МАТЕМАТИКА 2014. Вып. 1

УДК 517.977 + 517.925.51

© *В. А. Зайцев, Н. В. Максимова*

К СВОЙСТВУ СОГЛАСОВАННОСТИ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА[1]

Рассматривается линейная управляемая система с неполной обратной связью с дискретным временем

$$x(t+1)=A(t)x(t)+B(t)u(t), \quad y(t)=C^*(t)x(t), \quad u(t)=U(t)y(t), \quad t\in\mathbb{Z}.$$

Исследуется задача управления асимптотическим поведением замкнутой системы

$$x(t+1)=(A(t)+B(t)U(t)C^*(t))x(t), \quad x\in\mathbb{K}^n. \tag{1}$$

Здесь $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Для такой системы вводится понятие согласованности. Это понятие является обобщением понятия полной управляемости на системы с неполной обратной связью. Исследовано свойство согласованности системы (1), получены новые необходимые условия и достаточные условия согласованности системы (1), в том числе в стационарном случае. Для стационарной системы вида (1) исследуется задача о глобальном управлении спектром собственных значений, которая заключается в приведении характеристического многочлена матрицы стационарной системы (1) с помощью стационарного управления U к произвольному наперед заданному полиному. Для системы (1) с постоянными коэффициентами специального вида, когда матрица A имеет форму Хессенберга, а в матрицах B и C все строки соответственно до p-й и после p-й (не включая p) равны нулю, свойство согласованности является достаточным условием глобальной управляемости спектра собственных значений. Ранее было доказано, что обратное утверждение верно для $n<4$ и неверно для $n>5$. В настоящей работе доказано, что обратное утверждение верно для $n=4$.

Ключевые слова: линейная управляемая система, неполная обратная связь, согласованность, управление спектром, стабилизация, дискретная система.

§ 1. Введение

В настоящей работе продолжаются исследования, проведенные в работах [Z.I, Z.II][2]. Введем обозначения и определения. Пусть $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{R}$; $\mathbb{K}^n$ — линейное n-мерное пространство векторов-столбцов $x=\operatorname{col}(x_1,\ldots,x_n)$, $x_i\in\mathbb{K}$, над полем $\mathbb{K}$; $M_{n,m}(\mathbb{K})$ — пространство $n\times m$-матриц с элементами из поля $\mathbb{K}$; $M_n(\mathbb{K}):=M_{n,n}(\mathbb{K})$; $M_{n,m}:=M_{n,m}(\mathbb{K})$; $M_n:=M_{n,n}$; $I\in M_n$ — единичная матрица; $\top$ – операция транспонирования вектора или матрицы; $*$ – эрмитово сопряжение, то есть $H^*=\overline{H}^\top$; $\mathbb{K}^{n*}$ — сопряженное к $\mathbb{K}^n$ пространство вектор-строк; $\langle a_1,\ldots,a_\ell\rangle$ – линейная оболочка элементов $a_1,\ldots,a_\ell$ некоторого линейного пространства; $\operatorname{vec}: M_{n,m}\to\mathbb{K}^{nm}$ — отображение, которое «разворачивает» матрицу $H=\{h_{ij}\}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, по строкам в вектор-столбец $\operatorname{vec}H=\operatorname{col}(h_{11},\ldots,h_{1m},\ldots,h_{n1},\ldots,h_{nm})\in\mathbb{K}^{nm}$. Нетрудно проверить, что для любых $L\in M_{m,n}$, $A\in M_{n,k}$, $N\in M_{k,l}$ равенство $D=LAN$ эквивалентно $\operatorname{vec}D=(L\otimes N^\top)\operatorname{vec}A$. Здесь $\otimes$ — прямое (кронекерово) произведение матриц [1, с. 235].

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u, \quad y=C^*(t)x, \quad t\in\mathbb{R}, \quad (x,u,y)\in\mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^m\times\mathbb{K}^k, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12–01–00195) и Минобрнауки России в рамках базовой части.

[2]Зайцев В.А. Согласованность и управление спектром собственных значений дискретных билинейных систем. I, II // Дифференциальные уравнения. (В печати.)

где матричные функции $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ кусочно-непрерывны и ограничены по норме на $\mathbb{R}$. Обозначим через $X(t,s)$ матрицу Коши соответствующей однородной системы $\dot{x}=A(t)x$. Пусть управление в системе (1) строится по принципу линейной неполной обратной связи в виде $u=U(t)y$, где $U:\mathbb{R}\to M_{m,k}$ — кусочно-непрерывная ограниченная по норме функция. Тогда система (1) переходит в замкнутую систему

$$\dot{x}=(A(t)+B(t)U(t)C^*(t))x,\quad t\in\mathbb{R},\quad x\in\mathbb{K}^n. \tag{2}$$

Определение 1. Система (2) называется *согласованной на отрезке* $[t_0,t_1]$, если для всякой матрицы $G\in M_n$ найдется кусочно-непрерывное ограниченное управление $\widehat{U}(t)\in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $t\in[t_0,t_1]$, которое переводит решение матричной системы $\dot{Z}=A(t)Z+B(t)\widehat{U}(t)C^*(t)X(t,t_0)$ из точки $Z(t_0)=0$ в точку $Z(t_1)=G$.

Определение согласованности системы (2) было введено в работе [2] для $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Это свойство обобщает понятие полной управляемости на системы с неполной обратной связью: при $C(t)\equiv I$ эти свойства эквивалентны [2]. На основе этого свойства в работах [2–7] был получен ряд результатов об управлении показателями Ляпунова замкнутой системы (2). В работе [8] понятие согласованности было перенесено на системы более общего вида — билинейные системы

$$\dot{x}=(A(t)+u_1(t)A_1(t)+u_2(t)A_2(t)+\ldots+u_r(t)A_r(t))x,\quad t\in\mathbb{R},\quad x\in\mathbb{K}^n, \tag{3}$$

и результаты о локальном управлении показателями Ляпунова были перенесены на системы (3) для $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

В работах [9–15] исследовалась задача управления спектром собственных значений систем (2) и (3) с постоянными коэффициентами для $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ и $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Эта задача заключается в следующем. Для заданной системы (2) (или (3)) с постоянными коэффициентами и заданного приведенного многочлена $p(\lambda)=\lambda^n+\gamma_1\lambda^{n-1}+\ldots+\gamma_n$ с коэффициентами $\gamma_i\in\mathbb{K}$ требуется построить управление $U\in M_{m,k}(\mathbb{K})$ в системе (2) ($u\in\mathbb{K}^r$ в системе (3)) такое, чтобы характеристический многочлен $\rho(\lambda;U)=\det(\lambda I-A-BUC^*)$ матрицы системы (2) (соответственно характеристический многочлен $\varrho(\lambda;u)=\det(\lambda I-A-u_1A_1-\ldots-u_rA_r)$ матрицы системы (3)) совпадал с $p(\lambda)$. Если такое управление найдется *для любого* $\gamma=\operatorname{col}(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\mathbb{K}^n$, то спектр стационарной системы (2) (системы (3)) называется *глобально управляемым* [14].

