УДК 517.926.4

© *Е. К. Макаров*

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КЛАССОВ МАЛОСТИ ВОЗМУЩЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Ряд задач в теории характеристических показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0,$$

сводится к изучению влияния возмущений коэффициентов на характеристические показатели и другие асимптотические инварианты возмущенных систем

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0.$$

При этом возмущения коэффициентов предполагаются принадлежащими некоторым классам малости, то есть определенным подмножествам множества $\mathrm{KC}_n(\mathbb{R}^+)$ кусочно-непрерывных и ограниченных на положительной полуоси $n \times n$-матриц. Обычно используемые классы возмущений, например бесконечно малые (исчезающие в бесконечности), экспоненциально убывающие либо суммируемые на полуоси, задаются конкретными аналитическими условиями, но общее определение класса малости в теории показателей отсутствует. На основе анализа свойств общепринятых классов малости нами предложено аксиоматическое определение класса малости возмущений коэффициентов линейных дифференциальных систем, которому удовлетворяет большинство таких классов, используемых в теории характеристических показателей. Это определение достаточно громоздко. Для более компактной характеристики классов малости предложено использовать следующее их свойство: множество возмущений удовлетворяет предложенному определению класса малости тогда и только тогда, когда оно является полной матричной алгеброй над произвольным нетривиальным идеалом кольца функций $\mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ (с поточечным умножением), содержащим хотя бы одну строго положительную функцию.

Ключевые слова: линейные системы, показатели Ляпунова, возмущения.

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной ограниченной матрицей коэффициентов A и матрицей Коши X_A. Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

с кусочно-непрерывной ограниченной матрицей возмущений Q. Для старшего показателя системы (2) будем использовать обозначение $\lambda_n(A+Q)$.

Одной из основных задач теории характеристических показателей Ляпунова является описание влияния возмущений коэффициентов, принадлежащих различным классам, на асимптотические свойства решений системы (2). При этом в большинстве случаев предполагается, что рассматриваемые возмущения являются малыми в том или ином смысле. Например, при вычислении величин $\Lambda(\mathfrak{M}) := \sup\{\lambda_n(A+Q) : Q \in \mathfrak{M}\}$, то есть достижимых верхних оценок для показателей системы (2) с возмущениями из заданного класса возмущений $\mathfrak{M}$, см. [1, с. 157], [2], [3, с. 46], [4], используются классы бесконечно малых [5],

$$Q(t) \to 0, \quad t \to +\infty, \tag{3}$$

и экспоненциально малых [6],

$$\|Q(t)\| \leqslant C(Q)\exp(-\sigma(Q)t), \quad C(Q) > 0, \quad \sigma(Q) > 0, \tag{4}$$

возмущений; классы σ-возмущений [7]:

$$\|Q(t)\| \leqslant C(Q)\exp(-\sigma t), \quad C(Q) > 0, \quad \sigma > 0; \tag{5}$$

классы степенных возмущений:

$$\|Q(t)\| \leqslant C(Q)t^{-\gamma}, \quad t > 0, \quad C(Q) > 0, \quad \gamma > 0; \tag{6}$$

их обобщений [8, 9]:

$$\|Q(t)\| \leqslant C(Q)\exp(-\sigma\theta(t)), \quad C(Q) > 0, \quad \sigma > 0, \tag{7}$$

$$\|Q(t)\| \leqslant C(Q)\exp(-\sigma(Q)\theta(t)), \quad C(Q) > 0, \quad \sigma(Q) > 0, \tag{8}$$

где θ — положительная функция, удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям; классы бесконечно малых в среднем [10] и суммируемых возмущений [11]:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \|Q(\tau)\|\,d\tau = 0, \quad \int_0^{+\infty}\|Q(t)\|\,dt < +\infty; \tag{9}$$

а также их весовые и степенные модификации [1, с. 309], [12–16]:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(\tau)\|Q(\tau)\|\,d\tau = 0; \quad \int_0^{+\infty}\varphi(t)\|Q(t)\|\,dt < +\infty, \tag{10}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(\tau)\|Q(\tau)\|^p\,d\tau = 0; \quad \int_0^{+\infty}\varphi(t)\|Q(t)\|^p\,dt < +\infty, \tag{11}$$

где $p > 1$, φ — вещественная функция, строго положительная на полуоси $t \geqslant 0$.

Во многих случаях [8, 9, 11, 13–16] для величины $\Lambda(\mathfrak{M})$ может быть построен алгоритм, аналогичный алгоритму вычисления сигма-показателя Н. А. Изобова [7]. В некоторых других случаях [5,6,8–10] имеют место формулы, сходные с формулой для вычисления центрального [1, с. 99], [2], [3, с. 48], [4] показателя

$$\Omega(A) = \lim_{T\to+\infty}\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{mT}\sum_{k=1}^{m}\ln\|X_A(kT, kT-T)\|, \tag{12}$$

определяемого так называемыми малыми возмущениями, которые, строго говоря, не образуют множества, аналогичного вышеперечисленным классам малости, а наделяются структурой фильтра. Классы малости возмущений $\mathfrak{M}$, для которых величина $\Lambda(\mathfrak{M})$ имеет представление, аналогичное формуле (12), в [8, 9] названы предельными.

В [17] поставлена задача получения условий, достаточных для того, чтобы рассматриваемый класс малости возмущений был предельным. Формулировка таких условий требует предварительного уточнения понятия класса малости возмущений. В настоящей работе предложено аксиоматическое определение класса малости, которому удовлетворяют все перечисленные выше общепринятые классы, а также установлены основные свойства семейств возмущений, удовлетворяющих введенному определению.

Прежде чем переходить к точным определениям, сформулируем минимальные естественные требования к понятию «класс малости», не противоречащие свойствам классов, перечисленных выше.

Линейная замена фазовых переменных с непрерывной кусочно-дифференцируемой обратимой при $t \geqslant 0$ матрицей L переводит систему (1) в систему

$$\dot z = [L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot L(t)]z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{13}$$

а систему (2) — в систему

$$\dot u = [L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot L(t)]u + L^{-1}(t)Q(t)L(t)u, \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0. \tag{14}$$

Сравнивая (13) и (14), нетрудно заметить, что в отличие от матрицы коэффициентов системы матрица возмущений коэффициентов под действием линейных преобразований фазового пространства подвергается поточечному сопряжению значениями матрицы преобразования. Если, кроме матрицы L, ограниченными на полуоси являются также обратная матрица L^{-1} и производная $\dot{L}$, то L называется матрицей Ляпунова [1, с. 245], [3, с. 138], а соответствующее ей преобразование — преобразованием Ляпунова. Объекты, изучаемые в теории характеристических показателей, как правило, инвариантны относительно преобразований Ляпунова, поэтому в качестве классов малости возмущений в этой теории естественно рассматривать семейства возмущений, обладающие таким свойством. Кроме того, очевидно, должны присутствовать некоторые условия типа монотонности, связанные с величиной рассматриваемых возмущений и обеспечивающие принадлежность данному классу всех возмущений, меньших, чем те, о которых известно, что они этому классу принадлежат. Наконец, в силу асимптотического характера теории показателей Ляпунова желательно, чтобы принадлежность любому заданному классу малости в наименьшей степени зависела от значений, принимаемых возмущением на конечных отрезках времени.

