УДК 517.957+517.988+517.977.1

© *А. В. Чернов*

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ НА МНОЖЕСТВЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ УПРАВЛЕНИЯ [1]

Доказываются достаточные условия поточечной управляемости по нелинейному функционалу для нелинейных распределенных систем, допускающих представление в виде вольтеррова функционально-операторного уравнения в лебеговом пространстве, на заданном множестве $\mathcal{D}$ конечномерных аппроксимаций управления. Определяется множество глобальной разрешимости Ω как множество всех управлений из $\mathcal{D}$, для каждого из которых уравнение имеет единственное глобальное решение. В качестве вспомогательного результата, представляющего самостоятельный интерес, доказывается, что при сделанных предположениях выполняется равенство $\Omega = \mathcal{D}$. Сведение управляемых распределенных систем к изучаемому функционально-операторному уравнению иллюстрируется на двух примерах: первой краевой задачи для параболического уравнения второго порядка и смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка; и то, и другое уравнение достаточно общего вида.

Ключевые слова: нелинейные распределенные системы, управляемость, конечномерные аппроксимации управления, вольтеррово функционально-операторное уравнение.

Введение

На сегодняшний день различным вопросам теории управляемости линейных систем (как сосредоточенных, так и распределенных) посвящена обширная литература, см., например, [1, 2], а также [3, § 8.10], [4, глава 5]; там же см. дальнейшую библиографию. Для случая нелинейных распределенных систем известные автору на данный момент достаточные условия поточечной управляемости носят, в основном, локальный характер, см., например, [5], [6, глава 7], [7]. Отметим, кроме того, что для нелинейных распределенных систем, по-видимому, рассматривалась лишь задача перевода системы в заданное состояние к некоторому моменту времени T (см. библиографию в [6, § 7.8]). В [8] было предложено при исследовании управляемости нелинейных распределенных систем использовать, во-первых, возможность сведения системы к управляемому вольтеррову функционально-операторному уравнению и, во-вторых, свойство непрерывности функционалов на множестве конечномерных аппроксимаций управления. Указанный подход позволяет свести проблему управляемости к проблеме разрешимости нелинейных уравнений относительно конечного числа неизвестных и использовать соответствующие топологические[2], либо классические[3] результаты. В [8] рассматривалась проблема управляемости по набору нелинейных функционалов, что потребовало использования топологических результатов и некоторых специальных предположений относительно этих функционалов. В данной работе мы рассматриваем случай одного функционала. На первый взгляд ситуация существенно упрощается. Однако в [8] делались априорные предположения о тотальном (по всему множеству допустимых управлений) сохранении глобальной разрешимости управляемого уравнения, а также о равномерной поточечной оценке решений. В данной статье тотальное сохранение глобальной разрешимости при сделанных предположениях доказывается; равномерная поточечная оценка решений не требуется. Требуется (и доказывается) лишь равномерная

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

[2]Теорема Брауэра об инвариантности степени непрерывного отображения и ее следствия, если речь идет о наборе нелинейных функционалов и, соответственно, о системе нелинейных уравнений.

[3]Теорема Больцано–Коши, если речь идет об одном нелинейном функционале и, соответственно, об одном нелинейном уравнении.

по норме оценка решений. Вместе с тем мы используем здесь некоторые факты, установленные в качестве вспомогательных в [8]. Множество $\Omega(\mathcal{D})$ всех управлений $u \in \mathcal{D}$, для каждого из которых уравнение имеет единственное решение, будем, следуя [9], именовать *множеством глобальной разрешимости* для данного уравнения. Фактически мы доказываем, что $\Omega(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. Однако здесь для нас существенно только то, что множество $\Omega(\mathcal{D})$ оказывается выпуклым за счет выпуклости множества $\mathcal{D}$. Уравнение, о котором идет речь, имеет следующий вид (0.1).

Пусть $n, m, \ell, s \in \mathbb{N}$ — заданные числа, $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое (здесь и далее в смысле Лебега) ограниченное множество, $\mathcal{U} = L_\infty(\Pi)$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\Pi)$ — некоторое лебегово пространство с индексом суммируемости из $[1;+\infty]$, а $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\Pi)$ — лебегово пространство с индексом суммируемости из $[1;+\infty)$. Пусть, кроме того, $\mathcal{D}_\infty \subset \mathcal{U}^s$ — заданное множество допустимых управлений, $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ — заданный *линейный ограниченный оператор* (ЛОО). Далее для вектор-функции $x \in \mathcal{X}^\ell$, являющейся образом вектор-функции $z \in \mathcal{Z}^m$ при отображении, осуществляемом оператором A, будем в зависимости от ситуации использовать равносильные обозначения: $x = A[z]$; $x(t) = A[z](t)$, $t \in \Pi$; $x(.) = A[z](.)$; $x = A\,[z(.)]$. Рассмотрим управляемое функционально-операторное уравнение

$$x(t) = \theta(t) + A\Big[f\big(.,x(.),u(.)\big)\Big](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in \mathcal{X}^\ell, \tag{0.1}$$

где $u \in \mathcal{D}_\infty$ — управление, $\theta \in \mathcal{X}^\ell$, $f(t,x,v) : \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ — заданная функция, измеримая по $t \in \Pi$, непрерывная по $\{x,v\} \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$ и такая, что:

F$_1$) для всех $y \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{U}^s$ суперпозиция $f\Big(.,y(.),u(.)\Big) \in \mathcal{Z}^m$;

F$_2$) существует неубывающая функция $\mathcal{N} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\Big\| f\big(.,y(.),u(.)\big) - f\big(.,z(.),v(.)\big) \Big\|_{\mathcal{Z}^m} \leqslant \mathcal{N}(M) \Big\{ \|y-z\|_{\mathcal{X}^\ell} + \|u-v\|_{\mathcal{U}^s} \Big\}$$

для всех $y, z \in \mathcal{X}^\ell$, $u, v \in \mathcal{U}^s$, $\|y\|, \|z\|, \|u\|, \|v\| \leqslant M$.

Как было показано в [8, 10–13] (см. также примеры в § 4,5), к уравнению (0.1) может быть сведен довольно широкий класс управляемых *начально-краевых задач* (НКЗ) действием на дифференциальное уравнение НКЗ оператора A, обращающего главную часть этого уравнения. Это обстоятельство позволяет использовать уравнение (0.1) как инструмент исследования различных вопросов теории управляемых распределенных систем, в частности, глобальной разрешимости [12, 13], сходимости численных методов оптимизации [14], существования ситуации ε-равновесия в дифференциальных играх, связанных с уравнениями в частных производных [10, 11], управляемости [8] и др.

Пусть $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_\infty$ — множество конечномерных аппроксимаций управления (точное определение см. далее); $\Omega(\mathcal{D})$ — совокупность всех $u \in \mathcal{D}$, для каждого из которых уравнение (0.1) имеет единственное решение (на всем множестве Π, то есть глобальное; о понятии локального решения см. далее); задана функция

$$\Phi(t,x,v) : \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R},$$

измеримая по $t \in \Pi$, непрерывная по $\{x,v\} \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$ и удовлетворяющая условиям **F**$_1$), **F**$_2$) с заменой $\mathcal{Z}$ на $L_1(\Pi)$ и m на 1.

На множестве $\Omega(\mathcal{D})$ мы вправе рассматривать функционал вида

$$J[u] = \int_\Pi \Phi\big(t, x[u](t), u(t)\big)\,dt, \quad u \in \Omega(\mathcal{D}).$$

Задача управления. Найти управление $u \in \Omega(\mathcal{D})$ так, чтобы выполнялось равенство $J[u] = 0$.