Известно, что для стационарной системы с полной обратной связью (то есть когда $C=I$) имеет место следующее утверждение (см. ссылки в [14]), справедливое и для $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, и для $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

Утверждение 1. *Следующие условия эквивалентны.*
1. *Система* (1) *вполне управляема.*
2. $\operatorname{rank}[B,AB,\ldots,A^{n-1}B]=n$.
3. *Спектр системы* (2) *глобально управляем.*

В работах [14,15] доказаны теоремы, аналогичные утверждению 1, для стационарных систем (2) и (3) с коэффициентами, имеющими специальный вид (см. также [9]). Приведем здесь эти утверждения для системы (2). Рассмотрим систему с неполной обратной связью с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}=(A+BUC^*)x,\quad t\in\mathbb{R},\quad x\in\mathbb{K}^n. \tag{4}$$

Предположим, что коэффициенты системы (4) имеют следующий вид: матрица A имеет форму Хессенберга, а в матрицах B и C все строки соответственно до p-й и после p-й (не включая p) равны нулю, то есть

$$A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n,\quad a_{i,i+1}\neq 0,\quad i=\overline{1,n-1};\quad a_{ij}=0,\quad j>i+1; \tag{5}$$

$$\begin{gathered}B=\{b_{ij}\},\quad C=\{c_{is}\},\quad i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,m},\quad s=\overline{1,k};\\ b_{ij}=0,\quad i=\overline{1,p-1},\quad j=\overline{1,m};\quad c_{is}=0,\quad i=\overline{p+1,n},\quad s=\overline{1,k};\quad p\in\{\overline{1,n}\}.\end{gathered} \tag{6}$$

Теорема 1 (см. [14, теорема 1]). *Пусть коэффициенты системы* (4) *имеют вид* (5), (6). *Тогда справедливы импликации* $1 \Longrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$ *для следующих утверждений.*

1. *Система* (4) *согласованна.*
2. *Матрицы* C^*B, C^*AB, ..., $C^*A^{n-1}B$ *линейно независимы.*
3. *Спектр системы* (4) *глобально управляем.*

Ответ на вопрос о справедливости импликации $2 \Longrightarrow 1$ в теореме 1 дает теорема 3 [14]. В частности, было доказано, что импликация $2 \Longrightarrow 1$ в теореме 1 имеет место при $n < 6$. Доказательство было проведено в работе [9] перебором возможных значений n, m, k, p с помощью различных необходимых и достаточных условий согласованности системы (4), установленных в работе [9] (см. также [14]). В работе [16] доказано, что при $n \geqslant 6$ утверждение $2 \Longrightarrow 1$ в теореме 1, вообще говоря, неверно, и были приведены соответствующие контрпримеры.

В работах [Z.I, Z.II] результаты работ [14, 15] переносятся на системы с дискретным временем: вводится определение согласованности для дискретных систем; получены необходимые условия и достаточные условия согласованности нестационарных и стационарных систем с неполной обратной связью и билинейных систем, аналогичные условиям, полученным для систем с непрерывным временем; установлена взаимосвязь свойства согласованности стационарных систем с задачей управления спектром собственных значений.

В частности, в работах [Z.I, Z.II] для системы вида (4) с дискретным временем (то есть когда $t \in \mathbb{Z}$ и в левой части вместо $\dot{x}(t)$ стоит $x(t+1)$) доказана теорема, формулировка которой дословно повторяет формулировку теоремы 1. Возникает вопрос: справедлива ли импликация $2 \Longrightarrow 1$ в теореме 1 для дискретных систем? Изучение этого вопроса было начато в работе [Z.II] в предположении, что $\det A \neq 0$. (Условие $\det A \neq 0$ является необходимым условием согласованности для дискретной системы вида (4) в нетривиальном случае, когда $\operatorname{rank} B < n$ или $\operatorname{rank} C < n$, см. ниже утверждение 4 и замечание 1.) В работе [Z.II] было показано, что если $\det A \neq 0$, то при $n < 4$ эта импликация верна [Z.II, утверждение 7 (d)], а при $n \geqslant 6$ эта импликация неверна [Z.II, пример 4]. Была выдвинута гипотеза [Z.II, утверждение 7 (f)] о том, что при $n = 4$ и $n = 5$ импликация $2 \Longrightarrow 1$ в теореме 1 для дискретных систем верна, так же как и для непрерывных систем. Однако эта гипотеза не была доказана. Настоящая работа посвящена доказательству этой гипотезы для $n = 4$.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Приведем определения и вспомогательные утверждения, доказанные в работах [Z.I, Z.II], необходимые для доказательства основного результата работы. Рассмотрим линейную управляемую систему с дискретным временем, замкнутую по принципу линейной неполной обратной связи:

$$x(t+1) = (A(t) + B(t)U(t)C^*(t))x(t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{K}^n. \tag{7}$$

Обозначим через $X(t,s)$, $t \geqslant s$, матрицу Коши соответствующей невозмущенной системы

$$x(t+1) = A(t)x(t).$$

Имеем $X(t,s) = A(t-1)A(t-2) \cdot \ldots \cdot A(s)$ при $t > s$ и $X(t,s) = I$ при $t = s$. Под промежутком $[t_0, t_1)$, где $t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$, $t_0 < t_1$, будем понимать множество целочисленных точек $t_0, t_0+1, \ldots, t_1-1$.

Определение 2. Система (7) называется *согласованной на промежутке* $[t_0, t_1)$, если для всякой матрицы $G \in M_n$ найдется управление $\widehat{U}(t) \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $t \in [t_0, t_1)$, которое переводит решение матричной системы

$$Z(t+1) = A(t)Z(t) + B(t)\widehat{U}(t)C^*(t)X(t,t_0), \qquad t \in \mathbb{Z},$$

из точки $Z(t_0) = 0$ в точку $Z(t_1) = G$.

