

УДК 532.5.032

© В. В. Пак

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И НЕКОТОРЫЕ ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ<sup>1</sup>

Мы исследуем эволюцию осесимметричного двухслойного медленного течения вязкой жидкости со свободной границей, которое создается начальным рельефом границ слоев и скоростями на нижней границе. Каждый слой имеет постоянную плотность и вязкость. Предполагается, что верхний слой имеет меньшую плотность, чем нижний. На основе уравнений Рейнольдса построена система нелинейных параболических уравнений относительно поверхности и границы раздела слоев для описания этого течения. Принимая безразмерный скачок плотностей между слоями как малый параметр, мы применяем метод асимптотических разложений, чтобы выделить главное приближение для медленной эволюции уравнений движения на больших временах. Получено асимптотическое уравнение, связывающее смещения поверхности и границы раздела слоев со скоростями на нижней границе. На основе этого уравнения разработан алгоритм для расчета полей скоростей в слоях на больших временах. Для наглядного представления течения используются линии тока. Численные результаты показали устойчивость линий тока в верхнем слое при вариации скорости на нижней границе. В качестве геофизических приложений разработанный алгоритм используется для количественной оценки поля скоростей в коре под крупномасштабными кольцевыми структурами на Луне (верхний слой), создаваемого глубинными движениями в подстилающей мантии (нижний слой). Чтобы подтвердить достоверность результатов моделирования, мы сопоставляем рассчитанные поля скоростей с системами хребтов кольцевых структур, полученных из экспериментальных наблюдений. Модельное сравнение показало пространственную близость радиусов кольцевых хребтов и особых точек скорости течения на поверхности.

*Ключевые слова:* многослойное течение, длинноволновое приближение, уравнения Рейнольдса, нелинейная диффузия, кольцевые структуры.

### Введение

Упрощенные уравнения вязкой жидкости в длинноволновом приближении (уравнения Рейнольдса) широко используются для моделирования течений в тонких слоях и пленках [1]. Как показали результаты моделирования двухслойных течений, слоистая структура течения приводит к нетривиальной, трудно предсказуемой эволюции на больших временах [2].

В работе [3] проведено исследование полной нелинейной системы для осесимметричного течения двухслойной вязкой жидкости на неподвижном фундаменте. С помощью метода малого параметра показано существенное различие режимов эволюции течения на малых и на больших временах и получена асимптотическая формула, связывающая движения поверхности и границы раздела слоев жидкости. В качестве примера возможных приложений полученных результатов выполнен расчет глубинной структуры крупномасштабной кольцевой структуры на Луне.

Однако для адекватного моделирования глубинных движений в недрах Земли и планет такая постановка задачи является слишком упрощенной. Положение нижней границы в модели является произвольным и постановка на ней краевых условий неподвижной границы исключает возможность изучения влияния движений в подстилающей области на рассматриваемое

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Дальневосточного отделения РАН («Разработка методов моделирования и информационных интеллектуальных технологий для решения вычислительно сложных прикладных задач», 12-1-П15-04, 2012–2014).

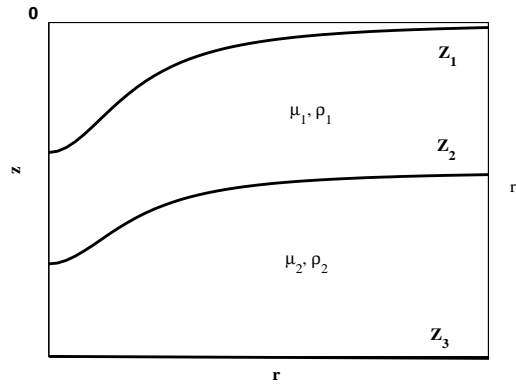


Рис. 1. Общая схема расчетной области

течение. В работе [4] сделана попытка решить эту проблему путем добавления в модель дополнительного слоя. Проведен асимптотический анализ основных закономерностей эволюции границ слоев трехслойного течения вязкой жидкости на больших временах.

В настоящей работе исследуется полная нелинейная система для осесимметричного течения двухслойной вязкой жидкости с учетом скоростей на нижней границе. Проведено асимптотическое исследование эволюции течения на больших временах и определяется зависимость смещений поверхности и границы раздела жидкости от скоростей, задаваемых на нижней границе. В качестве геофизического приложения полученных результатов построены модельные поля скоростей в коре и мантии под крупномасштабными кольцевыми структурами на Луне.

§ 1. Система уравнений и краевые условия

Рассмотрим вязкую жидкость, состоящую из двух слоев (обозначены индексами  $i = 1, 2$ ), которые ограничены поверхностями раздела  $z = Z_i, i = \overline{1, 3}$ , и боковой границей  $r = r_b$ . Общая схема модели представлена на рисунке 1. Верхняя граница  $Z_1$  является свободной, а нижняя  $Z_3$  неподвижна. Пусть течение создается начальным рельефом верхней и средней границ слоев и скоростями, задаваемыми на нижней границе.