Будем предполагать, что задан выпуклый компакт $U \subset \mathbb{R}^s$ (множество допустимых значений управления) и множество допустимых управлений

$$\mathcal{D}_\infty = \Big\{ u \in L^s_\infty(\Pi) : \quad u(t) \in U, \quad t \in \Pi \Big\}.$$

Пусть теперь задано некоторое разбиение множества Π. Иначе говоря, множество Π представлено в виде дизъюнктного объединения $\Pi = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\varkappa} \Pi_j$. Множество конечномерных аппроксимаций управления строится следующим образом:

$$\mathcal{D} = \Big\{ u \in L_\infty^s(\Pi): \quad u(t) \equiv \upsilon_j \in U, \quad t \in \Pi_j, \quad j = \overline{1,\varkappa} \Big\}$$

и тем самым взаимно однозначным образом отождествляется с конечномерным множеством $V \subset \mathbb{R}^\nu$, $\nu = s\,\varkappa$, где

$$V = \Big\{ v = \{\upsilon_{11}, \ldots, \upsilon_{\varkappa 1}; \ldots; \upsilon_{1s}, \ldots, \upsilon_{\varkappa s}\} : \upsilon_j \in U, i = \overline{1,s}, j = \overline{1,\varkappa} \Big\}.$$

В этом смысле будем обозначать $u\{v\}$ — управление $u \in \mathcal{D}$, отвечающее вектору $v \in V$; $\Omega\{V\}$ — совокупность всех $v \in V$, для каждого из которых уравнение (0.1) имеет единственное решение при $u = u\{v\}$. И соответственно $x = x\{v\}$ — решение уравнения (0.1), отвечающее управлению $u\{v\}$ при $v \in \Omega\{V\}$. Очевидно, что множество $\Omega(\mathcal{D})$ отождествляется с множеством $\Omega\{V\}$.

§ 1. Формулировка основного результата

Измеримое подмножество $H \subset \Pi$ будем, следуя [15, 16], называть *вольтерровым множеством* оператора A, если $P_H A P_H = P_H A$, где P_H — это оператор умножения на характеристическую функцию множества H. Заметим, что система $\mathcal{B}(A)$ всех вольтерровых множеств оператора A непуста, так как во всяком случае содержит $\varnothing$ и Π. Если $\mathcal{B}(A)$ состоит только из этих двух множеств, будем называть ее *тривиальной*. Далее мы считаем, что система $\mathcal{B}(A)$ нетривиальна.

Определение 1. Пусть $\mathcal{B}(A)$ — система вольтерровых множеств оператора $A: \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$; $\delta > 0$ — заданное число. Тогда подсистему $\mathcal{T} = \Big\{\varnothing = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = \Pi\Big\}$ системы $\mathcal{B}(A)$ будем, следуя [17, 18], называть *вольтерровой δ-цепочкой* оператора A, если для всех $h = H_i \setminus H_{i-1}$, $i = \overline{1,k}$, выполняется неравенство $\Big\| P_h A P_h \Big\| < \delta$.

В дополнение к сформулированным выше будем считать выполненными следующие предположения.

A) ЛОО A обладает для любого $\delta > 0$ вольтерровой δ-цепочкой.

F$_3$) Суперпозиция $f\big(.,x(.),u(.)\big)$ равномерно ограничена в пространстве $\mathcal{Z}^m$ по всем $x \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{D}_\infty$.

Замечание 1. Условие **A**) часто выполняется в приложениях, см. [12,19], а также примеры в § 4,5.

Замечание 2. Пусть $H \in \mathcal{B}(A)$. Действуя оператором P_H на уравнение (0.1), получаем его локальный аналог. Решение (в пространстве $P_H\mathcal{X}^\ell$) этого локального аналога естественно именовать H-локальным решением уравнения (0.1); Π-локальное решение есть глобальное решение уравнения (0.1).

Теорема 1. *Пусть нашлись два управления* $\overline{u}$, $\widetilde{u} \in \Omega(\mathcal{D})$ *таких, что*

$$J[\overline{u}] < 0, \quad J[\widetilde{u}] > 0. \tag{1.1}$$

Тогда при сделанных предположениях поставленная задача управления для уравнения (0.1) *имеет решение.*

Замечание 3. Доказательство теоремы 1 проводится в § 3 и опирается на некоторые свойства уравнения (0.1), устанавливаемые в § 2.

Понятно, что, вообще говоря, можно пытаться обнаружить выполнение предположений (1.1) опытным путем. Кроме того, в работе [8] приводятся следующие достаточные условия, обеспечивающие выполнение этого предположения. Пусть $r > 0$ — заданное число. Для простоты будем считать, что в компакте U содержится прямоугольник

$$[-r,r]_s \equiv \Big\{ v \in \mathbb{R}^s : |v_j| \leqslant r,\ j = \overline{1,s} \Big\}.$$

Для $i = \overline{1,s}$ положим

$$[-r,r]_s^{(i)} \equiv \Big\{ v \in [-r,r]_s : |v_i| = r \Big\}.$$

Будем предполагать также, что справедливо представление

$$\Phi(t,x,v) = \mathcal{F}(t,x,v) + \mathcal{G}(t,v), \quad t \in \Pi, \quad x \in \mathbb{R}^\ell, \quad v \in \mathbb{R}^s,$$

где функции $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ наследуют заявленные свойства функции Φ, и кроме того, удовлетворяют формулируемым далее условиям[4].

$\mathbf{G}_1$) Имеем:
$$\max\Big\{ \Big|\mathcal{F}(.,x,v)\Big| : v \in [-r,r]_s,\ x \in \mathbb{R}^\ell \Big\} \leqslant R(.) \in L_1(\Pi).$$

$\mathbf{G}_2$) Для любых $i = \overline{1,s}$, $k = \overline{1,\varkappa}$ и $v \in [-r,r]_s^{(i)}$ на множестве Π_k справедливо разложение
$$\mathcal{G}(t,v) = \varphi_{i,k}(t,v) + \psi_{i,k}(t,v)$$
такое, что $\varphi_{i,k}(t,-v) = -\varphi_{i,k}(t,v)$, $\psi_{i,k}(t,-v) = -\psi_{i,k}(t,v)$,
$$\left| \int_{\Pi_k} \varphi_{i,k}(t,v)\,dt \right| > \int_\Pi R(t)\,dt.$$

Далее (в § 2) будет показано, что $\Omega(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. Выберем в качестве управлений $\overline{u}$, $\widetilde{u} \in \Omega(\mathcal{D})$ конечномерные аппроксимации, определяемые на каждом элементе разбиения Π_k, $k = \overline{1,\varkappa}$, антиподальными точками границы прямоугольника $[-r;r]_s$. При выполнении указанных условий функционал будет принимать значения разных знаков на управлениях $\overline{u}$, $\widetilde{u}$. Таким образом, либо $J[\overline{u}] = J[\widetilde{u}] = 0$ (поставленная задача управления имеет решение), либо предположение (1.1) выполняется.

Пусть $s = 2$, $\varkappa = 2$, $\Pi = \Pi_1 \sqcup \Pi_2$, $\operatorname{mes}\Pi \leqslant r \operatorname{mes}\Pi_k$, $k = 1,2$, $r > 0$. Тогда можно взять, например,

$$\Phi(t,x,u) = \frac{1}{1+|x|^2+|u|^2} + u_1 + u_2,$$

$$\mathcal{F}(t,x,u) = \frac{1}{1+|x|^2+|u|^2}, \quad \mathcal{G}(t,u) = u_1 + u_2, \quad R(t) \equiv 1,$$

$$\varphi_{1,1}(t,v) = v_1, \quad \psi_{1,1}(t,v) = v_2, \quad \varphi_{2,1}(t,v) = v_2, \quad \psi_{2,1}(t,v) = v_1.$$

При этом для $v \in [-r;r]_s^{(1)}$ (то есть $|v_1| = r$, $v_2 \in [-r;r]$) имеем:

$$\left| \int_{\Pi_1} \varphi_{1,1}(t,v)\,dt \right| = r \operatorname{mes}\Pi_1 > \operatorname{mes}\Pi = \int_\Pi R(t)\,dt.$$

Для $v \in [-r;r]_s^{(2)}$ — аналогично.

