ult}\big)[\cdot]; \mathcal{J}]$, где $\mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I})$.

Предложение 2. *Если $\mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I})$, то справедливо равенство*

$$(\mathbf{as})[\mathbf{I}; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}); \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[\mathbf{I}]; \big((\mathbf{I}, \mathcal{I}) - \text{ult}\big)[\cdot]; \mathcal{J}] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I} | \, \mathcal{J}). \tag{4.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем использовать представление МП в классе направленностей, приведенное в замечании 2.

Выберем произвольно $\mathcal{U} \in (\mathbf{as})[\mathbf{I}; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}); \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[\mathbf{I}]; \big((\mathbf{I}, \mathcal{I}) - \text{ult}\big)[\cdot]; \mathcal{J}]$. Тогда $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})$ и для некоторой направленности $(D, \preceq, \mathbf{l})$ в $\mathbf{I}$ имеет место

$$\big(\mathcal{J} \subset (\mathbf{I} - \text{ass})[D; \preceq; \mathbf{l}]\big) \ \& \ \bigg(\Big(D, \preceq, \big((\mathbf{I}, \mathcal{I}) - \text{ult}\big)[\cdot] \circ \mathbf{l}\Big) \overset{\mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[\mathbf{I}]}{\longrightarrow} \mathcal{U}\bigg) \tag{4.5}$$

(здесь $(D, \preceq)$ — непустое направленное множество, $\mathbf{l} \in \mathbf{I}^D$). Пусть $\Sigma \in \mathcal{J}$. С учетом первого положения в (4.5) подберем $\mathbf{d}_1 \in D$ такое, что $\forall\, d \in D$

$$(\mathbf{d}_1 \preceq d) \Longrightarrow \big(\mathbf{l}(d) \in \Sigma\big). \tag{4.6}$$

При этом $\Sigma \in \mathcal{I}$ по выбору $\mathcal{J}$ и согласно (4.6) для $d \in D$ со свойством $\mathbf{d}_1 \preceq d$ имеем $\Sigma \in \in \big((\mathbf{I}, \mathcal{I}) - \text{ult}\big)[\mathbf{l}(d)]$, а потому (см. (2.4))

$$\big((\mathbf{I}, \mathcal{I}) - \text{ult}\big)[\mathbf{l}(d)] \in \Phi_{\mathcal{I}}(\Sigma). \tag{4.7}$$

С другой стороны, при $S \in N_{\mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[\mathbf{I}]}(\mathcal{U})$ согласно второму положению в (4.5) имеем для некоторого $\mathbf{d}_2 \in D$ тот факт, что $\big((\mathbf{I}, \mathcal{I}) - \text{ult}\big)[\mathbf{l}(d)] \in S$ при $d \in D, \mathbf{d}_2 \preceq d$. Используя определение направления [16, гл. 2], можно указать $\mathbf{d} \in D$, для которого $\mathbf{d}_1 \preceq \mathbf{d}$ и $\mathbf{d}_2 \preceq \mathbf{d}$. В частности, с учетом (4.7) имеем, что

$$\big((\mathbf{I}, \mathcal{I}) - \text{ult}\big)[\mathbf{l}(\mathbf{d})] \in \Phi_{\mathcal{I}}(\Sigma) \cap S.$$

Поскольку выбор S был произвольным, установлено, что

$$\Phi_{\mathcal{I}}(\Sigma) \cap H \neq \varnothing \ \ \forall\, H \in N_{\mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[\mathbf{I}]}(\mathcal{U}).$$

Это означает, что $\mathcal{U} \in \mathrm{cl}\big(\Phi_{\mathcal{I}}(\Sigma), \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}]\big)$ и (с учетом (2.10)) $\mathcal{U} \in \Phi_{\mathcal{I}}(\Sigma)$, а потому $\Sigma \in \mathcal{U}$. Поскольку выбор Σ был произвольным, установлено, что $\mathcal{J} \subset \mathcal{U}$. Следовательно, $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}|\, \mathcal{J})$. Итак, установлено вложение

$$(\mathbf{as})\big[\mathbf{I}; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}]; \big((\mathbf{I},\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]; \mathcal{J}\big] \subset \mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}|\, \mathcal{J}). \tag{4.8}$$