Предположим, что $\det A(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{Z}$. Построим по системе (7) «большую систему» (см. [Z.I])

$$z(t+1) = F(t)z(t) + G(t)v(t), \qquad t \in \mathbb{Z}, \quad (z,v) \in \mathbb{K}^{n^2} \times \mathbb{K}^{mk}, \tag{8}$$

$$F(t) = A(t) \otimes (A^\top(t-1))^{-1} \in M_{n^2}, \quad G(t) = B(t) \otimes \overline{C(t)} \in M_{n^2,mk}. \tag{9}$$

Утверждение 2 (см. [Z.I, теорема 1]). *Пусть* $\det A(t) \neq 0$, $t \in [\tau, \tau+\vartheta)$. *Тогда система* (7) *согласованна на* $[\tau, \tau+\vartheta)$ *в том и только в том случае, если большая система* (8), (9) *вполне управляема на* $[\tau, \tau+\vartheta)$.

Рассмотрим теперь систему (7) с постоянными коэффициентами

$$x(t+1) = (A + BUC^*)x(t), \qquad t \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{K}^n. \tag{10}$$

Будем отождествлять систему (10) с матрицей $\Sigma = (A, B, C) \in M_{n,n+m+k}$. Система Σ называется *ϑ-согласованной*, если она согласованна на промежутке $[0, \vartheta)$. Очевидно, что если система Σ ϑ-согласованна, то она согласованна на промежутке $[\tau, \tau+\vartheta)$ для любого $\tau \in \mathbb{Z}$, то есть свойство согласованности стационарной системы является равномерным.

Утверждение 3 (см. [Z.I, предложение 11]). *Система* Σ *не является* ϑ*-согласованной тогда и только тогда, когда существует ненулевая матрица* $H \in M_n$ *такая, что выполнены равенства*

$$C^* A^i H A^{\vartheta-1-i} B = 0, \qquad i = 0, \ldots, \vartheta - 1. \tag{11}$$

Утверждение 4 (см. [Z.I, утверждение 1]). *Если система* Σ *является* ϑ*-согласованной и* $\vartheta > 1$, *то* $\det A \neq 0$.

Определение 3 (см. [Z.I, определение 2]). Система Σ называется *согласованной*, если существует $\vartheta > 0$ такое, что система Σ является ϑ-согласованной.

В следующем утверждении приведены различные формулировки необходимых и достаточных условий согласованности системы Σ с невырожденной матрицей A.

Теорема 2. *Пусть* $\det A \neq 0$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Система* Σ *согласованна.*
2. *Система* Σ *является* n^2*-согласованной.*
3. *Равенства*

$$C^* A^i H A^{-i} B = 0, \qquad i = 0, \ldots, n^2 - 1,$$

выполнены только при $H = 0$.

4. $\langle BU_1C^*,\ A^{-1}BU_2C^*A,\ \ldots,\ (A^{-1})^{n^2-1}BU_{n^2}C^*A^{n^2-1},\ U_i \in M_{m,k}\rangle = M_n.$
5. $\langle BU_1C^*,\ ABU_2C^*A^{-1},\ \ldots,\ A^{n^2-1}BU_{n^2}C^*(A^{-1})^{n^2-1},\ U_i \in M_{m,k}\rangle = M_n.$
6. $\operatorname{rank}[B \otimes (C^*)^\top, (AB) \otimes (C^*A^{-1})^\top,\ \ldots,\ (A^{n^2-1}B) \otimes (C^*(A^{-1})^{n^2-1})^\top] = \mathbb{K}^{n^2}.$
7. $\operatorname{rank}[B \otimes \overline{C}, (A \otimes (A^{-1})^\top)(B \otimes \overline{C}),\ \ldots,\ (A \otimes (A^{-1})^\top)^{n^2-1}(B \otimes \overline{C})] = \mathbb{K}^{n^2}.$
8. *Большая система*

$$z(t+1) = Fz(t) + Gv(t), \quad F = A \otimes (A^\top)^{-1}, \quad G = B \otimes \overline{C}, \quad (z,v) \in \mathbb{K}^{n^2} \times \mathbb{K}^{mk}, \tag{12}$$

вполне управляема.

Эквивалентность $1 \iff 3$ — это теорема 4 [Z.I]. Эквивалентность $1 \iff 4$ — это теорема 3 [Z.I]. Эквивалентность $2 \iff 4$ есть следствие предложения 12 [Z.I]. Если матрицы в левой части утверждения 4 умножить слева на A^{n^2-1}, а справа — на $(A^{-1})^{n^2-1}$, то получится эквивалентное равенство, которое имеет вид утверждения 5. Эквивалентность $5 \iff 6$ получается, если развернуть $n \times n$-матрицы в левой части утверждения 5 в n^2-столбцы при помощи отображения vec и воспользоваться равенством $\operatorname{vec}(PUQ) = (P \otimes Q^{\top})\operatorname{vec} U$. Эквивалентность $6 \iff 7$ вытекает из формулы $(PQ)\otimes(RS) = (P\otimes R)(Q\otimes S)$. Эквивалентность $7 \iff 8$ — это известный критерий полной управляемости дискретной стационарной системы.

Для системы Σ с произвольной матрицей A (не обязательно невырожденной) имеет место следующий критерий согласованности (см. [Z.I, следствие 6]).

Теорема 3. *Система Σ согласованна тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} C = n$ *или*
$$\langle A^{n^2-1}BU_1C^*,\ A^{n^2-2}BU_2C^*A,\ \ldots,\ BU_{n^2}C^*A^{n^2-1},\ U_i \in M_{m,k}\rangle = M_n.$$

Замечание 1. Назовем систему $\Sigma = (A, B, C)$ *тривиальной*, если $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} C = n$, и *нетривиальной* в противном случае. Из утверждений 3, 4 следует, что необходимым условием согласованности нетривиальной системы является условие $\det A \neq 0$. Действительно, пусть система Σ нетривиальная и согласованная, следовательно, существует $\vartheta > 0$ такое, что система Σ ϑ-согласованна. Если $\vartheta > 1$, то $\det A \neq 0$ в силу утверждения 4. Если $\vartheta = 1$, то, в силу утверждения 3, система Σ не является ϑ-согласованной, поскольку найдется матрица $H \neq 0$, обеспечивающая выполнение равенств (11) (точнее, одного равенства $C^*HB = 0$). Для этого достаточно взять матрицу $H = h \cdot \xi$, $h \in \mathbb{K}^n$, $\xi \in \mathbb{K}^{n*}$, где: (a) $h \in (\operatorname{Ker} C^*) \setminus \{0\}$, $\xi \neq 0$ — любая вектор-строка (в случае когда $\operatorname{rank} C < n$); (b) $\xi^* \in (\operatorname{Ker} B^*)\setminus\{0\}$, $h \neq 0$ — любой вектор-столбец (в случае когда $\operatorname{rank} B < n$).