Для описания этого течения воспользуемся цилиндрическими координатами  $(r, \varphi, z)$ , где  $r, \varphi$  и  $z$  — это соответственно радиальная, азимутальная и вертикальная координаты. Пусть начало координат совпадает с пересечением оси симметрии и средним (невозмущенным) уровнем поверхности жидкости. Все переменные предполагаются независимыми от  $\varphi$ .

Движение вязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести при условии осевой симметрии описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
 u_{r,t} + u_r u_{r,r} + u_z u_{r,z} &= -p_{,r} + \mu_i \left( u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} + u_{r,zz} - \frac{u_r}{r^2} \right), \\
 u_{z,t} + u_r u_{z,r} + u_z u_{z,z} &= -p_{,z} + \mu_i \left( u_{z,rr} + \frac{u_{z,r}}{r} + u_{z,zz} \right) - \rho_i g, \\
 u_{r,r} + \frac{u_r}{r} + u_{z,z} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

где  $\rho_i, \mu_i, i = \overline{1, 2}$ , — плотности и вязкости слоев (постоянные внутри слоев),  $u_r, u_z$  — радиальная и вертикальная компоненты скорости,  $p$  — давление,  $g$  — ускорение силы тяжести.

Для замыкания системы (1.1) на границах слоев задаются следующие краевые условия.

1. На границе  $Z_1$ : условия свободной поверхности, то есть нормальная и касательная составляющие напряжения равны нулю:

$$\begin{aligned}
 (-p + 2\mu_1 u_{r,r}) n_1^1 + \mu_1 (u_{r,z} + u_{z,r}) n_2^1 &= 0, \\
 \mu_1 (u_{r,z} + u_{z,r}) n_1^1 + (-p + 2\mu_1 u_{z,z}) n_2^1 &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

где  $n_j^i$  — направляющие косинусы нормали к границе  $Z_i$ , которые вычисляются по формулам

$$n_1^i = -\frac{Z_{i,r}}{\sqrt{1+Z_{i,r}^2}}, \quad n_2^i = \frac{1}{\sqrt{1+Z_{i,r}^2}}. \quad (1.3)$$

2. На границе  $Z_2$ : условия непрерывности скоростей и напряжений

$$\begin{aligned} [u_r]_-^+ &= 0, & [u_z]_-^+ &= 0, \\ [(-p + 2\mu_1 u_{r,r}) n_1^2 + \mu_1 (u_{r,z} + u_{z,r}) n_2^2]_-^+ &= 0, \\ [\mu_1 (u_{r,z} + u_{z,r}) n_1^2 + (-p + 2\mu_1 u_{z,z}) n_2^2]_-^+ &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $[\cdot]_-^+$  — скачок функции.

3. На неподвижной и проницаемой границе  $Z_3$  задаются составляющие скорости движения:

$$Z_3(r, 0) = Z_{30}, \quad u_r = u_{r0}(r), \quad u_z = u_{z0}(r). \quad (1.5)$$

4. Начальный профиль границ определяется функциями  $Z_{i0}$ :

$$Z_i(r, 0) = Z_{i0}(r), \quad i = \overline{1, 2}. \quad (1.6)$$

Кроме этого, на подвижных границах раздела задавались кинематические условия отсутствия перетока массы, то есть нормальная составляющая скорости частиц жидкости на границе равна скорости движения самой границы:

$$u_z(r, Z_i, t) - Z_{i,r} u_r(r, Z_i, t) - Z_{i,t} = 0, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (1.7)$$

Используя уравнение неразрывности (1.1), условие (1.7) можно преобразовать следующим образом:

$$Z_{i,t} = -\frac{1}{r} S(u_r, Z_i)_{,r} - \frac{1}{r} (r u_{r0}(Z_i - Z_3))_{,r} + u_{z0}, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (1.8)$$

где

$$S(u_r, z) = r \int_{Z_3}^z (u_r(z_1) - u_{r0}(r)) dz_1, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (1.9)$$

На боковой границе расчетной области, а также на оси симметрии радиальная скорость задавалась равной нулю:

$$u_r(0, z, t) = 0, \quad u_r(r_b, z, t) = 0. \quad (1.10)$$

Для описания движения жидкости использовались упрощенные уравнения вязкой жидкости в длинноволновом приближении (уравнения Рейнольдса), полученные из (1.1) при следующих предположениях:

- 1) характерный горизонтальный масштаб возмущений много больше вертикального;
- 2) негидростатические напряжения много меньше гидростатического давления;
- 3) плотность не убывает с глубиной.