Выберем произвольно $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}|\, \mathcal{J})$. Тогда $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{I})$ и при этом $\mathcal{J} \subset \mathfrak{U}$. С учетом (3.6) подберем направленность $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi)$ в $\mathbf{I}$, для которой

$$\Big(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \big((\mathbf{I},\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot] \circ \psi\Big) \xrightarrow{\mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}]} \mathfrak{U}. \tag{4.9}$$

Пусть $\Omega \in \mathcal{J}$. Тогда, как следствие, $\Omega \in \mathfrak{U}$ и

$$\Phi_{\mathcal{I}}(\Omega) \in N_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}]}(\mathfrak{U}).$$

С учетом (4.9) подберем $d_* \in \mathbb{D}$ такое, что $\forall\, d \in \mathbb{D}$

$$(d_* \sqsubseteq d) \Rightarrow \Big(\big((\mathbf{I},\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\psi(d)] \in \Phi_{\mathcal{I}}(\Omega)\Big).$$

Итак, для $\delta \in \mathbb{D}$ со свойством $d_* \sqsubseteq \delta$ имеем, что $\Omega \in \big((\mathbf{I},\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\psi(\delta)]$ и, стало быть, $\psi(\delta) \in \Omega$. Получили, что $\exists\, d_1 \in \mathbb{D} \;\; \forall\, d_2 \in \mathbb{D}$

$$(d_1 \sqsubseteq d_2) \Longrightarrow \big(\psi(d_2) \in \Omega\big).$$

Это означает, что $\Omega \in (\mathbf{I} - \mathrm{ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; \psi]$. Итак, установлено вложение

$$\mathcal{J} \subset (\mathbf{I} - \mathrm{ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; \psi].$$

С учетом (4.9) получаем (см. замечание 2), что $\mathfrak{U} \in (\mathbf{as})\big[\mathbf{I}; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}]; \big((\mathbf{I},\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]; \mathcal{J}\big]$. Коль скоро выбор $\mathfrak{U}$ был произвольным, установлено вложение

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}|\, \mathcal{J}) \subset (\mathbf{as})\big[\mathbf{I}; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}]; \big((\mathbf{I},\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]; \mathcal{J}\big],$$

чем в силу (4.8) завершается обоснование равенства (4.4). □

В качестве естественного обобщения предложения 2 (следует учесть положения [9, с. 119]) имеем

Предложение 3. *Если* $\mathfrak{B} \in \beta[\mathbf{I}]$, *то справедливо равенство*

$$(\mathbf{as})\big[\mathbf{I}; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}]; \big((\mathbf{I},\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]; \mathfrak{B}\big] = \bigcap_{B \in \mathfrak{B}} \mathbf{F}^*_0[\mathcal{I}|\, B].$$

Доказательство получаем комбинацией предложения 1 и представления (4.3).

Замечание 3. Пусть теперь $\mathcal{J} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbf{I})\big)$. Определим $\mathfrak{B}$ условием

$$\mathfrak{B} \triangleq \Big\{ \bigcap_{J \in \mathcal{K}} J : \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{J}) \Big\}; \tag{4.10}$$

тогда $\mathfrak{B} \in \beta[\mathbf{I}]$ и можно использовать предложение 3. С другой стороны [9, (3.6)], имеем равенство

$$(\mathbf{as})\big[\mathbf{I}; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}]; \big((\mathbf{I},\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]; \mathcal{J}\big] = (\mathbf{as})\big[\mathbf{I}; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}]; \big((\mathbf{I},\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]; \mathfrak{B}\big].$$

Поэтому из предложения 3 следует очевидная цепочка равенств

$$(\mathbf{as})\big[\mathbf{I}; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}]; \big((\mathbf{I},\mathcal{I}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot]; \mathcal{J}\big] = \bigcap_{B \in \mathfrak{B}} \mathbf{F}^*_0[\mathcal{I}|\, B] = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}) |\, B \cap U \neq \varnothing \;\; \forall\, B \in \mathfrak{B} \;\; \forall\, U \in \mathcal{U}\}, \tag{4.11}$$

