УДК 539.311

© *Н. П. Лазарев*

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО, СОДЕРЖАЩЕЙ ТРЕЩИНУ ВДОЛЬ ТОНКОГО ЖЕСТКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ[1]

Исследуются задачи о равновесии трансверсально-изотропной пластины с жесткими включениями. Предполагается, что пластина деформируется в рамках гипотез классической теории упругости. Задачи формулируются в виде минимизации функционала энергии пластины на выпуклом и замкнутом подмножестве пространства Соболева. Установлено, что предельный переход по геометрическому параметру в задачах о равновесии пластины с объемным включением приводит к задаче о пластине с тонким жестким включением. Исследован также случай отслоения тонкого жесткого включения — когда трещина в пластине расположена вдоль одного из берегов включения. В задаче о пластине с отслоившимся тонким включением на трещине задается нелинейное условие непроникания. Это условие имеет вид неравенства (типа Синьорини) и описывает взаимное непроникание противоположных берегов трещины. Для задачи с отслоившимся включением, при достаточной гладкости решения, установлена эквивалентность вариационной и дифференциальной формулировок. Также получены соотношения, описывающие контакт противоположных берегов трещины. Относительно каждой из рассмотренных вариационных задач установлена однозначная разрешимость.

Ключевые слова: трещина, пластина Тимошенко, жесткое включение, функционал энергии, вариационная задача, условие непроникания.

Введение

Интерес к изучению математических моделей тел, содержащих жесткие включения, обусловлен широким применением композитных материалов. В [1–10] изучен широкий круг задач теории упругости для тел с трещинами и жесткими включениями. Как известно, задачи, моделирующие поведение тел с жесткими включениями, можно успешно формулировать и изучать с помощью методов вариационного исчисления [3–12]. В частности, теория двумерных задач теории упругости с тонкими жесткими включениями и возможным отслоением предложена в [4]. Трехмерный случай рассмотрен в [5, 10].

При исследовании деформирования пластин и оболочек успешно используются модели Кирхгофа–Лява и Тимошенко [13, 14]. Изучению моделей пластин Кирхгофа–Лява, содержащих жесткие включения, посвящено множество работ [6–9, 11, 12]. При этом в [6–8, 11, 12] предполагается, что жесткое включение в пластине объемное. В работе [9] с помощью плоской двумерной кривой моделируется тонкое жесткое включение.

В настоящей работе исследуются задачи о равновесии упругих трансверсально-изотропных пластин Тимошенко, содержащих жесткие включения. С помощью предельного перехода по геометрическому параметру (описывающему продольный размер включения) в семействе задач о пластине с жестким объемным включением в качестве предельной задачи найдена корректная формулировка задачи о пластине с тонким жестким включением. Для вариационных формулировок задач о равновесии пластины с тонким включением найдены эквивалентные, при достаточной гладкости решения, постановки в дифференциальной форме. В задаче о пластине с отслоившимся тонким включением (или содержащей трещину вдоль включения) получены соотношения, отражающие механику взаимодействия противоположных берегов трещины.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашение № 8222) и РФФИ (грант № 13–01–00017 А).

§ 1. Объемное жесткое включение без отслоения

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей Γ. Пусть подобласть ω лежит строго внутри Ω, то есть $\overline{\omega} \cap \Gamma = \varnothing$, а ее граница $\partial\omega$ является достаточно гладкой (см. рис. 1). Предположим, что пластина имеет постоянную толщину $2h$. Трехмерное декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ соотнесем так, чтобы множество $\{\Omega\} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ соответствовало срединной плоскости пластины. В наших рассуждениях жесткое включение будет задаваться множеством $\omega \times [-h, h]$, то есть граница жесткого включения задается цилиндрической поверхностью $\partial\omega \times [-h, h]$. Упругая часть пластины соответствует области $\Omega \backslash \overline{\omega}$.

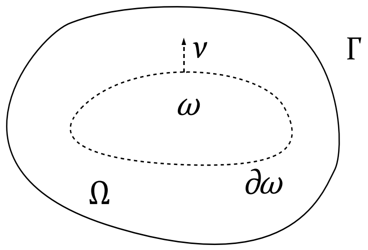

Рис. 1. Область пластины Ω с подобластью ω, задающей жесткое включение

Обозначим через $\xi = \xi(x_1, x_2) = (W, w, \psi)$ вектор обобщенных перемещений точек срединной поверхности ($(x_1, x_2) \in \Omega$); $W = (w^1, w^2)$ — перемещения в плоскости $\{x_1, x_2\}$; w — перемещения вдоль оси z; $\psi = (\psi^1, \psi^2)$ — углы поворота нормальных сечений. Для удобства будем также использовать обозначения ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$, для компонент вектора ξ, при этом $(\xi_1, \xi_2) = W$, $\xi_3 = w$, $(\xi_4, \xi_5) = \psi$. В соответствии с моделью Тимошенко трансверсально-изотропной пластины обозначим далее величины, моделирующие напряженно-деформированное состояние [14]. Тензоры, описывающие деформацию пластины:

$$\varepsilon_{ij}(\psi) = \frac{1}{2}(\psi,_j^i + \psi,_i^j), \quad \varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w,_j^i + w,_i^j), \ i, j = 1, 2, \ (v,_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}).$$

Тензоры моментов и усилий выражаются по формулам

$$m_{ij}(\psi) = a_{ijrl}\varepsilon_{rl}(\psi), \quad \sigma_{ij}(W) = 3h^{-2}a_{ijrl}\varepsilon_{rl}(W), \quad i, j, r, l = 1, 2$$

(по повторяющимся индексам проводится суммирование), где ненулевые компоненты тензора упругости $A = \{a_{ijrl}\}$ выражаются соотношениями

$$a_{iiii} = D, \, a_{iijj} = D\text{æ}, \, a_{ijij} = a_{ijji} = D(1 - \text{æ})/2, \ i \neq j, \ i, j = 1, 2,$$

где D, æ — постоянные: D — цилиндрическая жесткость пластины, æ — коэффициент Пуассона, $0 < \text{æ} < 1/2$. Поперечные силы в модели Тимошенко задаются выражениями

$$q_i(w, \psi) = \Lambda(w,_i + \psi^i), \quad i = 1, 2,$$

где $\Lambda = 2k^2Gh$, k^2 — коэффициент сдвига, G — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины, Λ, k^2, G — постоянные.

Пусть $B_M(\cdot\,,\cdot)$ — билинейная форма, определенная равенством

$$B_M(\eta, \overline{\eta}) = \langle m_{ij}(\psi), \varepsilon_{ij}(\overline{\psi})\rangle_M + \Lambda\langle(w,_i + \psi^i), (\overline{w},_i + \overline{\psi}^i)\rangle_M + \langle\sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(\overline{W})\rangle_M,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ — скалярное произведение в $L_2(M)$ для подобласти $M \subset \Omega$, $\eta = (W, w, \psi)$, $\overline{\eta} = (\overline{W}, \overline{w}, \overline{\psi})$. Функционал потенциальной энергии деформированной пластины, занимающей область Ω, имеет вид

$$\Pi(\eta) = \frac{1}{2}B_\Omega(\eta, \eta) - \langle f, \eta\rangle_\Omega, \quad \eta = (W, w, \psi),$$

где $f = (f_1, f_2, f_3, \mu_1, \mu_2) \in L^2(\Omega)^5$ — вектор, задающий внешние нагрузки [14].