Обозначим горизонтальный масштаб  $Z_{i0}$  через  $R$ , а вертикальный — через  $\epsilon R$ , где  $\epsilon$  — малый параметр, и перейдем к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} r &= R r', & z &= \epsilon R z', & \mu_i &= \mu_0 \mu'_i, & \rho_i &= \rho_0 \rho'_i, \\ u_r &= u_0 u'_r, & u_z &= \epsilon u_0 u'_z, & p &= p_0 p', \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $\mu_0, \rho_0, p_0 = \rho_1 g \epsilon R, u_0 = \frac{\epsilon^3 \rho_0 g R^2}{\mu_0}$  и  $t_0$  — это соответственно масштабы вязкости, плотности, давления, скорости и времени. В качестве масштабов вязкости и плотности выберем величины  $\mu_0 = \mu_2$  и  $\rho_0 = \rho_1$ .

Подставляя (1.11) в (1.1)–(1.7) и пренебрегая величинами порядка  $o(\epsilon)$ , получим уравнения (в дальнейшем для удобства штрихи опускаются)

$$\begin{aligned} p_{,r} &= \mu_i u_{r,zz}, \\ p_{,z} &= -\rho_i, \\ u_{r,r} + \frac{u_r}{r} + u_{z,z} &= 0, \end{aligned} \tag{1.12}$$

граничные условия

$$\begin{aligned} p &= 0, \quad \mu_1 u_{r,z} = 0, \quad z = Z_1, \\ [u_r]_-^+ &= 0, \quad [p]_-^+ = 0, \quad [\mu u_{r,z}]_-^+ = 0, \quad z = Z_2, \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} u_r &= u_{r0}, \quad u_z = u_{z0}, \quad z = Z_3, \\ u_z(r, Z_i, t) - Z_{i,r} u_r(r, Z_i, t) - \frac{1}{S_h} Z_{i,t} &= 0, \quad i = \overline{1, 2}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

где  $S_h = \frac{u_0 t_0}{R}$ , и начальные условия

$$Z_i(r, 0) = Z_{i0}, \quad i = \overline{1, 2}. \tag{1.15}$$

В качестве масштаба времени выберем величину  $t_0 = \frac{R}{u_0 \gamma_2}$ , где  $\gamma_2 = \rho_2 - 1$  — безразмерная разность плотностей слоев. Тогда  $S_h = \frac{1}{\gamma_2}$ .

Решая (1.12) с учетом условий (1.13), получим выражения для  $u_r, u_z$  и  $p$  на границах слоев. После подстановки их в (1.14) и некоторых преобразований получаются уравнения для  $Z_i$ :

$$Z_{i,t} = \frac{1}{r} (r (A_{i1} Z_{1,r} + \gamma_2 A_{i2} Z_{2,r}) - u_{r0} (Z_i - Z_3))_{,r} + u_{z0}, \quad i = \overline{1, 2}, \tag{1.16}$$

где

$$\begin{aligned} A_{ji} &= A_{ij} = \sum_{l=i}^2 h_l \sum_{m=j}^2 h_m \sum_{k=j}^2 \frac{1}{\mu_k} \frac{h_k}{1 + \delta_{jk} + \delta_{ij}}, \quad i \leq j, \quad i, j = \overline{1, 2}, \\ h_i &= Z_{i+1} - Z_i, \quad \delta_{ij} \text{ — символ Кронекера.} \end{aligned} \tag{1.17}$$

Таким образом, эволюция верхней и средней границ слоев описывается системой нелинейных уравнений параболического типа (1.16).

## § 2. Асимптотический анализ уравнений

Так как реальные значения плотностей в коре и мантии Земли и других твердых планет примерно равны  $\rho_1 \sim 3000 \text{ кг/м}^3$  и  $\rho_2 \sim 3300 \text{ кг/м}^3$ , величина  $\gamma_2 \sim 0.1$  является малым параметром.

Покажем, что если  $\gamma_2 \neq 0$ , то в эволюции течения можно выделить два различных режима: быстрая эволюция на малых временах, переходящая в медленно изменяющуюся (квазистационарную) фазу. Для этого представим решение системы (1.16) в виде суммы

$$Z_1 = z_1(r, t) + \zeta_1(r, \tau), \quad Z_2 = z_2(r, t) + \zeta_2(r, \tau), \tag{2.1}$$

где  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  являются пограничными функциями, компенсирующими невязки начальных условий и быстро убывающими к нулю на бесконечности,  $\tau = \frac{t}{\gamma_2}$  — «быстрое» время [5]. Очевидно, что начальные условия для  $z_i$  и  $\zeta_i$  из (2.1) должны удовлетворять следующим соотношениям:  $Z_{i0} = \zeta_i(r, 0) + z_i(r, 0)$ ,  $i = \overline{1, 2}$ . Предположим, что скорости на нижней границе являются малыми величинами:  $u_{r0} = \gamma_2 U_{r0}$ ,  $u_{z0} = \gamma_2 U_{z0}$ .

Далее разобьем систему (1.16) следующим образом.