[4]Собственно говоря, речь идет о том, что зависимость функции $\Phi(t,x,u)$ от x и от u, строение компакта U и разбиение множества Π должны быть определенным образом согласованы.

§ 2. Некоторые свойства решения управляемого уравнения

В этом параграфе мы везде считаем выполненными условия $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$). Для всякого управления $u \in \mathcal{D}_\infty$ определим оператор $F_u : \mathcal{X}^\ell \to \mathcal{X}^\ell$ формулой

$$F_u[x] = \theta + A\Big[f\big(.,x(.),u(.)\big)\Big], \quad u \in \mathcal{X}^\ell.$$

Очевидно, что $\mathcal{B}(A) \subset \mathcal{B}(F_u)$. Отметим, что для всякого $\widetilde{x} \in \mathcal{X}^\ell$ и любых управлений $u, u_0 \in \mathcal{D}_\infty$ имеем:

$$F_u[\widetilde{x}] - F_{u_0}[\widetilde{x}] = A\big[\Delta_u f(\widetilde{x})\big], \quad \Delta_u f(\widetilde{x}) \equiv f\big(.,\widetilde{x},u\big) - f\big(.,\widetilde{x},u_0\big). \tag{2.1}$$

Доказательство следующего утверждения см. в [8, лемма 2.1].

Лемма 1. *Для любых элементов $z_1, z_2, y \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{D}_\infty$ таких, что $\|z_1\|_{\mathcal{X}^\ell}, \|z_2\|_{\mathcal{X}^\ell} \leqslant M$, $\|u\|_{\mathcal{U}^s} \leqslant M$, а также любых $H_1, H_2 \in \mathcal{B}(A)$, $H_1 \subset H_2$, справедливо неравенство:*

$$\Big\|P_h\Big(F_u[P_{H_1}y + P_h z_1] - F_u[P_{H_1}y + P_h z_2]\Big)\Big\|_{\mathcal{X}^\ell} \leqslant \mu_A(h)\cdot\mathcal{N}(M)\cdot\Big\|P_h(z_1 - z_2)\Big\|_{\mathcal{X}^\ell},$$

где $h = H_2 \setminus H_1$, $\mu_A(h) \equiv \|P_h A P_h\|_{\mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell}$.

Следующее утверждение можно вывести из подобных утверждений работ [15,16], посвященных гораздо более абстрактному случаю. Так как [15] — депонированная статья, а в [16] нет соответствующих доказательств, здесь мы для удобства читателя приведем доказательство.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* **A**). *Тогда ни при каком управлении $u \in \mathcal{U}^s$ уравнение* (0.1) *не может иметь более одного решения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, от противного, что управлению $u \in \mathcal{U}^s$ отвечают два решения $x_1, x_2 \in \mathcal{X}^\ell$ уравнения (0.1). Обозначим для краткости $F = F_u$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $M = \max\Big\{\|x_1\|, \|x_2\|, \|u\|\Big\}$. Выберем число $\delta > 0$ из условия: $2\delta\mathcal{N}(M) \leqslant 1$. Согласно условию **A**) для указанного δ существует вольтеррова δ-цепочка $\mathcal{T} = \Big\{H_0, H_1, \ldots, H_k\Big\}$ оператора A. Положим для краткости $P_i = P_{H_i}$, $P_{(j,i)} = P_h$ при $h = H_j \setminus H_i$, $\mu(h) = \|P_h A P_h\|$.

1. Докажем, что $P_1 \Delta x = 0$. Пользуясь леммой 1 и учитывая, что $\mu(H_1) < \delta$, имеем:

$$\|P_1\Delta x\| = \Big\|P_1\Big(F[x_2] - F[x_1]\Big)\Big\| = \Big\|P_1\Big(FP_1[x_2] - FP_1[x_1]\Big)\Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \delta\cdot\mathcal{N}(M)\cdot\|P_1\Delta x\| \leqslant 0.5\|P_1\Delta x\|,$$

откуда сразу получаем $\|P_1\Delta x\| \leqslant 0$, и таким образом, $\|P_1\Delta x\| = 0$.

2. Действуя по индукции, предположим, что для $i = j$ уже доказано, что $P_i\Delta x = 0$, и покажем, что такое же соотношение выполняется и для $i = j+1$. Для этого нам достаточно доказать, что $P_{(j+1,j)}\Delta x = 0$. Поскольку, согласно предположению индукции, $P_j\Delta x = 0$, то $P_j x_1 = P_j x_2$ — обозначим как x_0. Пользуясь еще раз леммой 1 и учитывая, что $\mu\Big(H_{j+1}\setminus H_j\Big) < \delta$, оценим норму

$$\|P_{(j+1,j)}\Delta x\| = \Big\|P_{(j+1,j)}P_{j+1}\Big(F[P_{j+1}x_2] - F[P_{j+1}x_1]\Big)\Big\| =$$

$$= \Big\|P_{(j+1,j)}\Big(F[P_j x_0 + P_{(j+1,j)}x_2] - F[P_j x_0 + P_{(j+1,j)}x_1]\Big)\Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \delta\cdot\mathcal{N}(M)\cdot\|P_{(j+1,j)}\Delta x\| \leqslant 0.5\|P_{(j+1,j)}\Delta x\|,$$

откуда получаем $\|P_{(j+1,j)}\Delta x\| \leqslant 0$, и таким образом, $\|P_{(j+1,j)}\Delta x\| = 0$.

3. По индукции делаем вывод, что $P_k\Delta x = I\Delta x = \Delta x = 0$, то есть $x_2 = x_1$. $\square$

Следующее утверждение представляет собой теорему о тотальном сохранении глобальной разрешимости уравнения (0.1).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* **A**) *и* $\mathbf{F}_3$). *Тогда уравнение* (0.1) *разрешимо глобально для всех* $u \in \mathcal{D}_\infty$.

Доказательство. В соответствии с ограниченностью множества $\mathcal{D}_\infty$ и условием $\mathbf{F}_3$), найдется константа $M > 0$ такая, что для всех $u \in \mathcal{D}_\infty$ выполняются неравенства:

$$\|u\| \leqslant M, \quad \|\theta\| + \sup_{y \in \mathcal{X}^\ell} \Big\| A\Big[f\big(.,y(.),u(.)\big)\Big]\Big\| \leqslant M. \tag{2.2}$$

Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы $0.5\delta\mathcal{N}(M) < 1$ и, пользуясь условием **A**), зафиксируем некоторую вольтеррову δ-цепочку $\mathcal{T} = \big\{H_0, \ldots, H_k\big\}$ оператора A. Выберем любое управление $u \in \mathcal{D}_\infty$. Обозначим для краткости $F = F_u$; $P_i = P_{H_i}$, $i = \overline{0,k}$; $P_{(i-1,i)} = P_i - P_{i-1}$, $i = \overline{1,k}$; и для $i = \overline{0,k}$ будем рассматривать локальные аналоги уравнения (0.1):

$$y = P_i F P_i[y], \quad y \in P_i\mathcal{X}^\ell. \tag{E_i}$$

Докажем, что каждое из уравнений (E_i), $i = \overline{0,k}$, имеет решение $y = y_i$ (то есть уравнение (0.1) имеет H_i-локальное решение $x = y_i$). Очевидно, что $y_0 = 0$ является решение уравнения (E_0).

Рассуждая по индукции, предположим, что для $i = j$ мы уже доказали существование решения уравнения (E_i). Докажем, что уравнение (E_i) имеет решение и при $i = j+1$.

1. Заметим, что для доказательства разрешимости уравнения (E_{j+1}) достаточно доказать разрешимость следующего уравнения:

$$y = F_{j+1}[y], \quad y \in P_{(j,j+1)}\mathcal{X}^\ell, \tag{E'_{j+1}}$$

где $F_{j+1} : P_{(j,j+1)}\mathcal{X}^\ell \to P_{(j,j+1)}\mathcal{X}^\ell$ — оператор, определяемый формулой

$$F_{j+1}[y] = P_{(j,j+1)}F\Big[P_j y_j + P_{(j,j+1)}y\Big].$$

Действительно, если уравнение (E'_{j+1}) имеет решение $y = \overline{y}_{j+1}$, то $y_{j+1} = y_j + \overline{y}_{j+1}$ является решением уравнения (E_{j+1}). В самом деле, с учетом вольтерровости множеств H_j и H_{j+1} по отношению к оператору F имеем:

$$y_{j+1} = P_j F P_j[y_j] + P_{(j,j+1)}F\Big[P_j y_j + P_{(j,j+1)}\overline{y}_{j+1}\Big] =$$
$$= P_j F P_j[y_{j+1}] + P_{(j,j+1)}F[y_{j+1}] =$$
$$= P_j F[y_{j+1}] + P_{(j,j+1)}F[y_{j+1}] = P_{j+1}F[y_{j+1}] = P_{j+1}FP_{j+1}[y_{j+1}].$$

2. Докажем разрешимость уравнения (E'_{j+1}). Определим множество

$$Y = \Big\{y \in P_{(j,j+1)}\mathcal{X}^\ell : \big\|P_{(j,j+1)}y\big\| \leqslant M\Big\}.$$

а) В силу (2.2) очевидно, что для любого $y \in Y$ справедлива оценка: $\big\|F_{j+1}[y]\big\| \leqslant M$, то есть $F_{j+1}[y] \in Y$.

б) Покажем, что оператор F_{j+1} является сжимающим на множестве Y. Выберем произвольно $z_1, z_2 \in Y$. Пользуясь леммой 1 и выбором δ, можем оценить:

$$\Big\|F_{j+1}[z_1] - F_{j+1}[z_2]\Big\| \leqslant \delta\,\mathcal{N}(M)\,\Big\|P_{(j,j+1)}(z_1 - z_2)\Big\| < \frac{1}{2}\|z_1 - z_2\|.$$

Используя далее принцип неподвижной точки Каччопполи-Банаха, получаем, что решение уравнения (E'_{j+1}) существует и единственно на множестве Y, обозначим его $\overline{y}_{j+1}$. Таким образом, существует решение уравнения (E_{j+1}), определяемое равенством: $y = y_{j+1} \equiv y_j + \overline{y}_{j+1}$.

3. По индукции делаем вывод, что уравнение (E_k) имеет решение $y = y_k$, то есть уравнение (0.1) имеет решение $x = y_k$. $\square$

Лемма 2. *Пусть* $\alpha \geqslant \|A\|$, $M > 0$ *— произвольные числа; число* $\delta > 0$ *таково, что* $\delta\mathcal{N}(M) \leqslant 1/2$; $\mathcal{T} = \Big\{H_0, H_1, \ldots, H_k\Big\}$ *— произвольно фиксированная вольтеррова* δ*-цепочка ЛОО* $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$; *и при некотором* $\kappa \in \overline{0,k}$ *уравнение* (0.1) *имеет* H_κ*-локальное решение* $x = x_\lambda$ *при* $u = u_\lambda \in \mathcal{D}$, *причем* $\|x_\lambda\| \leqslant M$, $\lambda = 1,2$. *Предположим, кроме того, что для операторов* $F_\lambda \equiv F_{u_\lambda}$, *где* $\lambda = 1,2$, *выполняется неравенство*

$$\Big\|P_{H_\kappa}\big(F_2 - F_1\big)[x_1]\Big\|_{\mathcal{X}^\ell} \leqslant R. \tag{2.3}$$

Тогда для всех $i = \overline{0,\kappa}$ *справедливы оценки:*

$$\Big\|P_{H_i}\big(x_2 - x_1\big)\Big\|_{\mathcal{X}^\ell} \leqslant C_i\, R, \tag{$\mathcal{N}_i$}$$

где $\{C_i\}$ *— числовая последовательность, определяемая рекуррентными соотношениями:*

$$C_{i+1} = C_i + 2\Big(\alpha\,\mathcal{N}(M)\,C_i + 1\Big), \quad C_0 = 0. \tag{2.4}$$

Доказательство леммы 2 см. в [8, лемма 2.2].

Замечание 4. Если бы оператор A обладал квазинильпотентной положительной мажорантой, то вместо леммы 2 можно было бы использовать обобщенную лемму Гронуолла. Однако наличия положительной мажоранты у оператора A мы не требуем. Это обстоятельство является существенным для примеров, рассмотренных далее в § 4,5.

Обозначим $\mathbf{X} \equiv \big\{x[u] : u \in \Omega(\mathcal{D}_\infty)\big\}$. Из теоремы 3 следует, что $\Omega(\mathcal{D}_\infty) = \mathcal{D}_\infty$. А из ее доказательства ясно, что существует константа $\xi = M > 0$ такая, что $\|x\| \leqslant \xi$ для всех $x \in \mathbf{X}$. Тогда, пользуясь условием $\mathbf{F}_2$), для всех $\tilde{x} \in \mathbf{X}$, $u, u_0 \in \mathcal{D}_\infty$ можем оценить:

$$\Big\|A\big[\Delta_u f(\tilde{x})\big]\Big\|_{\mathcal{X}^\ell} \leqslant \|A\|\,\mathcal{N}(\xi)\,\|u - u_0\|_{\mathcal{U}^s}.$$

Отсюда и из теоремы 3 и леммы 2 получаем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* **A**) *и* $\mathbf{F}_3$). *Тогда* $\Omega(\mathcal{D}_\infty) = \mathcal{D}_\infty$, *и кроме того, существует константа* $\gamma > 0$ *такая, что для любых* $\overline{u}, u \in \mathcal{D}_\infty$ *имеем*

$$\Big\|x[u] - x[\overline{u}]\Big\|_{\mathcal{X}^\ell} \leqslant \gamma\,\|u - \overline{u}\|_{\mathcal{U}^s}\,.$$

Очевидно, найдется число $K > 0$ такое, что для любых $v, \overline{v} \in V$ и соответствующих $u = u\{v\}$, $\overline{u} = u\{\overline{v}\}$, можем оценить

$$\|u - \overline{u}\|_{\mathcal{U}^s} \leqslant K\,|v - \overline{v}|.$$

Поэтому непосредственно из теоремы 4 и условия $\mathbf{F}_2$) получаем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* **A**) *и* $\mathbf{F}_3$). *Тогда* $\Omega\{V\} = V$. *Более того, имеем*

$$\Big\|A\big[f(.,x\{v\},u\{v\}) - f(.,x\{\overline{v}\},u\{\overline{v}\})\big]\Big\|_{\mathcal{X}^\ell} \to 0,$$

$$\Big\|\Phi(.,x\{v\},u\{v\}) - \Phi(.,x\{\overline{v}\},u\{\overline{v}\})\Big\|_{L_1(\Pi)} \to 0, \quad \big|J\{v\} - J\{\overline{v}\}\big| \to 0$$

при $|v - \overline{v}| \to 0$ *равномерно по* $v, \overline{v} \in V$.

§ 3. Доказательство основного результата

По теореме 5 справедливо равенство $\Omega\{V\} = V$, откуда получаем выпуклость множества $\Omega\{V\}$. Для каждого числа $\lambda \in [0;1]$ определим $v[\lambda] \equiv \lambda\overline{v} + (1-\lambda)\widetilde{v}$, где $\overline{u} = u\{\overline{v}\}$, $\widetilde{u} = u\{\widetilde{v}\}$, $\overline{v}, \widetilde{v} \in V$. По доказанному, $v[\lambda] \in \Omega\{V\}$ для всех $\lambda \in [0;1]$, и тем самым определена функция $\psi(\lambda) \equiv J\{v[\lambda]\}$. По теореме 5 функция $\psi(\lambda)$ непрерывна на $[0;1]$. При этом, согласно условиям теоремы, $\psi(0) > 0$, $\psi(1) < 0$. В таком случае, согласно теореме Больцано–Коши, найдется число $\lambda_* \in (0;1)$ такое, что $\psi(\lambda_*) = 0$. □

§ 4. Пример: первая краевая задача для параболического уравнения

Пусть $T > 0$ — некоторое число, $n \in \mathbb{N}$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область переменных $\overline{t} = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ с границей ∂Q, принадлежащей классу $\mathbb{C}^2$; $\Pi_T = (0,T) \times Q$ — заданный цилиндр в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $t = \{t_0, \overline{t}\}$; $S_T = (0,T) \times \partial Q$ — боковая поверхность цилиндра Π_T.

Мы собираемся показать, что при указанных далее предположениях результаты, установленные в статье, можно применить к управляемой распределенной системе, поведение которой описывается первой краевой задачей для параболического уравнения вида[5]

$$\begin{cases} x'_{t_0} - L[x] = f\Big(t, x(t), u(t)\Big), & t = \{t_0, \overline{t}\} \in \Pi \equiv \Pi_T, \\ x\Big|_{t_0=0} = \varphi(\overline{t}), \quad \overline{t} \in Q; & x\Big|_{S_T} = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $x = x(t) = x(t_0, \overline{t})$ — неизвестная функция; L — дифференциальный оператор, определяемый формулой:

$$L[x] = \sum_{i,j=1}^{n} \Big(a_{ij}(t) x'_{t_i}\Big)'_{t_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(t) x'_{t_j}. \tag{4.2}$$

Мы предполагаем здесь, что коэффициенты a_{ij} и b_j для $1 \leqslant i,j \leqslant n$ являются достаточно гладкими[6] и удовлетворяют условию:

$$\gamma_1 |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t) \xi_i \xi_j \leqslant \gamma_2 |\xi|^2, \quad t \in \Pi_T, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Относительно управляющей функции u мы предполагаем, что $u \in \mathcal{U}^s$, где $\mathcal{U} = L_\infty(\Pi)$. Далее мы используем следующие функциональные пространства (см. [21, § 1.1]):

$L_{q,r}(\Pi_T)$, $q, r \geqslant 1$, — банахово пространство, состоящее из всех измеримых на Π_T функций с конечной нормой:

$$\|x\|_{L_{q,r}(\Pi_T)} = \Big\| \, \|x(t_0,.)\|_{L_q(Q)} \Big\|_{L_r(0,T)};$$

$W_2^{1,0}(\Pi_T)$ — гильбертово пространство, состоящее из всех $x \in L_2(\Pi_T)$, имеющих все обобщенные производные x'_{t_i}, $i \in \overline{1,n}$, суммируемые с квадратом на Π_T; норма $\|x\|_{W_2^{1,0}(\Pi_T)} \equiv \Big(\|x\|^2_{L_2(\Pi_T)} + \|\nabla_{\overline{t}} x\|^2_{L_2^n(\Pi_T)}\Big)^{\frac{1}{2}}$, где $\nabla_{\overline{t}} x = \big\{x'_{t_1}, \ldots, x'_{t_n}\big\}$;

$V_2(\Pi_T)$ — банахово пространство, состоящее из всех $x \in W_2^{1,0}(\Pi_T)$, имеющих конечную норму $\|x\|_{V_2(\Pi_T)} \equiv \underset{0 \leqslant t_0 \leqslant T}{\mathrm{vraisup}} \|x(t_0,.)\|_{L_2(Q)} + \|\nabla_{\overline{t}} x\|_{L_2^n(\Pi_T)}$;

$V_2^{1,0}(\Pi_T)$ — подпространство пространства $V_2(\Pi_T)$, состоящее из всех $x \in V_2(\Pi_T)$, имеющих на всех сечениях $Q_\tau \equiv \{t \in \Pi_T : t_0 = \tau\}$ цилиндра Π_T, $0 \leqslant \tau \leqslant T$, следы из $L_2(Q_\tau)$, непрерывно

[5] В данном параграфе мы (в плане сведения НКЗ к функционально-операторному уравнению) опираемся на схему рассуждений из [20, пример 6.3], где изучалась первая краевая задача для уравнения более частного вида (уравнения диффузии) и в связи с другими вопросами.

[6] Можно считать их измеримыми функциями, удовлетворяющими условиям [21, глава III, § 1, (1.3) и (1.4)].

меняющиеся при изменении τ в норме $L_2(Q)$: $\Big\|x(\tau+\Delta\tau,.)-x(\tau,.)\Big\|_{L_2(Q)}\to 0$ при $\Delta\tau\to+0$; норма $\|x\|_{V_2^{1,0}(\Pi_T)}\equiv\max\limits_{0\leqslant t_0\leqslant T}\|x(t_0,.)\|_{L_2(Q)}+\|\nabla_{\overline{t}}x\|_{L_2^n(\Pi_T)}$;

$\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(\Pi_T)$ — подпространство пространства $W_2^{1,0}(\Pi_T)$, плотное множество в котором образуют гладкие функции, равные нулю вблизи S_T;

$\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(\Pi_T)=V_2^{1,0}(\Pi_T)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(\Pi_T)$ — подпространство $V_2^{1,0}(\Pi_T)$, в котором плотное множество образуют гладкие функции, равные нулю вблизи S_T.

Для того, чтобы сформулировать условия на функцию f, определим число

$$q_n=\begin{cases}\frac{2n}{n-2}, & \text{если}\quad n>2,\\ +\infty, & \text{если}\quad n=1,2,\end{cases}$$

и выберем некоторое число $q_0\in(2,q_n)$, и соответственно, число $r_0>2$ такое, что $r_0^{-1}+n(2q_0)^{-1}=n/4$. При таком выборе справедливо [21, § 2.3, с. 89] непрерывное (ограниченное) вложение $V_2(\Pi)\subset L_{q_0,r_0}(\Pi)$. Обозначим $\overline{q}=\min\{q_0,r_0\}$ и выберем $q\in(2,\overline{q})$. Таким образом,

$$V_2(\Pi)\subset L_q(\Pi)\subset L_2(\Pi). \tag{4.3}$$

Установленное вложение будет весьма существенным для наших дальнейших построений. Выбрав число $q>2$, как указано, будем предполагать относительно функции $f(t,\mathbf{p},\mathbf{v})$, что она измерима по $t\in\Pi$ и непрерывна по $(\mathbf{p};\mathbf{v})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^s$, и кроме того, удовлетворяет условиям $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$), $\mathbf{F}_3$) при $\mathcal{X}=L_q(\Pi)$, $\mathcal{Z}=L_2(\Pi)$. После этого, как далее будет показано, под обобщенным решением задачи (4.1) мы вправе понимать функцию $x(.)$ из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(\Pi)$, которая является обобщенным в смысле [21, глава 3] решением вспомогательной задачи:

$$\begin{cases} x'_{t_0}-L[x]=z(t), & t=\{t_0,\overline{t}\}\in\Pi,\\ x\Big|_{t_0=0}=\varphi(\overline{t}),\quad \overline{t}\in Q; & x\Big|_{S_T}=0,\end{cases} \tag{4.4}$$

при $z(.)=f\Big(.,x(.),u(.)\Big)$.

Следуя [21, глава 3], решение вспомогательной задачи (4.4) будем понимать в указанном там обобщенном смысле и искать его соответственно в пространстве $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(\Pi)$.

Лемма 3 (см. [21, глава 3, теоремы 2.1, 4.2]). *Каково бы ни было $n\in\mathbb{N}$, задача* (4.4) *имеет при любых $\varphi\in L_2(Q)$ и $z\in L_2(\Pi)$ единственное в пространстве $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(\Pi)$ решение $x(.)$. Для этого решения справедливо энергетическое неравенство:*

$$\|x\|_{V_2^{1,0}(\Pi)}\leqslant C\cdot\Big(\|z\|_{L_2(\Pi)}+\|\varphi\|_{L_2(Q)}\Big), \tag{4.5}$$

где постоянная C не зависит от z и φ.

В соответствии с условиями, наложенными на функцию $f(.,.,.)$, и установленным вложением (4.3), под обобщенным решением задачи (4.1) естественно понимать функцию $x(.)$ из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(\Pi)$, которая является обобщенным решением задачи (4.4) при $z(.)=f\Big(.,x(.),u(.)\Big)$.

Обозначим $A[z]$ — решение задачи (4.4) при $\varphi=0$, $\Theta[\varphi]$ — решение задачи (4.4) при $z=0$. Непосредственно из определения решения видно, что оба этих оператора линейны. Кроме того, согласно лемме 3, A можно рассматривать как ЛОО

$$A:L_2(\Pi)\to V_2^{1,0}(\Pi)\subset V_2(\Pi)\subset L_q(\Pi),$$

и аналогично, Θ можно рассматривать как ЛОО

$$\Theta:L_2(Q)\to V_2^{1,0}(\Pi)\subset V_2(\Pi)\subset L_q(\Pi).$$

При этом решение задачи (4.4) представляется в виде

$$x = \Theta[\varphi] + A[z]. \tag{4.6}$$

В таком случае очевидно, что $x \in \overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(\Pi)$ будет являться обобщенным решением задачи (4.1) в том, и только в том случае, когда $x(.)$ является решением функционально-операторного уравнения:

$$x = \Theta[\varphi] + A\Big[f\big(.,x(.),u(.)\big)\Big], \quad x \in V_2^{1,0}(\Pi). \tag{4.7}$$

Действительно, если x является решением задачи (4.1), то согласно нашему определению x будет решением задачи (4.4) при $z = f\big(.,x(.),u(.)\big)$, и в таком случае представляется в виде (4.6), то есть принадлежит множеству решений уравнения (4.7). В обратную сторону, если x является решением уравнения (4.7), то x представляется в виде (4.6) при $z = f\big(.,x(.),u(.)\big)$, то есть согласно определению операторов A и Θ является суммой решений задачи (4.4) соответственно при $\varphi = 0$ и $z = 0$, а следовательно, является решением задачи (4.4) при данном выборе z. Но это означает, что x по нашему определению является решением задачи (4.1). Таким образом, множества решений задачи (4.1) и уравнения (4.7) совпадают, то есть задача (4.1) эквивалентна уравнению (4.7).

В силу условий, наложенных на функцию $f(.,.,.)$, а также установленных свойств операторов Θ и A и вложения $V_2^{1,0}(\Pi) \subset L_q(\Pi)$ уравнение (4.7) эквивалентно уравнению

$$x = \theta + A\Big[f\big(.,x(.),u(.)\big)\Big], \quad x \in L_q(\Pi), \tag{4.8}$$

где $\theta = \Theta[\varphi] \in L_q(\Pi)$, а A рассматривается как ЛОО $A : L_2(\Pi) \to L_q(\Pi)$. Действительно, если x является решением уравнения (4.8), то, учитывая характер множества значений входящих в него операторов, $x \in V_2^{1,0}(\Pi)$, и следовательно, является решением уравнения (4.7). В обратную сторону, если $x \in V_2^{1,0}(\Pi)$ является решением уравнения (4.7), то согласно вложению $V_2^{1,0}(\Pi) \subset L_q(\Pi)$ имеем: $x \in L_q(\Pi)$, и следовательно, x является решением уравнения (4.8). Таким образом, множества решений этих двух уравнений совпадают, то есть уравнения эквивалентны. Уравнение (4.8) имеет вид (0.1).

Из проведенных рассуждений нетрудно заметить, что функционально-операторное уравнение вида (4.8) возникает довольно естественным образом. Действительно, все, что мы здесь использовали — это утверждение о существовании единственного решения для соответствующей линейной задачи (4.4), энергетическое неравенство (4.5) для этого решения, и наконец, теорему вложения (4.3). Очевидно, что такая ситуация, когда подобного сорта предположения имеют место, достаточно характерна для широкого класса начально-краевых задач.

Для того, чтобы можно было пользоваться теоремой 1, остается проверить лишь условие **A**). Иными словами, достаточно лишь убедиться в том, что соответствующий оператор A обращения главной части дифференциального уравнения обладает для всякого $\delta > 0$ вольтерровой δ-цепочкой.

В связи с этим заметим, что всякое решение вспомогательной задачи (4.4) на цилиндре $\Pi = \Pi_T$ является решением и на его подмножестве Π_τ для всех $\tau \in [0;T]$, причем решение на Π_τ никоим образом не зависит от значений функции $z(.)$ вне множества Π_τ. Это означает, что по отношению к оператору A множества Π_τ будут являться вольтерровыми множествами при всех $\tau \in [0;T]$, то есть $\Pi_\tau \in \mathcal{B}(A)$ для всех $\tau \in [0;T]$. Исходя из этого, ясно, что для любого $\delta > 0$ существует вольтеррова δ-малая по мере цепочка множеств оператора A.

Выберем произвольно число $\sigma > 0$, а также τ', $\tau'' \in (0;T)$ так, чтобы $0 < \tau'' - \tau' < \sigma$. Рассмотрим множество $h = \Pi_{\tau''} \setminus \Pi_{\tau'}$. Оценим норму $\|P_h A P_h\|_{L_2 \to L_q}$.

Из проведенных выше построений видно, что разрешающий оператор A может рассматриваться как ЛОО $A : L_2(\Pi) \to L_\kappa(\Pi)$ для любого $\kappa \in (q,\overline{q}]$. Поэтому для произвольного $z \in L_2(\Pi)$, $\|z\| \leqslant 1$, имеем: $y = A[\chi_h z] \in L_\kappa(\Pi)$, следовательно, $|y|^q \in L_\alpha(\Pi)$, где $\alpha = \kappa/q > 1$, и таким образом,

$$\Big\||y|^q\Big\|_{L_\alpha}^\alpha = \|y\|_{L_\kappa}^\kappa = \Big\|A[\chi_h z]\Big\|_{L_\kappa}^\kappa \leqslant \|A\|_{L_2 \to L_\kappa}^\kappa \cdot \|z\|_{L_2}^\kappa \leqslant \|A\|_{L_2 \to L_\kappa}^\kappa \equiv \nu^\alpha.$$

По неравенству Гельдера получаем: $\left\|P_hAP_h[z]\right\|^q_{L_q} = \left\|\chi_h y\right\|^q_{L_q} \leqslant \nu\left\|\chi_h\right\|_{L_\beta}$, где $\beta^{-1}+\alpha^{-1}=1$. Отсюда понятно, что

$$\|P_hAP_h\|_{L_2\to L_q} \leqslant \nu^{1/q}(\operatorname{mes} h)^{1/(q\beta)} \leqslant \nu^{1/q}(\sigma)^{1/(q\beta)}(\operatorname{mes} Q)^{1/(q\beta)} \to +0$$

при $\sigma\to+0$. Таким образом, оператор A обладает вольтерровой δ-цепочкой для всех $\delta>0$.

§ 5. Пример: смешанная задача для гиперболического уравнения

Пусть числа $n\in\mathbb{N}$, $T>0$ — произвольно фиксированы, $Q\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченное открытое связное множество переменных $\widehat{t}\equiv\{t_1,\ldots,t_n\}$; $\Pi=[0,T]\times Q$ — заданный цилиндр в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $t=\left\{t_0,\widehat{t}\right\}$; $S\equiv(0,T]\times\partial Q$ — боковая поверхность цилиндра Π. Следуя [22, глава 1, § 3,4], определим следующие функциональные пространства:

$\dot{D}(Q)$ — совокупность всех непрерывно дифференцируемых в Q функций, равных нулю вблизи границы ∂Q; $\dot{D}(Q)\subset W_2^{(1)}(Q)$;

$\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(Q)$ — замыкание класса $\dot{D}(Q)$ в норме $W_2^{(1)}(Q)$;

$\dot{D}_1(\Pi)$ — совокупность всех непрерывно дифференцируемых в Π функций, каждая из которых равна нулю в некоторой окрестности S; $\dot{D}_1(\Pi)\subset W_2^{(1)}(\Pi)$;

$\overset{\circ}{W}{}_2^{(1,1)}(\Pi)$ — замыкание класса $\dot{D}_1(\Pi)$ в норме $W_2^{(1)}(\Pi)$;

$\dot{D}_2(\Pi)$ — совокупность всех тех функций из $\dot{D}_1(\Pi)$, каждая из которых обращается в нуль при $t_0\in[T-\delta,T]$, для некоторого $\delta\in(0,T]$; $\dot{D}_2(\Pi)\subset W_2^{(1)}(\Pi)$;

$\overset{\circ}{D}_2(\Pi)$ — замыкание класса $\dot{D}_2(\Pi)$ в норме пространства $W_2^{(1)}(\Pi)$.

Пусть в цилиндре Π задан дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}[x](t)\equiv\sum_{i,j=0}^{n}a_{ij}(t)\frac{\partial^2x}{\partial t_i\partial t_j}+\sum_{i=0}^{n}a_i(t)\frac{\partial x}{\partial t_i},\quad t\in\Pi,$$

гиперболического типа, то есть такой, что $a_{ij}=a_{ji}$, $i,j=\overline{0,n}$, $a_{00}=1$, и

$$-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant d\cdot\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^n,\quad d=\mathrm{const}>0;$$

причем коэффициенты оператора $\mathcal{L}[.]$ определены в $\overline{\Pi}$ и удовлетворяют условию:
а) $a_{ij}(.)$ — непрерывны и имеют ограниченные обобщенные производные до второго порядка включительно, причем производные первого порядка непрерывны; $a_i(.)$ — непрерывны и имеют ограниченные обобщенные производные первого порядка.

Пусть $\ell\equiv n+1$ — общее количество обобщенных производных до порядка 1 включительно (то есть нулевого и первого порядка), существующих у любой функции пространства $W_2^{(1)}(\Pi)$. Определим оператор $D: W_2^{(1)}(\Pi)\to L_2^\ell(\Pi)$, ставящий в соответствие всякой функции $x\in W_2^{(1)}(\Pi)$ вектор, компонентами которого являются всевозможные обобщенные производные этой функции до порядка 1 включительно.

Пусть функция $f:\Pi\times\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$), $\mathbf{F}_3$) при $m=1$, $\mathcal{X}=L_2(\Pi)$, $\mathcal{Z}=L_q(\Pi)$, $\mathcal{U}=L_\infty(\Pi)$, где $q\in(2,\infty)$.

Выберем $u\in\mathcal{U}^s$, $\psi_1\in\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(Q)$, $\psi_2\in L_2(Q)$ и рассмотрим смешанную задачу:

$$\mathcal{L}[x](t)=f(t,D[x](t),u(t)),\quad t\in\Pi;\tag{5.1}$$

$$x(0,\widehat{t})=\psi_1(\widehat{t}),\quad \widehat{t}\in Q;\quad x'_{t_0}(0,\widehat{t})=\psi_2(\widehat{t}),\quad \widehat{t}\in Q;\quad x\Big|_S=0.\tag{5.2}$$

Решение задачи (5.1), (5.2) будем понимать в обобщенном смысле. Чтобы дать соответствующее определение, положим $\Psi \equiv \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(Q) \times L_2(Q) \subset E \equiv W_2^{(1)}(Q) \times L_2(Q)$, $X \equiv \overset{\circ}{W}{}_2^{(1,1)}(\Pi)$, $Z \equiv L_2(\Pi)$, $\Phi \equiv \overset{\circ}{D}_2(\Pi)$, $\psi \equiv \{\psi_1, \psi_2\} \in \Psi$. Кроме того, для $x \in X$, $z \in Z$, $\psi \in \Psi$, $\varphi \in \Phi$ положим

$$I_1[x,z,\psi,\varphi] \equiv \int_Q \Big(\psi_2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^n a_{0i} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial t_i}\Big) \cdot \varphi(0,\widehat{t})\, d\widehat{t} + \int_\Pi \Big\{ \frac{\partial x}{\partial t_0} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t_0} + 2 \cdot \sum_{i=1}^n a_{0i} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t_0} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t_j} + \Big[2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{0i}}{\partial t_0} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_i} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial t_j} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_i} - \sum_{i=0}^n a_i \cdot \frac{\partial x}{\partial t_i} + z \Big] \cdot \varphi \Big\} dt;$$

$$I_2[x,\psi] \equiv \lim_{\Delta\tau \to 0} \Big\| x(\Delta\tau,.) - \psi_1(.) \Big\|_{L_2(Q)}.$$

Обобщенным решением задачи (5.1), (5.2) для заданных $\psi \in \Psi$ назовем функцию $x \in X$ (ясно, что $X \subset W_2^{(1)}(\Pi)$), удовлетворяющую условиям:

$$I_1[x, f(.,D[x](.),u(.)),\psi,\varphi] = 0 \in \mathbb{R} \quad \forall \varphi \in \Phi; \quad I_2[x,\psi] = 0 \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Положив

$$I[x,z,\psi,\varphi] \equiv \{I_1[x,z,\psi,\varphi], I_2[x,\psi]\}, \quad \{x,z,\psi\} \in X \times Z \times \Psi, \quad \varphi \in \Phi,$$

запишем условия (5.3) в виде

$$I[x, f(.,D[x](.),u(.)), \{\psi_1,\psi_2\}, \varphi] = 0 \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{D}_2(\Pi). \tag{5.4}$$

Чтобы пояснить корректность этого определения, выберем $z \in L_2(\Pi)$ и рассмотрим задачу (5.2) для вспомогательного уравнения:

$$\mathcal{L}[x](t) = z(t), \quad t \in \Pi. \tag{5.5}$$

Согласно [22, глава 3, § 1], обобщенным решением задачи (5.5), (5.2) для заданных $z \in Z$, $\psi \in \Psi$ называется функция $x \in X \subset W_2^{(1)}(\Pi)$, удовлетворяющая условию:

$$I[x,z,\psi,\varphi] = 0 \quad \forall \varphi \in \Phi. \tag{5.6}$$

Справедливо следующее утверждение [22, глава 3, § 2, с. 150, теорема 5].

Лемма 4. *Если выполнены условия* a)*, то для всех $z \in Z$, $\psi \in \Psi$ существует единственное решение $x \in X \subset W_2^{(1)}(\Pi)$ уравнения* (5.6). Для этого решения справедливо неравенство:

$$\|x\|_{W_2^{(1)}(\Pi)} \leqslant K \cdot \{\|\psi\|_E + \|z\|_Z\}.$$

Поскольку $\operatorname{Ker} I[.,\varphi]$ — линейное множество для каждого $\varphi \in \Phi$, то из леммы 4 следует, что всякое решение уравнения (5.6) задается в виде

$$x = \Theta[\psi] + B[z],$$

где

$$\Theta : \Psi \equiv \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(Q) \times L_2(Q) \to X \equiv \overset{\circ}{W}{}_2^{(1,1)}(\Pi), \quad B : Z \equiv L_2(\Pi) \to X \equiv \overset{\circ}{W}{}_2^{(1,1)}(\Pi)$$

— ЛОО. Таким образом, в силу условия $\mathbf{F}_1$) наше определение обобщенного решения корректно, а тождество (5.4) эквивалентно операторному уравнению:

$$x = \Theta[\psi] + B\Big[f(.,D[x](.),u(.))\Big], \quad x \in W_2^{(1)}(\Pi). \tag{5.7}$$

Выпишем некоторые свойства рассматриваемых функциональных пространств. Следующее утверждение очевидно.