Пусть $H = H_0^1(\Omega)^5$. Выпишем соотношения для $\eta \in H$, обусловленные наличием в пластине жесткого включения и трещины. Как известно, для жесткого тела деформации равны нулю. Относительно рассматриваемого жесткого включения в пластине модели Тимошенко это означает, что в области ω тангенциальные $\varepsilon_{ij}(W)$, $i, j = 1, 2$, изгибные $\varepsilon_{ij}(\psi)$, $i, j = 1, 2$, трансверсальные $w_{,i} + \psi^i$, $i = 1, 2$, деформации равны нулю. Следовательно, сужение функции $\eta = (W, w, \psi)$ на область ω имеет заданную структуру (см., например, [15]):

$$W = \rho, \quad \psi = d, \quad \psi + \nabla w = 0 \quad \text{на} \quad \omega, \quad \rho, d \in R(\omega), \tag{1.1}$$

где пространство $R(\mathcal{D})$ для произвольного множества $\mathcal{D}$, содержащегося в Ω, определяется следующим образом:

$$R(\mathcal{D}) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) \,|\, \rho_1(x_1, x_2) = bx_2 + c_1,\ \rho_2(x_1, x_2) = -bx_1 + c_2;\ (x_1, x_2) \in \mathcal{D}\},$$

где $b, c_1, c_2 = const$. В покомпонентной записи два последних равенства из (1.1) принимают вид

$$\begin{cases} \psi^1 = d_1 = bx_2 + c_1 \quad \text{на} \quad \omega, \\ \psi^2 = d_2 = -bx_1 + c_2 \quad \text{на} \quad \omega, \\ w_{,i} + \psi^i = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{на} \quad \omega. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $w_{,12} = b$ и $w_{,21} = -b$. Это означает, что в области ω выполняется $b = 0$. Следовательно, функции w, η в этой области имеют специальный вид: $w = l$, $\eta = \zeta$, где $l \in L(\omega)$, $\zeta \in G(\omega)$. Пространства линейных функций $L(\mathcal{D})$, $G(\mathcal{D})$ для произвольного множества $\mathcal{D} \subset \Omega$ определяются соотношениями

$$L(\mathcal{D}) = \{l \,|\, l(x_1, x_2) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2,\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2,\ (x_1, x_2) \in \mathcal{D}\},$$

$$G(\mathcal{D}) = \{\zeta \,|\, \zeta(x_1, x_2) = (\rho_1, \rho_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2), \\ \text{где} \quad \rho = (\rho_1, \rho_2) \in R(\mathcal{D}),\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2,\ (x_1, x_2) \in \mathcal{D}\}.$$

Нетрудно заметить, что соотношение $\eta|_\omega = \zeta$, где $\zeta \in G(\omega)$ эквивалентно выполнению равенств (1.1).

Задачу о равновесии пластины с жестким включением сформулируем в виде задачи минимизации

$$\inf_{\eta \in K_\omega} \Pi(\eta), \tag{1.2}$$

где

$$K_\omega = \Big\{\eta = (W, w, \psi) \in H \;\Big|\; \eta|_\omega = \zeta \in G(\omega)\Big\}$$

есть множество допустимых функций. Заметим, что включение $\eta \in H$ предполагает выполнение однородных краевых условий

$$w = 0, \quad \psi = W = (0, 0) \ \text{ на } \ \Gamma.$$

Специальная структура в области ω функций η, принадлежащих множеству K_ω, приводит к тому, что почти всюду в области ω выполняются равенства $\varepsilon_{ij}(W) = 0$, $\varepsilon_{ij}(\psi) = 0$, $\psi^i + w_{,i} = 0$, $i, j = 1, 2$. Следовательно, функционал энергии $\Pi(\eta)$ может быть представлен в виде

$$\Pi(\eta) = \frac{1}{2} B_{\Omega \setminus \overline{\omega}}(\eta, \eta) - \langle f, \eta \rangle_\Omega \quad \forall\, \eta = (W, w, \psi) \in K_\omega.$$

Легко показать, что множество K_ω является выпуклым и замкнутым в гильбертовом пространстве H. В силу оценки

$$B_\Omega(\eta_1, \eta_2) \leqslant C_1 \|\eta\| \|\overline{\eta}\| \quad \forall\, \eta, \overline{\eta} \in H$$

с постоянной $C_1 > 0$, не зависящей от $\eta \in H$ и $\overline{\eta} \in H$, симметричная билинейная форма $B_\Omega(\cdot,\cdot)$ является непрерывной над H. Коэрцитивность функционала $\Pi(\eta)$ следует из неравенства

$$B_\Omega(\eta,\eta) \geqslant C_2\|\eta\|^2 \quad \forall\, \eta \in H \tag{1.3}$$

с постоянной $C_2 > 0$, не зависящей от η (см. [16]). Указанные свойства функционала энергии $\Pi(\eta)$, формы $B_\Omega(\cdot,\cdot)$ и множества K_ω позволяют утверждать о существовании единственного решения ξ_ω задачи (1.2) (см. [17]). Симметричность, непрерывность билинейной формы $B_\Omega(\cdot,\cdot)$ и свойства множества K_ω обеспечивают (см. [17]) эквивалентность задачи (1.2) следующему вариационному равенству:

$$\xi_\omega = (U_\omega, u_\omega, \phi_\omega) \in K_\omega, \quad B_\Omega(\xi_\omega,\eta) = \langle f,\eta\rangle_\Omega \quad \forall\, \eta = (W,w,\psi) \in K_\omega. \tag{1.4}$$

§ 2. Тонкое жесткое включение без отслоения

Целью данного параграфа являются обоснование и вывод корректной постановки задачи о равновесии пластины с тонким жестким включением. Вывод будет основываться с помощью предельного перехода в задаче (1.4) по продольному размеру объемного включения. Выберем подходящую геометрию задачи, где в качестве области ω, соответствующей жесткому включению, выступает криволинейный прямоугольник ω_t ширины t ($t > 0$). При этом одна сторона γ прямоугольника ω_t фиксирована (см. рис. 2).

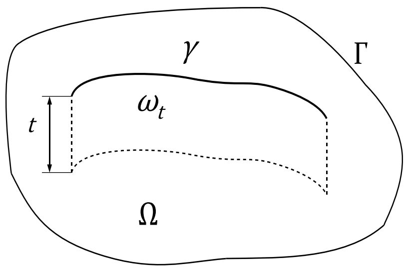

Рис. 2. Область Ω с подобластью ω_t и фиксированной стороной γ

Рассмотрим семейство вариационных задач вида (1.4) о равновесии пластин с объемными жесткими включениями $\omega_t \times [-h,h]$, зависящих от положительного параметра t. В соответствии с результатами предыдущего параграфа при фиксированном $t > 0$ вариационные равенства

$$\xi^t \in V_t, \quad B_\Omega(\xi^t,\eta^t) = \langle f,\eta^t\rangle_\Omega \quad \forall\, \eta^t \in V_t \tag{2.1}$$

имеют единственное решение ξ^t. Здесь V_t — подмножество H, состоящее из всех функций η, для которых

$$\eta|_{\omega_t} = \zeta, \quad \zeta \in G(\omega_t).$$

Заметим, что множества V_t обладают следующим свойством: $V_{t_1} \subset V_{t_2}$ при $t_1 \geqslant t_2 > 0$.