1. Для функций  $z_i(r, t)$ :

$$\begin{aligned} \gamma_2 z_{i,\tau} = & \frac{1}{r} \left( r (A_{i1}|_{Z_i=z_i} z_{1,r} + \gamma_2 A_{i2}|_{Z_i=z_i} z_{2,r}) \right)_{,r} - \\ & - \frac{\gamma_2}{r} \left( r U_{r0}(z_i - z_3) \right)_{,r} + \gamma_2 U_{z0}, \quad i = \overline{1, 2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

2. Для функций  $\zeta_i(r, t)$ :

$$\begin{aligned} \zeta_{i,t} = & \frac{1}{r} \left( r (A_{i1} Z_{1,r} + \gamma_2 A_{i2} Z_{2,r}) \right)_{,r} - \frac{1}{r} \left( r (A_{i1}|_{Z_i=z_i} z_{1,r} + \right. \\ & \left. - \gamma_2 A_{i2}|_{Z_i=z_i} z_{2,r}) \right)_{,r} - \frac{\gamma_2}{r} \left( r U_{r0}(Z_i - z_i) \right)_{,r}, \quad i = \overline{1, 2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Представим приближенное решение в виде асимптотических разложений

$$z_i = z_{i0} + \gamma_2 z_{i1} + \dots, \quad \zeta_i = \zeta_{i0} + \gamma_2 \zeta_{i1} + \dots \quad (2.4)$$

Система нулевого приближения для  $z_{i0}$  имеет вид

$$0 = \frac{1}{r} \left( r A_{i1}|_{Z_i=z_{i0}} z_{i0,r} \right)_{,r}. \quad (2.5)$$

Так как боковые границы расчетной области непроницаемы, эта система имеет нулевое решение:

$$z_{i0} = 0. \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.3), получим систему нулевого приближения для  $\zeta_i$ :

$$\zeta_{i0,\tau} = \frac{1}{r} \left( r A_{i1}|_{Z_i=z_{i0}+\zeta_{i0}} \zeta_{i0,r} \right)_{,r}. \quad (2.7)$$

Так как система (2.3) автономна (то есть коэффициенты уравнений не зависят явно от  $t$ ), величины погранслоиных функций на больших временах ( $t \sim 1$ ) можно оценить следующим образом. Представим  $\zeta_{i0}$  в виде суммы

$$\zeta_{i0} = \bar{\zeta}_{i0} + h_i, \quad h_i \ll 1, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (2.8)$$

где  $\bar{\zeta}_{i0}$  — усредненное значение  $\zeta_{i0}$ . Подставим (2.8) в (2.7) и линеаризуем полученную систему:

$$h_{i,\tau} = A_{i1}|_{Z_i=z_{i0}+\bar{\zeta}_{i0}} \frac{1}{r} \left( r h_{i0,r} \right)_{,r}. \quad (2.9)$$

Из (2.9) получим  $h_2 = \frac{A_{21}(\bar{\zeta}_{10}, \bar{\zeta}_{20})}{A_{11}(\bar{\zeta}_{10}, \bar{\zeta}_{20})} h_1$ .

Согласно [6]  $|\zeta_{i0}| \sim \exp(-\frac{\omega_1 t}{\gamma_2})$ , где  $\omega_1 \sim \min A_{11}(\bar{\zeta}_{10}, \bar{\zeta}_{20})$ . Следовательно, на больших временах  $t \sim 1$  вклад погранслоиных функций в общее решение пренебрежимо мал.

Уравнение относительно  $z_{11}$  в первом приближении имеет вид

$$0 = \frac{1}{r} \left[ r \left( A_{11}|_{Z_i=z_{i0}} z_{11,r} + A_{12}|_{Z_i=z_{i0}} z_{20,r} \right) \right]_{,r} - \frac{1}{r} \left( r U_{r0}(-Z_3) \right)_{,r} + U_{z0}. \quad (2.10)$$

Уравнение для  $z_{20}$  в первом приближении имеет вид

$$z_{20,t} = \frac{1}{r} \left[ r \left( A_{21}|_{Z_i=z_{i0}} z_{11,r} + A_{22}|_{Z_i=z_{i0}} z_{20,r} \right) \right]_{,r} - \frac{1}{r} \left( r U_{r0}(z_{20} - Z_3) \right)_{,r} + U_{z0}. \quad (2.11)$$

Таким образом, в первом приближении на больших временах смещения верхней и средней границ слоев связаны функциональной зависимостью только со скоростями на нижней границе и не зависят от начального рельефа поверхности и границы раздела слоев. Эволюция двухслойного течения полностью определяется нелинейным параболическим уравнением (2.11).