где $\mathfrak{B}$ определяется посредством (4.10). В (4.11) приведено естественное распространение предложения 3 на случай, когда $\mathcal{J} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(\mathbf{I})\big)$ «заменяет» (в данном предложении) $\mathfrak{B}$. Итогом является полученное представление МП в нульмерном T_2-пространстве $\big(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{I}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{I}}[\mathbf{I}]\big)$. □

§ 5. Обобщенные пределы

В дальнейшем фиксируем непустое множество E в качестве множества обычных решений, непустое множество $\mathbf{H}$, элементы которого играют роль состояний, которые желательно достигать посредством обычных решений на значениях того или иного отображения $f \in \mathbf{H}^E$, именуемого целевым, а также топологию $\tau \in (\mathrm{top})_0[\mathbf{H}]$. При упомянутых соглашениях реализуются МП $(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;f;\mathcal{E}]$, $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$.

Фиксируем, кроме того, π-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Тогда $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \beta_0[E]$, а потому $f^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[\mathbf{H}]$ $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. С учетом этого определяем непустое множество

$$\mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau] \overset{\triangle}{=} \Big\{f \in \mathbf{H}^E \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \exists\, h \in \mathbf{H}:\ f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Rightarrow} h\Big\} = \\ = \Big\{f \in \mathbf{H}^E \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \exists!\, h \in \mathbf{H}:\ f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Rightarrow} h\Big\} \quad (5.1)$$

(все функции-константы, действующие из E в $\mathbf{H}$, содержатся в множестве (5.1)). С учетом (5.1) корректно следующее определение [11, 12]: если $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]$, то $\varphi_{\lim}[f] \in \mathbf{H}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$ удовлетворяет условиям

$$f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Rightarrow} \varphi_{\lim}[f](\mathcal{U}) \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \quad (5.2)$$

Полезно отметить в связи с (5.2), что при $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]$ и $\mathbb{S} \in \mathcal{P}\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\big)$

$$\varphi_{\lim}[f]^1(\mathbb{S}) = \{h \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{U} \in \mathbb{S}:\ f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Rightarrow} h\}. \quad (5.3)$$

Напомним некоторые положения [11, 12]. Так, в частности,

$$\varphi_{\lim}[f]^1\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\,\mathcal{E})\big) \subset (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;f;\mathcal{E}] \quad \forall f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}). \quad (5.4)$$

При проверке (5.4) используется тот весьма очевидный факт, что

$$\varphi_{\lim}[f](\mathcal{U}) \in (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;f;\mathcal{U}] \quad \forall f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau] \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}).$$

В (5.4) мы получаем оценку основного МП в терминах вспомогательного (см. предложение 4.1). Кроме того [11, 12], имеем, что

$$(\tau \in (\mathbf{top})[\mathbf{H}]) \Rightarrow \big(\varphi_{\lim}[f] \in C\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \mathbf{H}, \tau\big) \quad \forall f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]\big). \quad (5.5)$$

Напомним также (см. [11, 12]), что при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ определено отображение $\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^E$ и, более того,

$$f = \varphi_{\lim}[f] \circ \big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot] \quad \forall f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]. \quad (5.6)$$

Предложение 4. *Если* $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$, $\tau \in (\mathbf{top})[\mathbf{H}]$, $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]$ *и* $\mathcal{E} \in \beta[E]$, *то*

$$\varphi_{\lim}[f]^1\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{F}_0^*[\mathcal{L}|\,\Sigma]\right) \subset (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;f;\mathcal{E}].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учтем (5.5), (5.6) и предложение 3.3.1 монографии [13]. Тогда [13, (3.2.8), (3.3.1)]

$$\varphi_{\lim}[f]^1\Big((\mathbf{as})[E;\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L});\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E];\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot];\mathcal{E}]\Big) \subset (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;f;\mathcal{E}],$$

где, согласно предложению 3,

$$(\mathbf{as})[E;\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L});\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E];\big((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult}\big)[\cdot];\mathcal{E}] = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{F}_0^*[\mathcal{L}|\,\Sigma]. \qquad \square$$