Пусть $S^{n\times n}$ — множество всех $n\times n$-матриц с элементами из некоторого заданного множества S, в частности, $\mathbb{R}^{n\times n}$ — пространство вещественных $n\times n$-матриц. Обозначим через $\mathrm{KC}_n(\mathbb{R}^+)$ линейное пространство всех ограниченных кусочно-непрерывных матриц-функций, определенных всюду на положительной полуоси $\mathbb{R}^+ := [0,+\infty[$ и принимающих значения в $\mathbb{R}^{n\times n}$. Очевидно, $\mathrm{KC}_n(\mathbb{R}^+) = \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)^{n\times n}$. Элементы $\mathrm{KC}_n(\mathbb{R}^+)$ будем называть возмущениями. В $\mathbb{R}^{n\times n}$, рассматриваемом как линейное векторное пространство, зафиксируем какую-либо норму $\|\cdot\|$. Эта норма (векторная норма) может не обладать свойством согласованности с мультипликативной структурой матричной алгебры. Для любого $Q\in\mathrm{KC}_n(\mathbb{R}^+)$ через $\|Q\|$ будем обозначать элемент $\gamma\in\mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$, определяемый равенством $\gamma(t)=\|Q(t)\|$ при всех $t\geqslant 0$. На множестве $\mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ введем отношение частичного порядка $\leqslant$ по обычному правилу: $\varphi\leqslant\beta$, если $\varphi(t)\leqslant\beta(t)$ при всех $t\geqslant 0$. В отношении строгих неравенств для функций $\gamma\in\mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ будем применять следующее соглашение: неравенство $\gamma>0$ выполнено тогда и только тогда, когда $\gamma(t)>0$ при всех $t\geqslant 0$ и все лево- и правосторонние пределы $\lim\limits_{t\to t_0\pm 0}\gamma(t)$ также положительны для любого $t_0\geqslant 0$. Поскольку все элементы $\mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ кусочно-непрерывны, неравенство $\gamma>0$, понимаемое в смысле этого соглашения, эквивалентно выполнению условия $\inf\limits_{t\in\Delta}\gamma(t)>0$ для любого конечного промежутка $\Delta\subset\mathbb{R}^+$. Функции, удовлетворяющие этому условию, будем называть строго положительными.

Определение 1. Под допустимым классом возмущений будем понимать произвольное множество $\mathfrak{M}\subset\mathrm{KC}_n(\mathbb{R}^+)$, удовлетворяющее следующим трем условиям.

A0. Множество $\mathfrak{M}$ непусто и не совпадает со всем $\mathrm{KC}_n(\mathbb{R}^+)$.

A1. Множество $\mathfrak{M}$ инвариантно относительно преобразований Ляпунова, то есть для любой матрицы $Q\in\mathfrak{M}$ и любой $n\times n$-матрицы Ляпунова L матрица $L^{-1}QL$ также принадлежит $\mathfrak{M}$.

A2. Если $Q\in\mathfrak{M}$, то все $P\in\mathrm{KC}_n(\mathbb{R}^+)$ такие, что $\|P(t)\|\leqslant\|Q(t)\|$ при всяком $t\geqslant 0$, также принадлежат $\mathfrak{M}$.

Заметим, что каждое из семейств возмущений (3)–(11) удовлетворяет условиям A0–A2.

Для произвольного множества $M\subset\mathrm{KC}_n(\mathbb{R}^+)$ введем в рассмотрение соответствующее ему множество ограничений $\mathfrak{B}(M) := \{\|Q\|\in\mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+) : Q\in M\}$. В свою очередь, для всякого множества $B\subset\mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ определим ограничиваемое им множество $n\times n$-матриц $\mathfrak{M}_n(B) := \{Q\in\mathrm{KC}_n(\mathbb{R}^+) : \|Q(t)\|\leqslant\beta(t),\ \beta\in B\}$. Нетрудно проверить, что $\mathfrak{M}_n(\mathfrak{B}(\mathfrak{M}))=\mathfrak{M}$ для всякого множества $\mathfrak{M}\subset\mathrm{KC}_n(\mathbb{R}^+)$, удовлетворяющего условию A2. Это означает, что допустимый класс и его множество ограничений однозначно определяют друг друга.

Утверждение 1. *Если $\mathfrak{M}$ — допустимый класс возмущений и $n\geqslant 2$, то для любых $Q\in\mathfrak{M}$ и $c\in\mathbb{R}$ справедливо включение $cQ\in\mathfrak{M}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $c = 0$, то $cQ \in \mathfrak{M}$, так как тождественно нулевая матрица содержится в $\mathfrak{M}$ в силу условий A0 и A2. Пусть $c \neq 0$. Возьмем любое возмущение $Q \in \mathfrak{M}$ и обозначим через $S = (s_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ матрицу, у которой $s_{1n} = 1$, а все остальные элементы нулевые. Положим $\nu = \|S\|$, $\beta(t) = \|Q(t)\|$ и $P(t) = \nu^{-1}\beta(t)S$. Тогда $\|P(t)\| = \beta(t)$ и в силу условия A2 имеем включение $P \in \mathfrak{M}$. Пусть теперь $L = \mathrm{diag}(c^{-1}, 1, \ldots, 1)$. Так как матрица L обратима и постоянна, она является матрицей Ляпунова, поэтому в силу условия A1 имеем включение $L^{-1}PL \in \mathfrak{M}$. Но $L^{-1}P(t)L = cP(t)$ и, следовательно, $\|L^{-1}P(t)L\| = |c|\beta(t) = \|cQ(t)\|$. Отсюда в силу условия A2 получаем, что $cQ \in \mathfrak{M}$.