Так как рассматриваемая жидкость несжимаема, для построения поля скоростей течения жидкости удобнее использовать функцию тока:

$$U_r = \frac{1}{r} \Psi, z, \quad U_z = -\frac{1}{r} \Psi, r.$$

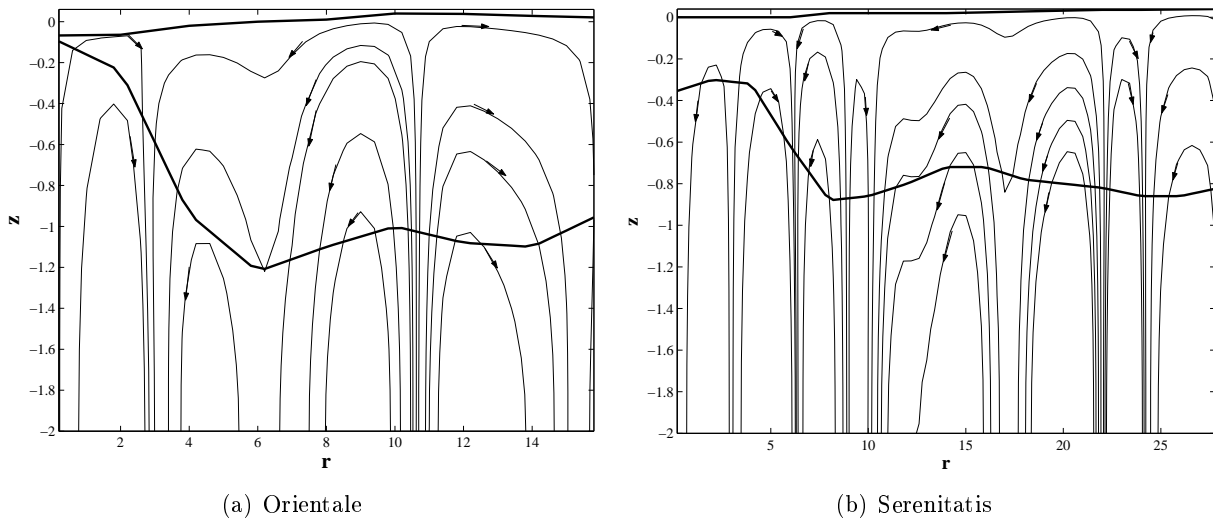
Используя формулу (1.9), получим следующее выражение для функции  $\Psi$  через функцию  $S(u_r, z)$ :

$$\Psi(r, z) = S(U_r, z)|_{Z_i=z_{i0}} + U_{r0}(z - Z_3) + \Psi(r, Z_3). \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в (2.10), получим краевое условие для функции тока на поверхности:

$$-\frac{1}{r} \left[ \Psi(r, 0) - \Psi(r, Z_3) \right]_{,r} - \frac{1}{r} \Psi(r, Z_3)_{,r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi(r, 0) = C_1. \quad (2.13)$$

Без ограничения общности можно считать, что  $C_1 = 0$ .



**Рис. 2.** Линии тока поля скоростей в коре и мантии кольцевых структур на Луне. Горизонтальная скорость на нижней границе равна нулю. Тонкими линиями со стрелками обозначены линии тока течения, толстыми линиями — рельеф поверхности и профиль границы «кора-мантия», полученные гравиметрическими методами [8]

Используя (2.13), можно получить формулы вычисления функции тока для двух предельных вариантов.

1. Горизонтальная скорость на нижней границе равна нулю,  $U_{r0} = 0$ :

$$\Psi(r, z) = \left( S(U_r, z) - S(U_r, 0) \right) |_{Z_i=z_{i0}}. \quad (2.14)$$

2. Вертикальная скорость на нижней границе равна нулю,  $U_{z0} = 0$ :

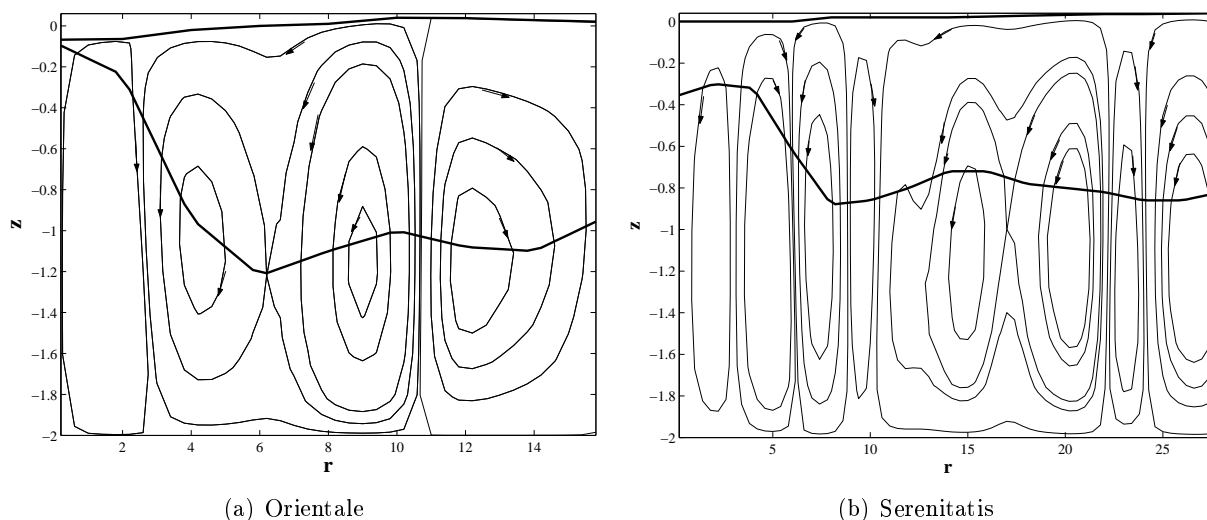
$$\Psi(r, z) = S(U_r, z)|_{Z_i=z_{i0}} + \frac{S(U_r, 0)|_{Z_i=z_{i0}}}{Z_3} (z - Z_3). \quad (2.15)$$