Предложение 5. *Если* $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$, $\tau \in (\mathbf{top})[\mathbf{H}]$ *и* $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]$, *то*

$$f^1(E) \subset \varphi_{\lim}[f]^1\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\big) \subset \mathrm{cl}\big(f^1(E),\tau\big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (3.1) и (5.6) имеем, что

$$f(x) = \varphi_{\lim}[f]\left(((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})\,[x]\right) \in \varphi_{\lim}[f]^1\left(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\right) \quad \forall\, x \in E.$$

Поэтому $f^1(E) \subset \varphi_{\lim}[f]^1\left(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\right)$. Учтем теперь (1.9) и (3.6); в силу (5.5) и (5.6)

$$\varphi_{\lim}[f]^1\left(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\right) = \varphi_{\lim}[f]^1\left(\mathrm{cl}\left(\mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\right)\right) \subset \mathrm{cl}\left(\varphi_{\lim}[f]^1\left(\mathbb{F}_{0,\mathbf{t}}^*(\mathcal{L})\right), \tau\right) =$$

$$= \mathrm{cl}\left(\varphi_{\lim}[f]^1\left(((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})\,[\cdot]^1(E)\right), \tau\right) = \mathrm{cl}\left(\left(\varphi_{\lim}[f] \circ ((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})\,[\cdot]\right)^1(E), \tau\right) = \mathrm{cl}\left(f^1(E),\tau\right). \ \square$$

§ 6. Компактификация и представление множеств притяжения

В настоящем разделе сохраняем в отношении $(E,\mathcal{L})$ и $(\mathbf{H},\tau)$ предположения раздела 5, но требуем дополнительно, чтобы $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $\tau \in (\mathbf{top})[\mathbf{H}]$. Полагаем, наконец, в пределах настоящего раздела, что

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \tag{6.1}$$

Замечание 4. Условие (6.1) выполнено при $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ и, в частности, при $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$. $\square$

С учетом положений раздела 2 имеем из (6.1), что $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ и, стало быть, в рассматриваемом случае

$$\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big) \tag{6.2}$$

есть непустой компакт. Ниже используются известные свойства непрерывных образов компактных множеств (см., например, [16, гл. 5]).

Предложение 6. *Если* $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]$, *то* $\varphi_{\lim}[f]^1\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\big) = \mathrm{cl}\big(f^1(E),\tau\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (5.5) имеем, что $\varphi_{\lim}[f] \in C\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \mathbf{H}, \tau\big)$. Поскольку, в частности, $\tau \in (\mathrm{top})_0[\mathbf{H}]$, то (см. (6.1), [13, (2.8.6)]) $\varphi_{\lim}[f]^1\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\big)$ есть замкнутое в $(\mathbf{H},\tau)$ п/м $\mathbf{H}$, причем $f^1(E) \subset \varphi_{\lim}[f]^1\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\big)$ согласно предложению 5. Получаем вложение

$$\mathrm{cl}\big(f^1(E),\tau\big) \subset \varphi_{\lim}[f]^1\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\big),$$

откуда, вновь используя предложение 5, извлекаем требуемое равенство. $\square$

Отметим, что при $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]$ в силу (5.5), (6.1) множество $\varphi_{\lim}[f]^1\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\big)$ компактно в $(\mathbf{H},\tau)$.

Теорема 1. *Если* $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]$ *и* $\mathcal{E} \in \beta[E]$, *то*

$$(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;f;\mathcal{E}] = \varphi_{\lim}[f]^1\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{F}_0^*[\mathcal{L}|\,\Sigma]\right).$$

Доказательство сводится к непосредственной комбинации предложения 3 и [14, предложение 2.5.1]; используются также (5.5), (5.6) и (6.1).

