УДК 517.911

© *В. Я. Дерр, И. Г. Ким*

ПРОСТРАНСТВО ПРАВИЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ОБОБЩЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

Рассматриваются свойства пространств правильных функций, то есть функций, определенных на открытом (конечном, полубесконечном, бесконечном) промежутке, имеющих в каждой точке конечные односторонние пределы, а также плотные множества в этих пространствах. Задача Коши для скалярного линейного дифференциального уравнения с коэффициентами–производными правильных функций «погружается» в пространство обобщенных функций Коломбо. Для коэффициентов–производных ступенчатых функций в явном виде находится решение $R(\varphi_\mu, t)$ задачи Коши в представителях, предел которого при $\mu \to +0$ объявляется решением исходной задачи. Так появляется оператор $\mathbf{T}$, который ставит в соответствие исходной задаче ее решение в виде правильной функции, определенный сначала лишь на плотном множестве. С помощью известной топологической теоремы о продолжении по непрерывности $\mathbf{T}$ продолжается до оператора $\widehat{\mathbf{T}}$, определенного на всем пространстве правильных функций. Для неоднородной задачи Коши предложено явное представление решения. Приведен ряд иллюстрирующих примеров.

Ключевые слова: правильные функции, распределения, обобщенные функции Коломбо, дифференциальное уравнение.

Введение

Здесь продолжаются исследования, начатые в [1]. Рассмотрим задачу Коши для скалярного линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$x' = b'(t)x + f'(t), \quad x(t_0) = x^0, \quad t, t_0 \in \mathcal{I}, \tag{0.1}$$

где $\mathcal{I} = (\alpha, \beta)$ — открытый интервал на $\mathbb{R}$ (возможно, и само $\mathbb{R}$); $b, x, f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$; штрих означает дифференцирование (быть может и в смысле теории обобщенных функций) [1–8].

Если не предполагать b и f локально абсолютно непрерывными (это значит, что b' и f' — обобщенные функции), то запись $b'(t)x$ в (0.1) становится некорректной, так как x может оказаться разрывной. Как и в [1], «погрузим» уравнение (0.1) в пространство обобщенных функций Коломбо, то есть будем считать b', f', x' обобщенными функциями в смысле Коломбо (C-обобщенными функциями) [9], см. также [10–12]. Тогда умножение в (0.1) становится корректным, так как C-обобщенные функции по построению образуют алгебру (см. ниже).

В предлагаемой заметке развивается новый по сравнению с [1] (топологический) подход к построению решения задачи (0.1) в виде обычной функции, основанный на теореме о продолжении по непрерывности из [13, с. 114].

§ 1. C-обобщенные функции и числа

Для удобства чтения приведем необходимые сведения из [9], для простоты ограничившись случаем $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ (в общем случае надо произвести необходимые уточнения, по поводу которых см. [9]). При этом будет удобно слегка видоизменить некоторые определения из [1, 9]. Все определения и утверждения работы [1] остаются в силе.

Обозначим через $\mathcal{D}$ множество бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, имеющих компактный в $\mathcal{I}$ носитель (финитных функций). Для $k = 1, 2, \ldots$ положим

$$\mathcal{A}_k \doteq \left\{ \varphi \in \mathcal{D} : \int_{\mathcal{I}} \varphi(t)\, dt = 1, \ \int_{\mathcal{I}} t^i \varphi(t)\, dt = 0, \ i = 1, 2, \ldots, k \right\}.$$

Множества $\mathcal{A}_k$ непустые; $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \supset \ldots \supset \mathcal{A}_k \supset \ldots$, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k = \varnothing$; $\varphi_\mu \doteq \frac{1}{\mu}\varphi\left(\frac{t}{\mu}\right)$. Легко убедиться, что $\varphi_\mu \in \mathcal{A}_k$ в том и только том случае, когда $\varphi \in \mathcal{A}_k$.

Через $\mathcal{E}$ обозначим множество отображений $\mathcal{R} : \mathcal{A}_1 \to \mathbb{R}$ таких, что функция $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\varphi, t)$ бесконечно дифференцируема по t при любой фиксированной $\varphi \in \mathcal{A}_1$. Из $\mathcal{E}$ выделим подмножество «умеренных» элементов:

$$\mathcal{E}_{mod} \doteq \Big\{\mathcal{R} \in \mathcal{E} : (\forall [a,b] \subset \mathcal{I})\ (\forall m \in \mathbb{N})\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall \varphi \in \mathcal{A}_N)$$
$$(\exists C,\, \eta)\ \left(\sup_{t\in[a,b]}\left|\frac{d^m}{dt^m}\mathcal{R}(\varphi_\mu, t)\right| \leqslant \frac{C}{\mu^N} \quad (0<\mu<\eta)\right)\Big\}.$$

Множество $\mathcal{E}_{mod}$ — алгебра относительно сложения и умножения функций, а $\mathfrak{N} \subset \mathcal{E}_{mod}$,

$$\mathfrak{N} \doteq \Big\{\mathcal{R} \in \mathcal{E}_{mod} : (\forall [a,b] \subset \mathcal{I})\ (\forall m \in \mathbb{N})\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall k \in N)\ (\forall \varphi \in \mathcal{A}_k)$$
$$(\exists C,\, \eta)\ \left(\sup_{t\in[a,b]}\left|\frac{d^m}{dt^m}\mathcal{R}(\varphi_\mu, t)\right| \leqslant C\mu^{k-N} \quad (0<\mu<\eta)\right)\Big\} \text{ —}$$

двусторонний идеал этой алгебры. Элементы фактор-алгебры $\mathfrak{G} \doteq \mathcal{E}_{mod}/\mathfrak{N}$ называются *C-обобщенными функциями* (в терминологии Коломбо — *новые обобщенные функции* [9]). Таким образом, C-обобщенные функции — это классы эквивалентных отображений $\mathcal{R}(\varphi, t)$:

$$\mathcal{R}_1 \sim \mathcal{R}_2 \iff \mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2 \in \mathfrak{N}.$$

Производной элемента $G \in \mathfrak{G}$ называется класс $\dfrac{dG}{dt}$, содержащий производную $\dfrac{d\mathcal{R}(\varphi,t)}{dt}$, где $\mathcal{R}(\varphi, t)$ — произвольный представитель класса G. C-обобщенные функции бесконечно дифференцируемы. Умножение в алгебре $\mathfrak{G}$ обозначим $\circ$.

Каждой бесконечно дифференцируемой функции поставим в соответствие класс из $\mathfrak{G}$, содержащий в качестве представителя $\mathcal{R}(\varphi, t) = f(t)$. Это отображение из алгебры бесконечно дифференцируемых функций в алгебру $\mathfrak{G}$ инъективно. Образ множества бесконечно дифференцируемых функций при этом вложении обозначим $\mathfrak{C}^\infty$; $\mathfrak{C}^\infty$ — *подалгебра* в $\mathfrak{G}$. Каждой локально суммируемой в $\mathcal{I}$ функции f поставим в соответствие класс из $\mathfrak{G}$, содержащий

$$\mathcal{R}_f(\varphi, t) \doteq \int_{\mathcal{I}} f(s)\varphi(s-t)\, ds = \int_{\mathcal{I}} f(t+\tau)\varphi(\tau)\, d\tau \tag{1.1}$$

в качестве представителя (интеграл понимается в смысле Лебега, ср. [1, 9]). Образ пространства локально суммируемых (непрерывных) функций при этом вложении обозначим $\mathfrak{L}$ $\big(\mathfrak{C}\big)$. Многие трудности в работе с C-обобщенными функциями обусловлены тем, что $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{C}$ хотя и являются линейными подпространствами в $\mathfrak{G}$, *но не являются подалгебрами*: достаточно простые примеры показывают, что класс, порожденный произведением $f_1 \cdot f_2$, вообще говоря, не совпадает с произведением классов, порожденных локально суммируемыми функциями f_1 и f_2. Однако

$$\lim_{\mu\to+0}\Big(\mathcal{R}_{f_1\cdot f_2}(\varphi_\mu, t) - \mathcal{R}_{f_1}\cdot\mathcal{R}_{f_2}(\varphi_\mu, t)\Big) = 0.$$

В книге [9, с. 14] это равенство доказывается для непрерывных функций, а для локально суммируемых на $\mathcal{I}$ функций это равенство следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и принадлежности $\varphi \in \mathcal{A}_1$.

Класс $\mathfrak{T} \in \mathfrak{G}$ называется распределением, если существуют натуральное число m и локально суммируемая на $\mathcal{I}$ функция f такие, что $\mathfrak{T} = \dfrac{d^m\mathfrak{f}}{dt}$, где $\mathfrak{f}$ — класс, порожденный f согласно равенству (1.1). Это приводит к известному определению обобщенной функции Соболева–Шварца (распределению). Например ($\mathcal{I}=\mathbb{R}$), дельта-функция δ определяется как производная от единичной функции $f(t)=0$ при $t<0$, $f(t)=1$ при $t>0$:

$$\mathcal{R}_f(\varphi,t)=\int_0^\infty \varphi(s-t)\,ds, \qquad \frac{d\mathcal{R}_f(\varphi,t)}{dt}=-\int_0^\infty \varphi'(s-t)\,ds=\varphi(-t).$$

Таким образом, дельта функция $\delta(t)$ — класс из $\mathfrak{G}$, содержащий в качестве представителя $\mathcal{R}(\varphi,t)=\varphi(-t)$.

Пространство распределений (вне его связи с $\mathfrak{G}$) с обычной топологией обозначим $\mathcal{D}'$. Пусть $\mathbf{V}$ — оператор вложения $\mathcal{D}'$ и различных его подмножеств в $\mathfrak{G}$. (Здесь и всюду ниже мы, допуская некоторую вольность речи, называем отображение одного топологического пространства в другое оператором, хотя это не является общепринятым в топологии.)

Образ $\mathbf{V}\mathcal{D}'$ обозначим $\mathfrak{D}'$. И снова: $\mathfrak{D}'$ — линейное подпространство в $\mathfrak{G}$, но не подалгебра. Так, $\delta^2\in\mathfrak{G}$ есть класс, содержащий $\mathcal{R}(\varphi,t)=\varphi^2(-t)$, но $\delta^2\notin\mathcal{D}'$.

По аналогии с C-обобщенными функциями вводятся C-обобщенные вещественные числа. В алгебре всех функционалов $\mathcal{R}:\mathcal{A}_1\to\mathbb{R}$ выделяется подалгебра умеренных элементов, то есть таких, что

$$(\exists N\in\mathbb{N})\ \ (\forall\varphi\in\mathcal{A}_1)\ \ (\exists C,\,\eta>0)\quad\left(|\mathcal{R}(\varphi_\mu)|\leqslant\frac{C}{\mu^N}\ \ (0<\mu<\eta)\right);$$

двусторонний идеал в этой алгебре образуют функционалы, обладающие свойством

$$(\exists N\in\mathbb{N})\ \ (\forall k\in N)\ \ (\forall\varphi\in\mathcal{A}_1)\ \ (\exists C,\,\eta>0)\quad\big(|\mathcal{R}(\varphi_\mu)|\leqslant C\mu^{k-N}\ \ (0<\mu<\eta)\big).$$

Элементы фактор-алгебры $\widehat{\mathbb{R}}$ умеренных элементов по этому идеалу называются *C-обобщенными вещественными числами.* Это понятие позволяет говорить о значении C-обобщенной функции в точке, которое полностью совпадает со значением функции в точке только для бесконечно дифференцируемой функции. Так, например, значение дельта-функции в точке 0 есть функционал $\varphi(0)$.

§ 2. Пространства правильных функций

Функция $x:\mathcal{I}\to\mathbb{R}$ называется *правильной* [8,16–19], если в каждой точке $t\in\mathcal{I}$ существуют конечные односторонние пределы

$$x(t+),\ x(t-) \tag{2.1}$$

(ср. терминологию из [14,16,19]); непрерывные, кусочно-непрерывные функции, функции ограниченной вариации являются правильными. Правильные функции, у которых, кроме пределов (2.1), существуют также пределы $x(\alpha+)$, $x(\beta-)$, являются ограниченными [18] и, следовательно, локально суммируемыми на $\mathcal{I}$. Так как непрерывно дифференцируемая функция интегрируема по правильной функции в смысле Римана–Стилтьеса [18, с. 65], то для производной b' от правильной функции b имеет место представление

$$\mathcal{R}_{b'}(\varphi,\,t)=(RS)\int_{\mathcal{I}}\varphi(s)\,db(s+t).$$

Действительно,

$$\mathcal{R}_{b'}(\varphi,\,t)=\mathcal{R}'_b(\varphi,\,t)=\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{I}}\varphi(s-t)b(s)\,ds=-\int_{\mathcal{I}}\varphi'(s-t)b(s)\,ds=-\int_{\mathcal{I}}\varphi'(\tau)b(\tau+t)\,d\tau=$$
$$=-\int_{\mathcal{I}}b(\tau+t)\,d\varphi(\tau)=(RS)\int_{\mathcal{I}}\varphi(\tau)\,db(\tau+t).$$

Напомним, что φ — финитная функция, поэтому при интегрировании по частям внеинтегральное слагаемое равно нулю.

Ниже будут рассматриваться два пространства правильных функций.

Пусть $\mathbf{R}_b(\mathcal{I})$ означает множество ограниченных правильных функций, то есть таких ограниченных функций, что существуют конечные односторонние пределы (2.1), а через $\mathbf{R}(\mathcal{I})$ обозначим множество правильных функций, у которых наряду с пределами (2.1) существуют также пределы

$$x(\alpha+)\ \big(x(-\infty)\big),\quad x(\beta-)\ \big(x(+\infty)\big).$$

Как уже было отмечено, функции из таких множеств ограничены. Очевидно, $\mathbf{R}(\mathcal{I})\subset\mathbf{R}_b(\mathcal{I})$; оба множества являются векторными пространствами над $\mathbb{R}$. Введем на них норму

$$\|x\|=\sup_{t\in\mathcal{I}}|x(t)|. \tag{2.2}$$

Для $[a,b]\subset\mathcal{I}$ пространства $\mathbf{R}([a,b])=\mathbf{R}_b([a,b])$ являются банаховыми относительно нормы (2.2) (см., например, [18]). Для интервала $\mathcal{I}$ полнота обоих пространств нуждается в доказательстве (см. ниже).

Пусть, далее, $H(\mathcal{I})$ — множество простых функций $x:\mathcal{I}\to\mathbb{R}$ (ступенчатых) с конечным множеством $\mathcal{T}(x)$ точек разрыва, $H_v(\mathcal{I})$ — множество простых функций с не более чем счетным множеством $\mathcal{T}(x)$ и сходящимся рядом скачков

$$\sum_{t\in\mathcal{T}(x)}|\sigma_t(x)|, \tag{2.3}$$

$H_b(\mathcal{I})$ — множество ограниченных простых функций с возможно расходящимся рядом скачков (2.3). Очевидно, имеют место включения

$$H(\mathcal{I})\subset H_v(\mathcal{I})\subset H_b(\mathcal{I}). \tag{2.4}$$

Во всех трех векторных пространствах индуцируется норма (2.2).

В [14, 18] доказано, что пространство $H([a,b])$ плотно в пространстве $\mathbf{R}_b([a,b])=\mathbf{R}([a,b])$. В силу включений (2.4) в $\mathbf{R}([a,b])$ плотны также пространства $H_v([a,b])$, $H_b([a,b])$. Для открытого интервала ситуация несколько иная (см. ниже).

Предложение 1. *Пространство $\mathbf{R}_b(\mathcal{I})$ банахово.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность в $\mathbf{R}_b(\mathcal{I})$ и $\varepsilon>0$. Найдется такое натуральное M, что для $m,k>M$, $k>m$ выполнено неравенство

$$\|x_m-x_k\|_{\mathbf{R}_b(\mathcal{I})}<\varepsilon.$$

Рассмотрим числовые последовательности $a_m\to\alpha+$, $b_m\to\beta-$. Пусть $\check{x}_m$ — сужение x_m на $\mathbf{R}_b([a_m,\,b_m])$. Тогда

$$\|\check{x}_m-\check{x}_k\|_{\mathbf{R}_b([a_M,\,b_M])}\leqslant\|x_m-x_k\|_{\mathbf{R}_b(\mathcal{I})}<\varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $\{\check{x}_m\}_{m=M+1}^{\infty}$ фундаментальна в полном пространстве $\mathbf{R}_b([a_M,\,b_M])$. Найдется функция $\tilde{x}_M\in\mathbf{R}_b([a_M,\,b_M])$ такая, что

$$\|\check{x}_m-\tilde{x}_M\|_{\mathbf{R}_b([a_M,\,b_M])}<\varepsilon\quad\text{для}\quad m>M.$$

Обозначим $x(t)=\tilde{x}_M(t)$ для $t\in[a_M,\,b_M]$. При переходе от $[a_M,\,b_M]$ к $[a_{M+1},\,b_{M+1}]$ значения $x(t)$ на $[a_M,\,b_M]$ остаются без изменения: $x_{M+1}(t)=x_M(t)$ для $t\in[a_M,\,b_M]$. Таким образом, получаем функцию, определенную на всем $\mathcal{I}$. При этом в каждой точке $t\in\mathcal{I}=(\alpha,\beta)$ существуют конечные пределы $x(t-)$ и $x(t+)$.