### § 3. Геофизические приложения

В качестве геофизических приложений был выполнен расчет поля скоростей в коре и мантии многокольцевых структур Orientale и Serenitatis на Луне, имеющих серию концентрических кольцевых хребтов.

Согласно данным наблюдения Луны [7], средняя толщина лунной коры является величиной порядка  $\sim 50$  км, а радиус кольцевой структуры Orientale  $\sim 900$  км. Нижняя граница  $Z_3$  задавалась на глубине 100 км. Ускорение силы тяжести на Луне равно  $1.62 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ , вязкость мантии  $\sim 10^{22} \text{ Па} \cdot \text{с}$ . Плотности слоев  $\rho_1 = 2800 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$  и  $\rho_2 = 3350 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$  взяты из [8]. В этом случае масштаб времени получается  $\sim 0.4 \cdot 10^9$  лет, что по порядку соответствует возрасту рассматриваемой кольцевой структуры [9].

По формулам (2.14)–(2.15) был выполнен расчет полей скоростей в коре и мантии кольцевых структур, которые представлены на рисунках 2, 3. Легко видеть, что линии тока в верхнем слое почти идентичны в обоих вариантах.



**Рис. 3.** Линии тока поля скоростей в коре и мантии кольцевых структур на Луне. Вертикальная скорость на нижней границе равна нулю. Остальные обозначения такие же, как и на рисунке 2

Для более детального сравнения сопоставим горизонтальные скорости на поверхности и нормированные значения функции тока  $\Psi/\Psi_{max}$  на границе раздела между слоями для обоих вариантов. Как известно, такая нормировка функции тока может изменить только модуль скорости, а линии тока остаются неизменными. Из результатов, приведенных на рисунке 4, можно видеть достаточно близкое расположение графиков линий тока в верхнем слое и горизонтальных скоростей на верхней границе для обоих вариантов.

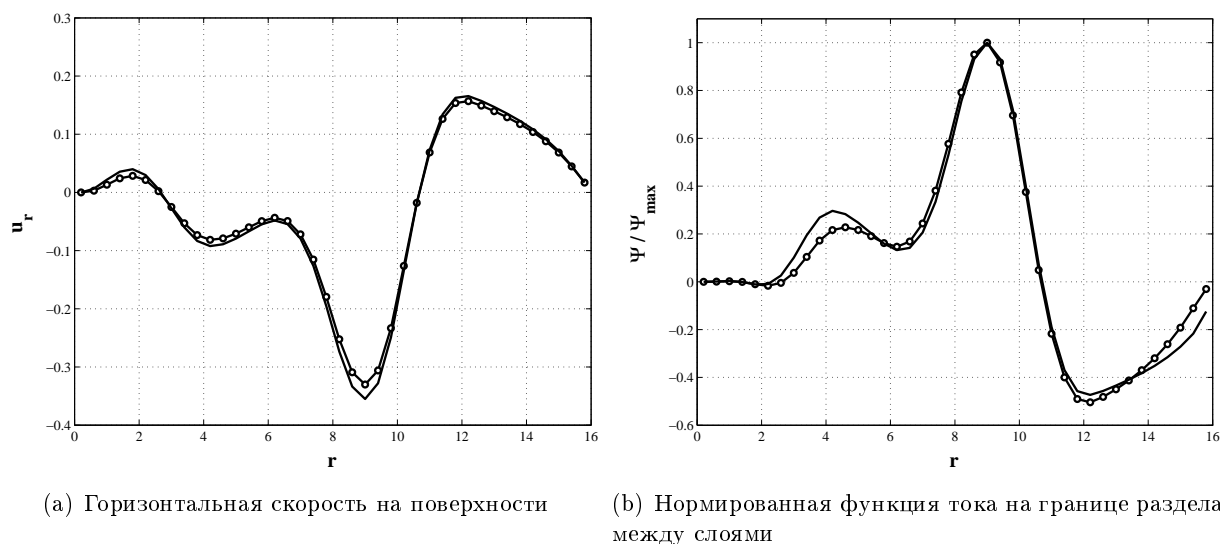
Для того чтобы выяснить, насколько модельные поля скоростей соответствуют реальным, на рисунке 5 совмещены графики модуля горизонтальной скорости и радиусы кольцевых хребтов, полученных из экспериментальных наблюдений [9].