Предложение 7. *Если* $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]$ *и* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то*

$$(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;f;\mathcal{E}] = \varphi_{\lim}[f]^1\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\,\mathcal{E})\big).$$

Доказательство получаем с учетом [11, (4.1)] непосредственной комбинацией предложения 2, (5.5), (5.6), (6.1). Из (5.3) и теоремы 1 вытекает, что

$$(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;f;\mathcal{E}] = \varphi_{\lim}[f]^1\left(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\mathbf{F}_0^*[\mathcal{L}|\,\Sigma]\right) = \left\{h\in\mathbf{H}|\,\exists\,\mathcal{U}\in\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\mathbf{F}_0^*[\mathcal{L}|\,\Sigma]:\ f^1[\mathcal{U}]\overset{\tau}{\Rightarrow}h\right\}$$
$$\forall\,f\in\mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]\ \ \forall\,\mathcal{E}\in\beta[E]. \quad (6.3)$$

В свою очередь, из (5.3) и предложения 7 следует, что

$$(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;f;\mathcal{E}] = \varphi_{\lim}[f]^1\left(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\,\mathcal{E})\right) = \left\{h\in\mathbf{H}|\,\exists\,\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\,\mathcal{E}):\ f^1[\mathcal{U}]\overset{\tau}{\Rightarrow}h\right\}$$
$$\forall\,f\in\mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]\ \ \forall\,\mathcal{E}\in\mathcal{P}'(\mathcal{L}). \quad (6.4)$$

В связи с (6.3) заметим, что распространение теоремы 1 на случай произвольных семейств $\mathcal{E}\in\mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(E)\big)$ не составляет труда и осуществляется рассуждениями, подобными приведенным в замечании 3 (см., в частности, операцию на основе (4.10)). По поводу (6.4) отметим, что в [11,12] (и в ряде других работ) данное свойство устанавливалось при условии, что $\mathcal{L}\in\Pi[E]$; на самом же деле в более общем (формально) случае $\mathcal{L}\in\tilde{\pi}^0[E]$, рассматриваемом в настоящем разделе, существенно лишь свойство (6.1). При этом (6.4) может быть извлечено из (6.3) при использовании рассуждений, подобных приведенным в замечании 3. Подчеркнем, что используемые в (6.3) и (6.4) множества у/ф могут рассматриваться по аналогии с понятиями [1, гл. III] как множества обобщенных и приближенных решений (абстрактной задачи о достижимости в ТП) одновременно.

Остановимся на этом вопросе подробнее, ограничиваясь для простоты вариантом (6.3) и фиксируя (направленное) семейство $\mathcal{E}\in\beta[E]$. Тогда с учетом предложения 1 в виде множества

$$\mathbf{E}\overset{\triangle}{=}\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\mathbf{F}_0^*[\mathcal{L}|\,\Sigma] \quad (6.5)$$

имеем замкнутое в компакте (6.2) п/м $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, которое, следовательно, и само является компактом в топологии подпространства (6.2). Если $f\in\mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]$, то $\varphi_{\lim}[f]$ есть (см. (5.5)) непрерывная модификация f, рассматриваемого в качестве целевого отображения, а по сути дела — его непрерывное продолжение. Точки $\mathbf{E}$ (6.5), рассматриваемые в качестве аргументов $\varphi_{\lim}[f]$, являются (по смыслу) обобщенными элементами (решениями). С другой стороны, в (6.3) отмечается и другая роль у/ф $\mathcal{U}\in\mathbf{E}$, связанная с осуществлением аппроксимативной реализации элементов $\mathbf{H}$ в виде обобщенных пределов БФ $f^1[\mathcal{U}]$. С учетом предложения 3 имеем для таких у/ф факт соблюдения «асимптотических ограничений» в виде семейства $\mathcal{E}$. Таким образом, имея в виду аналогию с [1, гл. III], можно говорить об элементах множества (6.5) как о приближенных решениях или своеобразных аппроксиматорах для точек основного МП.

Пример 1. Пусть $\mathbf{t}\in(\mathcal{D}-\mathrm{top})[E]$ (итак, $(E,\mathbf{t})$ есть T_1-пространство). Тогда, в частности, $\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]\in\pi[E]$, причем $\{x\}\in\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]$ (см. [16, с. 85]). Это означает, что $\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]\in\tilde{\pi}^0[E]$, то есть $\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]$ — отделимая π-система.