Следствие 1. *Если $\mathfrak{M}$ — допустимый класс возмущений и $n \geqslant 2$, то при любых $\beta \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ и $c \geqslant 0$ для всякого $\varphi \in \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ такого, что $0 \leqslant \varphi \leqslant c\beta$, справедливо включение $\varphi \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\beta \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M})$. Тогда найдется такое $Q \in \mathfrak{M}$, что $\beta(t) = \|Q(t)\|$ при всех $t \geqslant 0$. Согласно утверждению 1 имеем $cQ \in \mathfrak{M}$, поэтому $c\beta = \|cQ\| \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ по определению $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$. Если φ удовлетворяет условиям утверждения, то для возмущения φE, где E — единичная матрица, справедлива оценка $\|\varphi(t)E\| = \varphi(t)\|E\| \leqslant c\beta(t)$ при $c = \|E\| > 0$. Так как $c\beta \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ при $c \geqslant 0$, в силу A2 имеем включение $\varphi E \in \mathfrak{M}$, откуда требуемое вытекает по определению $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$.

Замечание 1. Следствие 1 означает, что множество $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ является, во-первых, конусом и, во-вторых, наполненным множеством в смысле [18].

Утверждение 2. *Если $\mathfrak{M}$ — допустимый класс возмущений и $n \geqslant 2$, то множество $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ не зависит от выбора нормы $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^{n\times n}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть зафиксирована некоторая норма $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^{n\times n}$ и вычислено множество $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$. Покажем, для любой другой нормы $\|\cdot\|_1$ на этом же пространстве и любой матрицы $Q \in \mathfrak{M}$ выполнено включение $\|Q\|_1 \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M})$. Действительно, в силу эквивалентности всех норм на конечномерном векторном пространстве найдется такое число $c > 0$, что при всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство $\|Q(t)\|_1 \leqslant c\|Q(t)\|$. Так как функция $\|Q\|$ принадлежит $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$, то в силу следствия 1 функция $\|Q\|_1$ тоже принадлежит $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$. Учитывая произвольность выбора используемых норм, имеем требуемое.

Следствие 2. *Если $n \geqslant 2$ и $\mathfrak{M}$ — допустимый класс возмущений относительно некоторой нормы $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^{n\times n}$, то $\mathfrak{M}$ является таковым и относительно любой другой нормы на этом пространстве.*

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из равенства $\mathfrak{M}_n(\mathfrak{B}(\mathfrak{M})) = \mathfrak{M}$ и утверждения 2.

Если $n = 1$, то условие A1 тривиально, поскольку в скалярном случае $L^{-1}QL = Q$ для любой матрицы Ляпунова L и любого возмущения Q. Поэтому для одномерных допустимых классов в смысле определения 1 не выполняются ни утверждения 1 и 2, ни их следствия.

Пример 1. Множество $A = \{\varphi \in \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+) : |\varphi(t)| \leqslant 2\}$ удовлетворяет условиям A0–A2 и поэтому является допустимым классом в смысле определения 1. Тем не менее для любого ненулевого $\varphi \in A$ функция $c\varphi$ при всяком достаточно большом положительном $c \in \mathbb{R}$ не принадлежит A.

По этой причине в основу определения класса малости следует положить свойства множества $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$, искусственно распространив их на скалярный случай.

Определение 2. Под допустимым классом ограничений будем понимать произвольное множество $\mathfrak{B}$ неотрицательных функций из $\mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$, удовлетворяющее следующим трем условиям.

B0. Множество $\mathfrak{B}$ непусто и не совпадает со всем множеством неотрицательных функций из $\mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$.

B1. Множество $\mathfrak{B}$ является конусом, то есть $c\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$ для любого $c \geqslant 0$.

B2. Множество $\mathfrak{B}$ является наполненным множеством, то есть вместе со всяким своим элементом β содержит и все функции $\varphi \in \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ такие, что $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \beta(t)$ при $t \geqslant 0$.

Утверждение 3. *Если $\mathfrak{M} \subset \mathrm{KC}_n(\mathbb{R}^+)$ является допустимым классом возмущений и $n \geqslant 2$, то $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ — допустимый класс ограничений и $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n(\mathfrak{B}(\mathfrak{M}))$.*

Если $\mathfrak{B} \subset \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ является допустимым классом ограничений, то $\mathfrak{M}_n(\mathfrak{B})$ — допустимый класс возмущений при любом $n \geqslant 2$ и $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathfrak{M}_n(\mathfrak{B}))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\mathfrak{M}$ — допустимый класс возмущений и $n \geqslant 2$, то условия B1 и B2 выполнены для $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ в силу следствия 1. Непустота $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ вытекает из включения $0 \in \mathfrak{M}$, установленного при доказательстве утверждения 1. Совпадение же $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ со всем множеством неотрицательных функций из $\mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ невозможно, поскольку в этом случае в силу A2 выполнялось бы равенство $\mathfrak{M} = \mathrm{KC}_n(\mathbb{R}^+)$, противоречащее A0. Равенство $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n(\mathfrak{B}(\mathfrak{M}))$, как уже отмечалось выше, вытекает непосредственно из определений.

Если $\mathfrak{B}$ — допустимый класс ограничений, то при любом $n \geqslant 2$ справедливость условия A0 для $\mathfrak{M}_n(\mathfrak{B})$ вытекает из условия B0, а условия A2 — из условия B2. Покажем, что выполнено условие A1. Возьмем любое $Q \in \mathfrak{M}_n(\mathfrak{B})$ и произвольную матрицу Ляпунова L, а в качестве нормы $\|\cdot\|$ зафиксируем какую-либо матричную норму. Тогда найдутся такие $\beta \in \mathfrak{B}$ и $c > 0$, что $\|Q(t)\| \leqslant \beta(t)$ и $c \geqslant \max\{\|L^{-1}(t)\|, \|L(t)\|\}$ при всех $t \geqslant 0$. Отсюда и из оценки $\|L^{-1}(t)Q(t)L(t)\| \leqslant \|L^{-1}(t)\|\|L(t)\|\|Q(t)\| \leqslant c^2\beta(t)$ в силу условия B1 вытекает включение $\|L^{-1}QL\| \in \mathfrak{B}$, означающее по определению $\mathfrak{M}_n(\mathfrak{B})$, что $L^{-1}QL \in \mathfrak{M}$.

Доказательство равенства $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathfrak{M}_n(\mathfrak{B}))$ заключается в его непосредственной проверке исходя из определений множеств $\mathfrak{B}(M)$ и $\mathfrak{M}_n(B)$ и с учетом принадлежности возмущения βE классу $\mathfrak{M}_n(\mathfrak{B})$ при всяком $\beta \in \mathfrak{B}$. Утверждение 3 доказано.