Следующие два утверждения вытекают из следствий 2 и 3 [Z.I] соответственно, а также из следствия 6 [Z.I] (см. замечание после следствия 6 [Z.I]).

Утверждение 5. *Если система $\Sigma = (A, B, C)$ согласованна, то для любых невырожденных матриц $T \in M_m$, $R \in M_k$ система $\Sigma_1 = (A, BT, CR)$ также является согласованной.*

Утверждение 6. *Если система $\Sigma = (A, B, C)$ согласованна, то для любой невырожденной матрицы $S \in M_n$ система $\widetilde{\Sigma} := S\Sigma S^{-1} := (\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C})$, где $\widetilde{A} = SAS^{-1}$, $\widetilde{B} = SB$, $\widetilde{C}^* = C^*S^{-1}$, также является согласованной.*

Утверждения 5 и 6 совпадают соответственно со следствиями 2 и 3 работы [14], доказанными для систем с непрерывным временем

Матрицу A будем называть *циклической*, если геометрическая кратность каждого собственного значения равна 1. Это равносильно тому, что матрицы $I, A, \ldots, A^{n-1}$ линейно независимы. Для системы $\Sigma = (A, B, C)$ с циклической матрицей A имеет место следующее необходимое условие согласованности.

Утверждение 7 (см. [Z.II, утверждение 3]). *Пусть матрица A циклическая. Если система $\Sigma = (A, B, C)$ согласованна, то матрицы*
$$C^*B, \quad C^*AB, \quad \ldots, \quad C^*A^{n-1}B \tag{13}$$
линейно независимы.

Утверждение, обратное к утверждению 7, в общем случае неверно, поскольку матрица A может быть вырожденной, а в нетривиальном случае необходимым условием согласованности является условие $\det A \neq 0$ (см. замечание 1). Далее, даже при условии $\det A \neq 0$ обратное к утверждению 7 неверно при $n \geqslant 3$. Это показывает пример 2 [Z.II]. В следующем утверждении установлено, в каком случае верна импликация, обратная к утверждению 7.

Утверждение 8 (см. [Z.II, утверждение 4]). *Пусть матрицы* (13) *линейно независимы и* $\det A \neq 0$. *Тогда система* $\Sigma = (A, B, C)$ *согласованна, если выполнено хотя бы одно из условий:* (a) $\operatorname{rank} C = n$; ($b$) $\operatorname{rank} B = n$; ($c$) $\operatorname{rank} C = 1$; ($d$) $\operatorname{rank} B = 1$; ($e$) $n \leqslant 2$; (f) *все собственные значения матрицы* A *равны.*

Далее, имеет место следующая теорема об управлении спектром собственных значений в случае, когда коэффициенты системы (10) имеют специальный вид.

Теорема 4 (см. [Z.II, теорема 5]). *Пусть коэффициенты системы* (10) *имеют вид* (5), (6). *Тогда справедливы импликации* $1 \Longrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$ *для следующих утверждений.*

1. *Система* Σ *согласованна.*
2. *Матрицы* C^*B, C^*AB, $\ldots$, $C^*A^{n-1}B$ *линейно независимы.*
3. *Спектр системы* (10) *глобально управляем.*

Верна ли импликация $2 \Longrightarrow 1$ в теореме 4? Ответ на этот вопрос частично получен в работе [Z.II], он дается в следующих утверждениях.

Утверждение 9 (см. [Z.II, утверждение 7]). *Пусть коэффициенты системы* Σ *имеют вид* (5), (6) *и* $\det A \neq 0$. *Тогда, если* $n < 4$, *импликация* $2 \Longrightarrow 1$ *в теореме* 4 *верна.*

Утверждение 10. *Пусть коэффициенты системы* Σ *имеют вид* (5), (6) *и* $\det A \neq 0$. *Если* $n \geqslant 6$, *то импликация* $2 \Longrightarrow 1$ *в теореме* 4 *неверна, то есть для любого* $n \geqslant 6$ *существует система* $\Sigma_n = (A_n, B_n, C_n)$, *которая удовлетворяет следующим условиям:*

(a) $\det A_n \neq 0$;
(b) *коэффициенты системы* Σ_n *имеют вид* (5), (6);
(c) *матрицы* $C_n^*B_n$, $C_n^*A_nB_n$, $\ldots$, $C_n^*A_n^{n-1}B_n$ *линейно независимы;*
(d) *система* Σ_n *не является согласованной.*

Утверждение 10 доказывается примером 4 [Z.II].

Таким образом, неисследованными остаются случаи $n = 4$, $n = 5$. В работе [Z.II] была выдвинута гипотеза о том, что при $n = 4$, $n = 5$ импликация $2 \Longrightarrow 1$ в теореме 4 верна (см. [Z.II, утверждение 7 (f), гипотеза 3]). (Основанием для такого предположения явился тот факт, что для систем с непрерывным временем это утверждение верно.) Основным результатом данной работы (см. теорему 5 ниже) является положительный ответ на вопрос о справедливости этой гипотезы для $n = 4$. Случай $n = 5$ пока остается открытым.

§ 3. Основной результат

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия:*

(a) *коэффициенты системы* $\Sigma = (A, B, C)$ *имеют вид* (5), (6); (b) $\det A \neq 0$; (c) $n = 4$.