Сравнение графиков показывает, что имеет место определенная корреляция между расположением экстремальных точек модуля горизонтальной скорости и радиусами кольцевых хребтов. Некоторые результаты расчета полей скоростей представлены в [10].

Таким образом, исходя из модельных расчетов можно сделать следующие выводы.

1. Модуль горизонтальной скорости на верхней границе и линии тока течения в верхнем слое слабо зависят от задания скоростей на нижней границе.

2. Наблюдается определенная корреляция между экстремальными точками модуля горизонтальной скорости на верхней границе и расположением кольцевых хребтов. В реальности эти хребты представляют собой кольцевые зоны разломов и образованы вулканическими излияниями через них. Вероятно, что эти разломные структуры должны каким-то образом от-



**Рис. 4.** Orientale. Линиями с маркерами обозначены графики для варианта с нулевой горизонтальной скоростью, без маркеров — с нулевой вертикальной скоростью

ражаться в особенностях поля скоростей. Конечно, вопрос о природе полученной корреляции требует дальнейших исследований, но уже сейчас она может служить достаточным основанием рассматривать модельные поля скоростей как хорошее приближение реальных.

## Заключение

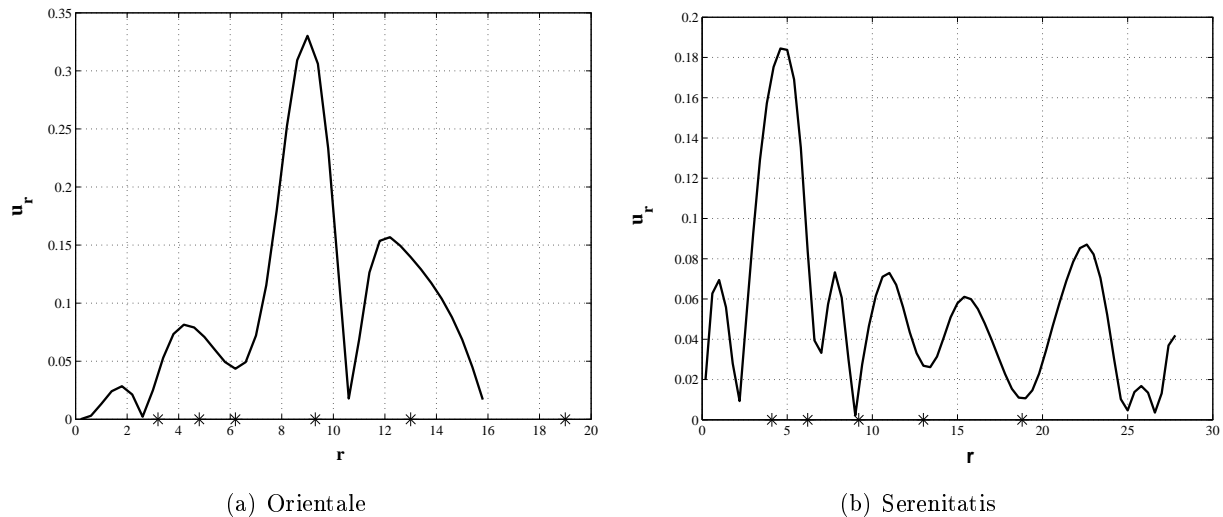
Проведено асимптотическое исследование системы нелинейных параболических уравнений, описывающих эволюцию осесимметричного медленного течения двухслойной вязкой жидкости со свободной границей, создаваемого начальным рельефом границ слоев со скоростями, задаваемыми на нижней границе. Получено асимптотическое уравнение, связывающее движения поверхности и границы раздела слоев жидкости и скорости на нижней границе на больших временах.

В качестве геофизических приложений полученных результатов построены модельные поля скоростей в коре крупномасштабных кольцевых структур на Луне. Показана слабая зависимость линия тока течения жидкости в верхнем слое от скоростей на нижней границе. Модельные расчеты показали соответствие между расположением кольцевых хребтов и экстремальными точками построенных полей скоростей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Craster R.V., Matar O.K. Dynamics and stability of thin liquid films // *Reviews of Modern Physics*. 2009. Vol. 81. № 3. P. 1131–1198.
2. Merkt D., Pototsky A., Bestehorn M. Long-wave theory of bounded two-layer films with a free liquid–liquid interface: Short- and long-time evolution // *Phys. Fluids*. 2005. Vol. 17. 064104.
3. Пак В.В. Нелинейная модель осесимметричного течения двухслойной вязкой жидкости со свободной поверхностью // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2010. Вып. 2. С. 91–100.
4. Пак В.В. Асимптотическое исследование трехслойного течения вязкой жидкости и некоторые геофизические приложения // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2011. Вып. 4. С. 107–115.
5. Найфэ А.Х. *Методы возмущений*. М.: Мир, 1976. 456 с.
6. Борисов В.Г. О параболических краевых задачах с малым параметром при производных по  $t$  // *Математический сборник*. 1986. Т. 131 (173). № 3 (11). С. 293–308.