Непосредственно из определения 2 вытекает

Утверждение 4. *Всякий допустимый класс ограничений содержит тождественно нулевую функцию и не содержит ненулевых констант. Пересечение любого набора допустимых классов ограничений является допустимым классом ограничений. Объединение какого-либо набора допустимых классов ограничений является допустимым классом ограничений в том и только том случае, когда оно не совпадает со всем $\mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$.*

Возьмем произвольное неотрицательное $\beta \in \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ и рассмотрим множество

$$\mathfrak{B}[\beta] := \bigcup_{c \geqslant 0} \{\varphi \in \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+) : 0 \leqslant \varphi \leqslant c\beta\}.$$

Иначе говоря, $\mathfrak{B}[\beta]$ состоит из неотрицательных кусочно-непрерывных функций, при всех $t \geqslant 0$ удовлетворяющих оценке $\varphi(t) \leqslant c_\varphi \beta(t)$ с константой c_φ, своей для каждого φ.

Утверждение 5. *Множество $\mathfrak{B}[\beta]$ является допустимым классом ограничений тогда и только тогда, когда $\inf\limits_{t \geqslant 0} \beta(t) = 0$. Если $\mathfrak{B}[\beta]$ является допустимым классом ограничений, то оно является минимальным по включению среди всех допустимых классов ограничений, содержащих β.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\inf\limits_{t \geqslant 0} \beta(t) = b > 0$, то константа $b > 0$ содержится в $\mathfrak{B}[\beta]$ и согласно утверждению 4 множество $\mathfrak{B}[\beta]$ не может быть допустимым классом ограничений. Если же $\inf\limits_{t \geqslant 0} \beta(t) = 0$, то $\inf\limits_{t \geqslant 0} \varphi(t) = 0$ для любого $\varphi \in \mathfrak{B}[\beta]$, поэтому $\mathfrak{B}[\beta] \neq \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$. Поскольку при этом $\beta \in \mathfrak{B}[\beta]$, условие B0 выполнено.

Пусть $\varphi \in \mathfrak{B}[\beta]$. Тогда найдется $c_\varphi \geqslant 0$ такое, что $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant c_\varphi \beta(t)$ при всех $t \geqslant 0$. Поэтому для любого $\gamma \in \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$, при всех $t \geqslant 0$ удовлетворяющего оценке $0 \leqslant \gamma(t) \leqslant \varphi(t)$, выполнено неравенство $0 \leqslant \gamma \leqslant c_\varphi \beta$, то есть $\gamma \in \mathfrak{B}[\beta]$, и значит, условие B2 выполнено. Кроме того, для любого $c > 0$ имеет место неравенство $0 \leqslant c\varphi \leqslant cc_\varphi \beta$, в силу которого $c\varphi \in \mathfrak{B}[\beta]$, что эквивалентно выполнению условия B1.

Если множество $\mathfrak{B}' \subset \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ является допустимым классом ограничений и содержит β, то в силу условий B1 и B2 оно должно содержать все функции $\varphi \in \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ такие, что при каком-либо $c \geqslant 0$ выполнено неравенство $0 \leqslant \varphi \leqslant c\beta$. Это означает, что $\mathfrak{B}' \supset \mathfrak{B}$. Утверждение 5 доказано.

Установленные свойства допустимых классов возмущений и ограничений достаточно хорошо соответствуют естественным представлениям о классах малости. Тем не менее существуют множества, удовлетворяющие определениям 1 и 2, но не являющиеся классами малости ни в каком разумном смысле.

Пример 2. Пусть $\beta_0(t) = |\sin \pi t|$. Тогда $\mathfrak{B}[\beta_0]$ содержит функции $C \sin \pi t$ с произвольно большими амплитудами $C > 0$, что не позволяет считать это множество классом малости. В силу утверждения 3 множества $\mathfrak{M}_n(\mathfrak{B}[\beta_0])$ при $n \geqslant 2$ являются допустимыми классами возмущений. Их также, очевидно, нельзя считать классами малости. Заметим, что все функции, входящие в $\mathfrak{B}[\beta_0]$, обращаются в 0 в точках множества $\mathbb{N}$.

Пример 3. При каждом $k \in \mathbb{N}$ определим функции β_k равенствами $\beta_k(t) = 1$ при $t \in [k-1, k[$ и $\beta_k(t) = 0$ — во всех остальных случаях. Пусть $\mathrm{A} = 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\mathbb{N}\}$ — множество всех подмножеств множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, не совпадающих со всем $\mathbb{N}$. Для любого $\alpha \in \mathrm{A}$ положим $\beta_\alpha = \sum\limits_{k \in \alpha} \beta_k$ и рассмотрим множество

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathfrak{B}[\beta_\alpha].$$

Поскольку $\mathbb{N} \notin \mathrm{A}$, то $\mathfrak{B}$ не содержит ненулевых констант, и поэтому $\mathfrak{B} \neq \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$. Это означает, что множество $\mathfrak{B}$ является допустимым классом ограничений. При этом у элементов $\mathfrak{B}$ не существует общего множества нулей, но они есть у элементов каждого из $\mathfrak{B}[\beta_\alpha]$.

Учитывая связь наличия общих нулей в семействах функций со стандартной конструкцией идеалов в функциональных кольцах и полугруппах, рассмотрим соотношение между допустимыми классами ограничений и идеалами в алгебраических структурах на $\mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$.

Множество $\mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ с операциями поточечного сложения и умножения является коммутативным кольцом с единицей. Это кольцо будем обозначать через K_1, а полугруппу неотрицательных элементов K_1 с операцией поточечного умножения — через K_+^*. Напомним, что подмножество I коммутативной полугруппы P называется ее идеалом [19, с. 193], если выполнено включение $PI \subset I$. Если при этом $I \neq \varnothing$ и $I \neq P$, то I называется нетривиальным идеалом.

Утверждение 6. *Произвольный допустимый класс ограничений $\mathfrak{B}$ является нетривиальным идеалом полугруппы K_+^*.*

Произвольный нетривиальный идеал I полугруппы K_+^*, удовлетворяющий условию B2, является допустимым классом ограничений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{B}$ — допустимый класс ограничений. Возьмем любые $\beta \in \mathfrak{B}$ и $\varphi \in \mathrm{K}_+^*$. Так как функция φ ограничена, имеем $c = \sup\limits_{t \geqslant 0} \varphi(t) < +\infty$. Тогда при всех $t \geqslant 0$ справедливы неравенства $0 \leqslant \varphi(t)\beta(t) \leqslant c\beta(t)$. Отсюда в силу B1 и B2 получаем, что $\varphi\beta \in \mathfrak{B}$, то есть $\mathrm{K}_+^* \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$. Нетривиальность $\mathfrak{B}$ следует из B0.

Пусть I — нетривиальный идеал в K_+^*. Тогда условие B0 выполнено автоматически, а B2 — по условию утверждения. Выполнение B1 следует из того, что неотрицательные константы содержатся в K_+^*. Утверждение 6 доказано.

Необходимость условия B2 в утверждении 6 обусловлено тем, что допустимые классы ограничений по сравнению с идеалами содержат «лишние» элементы, появляющиеся из-за наличия у функций, входящих в рассматриваемое множество, общих нулей.