Тогда, если матрицы

$$C^*B, \quad C^*AB, \quad \ldots, \quad C^*A^{n-1}B \tag{14}$$

линейно независимы, система Σ *согласованна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что если система $\Sigma = (A, B, C)$ согласованна и столбцы матрицы B (или матрицы C) линейно зависимы, то система $\widetilde{\Sigma} = (A, \widetilde{B}, \widetilde{C})$, где матрицы $\widetilde{B}, \widetilde{C}$ получены из матриц B, C вычеркиванием линейно зависимых столбцов, также согласованна (и обратно, если $\widetilde{\Sigma}$ согласованна, то Σ согласованна). Аналогично свойства линейной независимости матриц (14) для систем Σ и $\widetilde{\Sigma}$ равносильны. Кроме того, если матрицы B, C имеют вид (6), то $\widetilde{B}, \widetilde{C}$ также имеют вид (6) (и наоборот). Поэтому без ограничения общности можно считать, что $m \leqslant n$, $k \leqslant n$ и матрицы B и C имеют полный ранг: $\operatorname{rank} B = m$, $\operatorname{rank} C = k$. Отсюда и из вида матриц B и C следует, что $n-p+1 \geqslant m$, $p \geqslant k$. Отсюда, в частности, следует, что $n+1 \geqslant m+k$. Из линейной независимости матриц (14) следует, что $mk \geqslant n$.

Далее доказательство идейно следует доказательству аналогичной теоремы для систем с непрерывным временем [9, теорема 12], однако вычислительно оно более сложное. Свойства согласованности системы $\Sigma = (A, B, C)$ (в силу утверждения 6) и линейной независимости матриц (14) (очевидно) инвариантны относительно преобразования $(A, B, C) \to (\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C})$,

$$\widetilde{A} = SAS^{-1}, \qquad \widetilde{B} = SB, \qquad \widetilde{C}^* = C^*S^{-1}, \tag{15}$$

где S — произвольная невырожденная матрица. По условию теоремы матрица A имеет вид (5). Пусть $\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n := \chi(A; \lambda)$ — характеристический многочлен матрицы A. Построим сопровождающую матрицу (матрицу Фробениуса)

$$F = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \ldots & -\alpha_1 \end{Vmatrix} \tag{16}$$

для многочлена $\chi(A; \lambda)$. Существует нижняя треугольная невырожденная матрица $\widehat{S}$ (ее построение описано в [11]), которая приводит матрицу A к матрице Фробениуса, то есть $F = \widehat{S}A\widehat{S}^{-1}$. Перейдем от системы $\Sigma = (A, B, C)$ к системе $\widetilde{\Sigma} = (\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C})$, матрицы которой определяются равенствами (15), где в качестве S выступает матрица $\widehat{S}$. Тогда $\widetilde{A}$ — это матрица Фробениуса, а матрицы $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$, в силу того что $\widehat{S}$ — нижняя треугольная, также имеют вид (6), то есть строки матрицы $\widetilde{B}$ до p-й и матрицы $\widetilde{C}$ после p-й (не включая p) равны нулю. Таким образом, без ограничения общности далее считаем, что A имеет вид (16), а B и C — вид (6). Кроме того, $\alpha_n \neq 0$ в силу условия (b) теоремы.

Построим по системе Σ большую систему (12). В силу теоремы 2 свойство согласованности системы Σ эквивалентно свойству полной управляемости большой системы, которое равносильно условию

$$\operatorname{rank}\,[G, FG, \ldots, F^{n^2-1}G] = n^2. \tag{17}$$

Будем доказывать равенство (17) для $n = 4$. Доказательство будем проводить перебором возможных значений m, k, p. Как показано выше, с необходимостью должны быть выполнены неравенства

$$1 \leqslant m \leqslant n, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad n - p + 1 \geqslant m, \quad p \geqslant k, \quad n + 1 \geqslant m + k, \quad mk \geqslant n.$$

Если $m = 1$, или $m = n$, или $k = 1$, или $k = n$, то утверждение теоремы следует из утверждения 8. Таким образом, остается рассмотреть случаи, когда выполнены неравенства

$$1 < m < n, \quad 1 < k < n, \quad n - p + 1 \geqslant m, \quad p \geqslant k, \quad n + 1 \geqslant m + k, \quad mk \geqslant n. \tag{18}$$

($\mathbf{n = 4}$). Совокупности неравенств (18) удовлетворяют 4 случая:

1) $m = 3$, $k = 2$, $p = 2$; 3) $m = 2$, $k = 2$, $p = 2$;
2) $m = 2$, $k = 3$, $p = 3$; 4) $m = 2$, $k = 2$, $p = 3$.

Разберем каждый случай по отдельности. Будем пользоваться тем, что, в силу утверждения 5, свойство согласованности инвариантно относительно преобразования $(A, B, C) \to (A, \widetilde{B}, \widetilde{C})$, $\widetilde{B} = BT$, $\widetilde{C} = CR$, $T \in M_m$, $R \in M_k$, $\det T \neq 0$, $\det R \neq 0$. Легко видеть, что свойство линейной независимости матриц (14) и выполнение условий (5), (6) также инвариантны относительно этого преобразования.

1. $m = 3$, $k = 2$, $p = 2$. Можно считать без ограничения общности, что матрицы системы имеют вид

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & w \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

При этом $x = -\det A \neq 0$. Построим матрицы (14), получим

$$C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^3B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ y & z & w \end{Vmatrix}. \quad (19)$$

Очевидно, что матрицы (19) линейно независимы для любых $x, y, z, w \in \mathbb{K}$. Построим матрицы $F = A \otimes (A^\top)^{-1} \in M_{16}$, $G = B \otimes \overline{C} \in M_{16,6}$. Вычеркнем в матрице G столбцы 1 и 3, полученную матрицу обозначим через $G_1 \in M_{16,4}$. Построим матрицу $L_0 = [G_1, FG_1, F^2G_1, F^3G_1] \in M_{16}$ и вычислим ее определитель; получим, что $\det L_0 = -1/x^6 \neq 0$. Следовательно, $\operatorname{rank} L_0 = 16$, значит, $\operatorname{rank}[G, FG, F^2G, F^3G] = 16$, поэтому $\operatorname{rank}[G, FG, \ldots, F^{15}G] = 16$, что и требовалось доказать.

2. $m = 2$, $k = 3$, $p = 3$. Можно считать без ограничения общности, что матрицы системы имеют вид

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & w \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

При этом $x = -\det A \neq 0$. Построим матрицы (14), получим

$$C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z & w \end{Vmatrix}, \quad C^*A^3B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ z & w \\ y + wz & z + w^2 \end{Vmatrix}. \quad (20)$$

Очевидно, что матрицы (20) линейно независимы для любых $x, y, z, w \in \mathbb{K}$. Построим матрицы $F = A \otimes (A^\top)^{-1} \in M_{16}$, $G = B \otimes \overline{C} \in M_{16,6}$. Вычеркнем в матрице G столбцы 1 и 2, полученную матрицу обозначим через $G_1 \in M_{16,4}$. Построим матрицу $L_0 = [G_1, FG_1, F^2G_1, F^3G_1] \in M_{16}$ и вычислим ее определитель; получим, что $\det L_0 = -1/x^6 \neq 0$. Следовательно, $\operatorname{rank} L_0 = 16$, значит, $\operatorname{rank}[G, FG, F^2G, F^3G] = 16$, поэтому $\operatorname{rank}[G, FG, \ldots, F^{15}G] = 16$, что и требовалось доказать.

3. $m = 2$, $k = 2$, $p = 2$. Можно считать без ограничения общности, что матрица C имеет вид $C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$. Матрица B имеет вид $B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{Vmatrix}$. Вторая строка матрицы B не равна нулю (в противном случае $C^*B = 0 \in M_2$). Предположим, что $b_{21} \neq 0$ (если $b_{21} = 0$, а $b_{22} \neq 0$, то поменяем столбцы матрицы B местами; свойство линейной независимости матриц (14), свойство согласованности и условие (6) от этого не изменятся). Тогда, в силу утверждения 5, без ограничения общности можно считать, что $b_{21} = 1$, $b_{22} = 0$. Далее, рассмотрим элемент b_{32}. Возможны два случая: (1) $b_{32} = 0$; (2) $b_{32} \neq 0$.

Пусть $b_{32} = 0$. Тогда $b_{42} \neq 0$ (иначе $m = \operatorname{rank} B = 1$ и $mk = 2 < 4$). Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $b_{42} = 1$ и $b_{41} = 0$. Тогда матрица B имеет вид $B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ r & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, здесь $r \in \mathbb{K}$ — произвольное число.

Если $b_{32} \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что $b_{32} = 1$, $b_{31} = 0$. Тогда матрица B имеет вид $B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ r & q \end{Vmatrix}$, где $r, q \in \mathbb{K}$ — произвольные числа.

Этим двумя случаями исчерпываются (без ограничения общности) все возможные значения матрицы B. Рассмотрим каждый из этих случаев по отдельности.

3.1. Пусть

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & w \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ r & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

При этом $x = -\det A \neq 0$. Построим матрицы (14), получим

$$C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ r & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^2B = \begin{Vmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^3B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ y + zr & w \end{Vmatrix}. \tag{21}$$

Очевидно, что матрицы (21) линейно независимы для любых $x, y, z, w, r \in \mathbb{K}$. Построим матрицы $F = A \otimes (A^\top)^{-1} \in M_{16}$, $G = B \otimes \overline{C} \in M_{16,4}$. Построим матрицу $L = [G, FG, F^2G, F^3G, F^4G] \in M_{16,20}$. Вычеркнем из нее столбцы 2, 4, 17, 19, полученную матрицу обозначим через L_0. Вычислим ее определитель, получим, что $\det L_0 = -1/x^6 \neq 0$. Следовательно, $\operatorname{rank} L_0 = 16$, значит, $\operatorname{rank} L = 16$, поэтому $\operatorname{rank}[G, FG, \ldots, F^{15}G] = 16$, что и требовалось доказать.

3.2. Пусть

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & w \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ r & q \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

При этом $x = -\det A \neq 0$. Построим матрицы (14), получим

$$C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ r & q \end{Vmatrix}, \quad C^*A^3B = \begin{Vmatrix} r & q \\ y + wr & z + wq \end{Vmatrix}. \tag{22}$$

Построим матрицу

$$V = [\operatorname{vec}(C^*B), \operatorname{vec}(C^*AB), \operatorname{vec}(C^*A^2B), \operatorname{vec}(C^*A^3B)] = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & r \\ 0 & 0 & 1 & q \\ 1 & 0 & r & y + wr \\ 0 & 1 & q & z + wq \end{Vmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы V, получим, что $\det V = z + wq - q^2 - r$. Из линейной независимости матриц (22) следует, что

$$z + wq - q^2 - r \neq 0. \tag{23}$$

Построим матрицы $F = A \otimes (A^\top)^{-1} \in M_{16}$, $G = B \otimes \overline{C} \in M_{16,4}$. Построим матрицу $L = [G, FG, F^2G, F^3G, F^4G] \in M_{16,20}$. Вычеркнем из нее столбцы 2, 4, 17, 19, полученную матрицу обозначим через L_0. Вычислим ее определитель, получим, что

$$\det L_0 = -\frac{(z + wq - q^2 - r)^4}{x^6}.$$

Из неравенства (23) вытекает, что $\det L_0 \neq 0$. Следовательно, $\operatorname{rank} L_0 = 16$, значит, $\operatorname{rank} L = 16$, поэтому $\operatorname{rank}[G, FG, \ldots, F^{15}G] = 16$, что и требовалось доказать.

4. $m = 2$, $k = 2$, $p = 3$. По аналогии со случаем 3 можно показать, что без ограничения общности все возможные значения матриц системы Σ исчерпываются следующими двумя случаями 4.1 и 4.2.

4.1.

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & w \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Имеем $x = -\det A \neq 0$. Построим матрицы (14), получим

$$\begin{gathered} C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^*AB = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ \overline{r} & 1 \end{Vmatrix}, \quad C^*A^2B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ z & \overline{r}+w \end{Vmatrix}, \\ C^*A^3B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ y+z(\overline{r}+w) & z+w(\overline{r}+w) \end{Vmatrix}. \end{gathered} \tag{24}$$

Очевидно, что матрицы (24) линейно независимы для любых $x, y, z, w, r \in \mathbb{K}$. Построим матрицы $F = A \otimes (A^\top)^{-1} \in M_{16}$, $G = B \otimes \overline{C} \in M_{16,4}$. Построим матрицу $L = [G, FG, F^2G, F^3G, F^4G] \in \in M_{16,20}$. Вычеркнем из нее столбцы 3, 4, 17, 18, полученную матрицу обозначим через L_1. Вычислим ее определитель, получим, что

$$\det L_1 = \frac{(x+wy)^2}{x^8}.$$

Далее, вычеркнем из матрицы L столбцы 1, 2, 17, 18, полученную матрицу обозначим через L_2. Вычислим ее определитель, получим, что

$$\det L_2 = \frac{y^2}{x^8}.$$

Определители матриц L_1 и L_2 не могут одновременно обращаться в нуль. Действительно, если $\det L_2 = 0$, то $y = 0$, следовательно, $\det L_1 = x^2/x^8 = 1/x^6 \neq 0$. Поэтому найдется ненулевой минор 16 порядка в матрице L. Значит, $\operatorname{rank} L = 16$, следовательно, $\operatorname{rank}[G, FG, \ldots, F^{15}G] = 16$, что и требовалось доказать.

4.2.

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & w \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} q & r \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Имеем $x = -\det A \neq 0$. Построим матрицы (14), получим

$$C^*B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, C^*AB = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, C^*A^2B = \begin{Vmatrix} \overline{q} & 1 \\ \overline{r}+z & w \end{Vmatrix}, C^*A^3B = \begin{Vmatrix} z & \overline{q}+w \\ y+wz & \overline{r}+z+w^2 \end{Vmatrix}. \tag{25}$$

Построим матрицу

$$V = [\operatorname{vec}(C^*B), \operatorname{vec}(C^*AB), \operatorname{vec}(C^*A^2B), \operatorname{vec}(C^*A^3B)] = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \overline{q} & z \\ 0 & 0 & 1 & \overline{q}+w \\ 1 & 0 & \overline{r}+z & y+wz \\ 0 & 1 & w & \overline{r}+z+w^2 \end{Vmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы V, получим, что $\det V = \overline{q}^2 + \overline{r}$. Из линейной независимости матриц (25) следует, что

$$\overline{q}^2 + \overline{r} \neq 0. \tag{26}$$

Построим матрицы $F = A \otimes (A^\top)^{-1} \in M_{16}$, $G = B \otimes \overline{C} \in M_{16,4}$. Построим матрицу $L = = [G, FG, F^2G, F^3G, F^4G] \in M_{16,20}$. Вычеркнем из нее столбцы 3, 4, 17, 18, полученную матрицу обозначим через L_1. Вычислим ее определитель, получим, что

$$\det L_1 = \frac{(x+wy)^2(\overline{q}^2+\overline{r})^4}{x^8}.$$

Далее, вычеркнем из матрицы L столбцы 1, 2, 17, 18, полученную матрицу обозначим через L_2. Вычислим ее определитель, получим, что

$$\det L_2 = \frac{y^2(\overline{q}^2+\overline{r})^4}{x^8}.$$

Определители матриц L_1 и L_2 не могут одновременно обращаться в нуль в силу неравенства (26). Действительно, если $\det L_2 = 0$, то $y = 0$, следовательно,

$$\det L_1 = \frac{x^2(\overline{q}^2 + \overline{r})^4}{x^8} = \frac{(\overline{q}^2 + \overline{r})^4}{x^6} \neq 0.$$

Поэтому найдется ненулевой минор 16 порядка в матрице L. Значит, $\operatorname{rank} L = 16$, следовательно, $\operatorname{rank}[G, FG, \ldots, F^{15}G] = 16$, что и требовалось доказать.

На этом доказательство теоремы 5 завершено. $\square$

Замечание 2. Опишем метод, с помощью которого осуществлялся выбор матриц L_0, L_1, L_2 в случаях 3.1, 3.2, 4.1, 4.2. Построим матрицу $L = [G, FG, F^2G, F^3G, F^4G] \in M_{16,20}$. Обозначим ее столбцы через $[h_1, \ldots, h_{20}]$. Рассмотрим всевозможные миноры 16 порядка матрицы L. Они вычисляются как определители матрицы $[h_{i_1}, \ldots, h_{i_{20}}]$; здесь $\sigma_\nu = (i_1, \ldots, i_{20})$ — это упорядоченное размещение без повторений из 20 элементов (от 1 до 20) по 16 элементов: $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{20} \leqslant 20$. Общее число таких размещений σ_ν равно $C_{20}^{16} = 4845$. Мы упорядочиваем размещения σ_ν в лексикографическом порядке:

$$\sigma_1 = (1, 2, \ldots, 16), \quad \sigma_2 = (1, 2, \ldots, 15, 17), \quad \ldots, \quad \sigma_{4845} = (5, 6, \ldots, 20).$$

Затем для каждого размещения σ_ν, $\nu = 1, \ldots, 4845$, строим матрицу R_ν, составленную из столбцов h_{i_j} матрицы L с номерами i_j, входящими в состав размещения σ_ν. Столбцы h_{i_j}, $j = 1, \ldots, 16$, в матрице R_ν располагаются в том же порядке, в котором номера i_j входят в размещение σ_ν. Для каждого $\nu = 1, \ldots, 4845$ вычисляем минор $\mu_\nu = \det R_\nu$. Затем, перебирая все миноры, выбираем тот минор μ_{ν_0}, который не равен нулю (в случаях 3.1, 3.2), либо те миноры μ_{ν_1}, μ_{ν_2}, которые не могут быть равны нулю одновременно (в случаях 4.1, 4.2). Соответствующие этим минорам μ_{ν_0}, μ_{ν_1}, μ_{ν_2} размещения σ_{ν_0}, σ_{ν_1}, σ_{ν_2} определяют требуемые матрицы $L_0 = R_{\nu_0}$, $L_1 = R_{\nu_1}$, $L_2 = R_{\nu_2}$. В результате вычислений номера размещений и сами размещения получились следующими:

$$\begin{aligned}
\nu_0 &= 3625, \quad \sigma_{\nu_0} = (1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20),\\
\nu_1 &= 2946, \quad \sigma_{\nu_1} = (1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 20),\\
\nu_2 &= 4698, \quad \sigma_{\nu_2} = (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 20).
\end{aligned}$$

Вычисления производились с помощью пакета Maple 15. Архив данных хранится на кафедре дифференциальных уравнений УдГУ.

Выбор матриц L_0 в случаях 1 и 2 осуществлялся подбором вручную исходя из гипотезы 1 [Z.II, утверждение 6 (c)].

Замечание 3. В [Z.II, утверждение 7 (e)] была выдвинута еще одна гипотеза о достаточном условии согласованности системы Σ специального вида: *пусть выполнены условия* (a) *и* (b) *теоремы* 5 *и выполнено условие* (d) $\operatorname{rank} B + \operatorname{rank} C \geqslant n + 1$. *Тогда, если матрицы* (14) *линейно независимы, система* Σ *согласованна.* Случаи 1 и 2, разобранные в теореме 5, доказывают эту гипотезу для $n = 4$. Доказательство этой гипотезы для $n < 4$ следует из доказательства утверждения 7 (d) в [Z.II]. Таким образом, эта гипотеза доказана для $n \leqslant 4$. Для $n > 4$ эта гипотеза пока не доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
2. Попова С.Н., Тонков Е.Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1687–1696.
3. Попова С.Н., Тонков Е.Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. II // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 11. С. 1949–1957.