**Рис. 5.** Линиями показана горизонтальная скорость на поверхности, а звездочками — расположения кольцевых хребтов

7. Теркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. Геологическое приложение физики сплошных сред. Т. 2. М.: Мир, 1985. 360 с.
8. Hikida H., Wiczorek M.A. Crustal thickness of the Moon: New constraints from gravity inversions using polyhedral shape models // *Icarus*. 2007. Vol. 192. P. 150–166.
9. Pike R.J., Spudis P.D. Basin-ring spacing on the Moon, Mercury, and Mars // *Earth, Moon, and Planets*. 1987. Vol. 39. P. 129–194.
10. Pak V.V. Modeling the velocity field of the axisymmetric two-layered flow // *Потоки и структуры в жидкостях: тез. докл. Междунар. конф., Российский государственный гидрометеорологический университет. Санкт-Петербург, 2013. С. 229–231.*

Поступила в редакцию 21.11.2013

Пак Владимир Васильевич, к. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, лаборатория геофизической гидродинамики, Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева, ДВО РАН, 690041, Россия, г. Владивосток, ул. Балтийская, 43.  
E-mail: pakvv@poi.dvo.ru

**V. V. Pak**

**Modeling the velocity field of two-layered creeping flow and some geophysical applications**

*Keywords:* multi-layered flow, long-wave approximation, Reynolds equations, nonlinear diffusion, ring structures.

Mathematical Subject Classifications: 76D50

We study the long-time evolution of axisymmetric free-surface two-layered creeping flow subject to the initial topography of its boundaries and bottom velocities. Each layer has uniform density and viscosity. The upper layer is assumed to have a smaller density than the lower layer. Based on lubrication approximation (the Reynolds equations) the nonlinear system of diffusion-type equations with respect to the surface and interface between the layers is obtained to describe this flow. Taking the dimensionless density contrast between the layers as a small parameter, we apply the method of asymptotic expansions to extract leading-term approximation for the slowly varying large-time evolution of the governing equations. An asymptotic equation relating both surface and interface displacement to the bottom velocities is derived. Based on this equation, we develop the algorithm to calculate velocity fields within layers for large time. Streamlines are used to

visualize the flow. Numerical results reveal stability of the streamlines in the upper layer under variation of the bottom velocity. As geophysical applications, the developed algorithm is used to evaluate the velocity field in the crust (the upper layer) beneath the large-scale lunar multi-ring basins influenced by deep movements in the underlying mantle (the lower layer). To validate the results of modeling, we compare the calculated velocity fields with basin ridge systems obtained by experimental observations. The model comparison has shown proximity of radii of basin rings and critical points of the surface velocity.

## REFERENCES

1. Craster R.V., Matar O.K. Dynamics and stability of thin liquid films, *Rev. of Modern Phys.*, 2009, vol. 81, no. 3, pp. 1131–1198.
2. Merkt D., Pototsky A., Bestehorn M. Long-wave theory of bounded two-layer films with a free liquid–liquid interface: Short- and long-time evolution, *Phys. Fluids*, 2005, vol. 17, 064104.
3. Pak V.V. The nonlinear model of axisymmetric free-surface two-layered creeping flow, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 2, pp. 91–100 (in Russian).
4. Pak V.V. An asymptotic study of three-layered creeping flow and some geophysical applications, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 4, pp. 107–115 (in Russian).
5. Nayfeh A.H. *Metody vozmushchenii* (Perturbation methods), Moscow: Mir, 1976, 456 p.
6. Borisov V.G. On parabolic boundary value problems with a small parameter on the derivatives with respect to  $t$ , *Math. USSR Sb.*, 1988, vol. 59, no. 2, pp. 287–302.
7. Turcotte D.L., Schubert, G. *Geodinamika. Geologicheskoe prilozhenie fiziki sploshnykh sred. Tom 2* (Geodynamics. Applications of Continuum Physics to Geological Problems. Vol. 2), Moscow: Mir, 1985, 360 p.
8. Hikida H., Wiczorek M.A. Crustal thickness of the Moon: New constraints from gravity inversions using polyhedral shape models, *Icarus*, 2007, vol. 192, pp. 150–166.
9. Pike R.J., Spudis P.D. Basin-ring spacing on the Moon, Mercury, and Mars, *Earth, Moon, and Planets*, 1987, vol. 39, pp. 129–194.
10. Pak V.V. Modeling the velocity field of the axisymmetric two-layered flow, *Fluxes and Structures in Fluids: Proceedings of Int. Conf.*, Russian Hydrometeorological State University, Saint-Petersburg, 2013, pp. 229–231.

Received 21.11.2013

Pak Vladimir Vasil'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Laboratory of Geophysical Hydrodynamics, V.I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. Baltiiskaya, 43, Vladivostok, 690041, Russia.  
E-mail: pakvv@poi.dvo.ru