Пример 4. Пусть $\beta_1(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\beta_1(t) = 1$ при $t \geqslant 2$ и $\beta_1(t) = t - 1$ при $1 \leqslant t \leqslant 2$. Сравним множество $\mathfrak{B}[\beta_1]$ и главный идеал $\beta_1\mathrm{K}_+^*$ полугруппы K_+^* [19, с. 212].

Функция
$$\varphi(t) = \beta_1(t) \sin \frac{1}{t-1},$$
доопределенная при $t = 1$ равенством $\varphi(1) = 0$, содержится в $\mathfrak{B}[\beta_1]$, поскольку она непрерывна на $\mathbb{R}^+$ и удовлетворяет оценке $\varphi \leqslant \beta_1$. В то же время $\varphi \notin \beta_1\mathrm{K}_+^*$, так как частное $\varphi(t)/\beta_1(t)$ определено лишь при $t > 1$ и не может быть продолжено на отрезок $[0, 1]$ с сохранением кусочной непрерывности из-за несуществования предела при $t \to 1 + 0$.

Учитывая сказанное, введем дополнительное ограничение на рассматриваемые классы функций, исключающее такие случаи. Будем говорить, что множество $B \subset \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ удовлетворяет условию мажорирования, если выполнено условие B3.

B3. Для любого $\beta \in B$ во множестве B найдется строго положительная мажоранта, то есть такой элемент $\gamma \in B$, что выполнены неравенства $\gamma \geqslant \beta$ и $\gamma > 0$.

Утверждение 7. *Произвольный нетривиальный идеал I полугруппы K_+^*, удовлетворяющий условию мажорирования, является допустимым классом ограничений.*

Доказательство. Пусть I — нетривиальный идеал в K_+^*. В силу утверждения 6 достаточно проверить выполнение условия B2. Возьмем любое $\beta \in I$ и найдем элемент $\gamma \in I$, существование которого утверждается условием B3. Тогда для произвольного $\varphi \in \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$, такого, что $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \beta(t)$ при всех $t \geqslant 0$, частное $\eta(t) = \varphi(t)/\gamma(t)$ определено при всех $t \geqslant 0$, удовлетворяет оценке $0 \leqslant \eta(t) \leqslant 1$ и принадлежит $\mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$. Следовательно, $\eta \in \mathrm{K}_+^*$ и, поскольку B — идеал в K_+^*, произведение $\varphi = \gamma\eta$ лежит в $BK_+^* \subset B$, то есть условие B2 выполнено. Утверждение 7 доказано.

Условие мажорирования не только гарантирует отсутствие общих нулей у удовлетворяющего ему множества функций, но и приводит к выполнению последнего из трех сформулированных в начале статьи требований к классу малости, то есть к независимости принадлежности функции любому заданному классу малости от ее поведения на всяком конечном отрезке.

Утверждение 8. *Пусть $\mathfrak{B}$ — допустимый класс ограничений, удовлетворяющий условию мажорирования, и $\beta \in \mathfrak{B}$. Тогда любая функция $\mu \in \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$, такая, что $\mu(t) = \beta(t)$ при всех достаточно больших t, принадлежит $\mathfrak{B}$.*

Доказательство. Найдем элемент $\gamma \in \mathfrak{B}$, мажорирующий элемент β согласно условию B3, и для всякого числа $T > 0$ положим $\Gamma(T) = \inf\limits_{t\in[0,T]} \gamma(t)$, $M(T) = \sup\limits_{t\in[0,T]} \mu(t)$. Поскольку $\gamma > 0$, имеем соотношение $\Gamma(T) > 0$, что позволяет определить число $q = \max\{1, M/\Gamma\}$. Тогда справедливы оценки $q\gamma \geqslant \gamma \geqslant \beta$ и $q\gamma(t) \geqslant M(T)\gamma(t)/\Gamma(T) \geqslant M(T) \geqslant \mu(t)$ при $t \in [0, T]$. Если $\mu(t) = \beta(t)$ при всех $t > T$, то отсюда вытекает неравенство $q\gamma \geqslant \mu$. Но $q\gamma \in \mathfrak{B}$ согласно B1, и поэтому $\mu \in \mathfrak{B}$ в силу B2. Утверждение 8 доказано.

Замечание 2. Сама по себе независимость принадлежности функции рассматриваемому классу от ее поведения на всяком конечном отрезке не исключает патологии, связанные с наличием общих нулей, примеры которых приведены выше. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть семейство всех функций из $\mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$, совпадающих с элементами $\mathfrak{B}[\beta_0]$ из примера 2 в окрестности $+\infty$.

Нетрудно проверить, что любой допустимый класс ограничений вместе с каждой парой своих элементов β и γ содержит в силу условия B2 их минимум $\beta\wedge\gamma$, $(\beta\wedge\gamma)(t) := \min\{\beta(t),\gamma(t)\}$, но может не содержать их максимум $\beta\vee\gamma$, $(\beta\vee\gamma)(t) := \max\{\beta(t),\gamma(t)\}$, и сумму $\beta+\gamma$.

Пример 5. Пусть B_1 состоит из суммируемых на положительной полуоси элементов K^*_+, а B_2 — из элементов K^*_+, удовлетворяющих при $t>1$ оценке $0\leqslant\varphi(t)\leqslant c_\varphi t^{-1/2}$ с некоторым $c_\varphi>0$. Каждое из этих множеств, очевидно, является допустимым классом ограничений, поэтому согласно утверждению 4 их объединение $\mathfrak{B}=B_1\cup B_2$ тоже допустимый класс ограничений. Зададим функцию γ равенством $\gamma(t)=t^{-1/2}$ при $t\geqslant 1$ и равенством $\gamma(t)=1$ при $0\leqslant t\leqslant 1$, а функцию β условиями $\beta(t)=1$ при $t\in[k,k+2^{-k}]$, $k\in\mathbb{N}$, и $\beta(t)=0$ во всех остальных случаях. Поскольку $\beta(t)\not\to 0$ при $t\to+\infty$ и

$$\int_0^{+\infty}\gamma(t)\,dt=+\infty,\quad \int_0^{+\infty}\beta(t)\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}=1,$$

имеем включения $\beta\in B_1$, $\beta\notin B_2$, $\gamma\in B_2$ и $\gamma\notin B_1$, а также, очевидно, $\beta+\gamma\notin B_1\cup B_2$ и $\beta\vee\gamma\notin B_1\cup B_2$.

Пусть $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_2(\mathfrak{B})$. Если $\|Q\|=\max\limits_{i,j}|q_{ij}|$ и $Q_0=\mathrm{diag}(\beta,\gamma)$, то $\|Q_0\|=\beta\vee\gamma\notin\mathfrak{B}$, и поэтому $Q_0\notin\mathfrak{M}$, то есть оба ненулевых элемента диагональной матрицы Q_0 должны принадлежать одному и тому же множеству: либо B_1, либо B_2. Возьмем теперь произвольную матрицу $Q\in\mathfrak{M}$ с неотрицательными элементами. Тогда $\|Q\|\in\mathfrak{B}$ и $\|Q\|\geqslant q_{ij}$ при всех $i,j\in\{1,2\}$. Если при этом $\|Q\|\in B_1$, то и все q_{ij} принадлежат B_1 в силу условия B2. Если же $\|Q\|\in B_2$, то $q_{ij}\in B_2$ при всех $i,j\in\{1,2\}$. Отсюда вытекает, что $Q\in B_1^{2\times 2}$ или $Q\in B_2^{2\times 2}$. Аналогичное рассуждение справедливо и в том случае, когда элементы матрицы Q могут менять знак. Это показывает, что компоненты B_1 и B_2 целесообразно рассматривать по отдельности.

Утверждение 9. *Если $\mathfrak{B}$ — допустимый класс ограничений, то следующие условия равносильны: а) класс $\mathfrak{B}$ замкнут относительно операции поточечного сложения своих элементов; б) класс $\mathfrak{B}$ замкнут относительно операции взятия поточечного максимума своих элементов; в) множество $\mathfrak{b}=\mathfrak{B}-\mathfrak{B}$ является идеалом кольца K_1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о равносильности а) и б) вытекает из условия B2 и очевидных неравенств

$$\max\{\beta(t),\gamma(t)\}\leqslant\beta(t)+\gamma(t)\leqslant 2\max\{\beta(t),\gamma(t)\},$$

справедливых для всех неотрицательных функций.

Пусть множество $\mathfrak{b}$ является идеалом кольца K_1. Возьмем любое неотрицательное $\varphi\in\mathfrak{b}$. По определению $\mathfrak{b}$ найдутся такие $\beta_1,\beta_2\in\mathfrak{B}$, для которых $\varphi=\beta_1-\beta_2$. Тогда при всех $t\geqslant 0$ справедливы неравенства $0\leqslant\varphi(t)=\beta_1(t)-\beta_2(t)\leqslant\beta_1(t)$, означающие в силу условия B2, что $\varphi\in\mathfrak{B}$. С другой стороны, всякий элемент $\beta\in\mathfrak{B}$ представим в виде $\beta=\beta-0$, и поэтому $\beta\in\mathfrak{b}$. Таким образом, $\mathfrak{B}$ совпадает с множеством неотрицательных элементов $\mathfrak{b}$. Так как идеал кольца — подкольцо, отсюда получаем замкнутость $\mathfrak{B}$ относительно сложения. Доказательство обратной импликации сводится к непосредственной проверке условий определения идеала кольца для $\mathfrak{b}$.

Определение 3. Допустимый класс ограничений, замкнутый относительно операции поточечного сложения своих элементов, будем называть элементарным классом.

Пример 6. При любом $\beta\in\mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ множество $\mathfrak{B}[\beta]$ является элементарным классом.

Следствие 3. *Пересечение любого набора элементарных классов является элементарным классом. Сумма любого конечного числа элементарных классов является элементарным классом в том и только том случае, когда она не совпадает со всем $\mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ — элементарные классы. Покажем, что для множества $\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$ выполнено условие B2. Возьмем произвольное $\varphi \in \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$ и любое $\gamma \in \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$, такое, что $0 \leqslant \gamma \leqslant \varphi$. Представим φ в виде $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где $\varphi_1 \in \mathfrak{E}_1$ и $\varphi_2 \in \mathfrak{E}_2$, и положим $\gamma_1 = \varphi_1 \wedge \gamma \leqslant \varphi_1$ так, что $\gamma_1 \in \mathfrak{E}_1$. Тогда $\gamma_2 = \gamma - \gamma_1$ удовлетворяет оценкам $\gamma_2 = \gamma - (\varphi_1 \wedge \gamma) \geqslant 0$ и $\gamma_2 = (\gamma - \varphi_1) \vee 0 \leqslant (\varphi - \varphi_1) \vee 0 = \varphi_2$, в силу которых $\gamma_2 \in \mathfrak{E}_2$ и $\gamma \in \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$. Оставшаяся часть утверждения вытекает непосредственно из определения 3 и утверждения 4.

Утверждение 10. *Пусть $\mathfrak{E}$ — элементарный класс. Тогда множество $\mathfrak{e} = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}$ состоит из всех элементов $\varphi \in \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$, удовлетворяющих оценке $|\varphi| \leqslant \beta$ при каком-либо $\beta \in \mathfrak{E}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\varphi \in \mathfrak{e}$, то найдутся такие $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{E}$, что $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Отсюда имеем оценку $|\varphi| \leqslant \varphi_1 + \varphi_2$, причем $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathfrak{E}$, поскольку элементарный класс $\mathfrak{E}$ замкнут относительно сложения своих элементов. Пусть теперь для $\varphi \in \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ справедлива оценка $|\varphi| \leqslant \beta$ при каком-либо $\beta \in \mathfrak{E}$. Положим $\varphi_1 = \varphi \vee 0$ и $\varphi_2 = -\varphi \wedge 0$. Тогда $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ и $|\varphi| = \varphi_1 + \varphi_2$, причем $\varphi_1, \varphi_2 \geqslant 0$. Отсюда следует, что $\varphi_1, \varphi_2 \leqslant \beta$, а поскольку, очевидно, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$, то $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{E}$ и $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \in \mathfrak{E} - \mathfrak{E}$. Утверждение 10 доказано.

Пусть $\mathcal{A} \subset \mathrm{K}_+^*$ — произвольное подмножество. Наименьший элементарный класс $\mathfrak{E}[\mathcal{A}]$, содержащий $\mathcal{A}$, будем называть элементарным классом, порожденным этим множеством. Если число элементов множества $\mathcal{A}$ конечно, порожденный им элементарный класс будем называть конечно порожденным.

Утверждение 11. *Любой конечно порожденный элементарный класс порождается одним своим элементом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{A} = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$. Тогда $\gamma := \beta_1 + \ldots + \beta_m \in \mathfrak{E}(\mathcal{A})$, поскольку $\mathfrak{E}[\mathcal{A}]$ замкнут относительно сложения, и поэтому $\mathfrak{E}[\gamma] \subset \mathfrak{E}[\mathcal{A}]$. С другой стороны, $\gamma \geqslant \beta_i$ при каждом $i = 1, \ldots, m$, и в силу B2 имеем включение $\mathcal{A} \subset \mathfrak{E}[\gamma]$. Так как $\mathfrak{E}[\mathcal{A}]$ — наименьший элементарный класс, содержащий $\mathcal{A}$, то $\mathfrak{E}[\gamma] \supset \mathfrak{E}[\mathcal{A}]$. Таким образом, $\mathfrak{E}[\gamma] = \mathfrak{E}[\mathcal{A}]$ и утверждение 11 доказано.

Существуют и элементарные классы, отличные классов вида $\mathfrak{E}[\beta]$. Они, естественно, не являются конечно порожденными.

Пример 7. Класс экспоненциально малых возмущений (4) задается элементарным классом экспоненциально малых функций $0 \leqslant \beta(t) \leqslant C(Q)\exp(-\sigma(Q)t)$, где $C(Q) > 0$, $\sigma(Q) > 0$, который порождается последовательностью экспонент $\exp(-t/k)$, $k \in \mathbb{N}$, то есть является счетно порожденным. Классы бесконечно малых, бесконечно малых в среднем и суммируемых на полуоси функций, соответствующие классам возмущений (3) и (9), также не являются конечно порожденными.

Поскольку при любом $\beta \in \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ множество $\mathfrak{B}[\beta]$ является элементарным классом, оно совпадает с $\mathfrak{E}[\beta]$. Отсюда следует, что всякий допустимый класс ограничений представим в виде объединения элементарных классов

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{\beta \in \mathfrak{B}} \mathfrak{B}[\beta] = \bigcup_{\beta \in \mathfrak{B}} \mathfrak{E}[\beta].$$

Элементарный класс, не содержащийся ни в каком более широком элементарном классе, будем называть максимальным. Непосредственно из определений и следствия 3 вытекает следующее

Утверждение 12. *Любой допустимый класс ограничений $\mathfrak{B}$ представим в виде объединения максимальных элементарных классов*

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{E}_\alpha, \tag{15}$$

где A — некоторое множество индексов, причем $(\mathfrak{E}_{\alpha_1} + \mathfrak{E}_{\alpha_2}) \setminus \mathfrak{B} \neq \varnothing$ для любой пары индексов $\alpha_1, \alpha_2 \in A$.

Утверждение 13. *Пусть $\mathfrak{E}$ — элементарный класс. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $\mathfrak{M}_n(\mathfrak{E}) = \mathfrak{e}^{n\times n}$, где $\mathfrak{e} = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\|Q\| = \bigvee_{i,j=1}^{n} |q_{ij}|$. Если $Q \in \mathfrak{M}_n(\mathfrak{E})$, то $\|Q\| \in \mathfrak{E}$ и, поскольку $|q_{ij}| \leqslant \|Q\|$ при всех $i, j = 1, \ldots, n$ в силу B2 имеем включения $|q_{ij}| \in \mathfrak{E}$. Тогда $q_{ij} \in \mathfrak{e}$, и поэтому $Q \in \mathfrak{e}^{n\times n}$. Если $Q \in \mathfrak{e}^{n\times n}$, то $\|Q\| \in \mathfrak{E}$ в силу утверждения 9, поскольку $\mathfrak{E}$ — элементарный класс. Но тогда $Q \in \mathfrak{M}_n(\mathfrak{E})$. Утверждение 13 доказано.

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{M} \subset \mathrm{KC}_n(\mathbb{R}^+)$ — допустимый класс возмущений и $n \geqslant 2$. Тогда имеет место представление*
$$\mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha\in A} \mathfrak{e}_\alpha^{n\times n},$$
в котором $\mathfrak{e}_\alpha = \mathfrak{E}_\alpha - \mathfrak{E}_\alpha$, а максимальные элементарные классы $\mathfrak{E}_\alpha$ определяются разложением (15) *для $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathfrak{M})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n(\mathfrak{B}(\mathfrak{M}))$, то из (15) вытекает представление
$$\mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha\in A} \mathfrak{M}_n(\mathfrak{E}_\alpha),$$
которое в силу утверждения 12 дает требуемое.

Доказанные утверждения приводят нас к следующим определениям.

Определение 4. Множество $\mathfrak{s} \subset \mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ будем называть (одномерным) классом малости, если оно представимо в виде $\mathfrak{s} = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}$, где $\mathfrak{E}$ — элементарный класс, удовлетворяющий условию мажорирования.

Определение 5. Множество $\mathfrak{S} \subset \mathrm{KC}_n(\mathbb{R}^+)$ будем называть классом малости, если оно представимо в виде $\mathfrak{S} = \mathfrak{s}^{n\times n}$, где $\mathfrak{s}$ — одномерный класс малости.

Теорема 1. *Одномерными классами малости являются нетривиальные идеалы кольца K_1, содержащие строго положительную функцию, и только они.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\gamma \in \mathrm{K}_1$ и $\gamma > 0$, то для любого элемента $\varphi \in \mathrm{K}_1$ строго положительная мажоранта имеет вид $\varphi + \gamma$. Всякий класс малости является идеалом кольца K_1 в силу утверждения 6. Всякий нетривиальный идеал кольца K_1, удовлетворяющий условию мажорирования, является классом малости в силу утверждения 7. Для завершения доказательства остается убедиться, что все прочие условия определений выполнены автоматически.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
2. Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1974. Т. 12. С. 71–146.
3. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006. 320 с.
4. Миллионщиков В.М. Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10. № 1. С. 99–104.
5. Сергеев И.Н. Точные верхние границы подвижности показателей Ляпунова системы дифференциальных уравнений и поведение показателей при возмущениях, стремящихся к нулю на бесконечности // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 3. С. 438–448.
6. Изобов Н.А. Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 1. С. 5–8.
7. Изобов Н.А. О старшем показателе линейной системы с экспоненциальными возмущениями // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1186–1192.

8. Барабанов Е.А. О крайних показателях Ляпунова линейных систем при экспоненциальных и степенных возмущениях // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 2. С. 357.
9. Барабанов Е.А. Точные границы крайних показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциальных и степенных возмущениях: автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук. Минск, 1984. 16 с.
10. Сергеев И.Н. Точные границы подвижности показателей Ляпунова линейных систем при малых в среднем возмущениях // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1986. Т. 11. С. 32–73.
11. Барабанов Е.А., Вишневская О.Г. Точные границы показателей Ляпунова линейной дифференциальной системы с интегрально ограниченными на полуоси возмущениями // Докл. АН Беларуси. 1997. Т. 41. № 5. С. 29–34.
12. Гробман Д.М. Характеристические показатели систем, близких к линейным // Матем. сборник. 1952. Т. 30. № 1. С. 121–166.
13. Макаров Е.К., Марченко И.В., Семерикова Н.В. Об оценке сверху для старшего показателя линейной дифференциальной системы с интегрируемыми на полуоси возмущениями // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 215–224.
14. Марченко И.В. Точная граница подвижности вверх старшего показателя линейной системы при возмущениях, малых в среднем с весом // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 10. С. 1416–1418.
15. Макаров Е.К., Марченко И.В. Об алгоритме построения достижимых верхних границ для старшего показателя возмущенных систем // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 12. С. 1621–1634.
16. Кожуренко Н.В., Макаров Е.К. О достаточных условиях применимости алгоритма вычисления сигма-показателя для интегрально ограниченных возмущений // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 2. С. 203–211.
17. Макаров Е.К. К вопросу о предельных классах возмущений // Еругинские чтения–2013: тез. докл. XV Междунар. научн. конф. по дифференциальным уравнениям. Ч. 1. ГрГУ. Минск. 2013. С. 36–37.
18. Макаров Е.К. Об отображениях абстрактных линейных систем // Труды Института математики НАН Беларуси. Минск. 2000. Т. 4. С. 102–108.
19. Ляпин Е.С. Полугруппы. М.: ГИФМЛ, 1960. 592 с.

Поступила в редакцию 20.12.2013

Макаров Евгений Константинович, заведующий отделом дифференциальных уравнений, Институт математики НАН Беларуси, 220072, Беларусь, г. Минск, ул. Сурганова, 11.
E-mail: jcm@im.bas-net.by

E. K. Makarov
Axiomatic representation for smallness classes of coefficient perturbations to linear differential systems

Keywords: linear systems, Lyapunov exponents, perturbations.

Mathematical Subject Classifications: 34D08, 34E10

A number of problems in the Lyapunov exponent theory of linear differential systems

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0,$$

can be reduced to an investigation of the influence of coefficient perturbations on characteristic exponents and other asymptotic invariants of perturbed systems

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0.$$

Here perturbations are assumed to be in some classes of smallness, i.e. certain subsets of the space $\mathrm{KC}_n(\mathbb{R}^+)$ of piecewise continuous and bounded on the positive semiaxis $n \times n$-matrices. Commonly used classes of perturbations, such as infinitesimal (vanishing at infinity), exponentially decaying or integrable on the positive semiaxis are defined by specific analytical conditions, but there is no general definition of the smallness class. By analyzing the desirable properties of commonly used classes, we propose an axiomatic definition for this

notion, such that most of classes used in the theory of characteristic exponents satisfy this definition. Since the axioms are somewhat cumbersome, for more compact characterization we propose to use the following property of smallness classes: the set of perturbation satisfies the proposed definition if and only if it is a complete matrix algebra over an arbitrary non-trivial ideal of functional ring $\mathrm{KC}_1(\mathbb{R}^+)$ (with the pointwise multiplication) containing at least one strictly positive function.

REFERENCES

1. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti* (Theory of Lyapunov exponents and its application to problems of stability), Moscow: Nauka, 1966, 576 p.

2. Izobov N.A. Linear systems of ordinary differential equations, *Itogi Nauki i Tekhniki. Mat. Analiz*, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. Tekhn. Informatsii, Moscow, 1974, vol. 12, pp. 71–146 (in Russian).

3. Izobov N.A. *Lyapunov exponents and stability*, Cambridge: Cambridge scientific publishers, 2012, 352 p.

4. Millionshchikov V.M. A proof of accessibility of the central exponents of linear systems, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 1969, vol. 10, no. 1, pp. 99–104 (in Russian).

5. Sergeev I.N. Sharp upper bounds of mobility of the Lyapunov exponents of a system of differential equations and the behavior of the exponents under perturbations approaching zero at infinity, *Differ. Uravn.*, 1980, vol. 16, no. 3, pp. 438–448 (in Russian).

6. Izobov N.A. Exponential indices of a linear system and their calculation, *Dokl. Akad. Nauk BSSR*, 1982, vol. 26, no. 1, pp. 5–8 (in Russian).

7. Izobov N.A. The highest exponent of a linear system with exponential perturbations, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 7, pp. 1186–1192 (in Russian).

8. Barabanov E.A. On the extreme Lyapunov exponents of linear systems with exponential and power perturbations, *Differ. Uravn.*, 1984, vol. 20, no. 2, p. 357 (in Russian).

9. Barabanov E.A. The exact boundaries of the extreme Lyapunov exponents of linear differential systems with exponential and power perturbations, *Abstract of Cand. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation*, Minsk, 1984, 16 p (in Russian).

10. Sergeev I.N. Sharp bounds on mobility of the Lyapunov exponents of linear systems under small average perturbations, *Tr. Semin. Im. I.G. Petrovskogo*, 1986, vol. 11, pp. 32–73 (in Russian).

11. Barabanov E.A., Vishnevskaya O.G. Sharp bounds for Lyapunov exponents of a linear differential system with perturbations integrally bounded on the half-line, *Dokl. Akad. Nauk Belarusi*, 1997, vol. 41, no. 5, pp. 29–34 (in Russian).

12. Grobman D.M. Characteristic exponents of systems near to linear ones, *Mat. Sbornik*, 1952, vol. 30 (72), no. 1, pp. 121–166 (in Russian).

13. Makarov E.K., Marchenko I.V., Semerikova N.V. On an upper bound for the higher exponent of a linear differential system with integrable perturbations on the half-line, *Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 2, pp. 227–237.

14. Marchenko I.V. The sharp upper bound on the mobility of the highest exponent of a linear system under perturbations whose weighted mean is small, *Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 10, pp. 1493–1495.

15. Makarov E.K., Marchenko I.V. On an algorithm for constructing an attainable upper boundary for the higher exponent of perturbed systems, *Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 12, pp. 1694–1709.

16. Kozhurenko N.V., Makarov E.K. On sufficient conditions for the applicability of an algorithm for the computation of the sigma-exponent to integrally bounded perturbations, *Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 2, pp. 208–217.

17. Makarov E.K. On the limit classes of perturbations, *Erugin readings–2013: Abstracts of XV International Scientific Conference on Differential Equations*, Grodno State University, Minsk, 2013, Part 1, pp. 36–37 (in Russian).

18. Makarov E.K. On mappings of abstract linear systems, *Tr. Inst. Mat. Natl. Akad. Nauk Belarusi*, 2000, vol. 4, pp. 102–108 (in Russian).

19. Lyapin E.S. *Polugruppy* (Semi-groups), Moscow: Gos. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., 1960, 592 p.

Received 20.12.2013

Makarov Evgenii Konstantinovich, Head of the Department of Differential Equations, Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, ul. Surganova, 11, Minsk, 220072, Belarus.
E-mail: jcm@im.bas-net.by