Напомним, что $(\mathbf{H},\tau)$ есть T_3-пространство; в частности, $\tau\in(\mathbf{r}-\mathrm{top})[\mathbf{H}]$, а потому

$$N_\tau(y)\cap\mathbf{C}_{\mathbf{H}}[\tau]\in(y-\mathrm{bas})[\tau]\ \ \forall\,y\in\mathbf{H}.$$

Допустим, кроме того, что $\tau\in(\mathbf{c}-\mathrm{top})[\mathbf{H}]$. Тогда

$$C(E,\mathbf{t},\mathbf{H},\tau)\subset\mathbb{F}_{\lim}[E;\mathbf{C}_E[\mathbf{t}];\mathbf{H};\tau]. \quad (6.6)$$

В самом деле, пусть $f\in C(E,\mathbf{t},\mathbf{H},\tau)$. Пусть $y_*\in\mathbf{H}$. Имеем тогда следующее свойство: $N_\tau(y_*)\cap\cap\mathbf{C}_{\mathbf{H}}[\tau]\in(y_*-\mathrm{bas})[\tau]$. В силу непрерывности f имеем, что

$$f^{-1}(S)\in\mathbf{C}_E[\mathbf{t}]\ \ \forall\,S\in N_\tau(y_*)\cap\mathbf{C}_{\mathbf{H}}[\tau].$$

МАТЕМАТИКА 2014. Вып. 1

Поскольку выбор y_* был произвольным, установлено, что

$$f^{-1}(\mathbb{S}) \in \mathbf{C}_E[\mathbf{t}] \ \forall\, y \in \mathbf{H} \ \forall\, \mathbb{S} \in N_\tau(y) \cap \mathbf{C}_{\mathbf{H}}[\tau]. \tag{6.7}$$

Свойство (6.7) имеет также смысл некоторой локальной измеримости. Оно, как легко видеть с учетом построений, подобных используемым при доказательстве [9, предложение 3.4], достаточно для реализации свойства $f \in \mathbb{F}_{\lim}\big[E; \mathbf{C}_E[\mathbf{t}]; \mathbf{H}; \tau\big]$, чем и завершается проверка (6.6).

Замечание 5. Следуем соглашению только что рассмотренного примера в отношении $\mathbf{t}$, получая в качестве отделимой π-системы семейство всех замкнутых в T_1-пространстве $(E, \mathbf{t})$ п/м E. Пусть в пределах данного замечания $\tau \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})_0[\mathbf{H}]$ (итак, $(\mathbf{H}, \tau)$ — компакт). Тогда, в частности, $\tau \in (\mathbf{r} - \mathrm{top})[\mathbf{H}]$ и, коль скоро $\tau \in (\mathrm{top})_0[\mathbf{H}]$, имеем свойство $\tau \in \mathbf{top})[\mathbf{H}]$ [16, гл. 5]. Таким образом, все условия вышеупомянутого примера выполнены, а потому в рассматриваемом случае непустого компакта $(\mathbf{H}, \tau)$ выполняется также и (6.6). □

Замечание 6. В работах [9–12, 17] в качестве отделимых π-систем использовались в основном алгебры и полуалгебры множеств, что вполне соответствует традиционному толкованию ИП. Отметим здесь также исследования конкретных вариантов пространства Стоуна, предпринятые в [18, 19] и в ряде других работ. Наконец, в связи с конструкцией, используемой для доказательства (6.6) при условиях, подобных (6.7), отметим [20]. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. Даффин Р.Дж. Бесконечные программы / Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. С. 263–276.
3. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 352 с.
4. Ченцов А.Г. Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна–Чеха // Современная математика и ее приложения. Академия наук Грузии. Институт кибернетики. 2005. Т. 26. С. 119–150.
5. Chentsov A.G. Finitely additive measures and extensions of abstract control problems // Journal of Mathematical Sciences. 2006. Vol. 133. Issue 2. P. 1045–1206.
6. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
7. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
8. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория стохастических процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
9. Ченцов А.Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113–142.
10. Ченцов А.Г. Ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения: задача соблюдения ограничений асимптотического характера // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 1047–1064.
11. Ченцов А.Г. Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости: эквивалентные представления и основные свойства // Известия вузов. Математика. 2013. № 11. С. 33–50.
12. Ченцов А.Г. Ярусные отображения и преобразования на основе ультрафильтров // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 4. С. 298–314.
13. Chentsov A.G., Morina S.I. Extensions and relaxations. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002.
14. Chentsov A.G. Asymptotic attainability. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1997. 322 p.
15. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
16. Келли Дж.Л. Общая топология. М.: Наука, 1981. 433 с.
17. Ченцов А.Г. Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 268–293.