4. Попова С.Н., Тонков Е.Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. III // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 2. С. 228–238.
5. Попова С.Н., Тонков Е.Л. К вопросу о равномерной согласованности линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 723–724.
6. Попова С.Н., Тонков Е.Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 226–235.
7. Макаров Е.К, Попова С.Н. О локальной управляемости характеристических показателей Ляпунова системы с некратными показателями // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 4. С. 495–499.
8. Зайцев В.А., Тонков Е.Л. Достижимость, согласованность и метод поворотов В.М. Миллионщикова // Известия вузов. Математика. 1999. № 2 (441). С. 45–56.
9. Зайцев В.А. Согласованность и управление спектром в линейных системах с наблюдателем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3. С. 50–80.
10. Zaitsev V.A. Consistency and pole assignment in linear systems with incomplete feedback // Proceedings of IFAC Workshop on Control Applications of Optimization. 2009. University of Jyvaskyla, Finland. Vol. 7. Part 1. P. 344–345. URL: `http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/41934.html`
11. Зайцев В.А. Управление спектром в линейных системах с неполной обратной связью // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 9. С. 1320–1328.
12. Зайцев В.А. Управление спектром в билинейных системах // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 7. С. 1061–1064.
13. Зайцев В.А. Необходимые и достаточные условия в задаче управления спектром // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 12. С. 1789–1793.
14. Зайцев В.А. Согласованные системы и управление спектром собственных значений. I // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 1. С. 117–131.
15. Зайцев В.А. Согласованные системы и управление спектром собственных значений. II // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 6. С. 851–859.
16. Зайцев В.А. Согласованность линейных стационарных управляемых систем с наблюдателем специального вида // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 1. С. 22–47.

Поступила в редакцию 22.12.2013

Зайцев Василий Александрович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: verba@udm.ru

Максимова Надежда Владимировна, студентка, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: imi@uni.udm.ru

V. A. Zaitsev, N. V. Maksimova

To the property of consistency for four-dimensional discrete-time linear stationary control systems with incomplete feedback of the special form

Keywords: linear control system, incomplete feedback, consistency, eigenvalue assignment, stabilization, discrete-time system.

Mathematical Subject Classifications: 93B55, 93C05, 93C55, 93D15

We consider a discrete-time linear control system with an incomplete feedback

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad y(t) = C^*(t)x(t), \quad u(t) = U(t)y(t), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

We study the problem of control over the asymptotic behavior of the closed-loop system

$$x(t+1) = (A(t) + B(t)U(t)C^*(t))x(t), \quad x \in \mathbb{K}^n, \tag{1}$$

МАТЕМАТИКА 2014. Вып. 1

where $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ or $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. For the above system, we introduce the concept of consistency, which is a generalization of the concept of complete controllability onto systems with an incomplete feedback. The focus is on the consistency property of the system (1). We have obtained new necessary conditions and sufficient conditions for the consistency of the above system including the case when the system is time-invariant. For the time-invariant system (1), we study the problem of arbitrary placement of eigenvalue spectrum. The objective is to reduce a characteristic polynomial of a matrix of the stationary system (1) to any prescribed polynomial by means of the time-invariant control U. For the system (1) with constant coefficients of the special form where the matrix A is Hessenberg, the rows of the matrix B before the p-th and the rows of the matrix C after the p-th are equal to zero (not including p), the property of consistency is the sufficient condition for arbitrary placement of eigenvalue spectrum. It has been proved that the converse proposition is true for $n < 4$ and false for $n > 5$. In present paper we prove that the converse proposition is true for $n = 4$.

REFERENCES

1. Lancaster P. *Theory of matrices*, New York–London: Academic Press, 1969. Translated under the title *Teoriya matrits*, Moscow: Nauka, 1978, 280 p.

2. Popova S.N., Tonkov E.L. Control over the Lyapunov exponents of consistent systems. I, *Differential Equations*, 1994, vol. 30, no. 10, pp. 1556–1564.

3. Popova S.N., Tonkov E.L. Control over the Lyapunov exponents of consistent systems. II, *Differential Equations*, 1994, vol. 30, no. 11, pp. 1800–1807.

4. Popova S.N., Tonkov E.L. Control over the Lyapunov exponents of consistent systems. III, *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 2, pp. 209–218.

5. Popova S.N., Tonkov E.L. Uniform consistency of linear systems, *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 4, pp. 672–674.

6. Popova S.N., Tonkov E.L. Consistent systems and control of Lyapunov exponents, *Differential Equations*, 1997, vol. 33, no. 2, pp. 226–235.

7. Makarov E.K., Popova S.N. Local controllability of characteristic Lyapunov exponents of systems with simple exponents, *Differential Equations*, 1997, vol. 33, no. 4, pp. 496–500.

8. Zaitsev V.A., Tonkov Ye.L. Attainability, consistency and the rotation method by V.M. Millionshchikov, *Russian Mathematics*, 1999, vol. 43, no. 2, pp. 42–52.

9. Zaitsev V.A. Consistency and control over spectrum in linear systems with an observer, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2009, no. 3, pp. 50–80 (in Russian).

10. Zaitsev V.A. Consistency and pole assignment in linear systems with incomplete feedback, *Proceedings of IFAC Workshop on Control Applications of Optimization. University of Jyvaskyla, Finland*, Jyvaskyla, 2009, vol. 7, part 1, pp. 344–345. `http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/41934.html`

11. Zaitsev V.A. Spectrum control in linear systems with incomplete feedback, *Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 9, pp. 1348–1357.

12. Zaitsev V.A. Control of spectrum in bilinear systems, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 7, pp. 1071–1075.

13. Zaitsev V.A. Necessary and sufficient conditions in a spectrum control problem, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 12, pp. 1789–1793.

14. Zaitsev V.A. Consistent systems and pole assignment: I, *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 1, pp. 120–135.

15. Zaitsev V.A. Consistent systems and pole assignment: II, *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 6, pp. 857–866.

16. Zaitsev V.A. Consistency of linear stationary control systems with the observer of a special form, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 1, pp. 22–47 (in Russian).

Received 22.12.2013

Zaitsev Vasilii Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: verba@udm.ru

Maksimova Nadezhda Vladimirovna, Student, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: imi@uni.udm.ru