Пусть множество $V_0 \subset H$ состоит из всех η, удовлетворяющих на кривой γ соотношению

$$\eta|_\gamma = \zeta \quad \text{на} \quad \gamma,$$

где $\zeta \in G(\gamma)$. В дальнейших рассуждениях понадобится следующее утверждение, устанавливающее связь между множествами V_t ($t > 0$) и V_0.

Лемма 1. *Для любого $\eta \in V_0$ существует последовательность $\{\eta^t\}$ такая, что $\eta^t \subset V_t$ для всех достаточно малых $t > 0$ и $\eta^t \to \eta$ при $t \to 0$ в пространстве H.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\eta \in V_0$. Доопределим в области Ω функцию ζ, связанную с η равенством $\zeta = \eta|_\gamma$ так, чтобы $\zeta \in G(\Omega)$. Выберем вспомогательную гладкую функцию Φ такую, что $\Phi = 0$ на Γ и $\Phi = 1$ в окрестности кривой γ. Положим $\overline{\eta} = \eta - \Phi \cdot \zeta$. По построению $\overline{\eta} \in H_0^1(\Omega_\gamma)^5$, и, следовательно, существует последовательность $\{\overline{\eta}^t\}$ такая, что

$$\overline{\eta}^t \to \overline{\eta} \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega_\gamma), \quad \overline{\eta}^t = 0 \quad \text{в} \quad \omega_t.$$

Остается взять в качестве $\{\eta^t\}$ последовательность, элементы которой определены равенствами

$$\eta^t = \overline{\eta}^t + \Phi \cdot \zeta.$$

Тогда $\eta^t \to \eta$ в $H(\Omega_\gamma)$. Кроме того, $\eta^t \in V_t$. Лемма доказана. $\square$

Проведем выкладки, позволяющие перейти к пределу при $t \to 0$ в задаче (2.1). Подставляя в (2.1) функцию $\eta = \xi^t$, с помощью неравенства (1.3) получим равномерную по t оценку

$$\|\xi^t\| \leqslant C_3 \tag{2.2}$$

с не зависящей от t постоянной $C_3 > 0$. На основании (2.2) в силу рефлексивности пространства H из $\{\xi^t\}$ можно выделить подпоследовательность, обозначенную прежним образом, такую, что

$$\xi^t \to \xi^0 \quad \text{слабо в} \quad H, \quad \xi^t \to \xi^0 \quad \text{сильно в} \quad L_2(\gamma). \tag{2.3}$$

Далее, выделяя при необходимости подпоследовательность, можно считать, что $\xi^t \to \xi^0$ почти всюду на γ. Сходимость последовательности $\{\xi^t\}$ почти всюду на γ позволяет сделать вывод о том, что числовые последовательности $\{b^t\}$, $\{a_i^t\}$, $\{c_j^t\}$, $i = 0, 1, 2$, $j = 1, 2$, определяющие структуру решения ξ^t в области ω_t, равномерно ограничены по абсолютной величине. Значит, при $t \to 0$ можно выделить подпоследовательность (с прежним обозначением) такую, что

$$a_i^t \to a_i, \quad b^t \to b, \quad c_j^t \to c_j, \quad i = 0, 1, 2, \quad j = 1, 2.$$

Для этой подпоследовательности указанные числовые сходимости обуславливают справедливость соотношения

$$\xi^t|_\gamma \to (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2) \quad \text{сильно в} \quad L_2(\gamma).$$

Последнее выражение вместе с (2.3) означает, что

$$\xi^0|_\gamma = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2) \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Следовательно, ξ^0 принадлежит выпуклому и замкнутому множеству V_0. Переходя к пределу при $t \to 0$ в вариационном равенстве (2.1) при фиксированном $\eta^t \in V_t$, находим

$$\xi^0 \in V_0, \quad B_\Omega(\xi^0, \eta^t) = \langle f, \eta^t \rangle_\Omega \quad \forall\, \eta^t \in V_t.$$

Пусть η — произвольная пробная функция из множества V. Согласно доказанной выше лемме существует последовательность $\{\widetilde{\eta}^t\} \in V_t$ такая, что $\widetilde{\eta}^t \to \eta$ сильно в H. Тогда, осуществляя предельный переход при $t \to 0$ в равенстве

$$\xi^0 \in V_0, \quad B_\Omega(\xi^0, \widetilde{\eta}^t) = \langle f, \widetilde{\eta}^t \rangle_\Omega \quad \forall\, t,$$

получим

$$\xi^0 \in V_0, \quad B_\Omega(\xi^0, \eta) = \langle f, \eta \rangle_\Omega \quad \forall\, \eta \in V_0. \tag{2.4}$$

Таким образом, при стремлении к нулю параметра t, описывающего ширину жесткого включения, предельной задачей для семейства задач (2.1) является задача (2.4). Свойства билинейной формы $B_\Omega(\cdot,\cdot)$ и множества V_0 гарантируют единственность решения ξ^0 задачи (2.4). Кроме того, ее можно сформулировать в виде задачи о минимизации функционала энергии

$$\inf_{\eta \in V_0} \Pi(\eta). \tag{2.5}$$

На основании предыдущих рассуждений заключаем, что задача (2.5) с физической точки зрения описывает равновесие пластины с тонким жестким включением без отслоения.

§ 3. Тонкое жесткое включение с отслоением

Рассмотрим пластину, содержащую тонкое жесткое включение с отслоением на одном из берегов. Другими словами, считаем, что пластина имеет сквозную вертикальную трещину, расположенную вдоль жесткого включения. При формулировке задачи о равновесии этой пластины будем задавать определенную структуру решения, обусловленную наличием жесткого включения. На трещине будем ставить условия непроникания противоположных берегов.

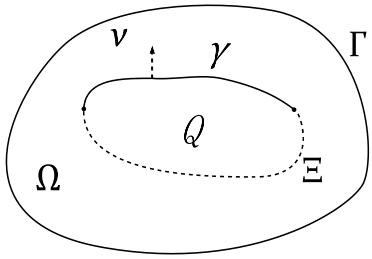

Рис. 3. Область Ω с кривой γ, задающей тонкое жесткое включение

Пусть γ — гладкая кривая без самопересечений, $\partial\gamma \notin \gamma$. Предположим, что кривую γ можно продолжить до замкнутой гладкой кривой Ξ, ограничивающей область Q, $\overline{Q} \subset \Omega$ (см. рис. 3). Кроме того, γ также допускает продолжение до липшицевой кривой Σ, разбивающей область Ω на две подобласти Ω_1 и Ω_2 с липшицевыми границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$, так, чтобы $\overline{\Sigma} = \overline{\partial\Omega_1} \cap \overline{\partial\Omega_2}$, $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega}$ и $\mathrm{meas}(\Gamma \cap \partial\Omega_i) > 0$, $i = 1, 2$. Тонкое жесткое включение будем моделировать с помощью цилиндрической поверхности $\gamma \times [-h, h] \subset \mathbb{R}^3$. Пусть, в соответствии с внешней нормалью ν к Ξ, Ξ^- (γ^-) и Ξ^+ (γ^+) — отрицательный и положительный берега кривой Ξ (γ). Предположим, не нарушая общности, что на $\gamma^- \times [-h, h]$ пластина сцеплена с жестким включением, а отслоение имеет место на $\gamma^+ \times [-h, h]$. В случае когда след функции v берется на положительном берегу Ξ^+, будем писать $v^+ = v|_{\Xi^+}$, так же для отрицательного берега — $v^- = v|_{\Xi^-}$. Аналогичные обозначения будем использовать относительно γ^+ и γ^-. В соответствии с результатами предыдущего пункта, на отрицательном берегу γ зададим следующую структуру искомой функции η:

$$\eta|_\gamma = \zeta \quad \text{на} \quad \gamma^-, \quad \zeta \in G(\gamma). \tag{3.1}$$

На γ выпишем условия непроникания берегов трещины

$$[W_\nu] \geqslant h|[\psi_\nu]| \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{3.2}$$

где $W_\nu = w^i \nu_i$, $\psi_\nu = \psi^i \nu_i$, квадратные скобки $[\cdot]$ означают скачок функции: $[v] = v|_{\gamma^+} - v|_{\gamma^-}$. Вывод и обоснование условия (3.2) можно найти в [16]. Отметим, что это неравенство корректно в рамках предположений классической теории упругости. Условие (3.2) инвариантно относительно выбора направления нормали ν, так как при изменении направления на $-\nu$ значение скачка на берегах трещины также меняет знак.

Пусть подпространство $H^{1,0}(\Omega_\gamma)$ ($\Omega_\gamma = \Omega \backslash \overline{\gamma}$) пространства Соболева $H^1(\Omega_\gamma)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на Γ. Введем пространство $H(\Omega_\gamma) = H^{1,0}(\Omega_\gamma)^5$, снабженное стандартной нормой $\|\cdot\|_{H(\Omega_\gamma)}$. Функционал энергии пластины, соответствующей области Ω_γ, имеет следующий вид:

$$\Pi_\gamma(\eta) = \frac{1}{2} B_{\Omega_\gamma}(\eta, \eta) - \langle f, \eta \rangle_{\Omega_\gamma}, \quad \eta = (W, w, \psi).$$

Введем множество допустимых функций:

$$K = \{\eta \in H(\Omega_\gamma) \mid \eta \text{ удовлетворяет (3.1), (3.2)}\}.$$

Задача о равновесии пластины Тимошенко с отслоившимся тонким включением сводится к задаче о минимизации функционала энергии

$$\inf_{\eta\in K} \Pi_\gamma(\eta). \tag{3.3}$$

Приведем рассуждения, доказывающие однозначную разрешимость задачи (3.3). Благодаря приведенному выше предположению о возможности разбиения области Ω с помощью кривой Σ оценка вида (1.3) справедлива и в данном случае:

$$B_{\Omega_\gamma}(\eta,\eta) \geqslant C_4\|\eta\|^2 \quad \forall\, \eta \in H(\Omega_\gamma). \tag{3.4}$$

Очевидно, что коэрцитивность функционала $\Pi_\gamma(\eta)$ следует из (3.4). Слабая полунепрерывность снизу и выпуклость функционала $\Pi_\gamma(\eta)$ могут быть установлены аналогично тому, как это сделано в [16].

Выпуклость множества K можно легко проверить. Докажем, что K является замкнутым множеством. В самом деле, пусть последовательность $\{\eta^n\} \subset K$ и $\eta^n \to \eta$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$. Тогда на γ имеем сходимость $\eta^n \to \eta$ в $L_2(\gamma)$ и, следовательно, можно выделить подпоследовательность (с прежним обозначением) такую, что $\eta^n \to \eta$ почти всюду на γ. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенствах

$$[W^n_\nu] \geqslant h|[\psi^n_\nu]| \quad \text{почти всюду на} \quad \gamma,$$

получим, что для предельной функции $\eta = (W, w, \psi)$ справедливо неравенство $[W_\nu] \geqslant h|[\psi_\nu]|$ почти всюду на γ. Далее, сходимость почти всюду на γ последовательности функций $\{\eta^n\}$ со структурой

$$\eta^n|_\gamma = (b^n x_2 + c^n_1, -b^n x_1 + c^n_2, a^n_0 + a^n_1 x_1 + a^n_2 x_2, -a^n_1, -a^n_2) \quad \text{на} \quad \gamma^-$$

обуславливает то, что числовые последовательности b^n, a^n_0, c^n_i, a^n_i, $i = 1, 2$, сходятся к некоторым числам b, a_0, c_i, a_i, $i = 1, 2$. Следовательно, последовательность (следов) $\{\eta^n\}$ почти всюду на γ^- сходится к функции $(bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2, a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, -a_1, -a_2)$. Это означает, что η удовлетворяет (3.1).

Свойства функционала энергии $\Pi_\gamma(\eta)$ и множества K гарантируют существование единственного решения $\xi = (U, u, \phi)$ задачи (3.3) и ее эквивалентность следующему вариационному неравенству:

$$\xi \in K, \quad B_{\Omega_\gamma}(\xi, \eta - \xi) \geqslant \langle f, \eta - \xi\rangle_{\Omega_\gamma} \quad \forall\, \eta = (W, w, \psi) \in K. \tag{3.5}$$

Целью дальнейших рассуждений является вывод эквивалентной дифференциальной постановки задачи (3.3). А именно, исходя из вариационного неравенства (3.5), с помощью подходящего выбора пробных функций, выведем уравнения равновесия и полный набор краевых условий на кривой γ. Чтобы извлечь из неравенства (3.5) соотношения на внутренней границе γ, будем использовать формулы Грина. Поскольку производные функций из пространства $H^1(\Omega_\gamma)$ в общем случае не имеют следов, далее предполагаем достаточную гладкость ξ.

Сравним два неравенства, полученные подстановкой в (3.5) пробных функций $\eta = \xi + \widetilde{\eta}$ и $\eta = \xi - \widetilde{\eta}$, где $\widetilde{\eta} = (\widetilde{W}, \widetilde{w}, \widetilde{\psi}) \in C^\infty_0(\Omega_\gamma)^5$. В результате получим равенство, которое запишем в виде

$$\langle m_{ij}, \varepsilon_{ij}(\widetilde{\psi})\rangle_{\Omega_\gamma} + \langle \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}(\widetilde{W})\rangle_{\Omega_\gamma} + \langle q_i, (\widetilde{w}_{,i} + \widetilde{\psi}^i)\rangle_{\Omega_\gamma} = \langle f, \widetilde{\eta}\rangle_{\Omega_\gamma}, \tag{3.6}$$

где $m_{ij} = m_{ij}(\phi)$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(U)$, $q_i = q_i(u, \phi)$, $i, j = 1, 2$; U, u, ϕ — компоненты решения ξ. Из (3.6), учитывая независимость $\widetilde{w}^1$, $\widetilde{w}^2$, $\widetilde{w}$, $\widetilde{\psi}^1$, $\widetilde{\psi}^2$, имеем

$$\langle \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}(\widetilde{W})\rangle_{\Omega_\gamma} = \langle f_i, \widetilde{w}^i\rangle_{\Omega_\gamma} \quad \forall\, \widetilde{W} \in C^\infty_0(\Omega_\gamma)^2,$$

$$\big\langle q_i, (\widetilde{w}_{,i}\,)\big\rangle_{\Omega_\gamma} = \big\langle f_3, \widetilde{w}\big\rangle_{\Omega_\gamma} \quad \forall\, \widetilde{w} \in C_0^\infty(\Omega_\gamma),$$

$$\big\langle m_{ij}, \varepsilon_{ij}(\widetilde{\psi})\big\rangle_{\Omega_\gamma} + \big\langle q_i, \widetilde{\psi}^i\big\rangle_{\Omega_\gamma} = \big\langle \mu_i, \widetilde{\psi}^i\big\rangle_{\Omega_\gamma} \quad \forall\, \widetilde{\psi} \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^2.$$

Заметив, что имеют место представления $\big\langle m_{ij}, \varepsilon_{ij}(\widetilde{\psi})\big\rangle_{\Omega_\gamma} = \big\langle m_{ij}, (\widetilde{\psi},^i_j\,)\big\rangle_{\Omega_\gamma}$, $\big\langle \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}(\widetilde{W})\big\rangle_{\Omega_\gamma} = \big\langle \sigma_{ij}, (\widetilde{w},^i_j\,)\big\rangle_{\Omega_\gamma}$, из предыдущих трех равенств заключаем, что в смысле распределений выполнены уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} = -f_i, \quad i = 1,2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{3.7}$$

$$q_{i,i} = -f_3 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{3.8}$$

$$m_{ij,j} - q_i = -\mu_i, \quad i = 1,2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma. \tag{3.9}$$

Пусть $W = (w^1, w^2) \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$. В рамках этого предположения выпишем формулы Грина (см. [18]) для области $\Omega\backslash\overline{Q}$ и Q. Итак, в области $\Omega\backslash\overline{Q}$ имеет место равенство

$$\int_{\Omega\backslash\overline{Q}} \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}(W) + \int_{\Omega\backslash\overline{Q}} \sigma_{ij,j} w^i = -\int_{\Xi^+} \sigma_{ij}\nu_j w^i = -\int_{\Xi^+} \big(\sigma_\nu W_\nu + \sigma_\tau W_\tau\big), \tag{3.10}$$

$\sigma_\nu \nu$ и $\sigma_\tau \tau$ — нормальная и касательная составляющие вектора $\sigma\nu = \{\sigma_{ij}\nu_j\}$, при этом справедливы соотношения $\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i$, $\sigma_\tau = \sigma_{ij}\nu_j\tau_i$, $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$, $W_\tau = w^i\tau_i$, $W_\nu = w^i\nu_i$. Относительно области Q выполняется соотношение

$$\int_Q \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}(W) + \int_Q \sigma_{ij,j} w^i = \int_{\Xi^-} \sigma_{ij}\nu_j w^i = \int_{\Xi^-} \big(\sigma_\nu W_\nu + \sigma_\tau W_\tau\big). \tag{3.11}$$

Суммируя (3.10), (3.11), с учетом того, что $W^+ = W^-$, $\sigma^+_{ij}\nu_j = \sigma^-_{ij}\nu_j$ на $\Xi\backslash\overline{\gamma}$, получим

$$\big\langle \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}(W)\big\rangle_{\Omega_\gamma} + \big\langle \sigma_{ij,j}, w^i\big\rangle_{\Omega_\gamma} = -\Big[\int_\gamma \sigma_{ij}\nu_j w^i\Big] = -\Big[\int_\gamma \big(\sigma_\nu W_\nu + \sigma_\tau W_\tau\big)\Big]. \tag{3.12}$$

Аналогично для произвольных $\psi \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$, $w \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)$ справедливы формулы

$$\big\langle m_{ij}, \varepsilon_{ij}(\psi)\big\rangle_{\Omega_\gamma} + \big\langle m_{ij,j}, \psi^i\big\rangle_{\Omega_\gamma} = -\Big[\int_\gamma m_{ij}\nu_j\psi^i\Big] = -\Big[\int_\gamma \big(m_\nu\psi_\nu + m_\tau\psi_\tau\big)\Big], \tag{3.13}$$

$$\big\langle \nabla u, \nabla w\big\rangle_{\Omega_\gamma} + \big\langle \triangle u, w\big\rangle_{\Omega_\gamma} = -\Big[\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} w\Big], \tag{3.14}$$

$$\big\langle \phi, \nabla w\big\rangle_{\Omega_\gamma} + \big\langle \operatorname{div}\phi, w\big\rangle_{\Omega_\gamma} = -\Big[\int_\gamma \phi_\nu w\Big], \tag{3.15}$$

где величины m_ν, m_τ определяются так же, как σ_ν, σ_τ, см. формулу (3.10). Преобразуем (3.5) с помощью формул (3.12)–(3.15) и уравнений равновесия (3.7)–(3.9) к следующему виду:

$$\xi = (U, u, \phi) \in K, \quad -\Big[\int_\gamma \big\{\sigma_\nu(W_\nu - U_\nu) + \sigma_\tau(W_\tau - U_\tau)\big\}\Big] - \Big[\int_\gamma \big\{m_\nu(\psi_\nu - \phi_\nu) + m_\tau(\psi_\tau - \phi_\tau)\big\}\Big] -$$

$$- \Lambda\Big[\int_\gamma (\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu)(w - u)\Big] \geqslant 0 \quad \forall\, \eta = (W, w, \psi) \in K. \tag{3.16}$$

Пусть функция $\widetilde{\eta} = (\widetilde{W}, \widetilde{w}, \widetilde{\psi}) \in K$ такая, что $\widetilde{\eta} \in H^1_0(\Omega)^5$. Подставляя в вариационное неравенство (3.5) пробные функции вида $\eta = \xi \pm \widetilde{\eta}$, получим следующее интегральное тождество, справедливое для всех $\widetilde{\eta} \in H^1_0(\Omega)^5$:

$$\big\langle m_{ij}, \varepsilon_{ij}(\widetilde{\psi})\big\rangle_{\Omega_\gamma} + \big\langle \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}(\widetilde{W})\big\rangle_{\Omega_\gamma} + \big\langle q_i, (\widetilde{w}_{,i} + \widetilde{\psi}^i)\big\rangle_{\Omega_\gamma} = \langle f, \widetilde{\eta}\rangle_{\Omega_\gamma}. \tag{3.17}$$

Далее, применяя формулы интегрирования по частям, с учетом уравнений равновесия (3.7)–(3.9), равенства (3.1) из (3.17) выводим

$$-\int_\gamma [\sigma_{ij}\nu_j]\rho_i + \int_\gamma [m_{ij}\nu_j]a_i - \Lambda\int_\gamma \Big[\phi_\nu + \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big] l = 0 \tag{3.18}$$

для всех $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in R(\gamma)$, $l = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \in L(\gamma)$. Учитывая независимость ρ и l в (3.18), имеем

$$\int_\gamma [\sigma_{ij}\nu_j]\rho_i = 0 \quad \forall\, \rho \in R(\gamma), \tag{3.19}$$

$$\int_\gamma [m_{ij}\nu_j]a_i - \Lambda\int_\gamma \big[\phi_\nu + \frac{\partial u}{\partial \nu}\big] l = 0 \quad \forall\, l \in L(\gamma). \tag{3.20}$$

Рассмотрим функцию $\eta = \xi \pm \widetilde{\eta}$, где $\widetilde{\eta} = (\widetilde{W}, \widetilde{w}, \widetilde{\psi})$ такая, что $\widetilde{W} \equiv (0,0)$, $\widetilde{\psi} \equiv (0,0)$ в Ω_γ, функция $\widetilde{w} \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)$: $\widetilde{w} = 0$ в Q. По построению очевидно, что $\eta \in K$. Заметим, что значения (следов) функции $\widetilde{w}$ равны нулю на кривой $\Xi\backslash\overline{\gamma}$ и произвольны на γ^+. Подставим функцию η в (3.16). В итоге получим

$$\int_{\gamma^+} (\phi_\nu + \frac{\partial u}{\partial \nu})\widetilde{w} \geqslant 0.$$

Отсюда, принимая во внимание произвольность значений $\widetilde{w}$ на границе γ^+, находим

$$\phi_\nu + \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma^+. \tag{3.21}$$

Подставим в вариационное неравенство (3.5) пробные функции вида $\eta = \xi \pm \widetilde{\eta}$, где $\widetilde{\eta} = (\widetilde{W}, \widetilde{w}, \widetilde{\psi}) \in H(\Omega_\gamma)$ такая, что $\widetilde{w} \equiv 0$, $\widetilde{\psi} \equiv (0,0)$ в Ω_γ, $\widetilde{W} \equiv (0,0)$ в Q и $\widetilde{W}_\nu = 0$ на γ^+. Преобразовав полученные интегралы с помощью формул Грина, выведем

$$\int_{\Xi^+} \sigma_{ij}\nu_j\widetilde{w}^i = \int_{\Xi^+} \big(\sigma_\nu\widetilde{W}_\nu + \sigma_\tau\widetilde{W}_\tau\big) = \int_{\Xi^+} \sigma_\tau\widetilde{W}_\tau = 0.$$

Последнее выражение в силу произвольности значений $\widetilde{W}_\tau$ на γ^+ означает, что

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{на} \quad \gamma^+. \tag{3.22}$$

Аналогичными выкладками, подобрав пробные функции вида $\eta = \xi \pm \widetilde{\eta}$, где $\widetilde{\eta} = (\widetilde{W}, \widetilde{w}, \widetilde{\psi}) \in H(\Omega_\gamma)$ такая, что $\widetilde{w} \equiv 0$, $\widetilde{W} \equiv (0,0)$ в Ω_γ, $\widetilde{\psi} \equiv (0,0)$ в Q и $\widetilde{\psi}_\nu = 0$ на γ^+, можно получить, что

$$m_\tau = 0 \quad \text{на} \quad \gamma^+. \tag{3.23}$$

С помощью полученных равенств (3.19)–(3.23) и вспомогательного тождества

$$[vs] = v^+(s^+ - s^-) + (v^+ - v^-)s^- = v^+[s] + [v]s^- \tag{3.24}$$

упростим соотношение (3.16) к следующему виду:

$$\xi \in K, \quad -\int_\gamma \Big(\sigma_\nu^+[W_\nu - U_\nu] + m_\nu^+[\psi_\nu - \phi_\nu]\Big) \geqslant 0 \quad \forall\, \eta = (W, w, \psi) \in K.$$

Отсюда, сравнивая неравенства, получающиеся при $\eta = (0,0,0,0,0)$ и $\eta = 2\xi$, имеем

$$-\int_\gamma (\sigma_\nu^+[W_\nu] + m_\nu^+[\psi_\nu]) \geqslant 0 \quad \forall\, \eta = (W, w, \psi) \in K, \tag{3.25}$$

$$\int_\gamma (\sigma_\nu^+[U_\nu] + m_\nu^+[\phi_\nu]) = 0. \tag{3.26}$$

Пусть $\widetilde{W} \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$, $\widetilde{W} = (0,0)$ в Q, $\widetilde{W}_\nu^+ \geqslant 0$ на γ (в этом случае $\widetilde{W}_\nu^+ = [\widetilde{W}_\nu^+]$). Тогда имеют место включения $\widetilde{\eta}_1 = (h\widetilde{W}, 0, \widetilde{W}) \in K$, $\widetilde{\eta}_2 = (h\widetilde{W}, 0, -\widetilde{W}) \in K$ (то есть $\widetilde{\psi}_1 = \widetilde{W}$ для $\widetilde{\eta}_1$ и $\widetilde{\psi}_2 = -\widetilde{W}$ для $\widetilde{\eta}_2$). Подставляя $\widetilde{\eta}_1$ в (3.25), получим

$$-\int_{\gamma^+} \sigma_\nu(h\widetilde{W}_\nu) - \int_{\gamma^+} m_\nu(\widetilde{W}_\nu) \geqslant 0.$$

Свойства функции $\widetilde{W}$ позволяют вывести из последнего соотношения неравенство

$$-h\sigma_\nu \geqslant m_\nu \quad \text{на} \quad \gamma^+.$$

Такими же рассуждениями, подставив $\widetilde{\eta}_2$ в (3.25), находим

$$-h\sigma_\nu \geqslant -m_\nu \quad \text{на} \quad \gamma^+.$$

Из последних двух неравенств вытекает соотношение

$$-h\sigma_\nu \geqslant |m_\nu| \quad \text{на} \quad \gamma^+. \tag{3.27}$$

Подынтегральное выражение в (3.26) неположительно в силу включения $\xi \in K$ и неравенства (3.27), следовательно, верно равенство

$$\sigma_\nu^+[U_\nu] + m_\nu^+[\phi_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Таким образом, решение $\xi = (U, u, \phi)$ задачи минимизации (3.3), при достаточной гладкости, удовлетворяет следующим соотношениям:

$$m_{ij}(\phi) = a_{ijrl}\varepsilon_{rl}(\phi), \quad \sigma_{ij}(U) = 3h^{-2}a_{ijrl}\varepsilon_{rl}(U), \quad i,j,r,l = 1,2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma; \tag{3.28}$$

$$q_i(u,\phi) = \Lambda(u_{,i} + \phi^i), \quad i = 1,2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma; \tag{3.29}$$

$$\sigma_{ij,j} = -f_i, \quad i = 1,2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma; \tag{3.30}$$

$$q_{i,i} = -f_3 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma; \tag{3.31}$$

$$m_{ij,j} - q_i = -\mu_i, \quad i = 1,2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma; \tag{3.32}$$

$$\int_\gamma [\sigma_{ij}\nu_j]\rho_i = 0 \quad \forall\, \rho \in R(\gamma); \tag{3.33}$$

$$\int_\gamma [m_{ij}\nu_j]a_i - \Lambda\int_\gamma [\phi_\nu + \frac{\partial u}{\partial \nu}]l = 0 \quad \forall\, l \in L(\gamma), \quad l = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2; \tag{3.34}$$

$$\xi|_\gamma = \zeta \quad \text{на} \quad \gamma^-, \quad \text{где} \quad \zeta \in G(\gamma); \tag{3.35}$$

$$\phi_\nu + \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad m_\tau = 0, \quad -h\sigma_\nu \geqslant |m_\nu| \quad \text{на} \quad \gamma^+; \tag{3.36}$$

$$[U_\nu] \geqslant h|[\phi_\nu]|, \quad \sigma_\nu^+[U_\nu] + m_\nu^+[\phi_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma; \tag{3.37}$$

$$u = 0, \quad \phi = U = (0,0) \ \text{на} \ \Gamma. \tag{3.38}$$

Пусть для достаточно гладкой функции ξ, определенной в области Ω_γ, справедливы уравнения состояния (3.28), (3.29), уравнения равновесия (3.30)–(3.32), тождества (3.33), (3.34) и условия (3.35)–(3.38). Покажем, что тогда ξ является также и решением вариационной задачи (1.4). Умножим равенства (3.30) на $(w^i - u^i)$ для каждого $i = 1,2$ соответственно, затем просуммируем по i. Обе части полученного равенства проинтегрируем по Ω_γ и применим формулы Грина (3.12). В результате получим

$$\big\langle \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}(W - U)\big\rangle_{\Omega_\gamma} + \Big[\int_\gamma \sigma_{ij}\nu_j(w^i - u^i)\Big] = \big\langle f_i, (w^i - u^i)\big\rangle_{\Omega_\gamma}. \tag{3.39}$$

Уравнение (3.31) после умножения его на $(w-u)$, интегрирования по Ω_γ и применения формул (3.14), (3.15) преобразуется к виду

$$\langle q_i, w_{,i} - u_{,i} \rangle_{\Omega_\gamma} + \Lambda\Big[\int_\gamma \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu\Big)(w-u)\Big] = \langle f_3, (w-u)\rangle_{\Omega_\gamma}. \tag{3.40}$$

Проведя такие же действия с уравнениями (3.32) (равенства, в соответствии с индексами $i = 1, 2$, умножаются на $(\psi^i - \phi^i)$), выведем

$$\langle m_{ij}, \varepsilon_{ij}(\psi - \phi)\rangle_{\Omega_\gamma} + \Big[\int_\gamma m_{ij}\nu_j(\psi^i - \phi^i)\Big] = \langle \mu_i - q_i, (\psi^i - \phi^i)\rangle_{\Omega_\gamma}. \tag{3.41}$$

Суммируя уравнения (3.39)–(3.41), получим

$$B_{\Omega_\gamma}(\xi, \eta - \xi) - \langle f, (\eta - \xi)\rangle_{\Omega_\gamma} = -\Big[\int_\gamma \sigma_{ij}\nu_j(w^i - u^i)\Big] -$$

$$-\Big[\int_\gamma m_{ij}\nu_j(\psi^i - \phi^i)\Big] - \Lambda\Big[\int_\gamma \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu\Big)(w-u)\Big]. \tag{3.42}$$

Покажем, что для произвольной функции $\eta \in K$ правая часть равенства (3.42) неотрицательна. С учетом (3.24) слагаемые правой части (3.42), взятые с обратным знаком, можно записать в виде

$$\int_\gamma (\sigma_{ij}\nu_j)^+[w^i - u^i] + \int_\gamma (m_{ij}\nu_j)^+[\psi^i - \phi^i] + \Lambda\int_\gamma \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu\Big)^+[w-u] +$$

$$+\int_\gamma [\sigma_{ij}\nu_j](w^i - u^i)^- + \int_\gamma [m_{ij}\nu_j](\psi^i - \phi^i)^- + \Lambda\int_\gamma \Big[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu\Big](w-u)^-. \tag{3.43}$$

Включения $\eta \in K$, $\xi \in K$ означают, что η и ξ на γ^- имеют заданную структуру (3.1). Это обстоятельство вместе с равенствами (3.33), (3.34), в свою очередь, влечет то, что сумма последних трех интегралов в (3.43) равна нулю. Разбивая на нормальную и касательную составляющие векторы $\sigma_{ij}\nu_j$, $m_{ij}\nu_j$, $(W - U)$ и $(\psi - \phi)$, запишем (3.43) в виде

$$\int_\gamma \Big\{\sigma_\nu^+[W_\nu - U_\nu] + \sigma_\tau^+[W_\tau - U_\tau] + m_\nu^+[\psi_\nu - \phi_\nu] + m_\tau^+[\psi_\tau - \phi_\tau] + \Lambda\big(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu\big)^+[w-u]\Big\}. \tag{3.44}$$

Замечая, что согласно (3.36) на γ^+ имеют место равенства $m_\tau^+ = 0$, $\sigma_\tau^+ = 0$ и $(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi_\nu)^+ = 0$, упростим выражение (3.44) к следующему виду:

$$\int_\gamma (\sigma_\nu^+[W_\nu] + m_\nu^+[\psi_\nu]) - \int_\gamma (\sigma_\nu^+[U_\nu] + m_\nu^+[\phi_\nu]). \tag{3.45}$$

Согласно (3.37) второй интеграл в (3.45) равен нулю. Неположительность подынтегральной функции для первого интеграла выражения (3.45) следует из неравенств $[W_\nu] \geqslant h|[\psi_\nu]|$, $-h\sigma_\nu^+ \geqslant |m_\nu^+|$, выполненных на γ. В итоге для $\eta \in K$ выражение (3.45) неположительно. Это означает, что правая часть (3.42) имеет неотрицательное значение и, следовательно, справедливо вариационное неравенство (3.5). Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1 (об эквивалентности двух постановок). *Гладкая функция $\xi = (U, u, \phi) \in K$ является решением вариационной задачи* (3.3) *тогда и только тогда, когда она является решением краевой задачи* (3.28)–(3.38).

Замечание 1. Можно показать, что задача (2.5) о пластине с жестким включением без отслоения эквивалентна следующей дифференциальной постановке. Требуется найти функции $\xi = (U, u, \phi) \in H$, $\zeta \in G(\gamma)$, такие, что

$$m_{ij}(\phi) = a_{ijrl}\varepsilon_{rl}(\phi), \quad \sigma_{ij}(U) = 3h^{-2}a_{ijrl}\varepsilon_{rl}(U), \quad i,j,r,l = 1,2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma;$$

$$q_i(u,\phi) = \Lambda(u_{,i} + \phi^i), \quad i = 1,2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma;$$

$$\sigma_{ij,j} = -f_i, \quad i = 1,2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma;$$

$$q_{i,i} = -f_3 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma;$$

$$m_{ij,j} - q_i = -\mu_i, \quad i = 1,2, \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma;$$

$$\int_\gamma [\sigma_{ij}\nu_j]\rho_i = 0 \quad \forall\, \rho \in R(\gamma);$$

$$\int_\gamma [m_{ij}\nu_j]a_i - \Lambda\int_\gamma [\phi_\nu + \frac{\partial u}{\partial \nu}]l = 0 \quad \forall\, l \in L(\gamma), \quad l = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2;$$

$$\xi|_\gamma = \zeta \quad \text{на} \quad \gamma, \quad \text{где} \quad \zeta \in G(\gamma);$$