18. Грызлов А.А., Бастрыков Е.С., Головастов Р.А. О точках одного бикомпактного расширения $\mathbb{N}$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17.
19. Грызлов А.А., Головастов Р.А. О пространствах Стоуна некоторых булевых алгебр // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 11–16.
20. Ченцов А.Г. Преобразования ультрафильтров и их применение в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 85–102.

Поступила в редакцию 15.01.2014

Ченцов Александр Георгиевич, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

A. G. Chentsov

Some ultrafilter properties connected with extension constructions

Keywords: attraction set, topology, ultrafilter.

Mathematical Subject Classifications: 28A33

General properties of ultrafilters of π-systems with zero and unit used under extension constructing for abstract attainability problems with the aim of estimation for attraction sets in topological space are considered. Possibilities of employment of the above-mentioned ultrafilters as general elements are considered. Among them, elements admissible with respect to constraints of asymptotic character of the initial problem are selected. Under very general conditions, the goal operator of the given problem extends to the continuous mapping that takes each ultrafilter of π-system to the limit of corresponding image. The basic attraction set (an asymptotic analog of the attainability domain) is estimated from below by the continuous image of an analogous auxiliary set in the space of ultrafilters. In the particular case of realization of the Stone space (when the used π-system is an algebra of sets) the above-mentioned estimate is an equality connecting a desired attraction set and an auxiliary one; for the latter a sufficiently simple representation is given. The variant of application (in estimating goals) of the Wallman extension is discussed.

REFERENCES

1. Warga J. *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami* (Optimal control of differential and functional equations), Moscow: Nauka, 1977, 624 p.
2. Duffin R.J. Infinite programs, *Linear inequalities and related systems*, Annals of Mathematics Studies, no. 38, Princeton Univ. Press, 1956, pp. 157–170.
3. Gol'shtein E.G. *Teoriya dvoistvennosti v matematicheskom programmirovanii i ee prilozheniya* (Duality theory in mathematical programming and its applications), Moscow: Nauka, 1971, 352 p.
4. Chentsov A.G. Certain constructions of asymptotic analysis related to the Stone-Ccech compactification, *Journal of Mathematical Sciences*, 2007, vol. 140, issue 6, pp. 873–904.
5. Chentsov A.G. Finitely additive measures and extensions of abstract control problems, *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 133, no. 2, pp. 1045–1206.
6. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* (Theory of motion control), Moscow: Nauka, 1968, 475 p.
7. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Moscow: Nauka, 1974, 456 p.
8. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* (Theory of stochastic processes), Moscow: Fizmatlit, 2005, 402 p.
9. Chentsov A.G. Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 113–142 (in Russian).

10. Chentsov A.G. Ultrafilters in the constructions of attraction sets: Problem of compliance to constraints of asymptotic character, *Differential Equations*, 2011, vol. 47, issue 7, pp. 1059–1076.

11. Chentsov A.G. Attraction sets in abstract attainability problems: Equivalent representations and basic properties, *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, issue 11, pp. 28–44.

12. Chentsov A.G. Tiered operators and conversion based on ultrafilters, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 298–314 (in Russian).

13. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations*, Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002.

14. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability*, Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1997, 322 p.

15. Burbaki N. *Obshchaya topologiya. Osnovnye struktury* (General topology. The basic structures), Moscow: Nauka, 1968, 272 p.

16. Kelli J.L. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Nauka, 1981, 433 p.

17. Chentsov A.G. Ultrafilters of measurable spaces as generalized solutions to abstract problems of attainability, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 1, pp. 268–293 (in Russian).

18. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. About points of compactification of $\mathbb{N}$, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 10–17 (in Russian).

19. Gryzlov A.A., Golovastov R.A. The Stone spaces of Boolean algebras, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 1, pp. 11–16 (in Russian).

20. Chentsov A.G. The transformation of ultrafilters and their application in constructions of attraction sets, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 85–102 (in Russian).

Received 15.01.2014

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru