УДК 521.1

© *Б. П. Кондратьев*

К ВОПРОСУ О ПРИЛИВНОЙ СИЛЕ ОТ ТЕЛА, ОБРАЩАЮЩЕГОСЯ ПО ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

Рассмотрена задача о приливном влиянии на сферическую центральную планету от возмущающего тела (спутника), движущегося по эллиптической орбите. Произведено усреднение приливного потенциала по периоду движения спутника и доказано, что независимо от величины эксцентриситета орбиты сила от возмущающего тела оказывается в среднем чисто радиальная, как если бы орбита спутника была просто круговая.

Ключевые слова: приливная сила, кеплеровские орбиты, компоненты приливного возмущения.

Введение

Задачи с применением гравитационного потенциала тел в приливном приближении часто встречаются в небесной механике и астрофизике. В большинстве задач приливный потенциал представляет собой шаровую функцию второй степени, то есть берется с точностью до квадратов степеней координат пробной точки. Например, приливный потенциал спутника массы m имеет вид [1]

$$\varphi\left(r\right)=\frac{Gm}{a^{3}}r^{2}P_{2}\left(\cos\theta\right). \tag{1}$$

Здесь a — расстояние между центрами обеих (возмущающей и возмущаемой) масс.

В данной заметке мы приводим интересный пример, когда недостаточно знать только радиальную компоненту приливной силы, а требуется оценить ещё и азимутальную её составляющую. Необходимость в таких оценках появляется в тех задачах, где возмущающее тело движется вокруг центрального тела и требуется знать среднюю за период движения азимутальную компоненту приливной силы.

§ 1. Приливный потенциал

Хотя формула (1) остается верной, мы ещё раз повторим вывод выражения для приливного потенциала. Это необходимо, чтобы провести корректное осреднение выражения приливного потенциала.

Пусть вокруг центрального протяженного массивного сферического тела по эллиптической орбите обращается спутник малой массы m. Смещением центра тяжести центрального тела пренебрегаем. *Неинерциальную* декартову систему координат строим следующим образом: начало координат поместим в центре масс главного тела, ось абсцисс проведена в точку перицентра кеплерова эллипса, ось ординат перпендикулярна ей и лежит в плоскости орбиты спутника, третья ось смотрит перпендикулярно плоскости орбиты.

Пусть в принятой системе координат $\overline{R}\left(x',y',z'\right)$ — координаты спутника, $\overline{r}\left(x,y,z\right)$ — координаты пробной точки самого центрального тела. Чтобы считать начало координат неподвижным, центру Земли следует сообщить дополнительное ускорение от массы m. По величине это ускорение, согласно закону Всемирного тяготения, будет равно $a_0=\frac{Gm}{R^2}=\frac{Gm}{x'^2+y'^2+z'^2}$. Но ускорение — это вектор, так что в принятой системе координат оно будет иметь компоненты

$$\overline{a}_0\left(\frac{mG}{R^3}x',\frac{mG}{R^3}y',\frac{mG}{R^3}z'\right). \tag{2}$$

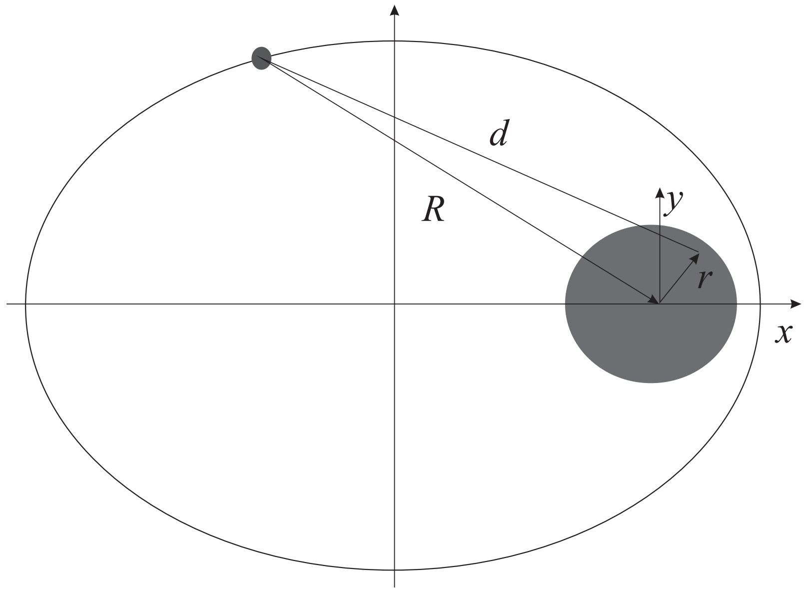

Рис. 1.

Приливная сила воздействия спутника на пробную точку центрального тела образуется вычитанием из силы

$$\overline{a}\left(\frac{Gm}{d^3}\left(x'-x\right),\frac{Gm}{d^3}\left(y'-y\right),\frac{Gm}{d^3}\left(z'-z\right)\right)$$

найденной выше силы (2):

$$\overline{F}_{\text{прил}}=\overline{a}-\overline{a}_0.$$

Отсюда сразу следует, что полный потенциал приливной силы с точностью до постоянной будет иметь вид

$$\overline{\Phi}\left(r\right)=\frac{Gm}{\sqrt{\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2+\left(z-z'\right)^2}}-\frac{Gm(xx'+yy'+zz')}{\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)^{3/2}}. \tag{3}$$

Последний член в (3) есть линейная функция по координатам пробной точки; *он необходим, поскольку приливной потенциал $\overline{\Phi}$ записан в неинерциальной системе отсчета.*

Далее необходимо разложить потенциал $\overline{\Phi}\left(r\right)$ по степеням координат пробной точки и сохранить только члены, квадратичные по координатам. По формуле Тейлора имеем разложение

$$\begin{gathered}\frac{1}{\sqrt{\left(x'-x\right)^2+\left(y'-y\right)^2+\left(z'-z\right)^2}}=\frac{1}{R}-\left(x\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{R}+y\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{R}+z\frac{\partial}{\partial z'}\,\frac{1}{R}\right)+\\+\frac{x^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\frac{1}{R}+\frac{y^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y'^2}\frac{1}{R}+\frac{z^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{R}+xy\frac{\partial^2}{\partial x'\partial y'}\frac{1}{R}+xz\frac{\partial^2}{\partial x'\partial z'}\frac{1}{R}+yz\frac{\partial^2}{\partial y'\partial z'}\frac{1}{R}+\ldots\end{gathered} \tag{4}$$

Раскрывая производные, получим

$$\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=-\frac{x'}{R^3},\quad \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=-\frac{1}{R^3}+\frac{3x'^2}{R^5},\quad \frac{\partial^2}{\partial x'\partial y'}=\frac{3x'y'}{R^5}, \tag{5}$$

и аналогично для других элементов. Если отбросить в (5) члены порядка R^{-3}, а в (4) постоянную $\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$, выражение приливного потенциала будет равно

$$\Phi(x,y,z)=\frac{Gm}{2}\left(x^2\frac{3x'^2-R^2}{R^5}+y^2\frac{3y'^2-R^2}{R^5}+z^2\frac{3z'^2-R^2}{R^5}+6xy\frac{x'y'}{R^5}+6xz\frac{x'z'}{R^5}+6yz\frac{y'z'}{R^5}\right). \tag{6}$$

В силу указанного выбора системы координат движение возмущающего спутника происходит в плоскости $z' = 0$, поэтому два последних члена в (6) выпадают, и в итоге мы имеем

$$\Phi\left(x,y\right) = \frac{Gm}{2}\left[x^2\frac{3x'^2-R^2}{R^5} + y^2\frac{3y'^2-R^2}{R^5} - \frac{z^2}{R^3} + 6xy\frac{x'y'}{R^5}\right]. \tag{7}$$

§ 2. Осреднение приливного потенциала

Напомним, что в данной задаче возмущающее тело (спутник) движется по эллиптической орбите и нас интересует значение Φ, осредненное по периоду обращения этого спутника. Ясно, в силу симметрии эллипса, что четвертый смешанный член в квадратных скобках (7) при осреднении выпадает. Остается:

$$\begin{aligned}\langle\Phi\rangle = \frac{Gm}{2}\left[\frac{x^2+y^2-2z^2}{2}\left\langle\frac{1}{R^3}\right\rangle + x^2\left\langle\frac{6x'^2-3R^2}{2R^5}\right\rangle + y^2\left\langle\frac{6y'^2-3R^2}{2R^5}\right\rangle\right] = \\ = \frac{Gm}{2}\left[\frac{x^2+y^2-2z^2}{2}\left\langle\frac{1}{R^3}\right\rangle + \frac{3}{2}(x^2-y^2)\left\langle\frac{x'^2-y'^2}{R^5}\right\rangle\right].\end{aligned} \tag{8}$$

Анализ показывает, что главную роль в (8) играет интеграл, выражающий осредненную величину

$$J = \left\langle\frac{x'^2-y'^2}{R^5}\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{x'^2-y'^2}{R^5}\,dt, \tag{9}$$

где T — период обращения спутника. Этот интеграл является коэффициентом в членах

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle\Phi\rangle \sim 3J\cdot x; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\langle\Phi\rangle \sim -3J\cdot y, \tag{10}$$

представляющих тангенциальную компоненту приливной силы.

Итак, тангенциальное воздействие спутника на центральное тело, казалось бы, существует. Но усреднение покажет, что на самом деле это не так. Докажем, что в формулах (10) коэффициент $J = 0$.

По формуле кеплеровского движения с массой главного тела M и параметрами орбиты a и e, вводя эксцентрическую аномалию, имеем:

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{GM}}\left(E - e\sin E\right), \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}};$$
$$x' = a\cos E, \quad y' = a\sqrt{1-e^2}\sin E, \quad R = a(1-e\cos E).$$

Таким образом, интеграл (9) приводится к виду

$$\begin{aligned}J = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a^3}{Gm}}\int_0^{2\pi}\frac{a^2\left[(\cos E-e)^2-(1-e^2)\sin^2 E\right]}{a^5(1-e\cos E)^5}\sqrt{\frac{Gm}{a^3}}(1-e\cos E)\,dE = \\ = \frac{1}{2\pi a^3}\int_0^{2\pi}\frac{(\cos E-e)^2-(1-e^2)\sin^2 E}{(1-e\cos E)^4}\,dE = \\ = \frac{1}{2\pi a^3}\int_0^{2\pi}\frac{2e^2-1-2e\cos E+(2-e^2)\cos^2 E}{(1-e\cos E)^4}\,dE.\end{aligned}$$

Прозводим здесь преобразование дроби для величины e^2J делением:

$$\frac{(2e^2-e^4)\cos^2 E - 2e^3\cos E + 2e^4 - e^2}{(2e^2-e^4)\cos E + (e^3-2e)\cos E} = (2e-e^3)\cos E + 2 - 3e^2$$

$$\begin{aligned}(2e^2-e^4)\cos^2 E - 2e^3\cos E + 2e^4 - e^2 = (e\cos E-1)\left[(2e-e^3)\cos E + 2 - 3e^2\right] + 2(1-e^2)^2 = \\ = (2-e^2)(e\cos E-1)^2 + (2-3e^2+2-^2)(\cos E-1) + 2(1-e^2)^2 = \\ = (2-e^2)(e\cos E-1)^2 + 4(1-e^2)(e\cos E-1) + 2(1-e^2)^2.\end{aligned}$$

Окончательно интеграл (9) разбивается на три и принимает вид:

$$J = \frac{1}{2\pi a^3}\int_0^{2\pi}\left[\frac{2(1-e^2)^2}{(1-e\cos E)^4} - \frac{4(1-e^2)}{(1-e\cos E)^3} + \frac{2-e^2}{(1-e\cos E)^2}\right]dE. \tag{11}$$

Находим вспомогательные интегралы:

$$-2\int_0^{2\pi}\frac{dE}{A-B\cos E} = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2-B^2}}, \qquad \int_0^{2\pi}\frac{dE}{(A-B\cos E)^2} = \frac{2\pi A}{(A^2-B^2)^{3/2}},$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dE}{(A-B\cos E)^3} = \frac{2\pi\left(A^2+\frac{B^2}{2}\right)}{(A^2-B^2)^{5/2}}, \qquad \int_0^{2\pi}\frac{dE}{(A-B\cos E)^4} = \frac{2\pi A\left(A^2+\frac{B^2}{2}\right)}{(A^2-B^2)^{7/2}}.$$

Подставляя эти результаты в интеграл (11), в итоге получим

$$J = \frac{1}{a^3}\left[\frac{(1-e^2)^2(2+3e^2)}{(1-e^2)^{7/2}} - \frac{2(1-e^2)(2+e^2)}{(1-e^2)^{5/2}} + \frac{2-e^2}{(1-e^2)^{3/2}}\right] =$$
$$= \frac{1}{a^3(1-e^2)^{3/2}}(2+3e^2-4-2e^2+2-e^2) = 0.$$

Таким образом, в осредненном по времени приливном потенциале отсутствуют члены, отвечающие за тангенциальную компоненту силы:

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle\Phi\rangle = 0; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\langle\Phi\rangle = 0. \tag{12}$$

Поэтому сила от возмущающего тела оказывается чисто радиальная, как если бы орбита спутника была просто круговая. Другими словами, тангенциальная составляющая приливной силы в среднем вообще отсутствует.

Это основной результат работы.

§ 3. Обсуждение

Мы установили, что при осреднении по времени приливного потенциала сила в плоскости орбиты от возмущающего тела оказывается чисто радиальной и результат осреднения вообще не зависит от эксцентриситета эллиптической орбиты, как если бы эта орбита была просто круговая. Другими словами, тангенциальная составляющая приливной силы в среднем вообще отсутствует. Кроме возможных применений данного результата для оценки эволюции планет и орбит спутников представляется также, что этот вывод имеет отношение и к статье [2], где авторы, похоже, полагали, что причиной чандлеровского периода для Земли является приливное воздействие от Луны. Конкретно, в указанной работе [2] предполагается существование в орбитальном движении Луны гармоники с периодом 6 лет (с таким периодом происходит совпадение у Луны перигея с восходящим узлом её орбиты). Этот период получается из рассмотрения двух известных движений нашего спутник под возмущениями со стороны Солнца и приводит к формуле

$$\frac{2\pi}{18{,}61\,\text{лет}} + \frac{2\pi}{8{,}85\,\text{лет}} = \frac{2\pi}{6\,\text{лет}}.$$

С другой стороны, сочетание соответствующей периоду в шесть лет частоты с частотой годичного движения Земли вокруг Солнца дает период

$$T_{chand} = \frac{7}{6}\cdot 365{,}25\ \textit{д.} \approx 426\ \textit{д.},$$

примерно соответствующий чандлеровскому периоду движения полюсов Земли.

Логика авторов [2] была бы понятна, если в качестве физического обоснования можно было подразумевать наличие тангенциальной компоненты приливного воздействия Луны на Землю. Но, как мы только что убедились, никакого усредненного тангенциального приливного воздействия Луны на Землю не существует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вебстер А.Г. Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел. Л.; М.: ГТТИ, 1933. 635 с.
2. Акуленко Л.Д, Кумакшев С.А., Марков Ю.Г. Модель гравитационно-приливного механизма возбуждения колебаний полюса Земли. ДАН. 2005. Т. 400. № 6. С. 758–763.

Поступила в редакцию 13.02.2013

Кондратьев Борис Петрович, д. ф.-м. н., профессор, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1; Главная (Пулковская) Астрономическая Обсерватория РАН, 196140, Россия, С.-Петербург, Пулковское шоссе, 65/1.
E-mail: kond@uni.udm.ru

B. P. Kondratyev

On the tidal force from the body circulating on an elliptic orbit

Keywords: tidal force, Keplere's orbits, tidal perturbation components.

Mathematical Subject Classifications: 85-01

The problem of the tidal effects on the central spherical planet from the disturbing body (satellite), moving in an elliptical orbit is studied. We performed the averaging of the tidal potential over the period of the satellite and proved that regardless of the value of the orbit eccentricity the perturbation force of the body was, upon the average, purely radial, as if the orbit of the satellite had been just circular.

REFERENCES

1. Webster A.G. *Mekhanika material'nykh tochek, tverdykh, uprugikh i zhidkikh tel* (Mechanics of material points, firm, elastic and fluid bodies), Leningrad–Moscow: Gos. Tekh. Teor. Izd., 1933, 635 p.
2. Akulenko L.D., Kumakshev S.A., Markov Yu.G. Model of the gravitational-tidal mechanism of exciting oscillations of the Earth's Pole, *Doklady Physics*, 2005, vol. 50, no. 2, pp. 106–111.

Received 13.02.2013

Kondratyev Boris Petrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia;
Pulkovo Observatory of the Russian Academy of Sciences, Pulkovskoe shosse, 65/1, St. Petersburg, 196140, Russia.
E-mail: kond@uni.udm.ru