$$u = 0, \quad \phi = U = (0,0) \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Maiti M. On the extension of a crack due to rigid inclusions // International Journal of Fracture. 1979. Vol. 15. P. 389–393.
2. Xiao Z.M., Chen B.J. Stress intensity factor for a Griffith crack interacting with a coated inclusion // International Journal of Fracture. 2001. Vol. 108. P. 193–205.
3. Itou H., Khludnev A.M., Rudoy E.M., Tani A. Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity // Z. Angew. Math. Mech. 2012. Vol. 92. № 9. P. 716–730.
4. Лойгеринг Г., Хлуднев А.М. О равновесии упругих тел, содержащих тонкие жесткие включения // Доклады Академии наук. 2010. Т. 430. № 1. С. 47–50.
5. Khludnev A.M., Novotny A.A., Sokolowski J., Zochowski A. Shape and topology sensitivity analysis for cracks in elastic bodies on boundaries of rigid inclusions // Journal Mechanics and Physics of Solids. 2009. Vol. 57. № 10. P. 1718–1732.
6. Рудой Е.М. Формула Гриффитса и интеграл Черепанова–Райса для пластины с жестким включением и трещиной // Вестник НГУ. Серия «Математика, механика, информатика». 2010. Т. 10. № 2. С. 98–117.
7. Хлуднев А.М. Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2010. № 5. С. 98–110.
8. Хлуднев А.М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010. 252 с.
9. Хлуднев А.М. Об изгибе упругой пластины с отслоившимся тонким жестким включением // Сибирский журнал индустриальной математики. 2011. Т. 14. № 1. С. 114–126.
10. Щербаков В.В. Об одной задаче управления формой тонких включений в упругих телах // Сибирский журнал индустриальной математики. 2013. Т. 16. № 1. С. 138–147.
11. Неустроева Н.В. Жесткое включение в контактной задаче для упругих пластин // Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. 12. № 4. С. 92–105.
12. Ротанова Т.А. Контакт пластин, жесткие включения в которых выходят на границу // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2011. № 3. С. 99–107.
13. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
14. Пелех Б.Л. Обобщенная теория оболочек. Львов: Вища школа, 1978. 159 с.
15. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 160 с.
16. Лазарев Н.П. Итерационный метод штрафа для нелинейной задачи о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину // Сибирский журнал вычислительной математики. 2011. Т. 14. № 4. С. 381–392.
17. Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1988. 448 с.
18. Хлуднев А.М. Метод гладких областей в задаче о равновесии пластины с трещиной // Сибирский математический журнал. 2002. Т. 43. № 6. С. 1388–1400.

Поступила в редакцию 02.09.2013

Лазарев Нюргун Петрович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Научно-исследовательский институт математики, Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, 677891, Россия, г. Якутск, ул. Белинского, 58;
научный сотрудник, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090, Россия, г. Новосибирск, пр. академика Лаврентьева, 15.
E-mail: nyurgun@ngs.ru

N. P. Lazarev

The equilibrium problem for a Timoshenko plate containing a crack along a thin rigid inclusion

Keywords: crack, Timoshenko-type plate, rigid inclusion, energy functional, variational problem, nonpenetration condition.

Mathematical Subject Classifications: 74B99

We study the equilibrium problem of a transversely isotropic plate with rigid inclusions. It is assumed that the plate deforms under hypotheses of classical elasticity. The problems are formulated as the minimization of the plate energy functional on the convex and closed subset of the Sobolev space. It is established that, as the geometric parameter (the size) of the volume inclusion tends to zero, the solutions converge to the solution of an equilibrium problem of a plate with a thin rigid inclusion. Also the case of the delamination of an inclusion is investigated when a crack in the plate is located along one of the inclusion edges. In the problem of a plate with a delaminated inclusion the nonlinear condition of nonpenetration is given. This condition takes the form of a Signorini-type inequality and describes the mutual nonpenetration of the crack edges. For the problem with a delaminated inclusion, the equivalence of variational and differential statements is proved provided a sufficiently smooth solution. For each considered variation problem, unique solvability is established.

REFERENCES

1. Maiti M. On the extension of a crack due to rigid inclusions, *International Journal of Fracture*, 1979, vol. 15, pp. 389–393.

2. Xiao Z.M., Chen B.J. Stress intensity factor for a Griffith crack interacting with a coated inclusion, *International Journal of Fracture*, 2001, vol. 108, pp. 193–205.

3. Itou H., Khludnev A.M., Rudoy E.M., Tani A. Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity, *Z. Angew. Math. Mech.*, 2012, vol. 92, no. 9, pp. 716–730.

4. Khludnev A.M., Leugering G. On the equilibrium of elastic bodies containing thin rigid inclusions, *Dokl. Phys.*, 2010, vol. 55, no. 1, pp. 18–22.

5. Khludnev A.M., Novotny A.A., Sokolowski J., Zochowski A. Shape and topology sensitivity analysis for cracks in elastic bodies on boundaries of rigid inclusions, *Journal Mechanics and Physics of Solids*, 2009, vol. 57, no. 10, pp. 1718–1732.

6. Rudoi E.M. Griffith formula and Cherepanov–Rice's integral for a plate with a rigid inclusion and a crack, *Vestn. Novosib. Gos. Univ. Ser. Mat. Mekh. Inform.*, 2010, vol. 10, no. 2, pp. 98–117 (in Russian).

7. Khludnev A.M. Problem of a crack on the boundary of a rigid inclusion in an elastic plate, *Mechanics of Solids*, 2010, vol. 45, no. 5, pp. 733–742.

8. Khludnev A.M. *Zadachi teorii uprugosti v negladkikh oblastyakh* (Elasticity problems in nonsmooth domains), Moscow: Fizmatlit, 2010, 252 p.

9. Khludnev A.M. On bending an elastic plate with a delaminated thin rigid inclusion, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2011, vol. 5, no. 4, pp. 582–594.

10. Shcherbakov V.V. On an optimal control problem of thin inclusions shapes in elastic bodies, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2013, vol. 16, no. 1, pp. 138–147 (in Russian).

11. Neustroeva N.V. A rigid inclusion in the contact problem for elastic plates, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2010, vol. 4, no. 4, pp. 526–538.

12. Rotanova T.A. Contact problem for plates with rigid inclusions intersecting the boundary, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2011, no. 3, pp. 99–107 (in Russian).

13. Vol'mir A.S. *Nelineinaya dinamika plastinok i obolochek* (Nonlinear dynamics of plates and shells), Moscow: Nauka, 1972, 432 p.

14. Pelekh B.L. *Obobshchennaya teoriya obolochek* (The generalized theory of shells), L'vov: L'vov University Press, 1978, 159 p.

15. Fichera G. *Existence theorems in elasticity.* Handbuch der Physik, Bd. VIa/2, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1972, pp. 347–389. Translated under the title *Teoremy sushchestvovaniya v teorii uprugosti*, Moscow: Mir, 1974, 159 p.

16. Lazarev N.P. An iterative penalty method for a nonlinear problem of equilibrium of a Timoshenko-type plate with a crack, *Numerical Analysis and Applications*, 2011, vol. 4, no. 4, pp. 309–318.

17. Baiocchi C., Capelo A. *Variational and quasivariational inequalities. Applications to free boundary problems*, New York: John Wiley and Sons, 1984, 452 p. Translated under the title *Variatsionnye i kvazivariatsionnye neravenstva. Prilozheniya k zadacham so svobodnoi granitsei*, Moscow: Nauka, 1988, 448 p.

18. Khludnev A.M. The method of smooth domains in the equilibrium problem for a plate with a crack, *Siberian Mathematical Journal*, 2002, vol. 43, no. 6, pp. 1124–1134.

Received 02.09.2013

Lazarev Nyurgun Petrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Scientific-Research Institute of Mathematics, North-Eastern Federal University, ul. Belinskogo, 58, Yakutsk, 677891, Russia; Researcher, Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, pr. Lavrent'eva, 15, Novosibirsk, 630090, Russia.
E-mail: nyurgun@ngs.ru