Предположим, что функция x не является ограниченной при $t\to\alpha+$. Тогда существует последовательность $\alpha_m\to\alpha+$, такая, что $|x(\alpha_m)|\to+\infty$; так как $\|x\|_{\mathbf{R}_b([\alpha_m,\,\beta_m])}\geqslant|x(\alpha_m)|$, то в итоге приходим к противоречивому соотношению:

$$\varepsilon\geqslant\|x-x_m\|_{\mathbf{R}_b([\alpha_m,\,\beta_m])}\geqslant\big|\|x\|_{\mathbf{R}_b([\alpha_m,\,\beta_m])}-\|x_m\|_{\mathbf{R}_b([\alpha_m,\,\beta_m])}\big|\to+\infty.$$

Значит, x ограничена в правой окрестности точки α. Точно так же доказывается ограниченность x в левой окрестности точки β. Следовательно, $x \in \mathbf{R}_b(\mathcal{I})$. Этим полнота $\mathbf{R}_b(\mathcal{I})$ доказана. □

Предложение 2. *Пространство* $\mathbf{R}(\mathcal{I})$ *банахово.*

Доказательство. Покажем, что $\mathbf{R}(\mathcal{I})$ замкнуто в $\mathbf{R}_b(\mathcal{I})$. Пусть x_* — предельная точка $\mathbf{R}(\mathcal{I})$. Существует последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}(\mathcal{I})$, сходящаяся к x_*. Рассмотрим числовые последовательности

$$\{x_m(\alpha+)\}_{m=1}^{\infty}, \quad \{x_m(\beta-)\}_{m=1}^{\infty}. \tag{2.5}$$

Так как сходящаяся последовательность фундаментальна, то

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists M \in \mathbb{N}) \ (\forall m, k > M) \ (\|x_m - x_k\|_{\mathbf{R}(\mathcal{I})} < \varepsilon),$$

что эквивалентно тому, что для всех $t \in \mathbf{R}(\mathcal{I})$ выполняется неравенство $|x_m(t) - x_k(t)| < \varepsilon$. Устремим в этом неравенстве $t \to \alpha+ \ \big(t \to \beta-\big)$. В итоге получим неравенства

$$|x_m(\alpha+) - x_k(\alpha+)| \leqslant \varepsilon \qquad \Big(|x_m(\beta-) - x_k(\beta-)| \leqslant \varepsilon\Big),$$

которые означают фундаментальность числовых последовательностей (2.5), что, в свою очередь, означает существование пределов

$$A \doteq \lim_{m\to\infty} x_m(\alpha+), \qquad B \doteq \lim_{m\to\infty} x_m(\beta-).$$

Покажем теперь, что $x_*(\alpha+) = A, \quad x_*(\beta-) = B$. Предположим, что первое равенство не выполняется:

$$(\exists \varepsilon_0 > 0) \ (\forall \delta > 0) \ (\exists t_0 > \alpha) \ (t_0 - \alpha < \delta) \ \big(|A - x_*(t_0)| \geqslant \varepsilon_0\big).$$

Пусть $b < \beta$. Тогда $\|x_m - x_*\|_{\mathbf{R}([t_0,b])} \geqslant \varepsilon_0$, что невозможно. Значит, $x_*(\alpha+) = A$. Точно так же доказывается равенство $x_*(\beta-) = B$. Следовательно, $x_* \in \mathbf{R}(\mathcal{I})$. □

Предложение 3. *Множества* $H(\mathcal{I})$, $H_v(\mathcal{I})$ *плотны в пространстве* $\mathbf{R}(\mathcal{I})$.

Доказательство. Достаточно доказать плотность $H(\mathcal{I})$. Пусть $x \in \mathbf{R}(\mathcal{I})$, $a_n \to \alpha+$ $(a_n \to -\infty)$, $b_n \to \beta-$ $(b_n \to +\infty)$, $\varepsilon_n \to 0$. Из доказанного в [14, 18] для любого натурального n найдется функция $x_n \in H([a_n, b_n])$ такая, что $\sup\limits_{t\in[a_n,\, b_n]} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon_n$. Полагаем $y_n(t) = \begin{cases} x(\alpha+), & t \in (\alpha, a_n), \\ x_n(t), & t \in [a_n\, b_n], \\ x(\beta-), & t \in (b_n, \beta). \end{cases}$ Легко видеть, что $y_n \in H(\mathcal{I})$ при всех натуральных n. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Найдется такое натуральное N, что для всех $n > N$ выполнены неравенства

$$\varepsilon_n < \varepsilon, \quad |x(t) - x(\alpha+)| < \varepsilon, \ \ t \in (\alpha, a_n), \ \ |x(\beta) - x(t)| < \varepsilon, \ \ t \in (b_n, \beta);$$

следовательно, $\|x - y_n\|_{\mathbf{R}(\mathcal{I})} < \varepsilon$. □

Замечание 1. *В пространстве* $\mathbf{R}_b(\mathcal{I})$ *множество* $H(\mathcal{I})$ *плотным не является.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{I} = (-\infty, +\infty), \quad x_0(t) = \sin t, \ \ \varepsilon_0 = 1$; для любого $y \in H(\mathcal{I})$ найдутся такие числа a, b, C_1, C_2, что $y(t) = C_1$ при $t < a$, $y(t) = C_2$ при $t > b$ и $\|x_0 - y\| \geqslant 1$.

При произвольном $\mathcal{I}$ с конечными концами можно взять $x_0(t) = \sin \frac{1}{t-\alpha} \sin \frac{1}{\beta - t}$. □

Предложение 4. *Множество $H_b(\mathcal{I})$ плотно в пространстве $\mathbf{R}_b(\mathcal{I})$ в топологии равномерной сходимости на отрезках.*

Доказательство. Из сказанного выше для любого $x \in \mathbf{R}_b(\mathcal{I})$ и $[a,b] \subset \mathcal{I}$ найдется последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H_b(\mathcal{I})$ такая, что $x_n(t) \rightrightarrows x(t)$ на $[a,b]$. □

В дальнейшем понадобятся также следующие определения. Пусть $x \in \mathbf{R}_b(\mathcal{I})$. Рассмотрим разбиение d интервала $\mathcal{I}$:

$$\alpha < t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \beta.$$

Составим сумму

$$v_d(f) \doteq \sum_{k=1}^{n} |f(t_k-) - f(t_{k-1}+)|.$$

Назовем полной вариацией x величину (или символ $+\infty$)

$$\bigvee_{\mathcal{I}}(x) \doteq \sup_d v_d(x).$$

Пространство функций, для которых так определенная полная вариация конечна, с нормой

$$\|x\| \doteq \sup_{t\in\mathcal{I}}|x(t)| + \bigvee_{\mathcal{I}}(x) \tag{2.6}$$

будет обозначаться $\mathbf{BV}(\mathcal{I})$. Нетрудно убедиться (см., например, [20, с. 69, 274]), что $\mathbf{BV}(\mathcal{I})$ — банахово пространство. Заметим также, что $H_v(\mathcal{I})$ с нормой (2.6) тоже является банаховым пространством и, следовательно, (замкнутым) подпространством пространства $\mathbf{BV}(\mathcal{I})$. По этой причине $H_v(\mathcal{I})$ с нормой (2.6) не будет плотным множеством в $\mathbf{BV}(\mathcal{I})$.

Пусть $\mathbf{X}$ — одно из пространств $\mathbf{R}_b(\mathcal{I})$, $\mathbf{R}(\mathcal{I})$, $\mathbf{BV}(\mathcal{I})$, $H(\mathcal{I})$, $H_v(\mathcal{I})$, $H_b(\mathcal{I})$. Назовем две функции из $\mathbf{X}$ эквивалентными, если они различаются только своими значениями в точках разрыва. Легко видеть, что введенное отношение действительно является отношением эквивалентности на $\mathbf{X}$. Обозначим через $\widehat{\mathbf{X}}$ фактор-множество по этому отношению эквивалентности (фактор-пространство). На $\widehat{\mathbf{X}}$ вводится обычная норма: если $\widehat{x}$ — класс из $\widehat{\mathbf{X}}$, то полагаем $\|\widehat{x}\| = \inf\limits_{x\in\widehat{x}}\|x\|$. Если пространство $\mathbf{X}$ полное, то и фактор-пространство $\widehat{\mathbf{X}}$ также является полным (см., например, [20, с. 55, 259]). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 5. *Пространства $\widehat{\mathbf{R}}_b(\mathcal{I})$, $\widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$, $\widehat{\mathbf{BV}}(\mathcal{I})$ банаховы.*

(См. также [20, с. 71, 278, 281].)

Следствие 1. *Множества $\widehat{H}(\mathcal{I})$, $\widehat{H}_v(\mathcal{I})$ плотны в пространстве $\widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$.*

Пусть $\mathbf{X}^\mathbf{n}$ означает пространство n-вектор-функций, каждая компонента которой принадлежит $\mathbf{X}$. Справедливо также следующее утверждение (см., например, [20, с. 72, 281]).

Предложение 6. *Пространство $\mathbf{X}^\mathbf{n}$ полно тогда и только тогда, когда полно пространство $\mathbf{X}$.*

§ 3. «Погружение» задачи (0.1) в пространство C-обобщенных функций

Следуя [10], введем в $\mathfrak{G}$ топологию. Пусть K — компактное подмножество в $\mathcal{I}$, $k \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$. Полагаем

$$Q_{K,k,\beta} \doteq \Big\{G \in \mathfrak{G} : \exists \mathcal{R} \in \mathcal{E}_{mod} \text{ (представитель } G\text{) такой, что}$$
$$\forall m \leqslant k \sup_{t\in K,\, \varphi\in\mathcal{A}_1} \left\| \frac{d^m}{dt^m}\mathcal{R}(\varphi_\mu, t)\right\| \leqslant \beta\Big\}.$$

Скажем, что множество $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{G}$ *открытое*, если для каждого $G \in \mathfrak{V}$ найдутся $\beta > 0$, $k \in \mathbb{N}$ и компактное подмножество $K \subset \mathcal{I}$ такие, что $G + Q_{K,k,\beta} \subset \mathfrak{V}$. Эти открытые множества определяют топологию $\mathfrak{G}$. Точнее, семейство $\{G + Q_{K,k,\beta}\}$ образует базу окрестностей $\mathfrak{G}$.

Для $G \in \mathfrak{G}$ полагаем

$$p_{K,\,k}(G) \doteq \inf\Big\{\beta \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} : \exists \mathcal{R} \in \mathcal{E}_{mod} \text{ (представитель } G\text{) такой, что } \forall m \leqslant k \sup_{t\in K,\,\varphi\in\mathcal{A}_1} \Big\| \frac{d^m}{dt^m}\mathcal{R}(\varphi_\mu, t)\Big\| \leqslant \beta\Big\}.$$

На прямом произведении $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ рассмотрим фильтр $\mathfrak{U}$, порожденный множествами

$$U_{K,k,\nu} \doteq \{(G,H) \in \mathfrak{G}\times\mathfrak{G} : p_{K,\,k}(G-H) < \nu\} \quad (\nu > 0,\ k \in \mathbb{N},\ K \subset \mathcal{I} \text{ — компактное множество}).$$

Фильтр $\mathfrak{U}$ определяет на $\mathfrak{G}$ *равномерную структуру* (см. [13, с. 201]), которая, в свою очередь, порождает введенную выше топологию. И хотя эта топология не является отделимой на $\mathfrak{G}$, на $\mathfrak{D}'$ она индуцирует отделимую топологию $\tau^{('')}$, которая сильнее обычной топологии $\tau^{(')}$ пространства $\mathcal{D}'$ (точнее, ее образа в $\mathfrak{D}'$ при вложении V) [10, с. 174].

В дальнейшем $\mathcal{Y}$ означает одно из пространств $\mathbf{R}_b(\mathcal{I})$, $\mathbf{R}(\mathcal{I})$, $\widehat{\mathbf{R}}_b(\mathcal{I})$, $\widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$, образы этих пространств в $\mathfrak{G}$ при вложении $\mathbf{V}$ будем обозначать соответствующей готической буквой; так, $\mathfrak{Y} = \mathbf{V}\mathcal{Y}$ (см. также выше обозначение $\mathfrak{L}$). Через $\mathfrak{Y}^{(')}$ обозначим множество производных элементов из $\mathfrak{Y}$; $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Y}^{(')}$ рассматриваем как топологические (векторные) пространства с топологиями, индуцированными из $\mathfrak{G}$ (точнее, уже из $\mathfrak{D}'$).

Обозначим $\mathbf{D}$ — оператор дифференцирования, определенный на $\mathfrak{G}$; точно так же будем обозначать его сужения на $\mathfrak{D}'$ и $\mathfrak{Y}$; таким образом, $\mathfrak{Y}^{(')} = \mathbf{D}(\mathfrak{Y})$.

Пусть τ — топология банахова пространства $\mathcal{Y}$. Так как вложение $\mathbf{V} : \mathcal{Y} \to \mathfrak{Y}$ биективно (инъективность обсуждается в [9], сюръективность следует из определения $\mathfrak{Y}$), то, в силу соотношений (см., например, [18, с. 78, 270]) $\mathbf{V}\big(\bigcup\limits_\gamma \mathbf{g}_\gamma\big) = \bigcup\limits_\gamma\big(\mathbf{V}\mathbf{g}_\gamma\big)$ и $\mathbf{V}\big(\bigcap\limits_\gamma \mathbf{g}_\gamma\big) = \bigcap\limits_\gamma\big(\mathbf{V}\mathbf{g}_\gamma\big)$, $\mathbf{V}(\tau)$ образует топологию в $\mathfrak{Y}$, которая сильнее топологии $\tau^{('')}$, индуцированной в $\mathfrak{Y}$ из $\mathfrak{G}$; об этой топологии шла речь выше. Таким образом,

$$\mathbf{V}(\tau) \succ \tau^{('')} \succ \tau^{(')}. \tag{3.1}$$

Как уже отмечалось, второе соотношение в (3.1) доказано в [10, с. 174], первое может быть доказано вполне аналогично.

Так как вложение $\mathbf{V} : \mathcal{Y} \to \mathfrak{Y}$, очевидно, непрерывно в топологиях $(\tau, \mathbf{V}(\tau))$, то оно тем более непрерывно в топологиях $(\tau, \tau^{('')})$ (см. [13, с. 35]); далее, так как оператор дифференцирования $\mathbf{D}$ непрерывен в топологиях $(\tau^{(')}, \tau^{(')})$, то он тем более непрерывен в топологиях $(\tau^{('')}, \tau^{(')})$ (ссылка та же).

Пусть $b, f \in \mathcal{Y}$, $\mathfrak{b} = \mathbf{V}b$, $\mathfrak{f} = \mathbf{V}f$; тогда $\mathfrak{b}', \mathfrak{f}' \in \mathfrak{Y}^{(')}$ и «погружение» задачи (0.1) в $\mathfrak{G}$ будет иметь вид

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{b}'(t) \circ \mathfrak{x} + \mathfrak{f}'(t), \quad t \in \mathcal{I}, \quad \mathfrak{x}(t_0) = x^0; \tag{3.2}$$

задача (3.2) определяется парой $(\mathfrak{b}, \mathfrak{f})$. Для удобства обозначаем оператор вложения прозведения $\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$ в $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ одной буквой $\mathbf{V}$. Задаче (3.2) соответствует задача в представителях

$$R'(\varphi, t) = R_{\mathfrak{b}'}(\varphi, t)R(\varphi, t) + R_{\mathfrak{f}'}(\varphi, t), \qquad R(\varphi, t_0) = x_0. \tag{3.3}$$

Пусть задача в представителях (3.3) имеет умеренное решение $R(\varphi, t)$, которое является представителем решения $\mathfrak{x} \in \mathfrak{G}$ задачи (3.2), и существует обычная функция x (возможно, из $\mathcal{Y}$) такая, что

$$x(t) \doteq \lim_{\mu\to 0} R(\varphi_\mu, t). \tag{3.4}$$

Эту функцию естественно назвать *решением задачи* (0.1).

Обозначим через $\mathbf{C} : \mathfrak{G}\times\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ оператор, который ставит в соответствие задаче Коши (3.2) (то есть паре $(\mathfrak{b}, \mathfrak{f})$) ее решение $\mathfrak{x}$ (если такое решение существует; этот оператор естественно назвать *оператором задачи Коши*); $\mathbf{C}$ заведомо нелинейный оператор. Через $\mathbf{P} : \mathfrak{G} \to \mathcal{Y}$ обозначим оператор, который ставит в соответствие решению $\mathfrak{x}$ функцию x, определяемую соотношением (3.4) (если таковая существует). Если в (3.2) $\mathfrak{f} = 0$, то считаем, что $\mathbf{C} : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$. Таким образом, нуждается в доказательстве не только непрерывность операторов $\mathbf{C}$ и $\mathbf{P}$ в топологиях соответственно $(\tau^{(')}, \tau^{('')})$ и $(\tau^{('')}, \tau)$, но и (прежде всего) их существование.

Пусть, далее, $\mathbf{T} = \mathbf{PCDV}$. Тогда $\mathbf{V}$ переводит пару $(b, f) \in \mathcal{Y}\times\mathcal{Y}$, порождающую задачу Коши (0.1), в пару $(\mathfrak{b}, \mathfrak{f}) \in \mathfrak{Y}\times\mathfrak{Y}$, $\mathbf{D}$ переводит пару $(\mathfrak{b}, \mathfrak{f})$ в пару $(\mathfrak{b}', \mathfrak{f}') \in \mathfrak{Y}^{(')}\times\mathfrak{Y}^{(')}$, $\mathbf{C}$ переводит пару $(\mathfrak{b}', \mathfrak{f}')$, порождающую задачу Коши (3.2), в решение $\mathfrak{x}$ этой задачи, наконец, $\mathbf{P}$ переводит представитель этого решения в решение x задачи (0.1). Таким образом, оператор $\mathbf{T} : \mathcal{Y}\times\mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$, в случае если он существует, ставит в соответствие исходной задаче Коши (0.1) ее решение $x : \ x = \mathbf{T}(b, f)$. Подход, предлагаемый в настоящей работе, заключается в том, что существование (и определенного рода непрерывность) оператора $\mathbf{T}$ доказывается сначала для плотного в $\mathcal{Y}$ множества, а затем с помощью цитированной выше теоремы из [13, с. 114] этот оператор продолжается до непрерывного [13, с. 114] на все пространство $\mathcal{Y}$.

§ 4. Задача (0.1) в пространствах $H(\mathcal{I})$, $H_v(\mathcal{I})$

1. Рассмотрим сначала однородную задачу

$$\dot{x} = a(t)x, \quad x(t_0) = 1, \qquad a(t) = b'(t), \tag{4.1}$$

где $b(t)$ — ступенчатая функция (из $H(\mathcal{I})$). Пусть $\mathcal{T}(b) \doteq \{c_1, \ldots, c_p\}$ — множество точек разрыва b, σ_k — ее скачок в точке c_k; пусть, далее, $\rho(t) = 0$ при $t < 0$, $\rho(t) = 1$ при $t > 0$ (при $t = 0$ значение ρ не определяем). Тогда можно представить

$$b(t) = \sum_{k=1}^{p} \sigma_k \rho(t - c_k), \qquad a(t) = \sum_{k=1}^{p} \sigma_k \delta(t - c_k). \tag{4.2}$$

Задаче (4.1) (точнее, погруженной в $\mathfrak{G}$ задаче вида (3.2)) соответствует задача в представителях

$$R'(\varphi, t) = \sum_{k=1}^{p} \sigma_k \varphi(c_k - s) R(\varphi, t), \qquad R(\varphi, t_0) = x_0, \quad t_0 \in \mathcal{I}.$$

Пусть $t_0 < c_1$. Тогда решение задачи в представителях (3.4) при $\mathfrak{f} = 0$ имеет вид

$$R(\varphi,\, t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \sigma_k \int_{t_0}^{t} \varphi(c_k - s)\, ds\right)$$

и

$$R(\varphi_\mu, t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \sigma_k \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\mu} \varphi\Big(\frac{c_k - s}{\mu}\Big)\, ds\right) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{p} \sigma_k \int_{\frac{c_k - t_0}{\mu}}^{\frac{c_k - t}{\mu}} \varphi(s)\, ds\right).$$

Несложно проанализировать, что для $t_0 \leqslant t < c_1$ $\ R(\varphi_\mu, t) \to 1$; для $c_k < t < c_{k+1}$ $R(\varphi_\mu, t) \to \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \sigma_i\right)$, $1 \leqslant k \leqslant p-1$; для $t > c_p$ $\ R(\varphi_\mu, t) \to \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{p} \sigma_i\right)$; для $t = c_k$ $R(\varphi_\mu, t) \to \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{k-1} \sigma_i + c_k \int_0^{+\infty} \varphi(s)\, ds\right)$, $2 \leqslant k \leqslant p$. Следовательно, в точках разрыва функции b решение имеет в качестве значений обобщенные вещественные числа, между точками разрыва значения решения — обычные вещественные числа. Таким образом, если пренебречь значениями решения в точках разрыва функции b, то при $t_0 < c_1$

$$x(t) = \big(\mathbf{T}(b)\big)(t) = \begin{cases} 1 \quad \text{для } \ t_0 \leqslant t < c_1, \\ \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{k} \sigma_j\right) \ \text{для } \ c_k < t < c_{k+1}, \ \ 1 \leqslant k \leqslant p, \ \ c_{p+1} = \beta. \end{cases} \tag{4.3}$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *С точностью до значений функций в точках разрыва решение задачи* (4.1) *при* $b \in H(\mathcal{I})$ *в указанном в* § 3 *смысле дается равенством*

$$x(t) = \big(\mathbf{T}(b)\big)(t) = \exp\left(\sum_{j=1}^{p} \sigma_j \rho(t - c_j)\right) = e^{b(t)}, \quad t \geqslant t_0.$$

Замечание 2. Проведенный выше анализ показывает также, что если $t_0 = c_1$, то значения решения между точками разрыва представляют собой обобщенные числа. Так, вторая строка в представлении (4.3) при $c_k < t < c_{k+1}$, $\ k = 1, 2, \ldots, p-1$, будет иметь вид

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{k-1} \sigma_j + c_k \int_0^{+\infty} \varphi(s)\, ds\right)$$

(сумма полагается равной нулю, если верхний индекс меньше нижнего). И только при $t > c_p$ значения решения будут обычными вещественными числами.

По этой причине в дальнейшем, до п. **3** § 5, предполагаем, что $t_0 < c_1$.

Пусть $b \in H_v(\mathcal{I})$, то есть $b(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sigma_k \rho(t - c_k)$, $\ \mathcal{T}(b) \doteq \{c_1, c_2, \ldots\}$ — множество точек разрыва b, $\ \sigma_k$ — ее скачок в точке c_k; рассуждения, близкие к приведенным выше, дают следующее утверждение.

Теорема 2. *С точностью до значений функций в точках разрыва решение задачи* (4.1) *при* $b \in H_v(\mathcal{I})$ *в указанном в* § 3 *смысле дается равенством*

$$x(t) = \big(\mathbf{T}(b)\big)(t) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \rho(t - c_j)\right) = e^{b(t)}, \quad t \geqslant t_0.$$

Следующее определение вполне в духе § 3. Пусть $b \in H(\mathcal{I})$ $\ \Big(b \in H_v(\mathcal{I})\Big)$. Назовем *функцией Коши* уравнения из (4.1) функцию

$$C(t, s) \doteq e^{b(t) - b(s)}, \quad t \geqslant s \geqslant t_0. \tag{4.4}$$

2. Вернемся к исходной задаче (0.1), предполагая, что b и f из $H(\mathcal{I})$. Не ограничивая общности, можно считать, что точки разрыва b и f совпадают и $\sigma_k(b)$ и $\sigma_k(f)$ — скачки в точке разрыва c_k функций b и f соответственно. Действительно, если бы точки разрыва этих функций не совпадали, то, обозначив $\mathcal{T} \doteq \{c_1, c_2, \ldots\} = \mathcal{T}(b) \bigcup \mathcal{T}(f)$, можно положить $\sigma_k(b) = 0$ $\ \big(\sigma_k(f) = 0\big)$, если $c_k \notin \mathcal{T}(b)$ $\ \big(c_k \notin \mathcal{T}(f)\big)$. Таким образом, с точностью до значений функций в точках разрыва (см. также (4.2))

$$b(t) = \sum_{k=1}^{p} \sigma_k(b) \rho(t - c_k), \qquad f(t) = \sum_{k=1}^{p} \sigma_k(f) \rho(t - c_k), \quad t \in \mathcal{I}.$$

Задача Коши в представителях теперь имеет вид

$$R'(\varphi,t)=\sum_{k=1}^{p}\sigma_k\varphi(c_k-s)R(\varphi,t)+\sum_{j=1}^{p}\sigma_j\varphi(c_j-s),\qquad R(\varphi,t_0)=x_0\quad(t_0\in\mathcal{I}),$$

а ее решение —

$$R(\varphi,\,t)=\exp\left(\sum_{k=1}^{p}\sigma_k\int_{t_0}^{t}\varphi(c_k-\tau)\,d\tau\right)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\sum_{k=1}^{p}\sigma_k\int_{s}^{t}\varphi(c_k-\tau)\,d\tau\right)\sum_{j=1}^{p}\sigma_j\varphi(c_j-s)\,ds.$$

Введя обычным образом параметр, будем иметь

$$R(\varphi_\mu,\,t)=\exp\left(\sum_{k=1}^{p}\sigma_k(b)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\mu}\varphi\Big(\frac{c_k-\tau}{\mu}\Big)\,d\tau\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{p}\sigma_j(f)\int_{t_0}^{t}\exp\left(\sum_{k=1}^{p}\sigma_k(b)\int_{s}^{t}\frac{1}{\mu}\varphi\left(\frac{c_k-\tau}{\mu}\right)\,d\tau\right)\frac{1}{\mu}\varphi\left(\frac{c_j-s}{\mu}\right)\,ds.$$

Исследуем сходимость второго слагаемого $S(\mu)$ этой суммы (сходимость первого и его предел уже установлены выше).

Сделаем в интеграле $\displaystyle\int_{s}^{t}\frac{1}{\mu}\varphi\left(\frac{c_k-\tau}{\mu}\right)d\tau$ обычную замену переменной, которая приведет этот интеграл к виду $\displaystyle\int_{\frac{c_k-t}{\mu}}^{\frac{c_k-s}{\mu}}\varphi(\tau)\,d\tau$; еще одна замена переменной приводит к представлению

$$S(\mu)=\sum_{j=1}^{p}\sigma_j(f)\int_{\frac{c_j-t}{\mu}}^{\frac{c_j-t_0}{\mu}}\exp\left(\sum_{k=1}^{p}\sigma_k(b)\int_{\frac{c_k-t}{\mu}}^{\frac{c_k-c_j}{\mu}+s}\varphi(\tau)\,d\tau\right)\varphi(s)\,ds.$$

Обозначим $h(t)\doteq\frac{e^t-1}{t}$ при $t\neq 0$, $h(0)=1$; все интегралы в показателе экспоненты, кроме одного (при $j=k$), стремятся либо к 0, либо к 1; соответствующие экспоненты как константы можно вынести за знак интеграла; остается зависящим от s лишь интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{s}\varphi(\tau)\,d\tau$, который получается при $k=j$; легко вычисляется интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\sigma_j(b)\int_{-\infty}^{s}\varphi(\tau)\,d\tau\right)\varphi(s)\,ds=h\big(\sigma_j(b)\big);$$

опуская громоздкие выкладки, в конце концов получаем, что

$$\lim_{\mu\to0+}S(\mu)=\begin{cases}0 & \text{для}\quad t_0\leqslant t<c_1,\\ \sum\limits_{j=1}^{i}\sigma_j(f)\exp\left(\sum\limits_{k=j+1}^{i}\sigma_k(b)\right)h\big(\sigma_j(b)\big) & \text{для}\ \ c_i<t<c_{i+1},\ i=1,2,\ldots,p,\ c_{p+1}=\beta.\end{cases}$$

Таким образом, получено следующее утверждение.

Теорема 3.

$$x(t)=\big(\mathbf{T}(b,f)\big)(t)=x^0e^{b(t)}+\big(Y^*(b,f)\big)(t),$$

где

$$\big(Y^*(b,f)\big)(t)=\begin{cases}0 & \textit{для}\ \ t_0\leqslant t<c_1,\\ \sum\limits_{j=1}^{i}\sigma_j(f)\exp\left(\sum\limits_{k=j+1}^{i}\sigma_k(b)\right)h\big(\sigma_j(b)\big) & \textit{для}\ c_i<t<c_{i+1},\ i=1,\ldots,p,\ c_{p+1}=\beta.\end{cases}$$

В случае если $b, f \in H_v(\mathcal{I})$, последовательность $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ возрастающая, $c = \lim\limits_{k\to\infty} c_k < \beta$, справедливо утверждение, аналогичное теореме 3.

Теорема 4. *С точностью до значений функций в точках разрыва решение задачи* (0.1) *при* $b, f \in H_v(\mathcal{I})$ *в указанном в* § 3 *смысле дается равенством*

$$x(t) = \big(\mathbf{T}(b,f)\big)(t) = x^0 e^{b(t)} + \big(Z^*(b,f)\big)(t),$$

где

$$\big(Z^*(b,f)\big)(t) = \begin{cases} 0 & \textit{для} \;\; t_0 \leqslant t < c_1, \\ \sum\limits_{j=1}^{i} \sigma_j(f) \exp\Bigg(\sum\limits_{k=j+1}^{i} \sigma_k(b)\Bigg) h\big(\sigma_j(b)\big) & \textit{для} \;\; c_i < t < c_{i+1},\; i = 1, 2, \ldots, \\ \sum\limits_{j=1}^{\infty} \sigma_j(f) \exp\Bigg(\sum\limits_{k=j+1}^{\infty} \sigma_k(b)\Bigg) h\big(\sigma_j(b)\big) & \textit{для} \;\; t > c. \end{cases}$$

§ 5. Задача (0.1) в пространстве $\widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$

1. В теоремах 2, 3, 5 речь шла о значениях решения в точках, отличных от точек разрыва c_k. Рассчитывая рассматривать в конечном счете решения как элементы пространства $\widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$, будем считать, что в указанных теоремах также идет речь о пространствах $\widehat{H}(\mathcal{I})$, $\widehat{H}_v(\mathcal{I})$ (тогда оговорку «с точностью до значений функций в точках разрыва» в тексте этих теорем можно опустить).

Теорема 5. *Для любого* $b \in \widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$ *существует единственное в указанном в* § 3 *смысле решение* $x \in \widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$ *задачи* (4.1).

Доказательство. Пусть $b \in \widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$; согласно следствию 1 найдется последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \widehat{H}(\mathcal{I})$ такая, что $b_n \to b$ в $\widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$ $(n \to \infty)$, то есть

$$(\forall \epsilon > 0)\;\; (\exists N_\epsilon \in \mathbb{N})\;\; (\forall n > N_\epsilon)\;\; (\|b_n - b\| \doteq \|b_n - b\|_{\widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})} < \epsilon);$$

при $n > N_1$ $\quad \|b_n\| \leqslant \|b_n - b\| + \|b\| \leqslant \|b\| + 1$. Покажем, что последовательность $\{\mathbf{T}(b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в пространстве $\widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$.

$$\|\mathbf{T}(b_n) - \mathbf{T}(b_m)\| = \|e^{b_n} - e^{b_m}\| = e^{b_n}\|1 - e^{b_m - b_n}\| \leqslant e^{\|b\|+1}\|b_m - b_n\| + o(\|b_m - b_n\|) \quad (n, m \to \infty).$$

Согласно предложению 5 найдется класс $y \in \widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$ такой, что $\mathbf{T}(b_n) \to y$ $(n \to \infty)$. По теореме из [13, с. 114] существует единственное непрерывное продолжение $\widehat{\mathbf{T}}$ оператора $\mathbf{T}$ на все пространство $\widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$. Следовательно, $x(t) \doteq \big(\widehat{\mathbf{T}}(b)\big)(t)$ — решение задачи (4.1) в смысле, указанном в § 3. □

Если изначально задача (4.1) рассматривается в пространстве $\mathbf{R}_b(\mathcal{I})$, то заменяем его пространством $\mathbf{R}(\alpha', \beta')$, где $\alpha < \alpha' < t_0$, $\beta' \leqslant \beta$.

2. Для неоднородной задачи (0.1) ситуация оказывается значительно сложнее.

Пусть $b, f \in \widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$; согласно следствию 1 найдутся последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \widehat{H}(\mathcal{I})$ такие, что $b_n \to b$, $f_n \to f$ в $\widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$ $(n \to \infty)$; так как сходящаяся последовательность фундаментальна, то найдутся такие $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$, что $\|b_n - b_m\| < \varepsilon$, $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$; для удобства записи будем считать, что

$$\Bigg(\bigcup_k \mathcal{T}(f_k)\Bigg) \bigcup \Bigg(\bigcup_k \mathcal{T}(b_k)\Bigg) = \{c_1, c_2, \ldots, c_{p_n}\},$$

и если какая-либо из функций в какой-либо из точек c_k непрерывна, то положим ее скачок в этой точке равным нулю.

Возможно, и теперь $\|\mathbf{T}(b_n,\, f_n) - \mathbf{T}(b_m,\, f_m)\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$, однако без дополнительных ограничений на f доказать это не удается: эта разность оценивается сверху выражением (K — некоторая константа)

$$e^{\|b\|}\Bigg(K\varepsilon + \sup_j\Big|h\big(s_j(b_n)\big) - h\big(s_j(b_n)\big)\Big| \cdot \sum_{j=1}^{p_n}\big|\sigma_j(f_n)\big| + \\
+ \sup_j\Big|h\big(\sigma_j(b_m)\big)\Big| \cdot \sup_{1\leqslant i\leqslant p_n}\Big|1 - \exp\Big(\sum_{k=1}^{i}\big(\sigma(b_m) - \sigma(b_b)\big)\Big)\Big| \cdot \sum_{j=1}^{p_n}\big|\sigma_j(f_m)\big| + \\
+ \sup_j\Big|h\big(\sigma_j(b_m)\big)\Big| \cdot \sum_{j=1}^{p_n}\Big|\sigma_j(f_n) - \sigma_j(f_m)\Big|\Bigg), \quad (5.1)$$

из которого видно, что равномерная ограниченность сумм в первой и второй строках (5.1) и равномерная малость суммы в третьей строке требуют, чтобы $f, f_n \in \widehat{\mathbf{BV}}(\mathcal{I})$. Однако в этом случае не удастся воспользоваться упомянутой теоремой из [13, с. 114], так как множества $\widehat{H}(\mathcal{I})$, $\widehat{H}_v(\mathcal{I})$ не являются плотными в $\widehat{\mathbf{BV}}(\mathcal{I})$ (см. (2.6) и текст ниже этого равенства).

Пусть $b \in \widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$, $f \in \widehat{\mathbf{BV}}(\mathcal{I})$. Учитывая определение функции Коши (4.4), назовем решением задачи (0.1) функцию

$$x(t) = e^{b(t)}\left(x^0 + \int_{t_0}^{t} e^{-b(s)}\, df(s)\right). \quad (5.2)$$

Если b и f на самом деле не имеют общих точек разрыва, то интеграл в этом определении может пониматься в смысле Римана–Стилтьеса. В случае наличия общих точек разрыва у функций b и f требуется расширенная трактовка интеграла в (5.2). Будем понимать его в смысле альфа-интеграла [17]. В цитированной работе показано, что при наших предположениях о функциях b и f альфа-интеграл в (5.2) существует и обладает привычными свойствами. При этом решение $x \in \widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$, а сам интеграл в (5.2) принадлежит пространству $\widehat{\mathbf{BV}}(\mathcal{I})$.

Резюмируем сказанное в этом пункте в виде следующей теоремы.

Теорема 6. *Для любых $b \in \widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$, $f \in \widehat{\mathbf{BV}}(\mathcal{I})$ существует единственное решение $x \in \widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$ задачи* (0.1), *которое дается равенством* (5.2) *с указанной выше трактовкой интеграла.*

3. В § 4 было отмечено, что значения решения задач (4.1) и (0.1) в точках разрыва первообразных коэффициентов представляют собой обобщенные числа. По этой причине мы отказались от рассмотрения этих значений (рассматриваем классы эквивалентных правильных функций, которые различаются только в точках разрыва). По существу, это означает что в указанных точках играют роль только односторонние пределы коэффициентов, а не их значения. Поэтому есть смысл при постановке задач сразу указывать односторонние пределы ($x(t_0-)$, если решение рассматривается только при $t > t_0$, и $x(t_0+)$, если решение рассматривается для $t < t_0$); будем считать для определенности, что мы рассматриваем решение правее точки t_0. Так, вместо задачи (0.1) надо ставить задачу

$$x' = b'(t)x + f'(t), \quad t \in \mathcal{I},\;\; t > t_0, \quad x(t_0-) = x^0, \quad t_0 \in \mathcal{I}.$$

Если t_0 — точка непрерывности b и f, то такая перемена постановки задачи ничего не изменит во всех приведенных выше рассуждениях. Другое дело, если $t_0 \in \mathcal{T}(b)\bigcup\mathcal{T}(f)$. В этом случае, согласно замечанию 2, будут обобщенными числами и значения $x(t)$ для $c_i < t < c_{i+1}$, что весьма нежелательно. Здесь можно поступить двумя способами: 1) «сдвинуть» начальную точку влево на произвольно малое число, то есть считать, что $t_0 < c_1$, $c_1 - t_0$ произвольно мало; 2) изменить построение множеств $\mathcal{A}_k$ так, чтобы (в случае если $\mathcal{I} = (-\infty, +\infty)$) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(s)ds = 0.5$

и $\int_{-\infty}^{0} \varphi(s)ds = 0.5$ (в случае конечного интервала $\mathcal{I}$ роль нуля играет центр интервала, а роль $-\infty$ или $+\infty$ левый или правый конец соответственно). Из построения элементов множеств $\mathcal{A}_k$ в [9, с. 7] видно, что добиться указанного значения интегралов возможно.

4. Приведем несколько примеров численной реализации предложенной схемы.

1. Рассмотрим задачу (0.1), где положим

$$\mathcal{I} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \; t_0 = -\frac{1}{2}, \; x^0 = 0, \tag{5.3}$$

$$b(t) = \begin{cases} 2^9 \left(t + \frac{1}{2}\right)^{10}, & -\frac{1}{2} < t < 0, \\ a_j \left(t + \frac{1}{2}\right)^{10} - b_j, & \frac{j}{j+1} < t + \frac{1}{2} \leqslant \frac{j+1}{j+2}, \end{cases} \quad a_j = \frac{1}{(j+2)\left[\left(\frac{j+1}{j+2}\right)^{10} - \left(\frac{j}{j+1}\right)^{10}\right]}, \; b_j = \frac{a_j j}{j+1},$$

$$f(t) = \begin{cases} -2^9 \left(t + \frac{1}{2}\right)^{10}, & -\frac{1}{2} < t < 0, \\ -\hat{a}_j \left(t + \frac{1}{2}\right)^{10} + \hat{b}_j, & \frac{j}{j+1} < t + \frac{1}{2} \leqslant \frac{j+1}{j+2}, \end{cases} \quad \hat{a}_j = \frac{j+1}{(j+2)\left[\left(\frac{j+1}{j+2}\right)^{10} - \left(\frac{j}{j+1}\right)^{10}\right]}, \; \hat{b}_j = \frac{\hat{a}_j j}{j+1}.$$

Графики функций $b(t)$ и $f(t)$ изображены на рисунках 1, 2 соответственно.

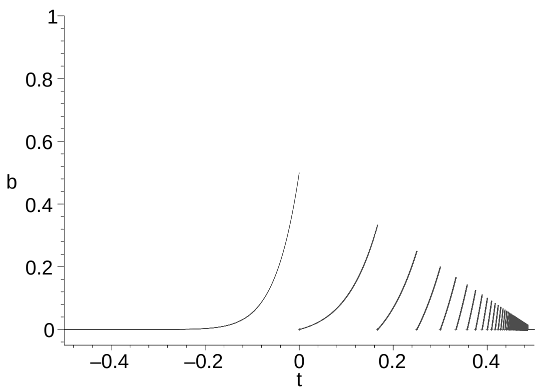

Рис. 1. График функции $b(t)$

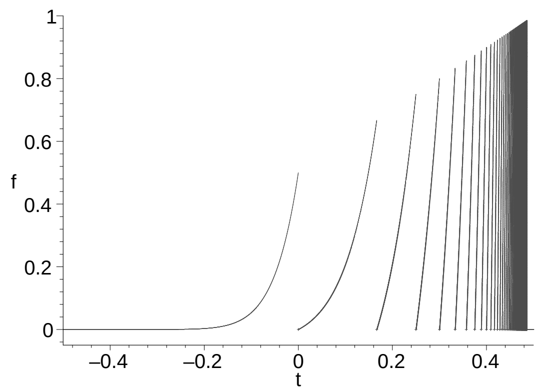

Рис. 2. График функции $f(t)$

Фиксируя φ и μ, находим численное решение задачи Коши в представителях, которое принимаем за решение исходной задачи (0.1). Результаты численного приближения для $\varphi(t) = \frac{\exp(-25t^2)}{2\sqrt{\pi}}$, $|t| < \frac{1}{2}$, $\mu = 0.07$ и $j = 1, \ldots, 100$, изображены на рисунке 3.

2. Следующий пример будет отличаться от предыдущего тем, что функции $b(t)$ и $f(t)$ не имеют общих точек разрыва. Здесь

$$b(t) = \begin{cases} 2^9 \left(t + \frac{1}{2}\right)^{10}, & -\frac{1}{2} < t < 0, \\ a_j \left(t + \frac{1}{2}\right)^{10} - b_j, & \frac{j}{j+1} < t + \frac{1}{2} \leqslant \frac{j+1}{j+2}, \end{cases} \quad a_j = \frac{1}{(j+2)\left[\left(\frac{j+1}{j+2}\right)^{10} - \left(\frac{j}{j+1}\right)^{10}\right]}, \; b_j = \frac{a_j j}{j+1},$$

$$f(t) = \begin{cases} -2^9 \left(t + \frac{2}{5}\right)^{10}, & -\frac{2}{5} < t < 0, \\ -\hat{a}_j \left(t + \frac{2}{5}\right)^{10} + \hat{b}_j, & \frac{j}{j+1} < t + \frac{2}{5} \leqslant \frac{j+1}{j+2}, \end{cases} \quad \hat{a}_j = \frac{j+1}{(j+2)\left[\left(\frac{j+1}{j+2}\right)^{10} - \left(\frac{j}{j+1}\right)^{10}\right]}, \; \hat{b}_j = \frac{\hat{a}_j j}{j+1}.$$

Не меняя φ и μ, численно решим задачу Коши в представителях; результат представлен на рисунке 4.

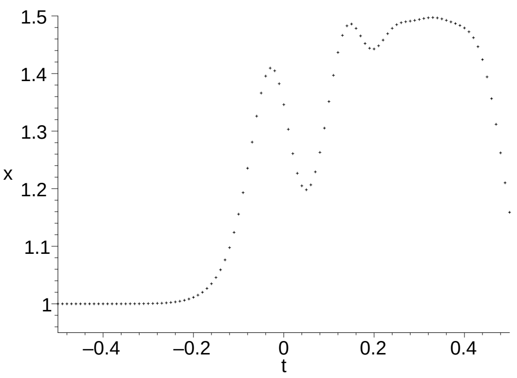

Рис. 3. График решения задачи Коши

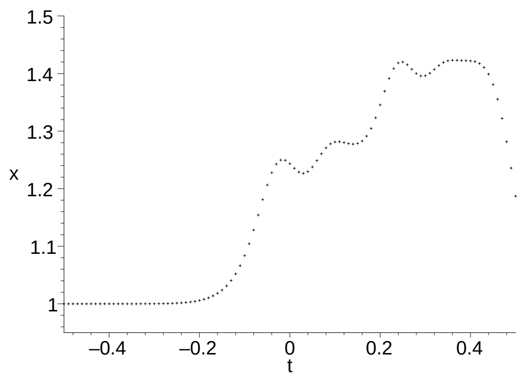

Рис. 4. График решения задачи Коши

3. В третьем примере коэффициентом $b(t)$ является непрерывная функция, имеющая бесконечную полную вариацию.

$$b(t) = \begin{cases} t\cos(\frac{\pi}{2t}), & t \neq 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases} \qquad f(t) = \begin{cases} -2^9\left(t+\frac{1}{2}\right)^{10}, & -\frac{1}{2} < t < 0, \\ -\hat{a}_j\left(t+\frac{1}{2}\right)^{10} + \hat{b}_j, & \frac{j}{j+1} < t + \frac{1}{2} \leqslant \frac{j+1}{j+2}, \end{cases}$$

$$\hat{a}_j = \frac{j+1}{(j+2)\left[\left(\frac{j+1}{j+2}\right)^{10} - \left(\frac{j}{j+1}\right)^{10}\right]}, \ \hat{b}_j = \frac{\hat{a}_j j}{j+1}.$$

Сохранив прежними φ и μ, решим задачу Коши в представителях; результаты представлены на рисунке 5.

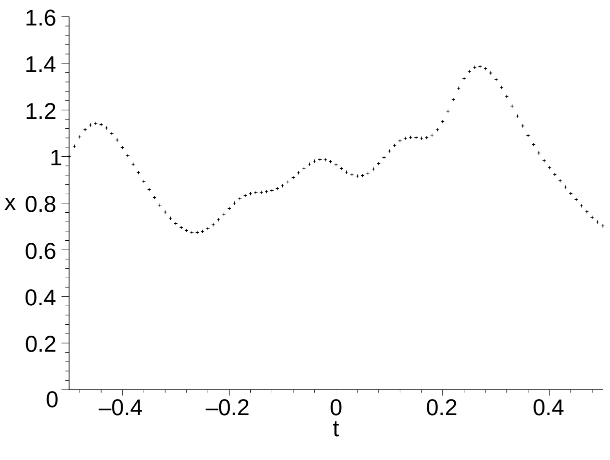

Рис. 5. График решения задачи Коши

Интегралы, возникшие в процессе реализации численной схемы, найдены с помощью формулы Симпсона, задачи Коши решены с использованием метода Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Все вышеперечисленные вычисления произведены в пакете прикладных программ Maple 15.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дерр В.Я., Дизендорф К.И. О дифференциальных уравнениях в C-обобщенных функциях // Известия вузов. Математика. 1996. № 11 (414). С. 39–49.
2. Kurzweil J. Generalized ordinary differential equations // Czechoslovak Mathematical Journal. 1958. Vol. 8. № 3. P. 360–388.

3. Аткинсон Ф.В. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968. 749 с.
4. Левин А.Ю. Вопросы теории обыкновенного дифференциального уравнения. II // Вестник Ярославского университета. 1974. Вып. 8. С. 122–144.
5. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
6. Дерр В.Я. К определению решения линейного дифференциального уравнения с обобщенными функциями в коэффициентах // Доклады АН СССР. 1988. Т. 298. № 2. С. 269–272.
7. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы: модели и приложения. М.: Наука, 1991. 256 с.
8. Дерр В.Я., Кинзебулатов Д.М. Дифференциальные уравнения с обобщенными функциями, допускающими умножение на разрывные функции // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2005. № 1. С. 35–58.
9. Colombeau J.F. Elementary introduction to new generalized functions. Amsterdam: North Holland Math. Studies, 1985. 300 p.
10. Biagioni H.A., Colombeau J.F. New generalized functions and C^∞ functions with values in generalized complex numbers // J. London Math. Soc. 1986. Vol. 2. № 33. P. 169–179.
11. Biagioni H.A. A nonlinear theory of generalized functions. Lecture notes in Mathematics. Vol. 1421. New York: Springer-Verlag, 1990. 214 p.
12. Grosser M., Kunziger M., Oberguggenberger M., Steinbauer R. Geometric theory of generalized functions with applications to general relativity. Dordrecht: Kluwer academic publishers, 2001. Vol. 537. 505 p.
13. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 274 с.
14. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
15. Honig Ch.S. Volterra–Stieltjes integral equations. Amsterdam: North-Holland Math. Studies, 1975. Vol. 16. 152 p.
16. Родионов В.И. О пространстве регулярно дифференцируемых функций // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2004. Вып. 1 (29). С. 3–32.
17. Дерр В.Я., Кинзебулатов Д.М. Альфа-интеграл типа Стилтьеса // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2006. № 1. С. 41–65.
18. Дерр В.Я. Теория функций действительной переменной. Лекции и упражнения. М.: Высшая школа, 2008. 384 с.
19. Фёдоров В.М. Теория функций и функциональный анализ. Ч. 2. М.: Издательство Московского университета, 2000. 191 с.
20. Дерр В.Я. Функциональный анализ. Лекции и упражнения. М.: Кнорус, 2013. 462 с.

Поступила в редакцию 17.02.2014

Дерр Василий Яковлевич, профессор, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: derr@uni.udm.ru

Ким Инна Геральдовна, аспирантка, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: kimingeral@gmail.com

V. Ya. Derr, I. G. Kim

The spaces of regulated functions and differential equations with generalized functions in coefficients

Keywords: regulated functions, distributions, generalized functions of Colombeau, differential equations.

Mathematical Subject Classifications: 34A30

A function defined on an open (finite, semi-finite, infinite) interval is called regulated if it has finite one-sided limits at each point of its domain. In the present paper we study spaces of regulated functions, in particular, their dense subsets. Our motivation is applications to differential equations. Namely, we consider the Cauchy problem for a scalar linear differential equation with coefficients, which are derivatives of regulated functions. We immerse the Cauchy problem into the space of the Colombeau generalized functions. If the coefficients are derivatives of step functions, we find explicit solution $R(\varphi_\mu, t)$ of the Cauchy problem (in terms of representatives); its limit as $\mu \to +0$ is defined to be the solution of the original problem. In this way, we obtain a densely defined (on the space of regulated functions) operator $\mathbf{T}$, which associates the solution to a Cauchy problem with this problem. Next, using a well-known topological result on a continuous extension, we extend the operator $\mathbf{T}$ to the operator $\widehat{\mathbf{T}}$ defined on the entire space of regulated functions. We have given the explicit representation of solution of the Cauchy problem for the inhomogeneous differential equation. Illustrative examples are also offered.

REFERENCES

1. Derr V.Ya., Dizendorf K.I. On the differential equations in C-generalized functions, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1996, no. 11 (414), pp. 39–49 (in Russian).

2. Kurzweil J. Generalized ordinary differential equations, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 1958, vol. 8, no. 3, pp. 360–388.

3. Atkinson F.V. *Discrete and continuous boundary problems*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 8, New York–London: Academic Press, 1964, 570 p. Translated under the title *Diskretnye i nepreryvnye granichnye zadachi*, Moscow: Mir, 1968, 749 p.

4. Levin A.Yu. On the theory of ordinary differential equations. II, *Vestnik Yaroslavskogo Universiteta*, 1974, no. 8, pp. 122–144 (in Russian).

5. Filippov A.F. *Differential equations with discontinuous right hand sides*, New York: Springer-Verlag, 1988, 304 p. Original Russian text publishied in *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu,* Moscow: Nauka, 1985, 224 p.

6. Derr V.Ya. To the definition of solution of a differential equation with generalized functions in coefficients, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1988, vol. 298, no. 2, pp. 269–272 (in Russian).

7. Zavalischin S.T., Sesekin A.N. *Impul'snye protsessy: modeli i prilozheniya* (Impulse processes: models and applications), Moscow: Nauka, 1991, 256 p.

8. Derr V.Ya., Kinzebulatov D.M. Differential equations with distributions admitting multiplication on discontinuous functions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2005, no. 1, pp. 35–58 (in Russian).

9. Colombeau J.F. *Elementary introduction to new generalized functions*, Amsterdam: North Holland Math. Studies, 1985, 300 p.

10. Biagioni H.A., Colombeau J.F. New generalized functions and C^∞ functions with values in generalized complex numbers, *J. London Math. Soc.*, 1986, vol. 2, no. 33, pp. 169–179.

11. Biagioni H.A. *A nonlinear theory of generalized functions*, Lecture notes in Mathematics, vol. 1421, New York: Springer-Verlag, 1990, 214 p.

12. Grosser M., Kunziger M., Oberguggenberger M., Steinbauer R. *Geometric theory of generalized functions with applications to general relativity*, Dordrecht: Kluwer academic publishers, 2001, vol. 537, 505 p.

13. Bourbaki N. *General Topology: Chapters 1-4*, New York: Springer-Verlag, 1998, 437 p.

14. Dieudonne J. *Foundations of Modern Analysis*, New York: Academic Press, 2006, 408 p.

15. Honig Ch.S. *Volterra–Stieltjes integral equations*, Amsterdam: North-Holland Math. Studies, 1975, vol. 16, 152 p.

16. Rodionov V.I. On the space of the regular differentiable functions, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2004, no. 1 (29), pp. 3–32 (in Russian).

17. Derr V.Ya., Kinzebulatov D.M. The Alpha-integral of Stieltjes type, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2006, no. 1, pp. 41–65 (in Russian).

18. Derr V.Ya. *Teoriya funktsii deistvitel'noi peremennoi. Lektsii i uprazhneniya* (Theory of functions of real argument. Lectures and exercises), Moscow: Vyssh. Shkola, 2008, 384 p.

19. Fedorov V.M. *Teoriya funktsii i funktsional'nyi analiz. Chast' 2* (Theory of functions and functional analysis, part II), Moscow: Moscow State University, 2000, 191 p.

20. Derr V.Ya. *Funktsional'nyi analiz. Lektsii i uprazhneniya* (Functional analysis. Lectures and exercises), Moscow: Knorus, 2013, 462 p.

Received 17.02.2014

Derr Vasily Yakovlevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: derr@uni.udm.ru

Kim Inna Geral'dovna, post-graduate student, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: kimingeral@gmail.com