Лемма 5. *Существуют константы $M_\star$, $M^\star > 0$ такие, что*

$$\|D[x]\|_{L_2^\ell(\Pi)} \leqslant M^\star \cdot \|x\|_{W_2^{(1)}}, \quad \|x\|_{W_2^{(1)}} \leqslant M_\star \cdot \|D[x]\|_{L_2^\ell(\Pi)} \quad \forall x \in W_2^{(1)}(\Pi).$$

Для $\tau \in [0,T]$ обозначим $\dot{D}_\tau(\Pi)$ — совокупность всех тех функций из $\dot{D}_1(\Pi)$, каждая из которых обращается в нуль при $t_0 \in [0,\tau]$, $\overset{\circ}{D}_\tau$ (Π) — замыкание класса $\dot{D}_\tau(\Pi)$ в норме пространства $W_2^{(1)}(\Pi)$.

Замечание 5. Очевидно, что построение класса $\overset{\circ}{D}_\tau$ (Π) совершенно аналогично построению класса $\overset{\circ}{D}_2$ (Π), и таким образом [22, глава 1, § 4, с. 38–39], $\overset{\circ}{D}_\tau$ (Π) — подпространство в $W_2^{(1)}(\Pi)$ и справедливо вложение $\overset{\circ}{D}_\tau$ $(\Pi) \subset \overset{\circ}{W}{}_2^{(1,1)}$ $(\Pi) \subset W_2^{(1)}(\Pi)$.

Пусть $\Pi_\tau \equiv \{t \in \Pi \quad | \quad t_0 \in [0,\tau]\}$. Так как везде выше можно взять $\Pi = \Pi_\tau$ $\forall \tau \in [0,T]$, а всякое глобальное решение является локальным, то очевидным следствием леммы 4 и замечания 5 является

Лемма 6. *Если* $z\Big|_{\Pi_\tau} = 0$, *x — решение* (5.6) при $\psi = 0$, то $x\Big|_{\Pi_\tau} = 0$.

Сведем уравнение (5.7), рассматриваемое как уравнение в пространстве Соболева, к уравнению в лебеговом пространстве. Определим оператор A формулой: $A[z] = DB[z]$, $z \in L_2(\Pi)$. Согласно лемме 5, $A : L_2(\Pi) \to L_2^\ell(\Pi)$ — ЛОО. Обозначим $A_q : L_q(\Pi) \to L_2^\ell(\Pi)$ — сужение оператора A на пространство $L_q(\Pi)$. Кроме того, для заданного $\psi \in \Psi$ примем $\theta \equiv D\Theta[\psi] \in L_2^\ell(\Pi)$. Предположим, $x \in W_2^{(1)}(\Pi)$ — решение уравнения (5.7) при некотором $u \in \mathcal{U}^s$. Подействовав на указанное уравнение оператором $D[.]$, получаем, что $y \equiv D[x] \in L_2^\ell(\Pi)$ является решением уравнения[7]

$$y = \theta + A_q\left[f(.,y(.),u(.))\right], \quad y \in L_2^\ell(\Pi). \tag{5.8}$$

В обратную сторону, пусть уравнение (5.8) имеет решение $y \in L_2^\ell(\Pi)$. Обозначим $z \equiv f(.,y,u)$. В силу условия $\mathbf{F}_1$), $z \in Z$. Рассмотрим $x \equiv \Theta[\psi] + B[z] \in X \subset W_2^{(1)}(\Pi)$. Найдем

$$D[x] = D\Theta[\psi] + DB[z] = \theta + A\left[f(.,y(.),u(.))\right] = \theta + A_q\left[f(.,y(.),u(.))\right] = y,$$

и таким образом $y = D[x]$, следовательно, $x \in W_2^{(1)}(\Pi)$ удовлетворяет уравнению (5.7).

Предположим, нашлось два решения $x_1, x_2 \in W_2^{(1)}(\Pi)$ уравнения (5.7). Тогда, поскольку одна из компонент вектора $D[x]$ представляет собой функцию x, получаем, что нашлось два различных решения $y_i = D[x_i]$, $i = 1,2$, уравнения (5.8), что противоречит теореме 2 (поскольку, как показано далее, условие $\mathbf{A}$) относительно оператора A_q выполняется).

Таким образом, оба уравнения (5.7), (5.8) могут иметь не более одного решения. При этом, если разрешимо уравнение (5.7), то разрешимо уравнение (5.8), и наоборот, если разрешимо уравнение (5.8), то и уравнение (5.7) разрешимо.

Осталось показать, что оператор A_q удовлетворяет условию $\mathbf{A}$). Докажем, прежде всего, что $\Pi_\tau \in \mathcal{B}(A_q) = \mathcal{B}(A)$ $\forall \tau \in [0;T]$. Действительно, в соответствии с леммой 6, для всякого $\tau \in [0,T]$ имеем

$$P_{\Pi_\tau} A P_{\Pi \setminus \Pi_\tau} = 0,$$

и в силу линейности оператора A,

$$P_{\Pi_\tau} A = P_{\Pi_\tau} A\big[P_{\Pi_\tau} + P_{\Pi \setminus \Pi_\tau}\big] = P_{\Pi_\tau} A P_{\Pi_\tau} + P_{\Pi_\tau} A P_{\Pi \setminus \Pi_\tau} = P_{\Pi_\tau} A P_{\Pi_\tau}.$$

[7]Здесь мы учитываем, что функция f удовлетворяет условию $\mathbf{F}_1$) при $\mathcal{Z} = L_q(\Pi)$, $q > 2$.

Выберем произвольно число $\sigma > 0$, а также τ', $\tau'' \in [0;T]$ так, чтобы $0 < \tau''-\tau' < \sigma$. Рассмотрим множество $h = \Pi_{\tau''} \setminus \Pi_{\tau'}$. Оценим норму $\|P_h A_q P_h\|_{L_q \to L_2^\ell}$. Для этого возьмем любую функцию $z \in L_q(\Pi)$, $\|z\|_{L_q} \leqslant 1$, и рассмотрим

$$\|P_h A_q P_h z\|_{L_2^\ell} = \|P_h A P_h z\|_{L_2^\ell} \leqslant \|A\| \cdot \|\chi_h\, z\|_{L_2}.$$

Пользуясь неравенством Гельдера, получаем

$$\|\chi_h\, z\|_{L_2}^2 \leqslant \|\chi_h\|_{L_\alpha} \|z\|_{L_q}^2 \leqslant \|\chi_h\|_{L_\alpha} \leqslant (\operatorname{mes} Q)^{1/\alpha}\, \sigma^{1/\alpha},$$

где $\alpha^{-1} + (2/q) = 1$, то есть $\alpha = q/(q-2) \in (1;\infty)$. Отсюда ясно, что

$$\|P_h A_q P_h\|_{L_q \to L_2^\ell} \to 0 \quad \text{при} \quad \sigma \to 0.$$

Это означает, что оператор A_q обладает вольтерровой δ-цепочкой для любого $\delta > 0$, то есть условие **A**) для него выполняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Ф.П. О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 11. С. 1893–1900.
2. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Управляемость упругих колебаний систем с распределенными и сосредоточенными параметрами по двум границам // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46. № 11. С. 2032–2044.
3. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
4. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004. 504 с.
5. Lions J.-L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. Vol. 30. № 1. P. 1–68.
6. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 352+xii с.
7. Розанова А.В. Управляемость для нелинейного абстрактного эволюционного уравнения // Математические заметки. 2004. Т. 76. Вып. 4. С. 553–567.
8. Чернов А.В. О достаточных условиях управляемости нелинейных распределенных систем // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 8. С. 1400–1414.
9. Чернов А.В. О выпуклости множеств глобальной разрешимости управляемых начально-краевых задач // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 4. С. 577–586.
10. Чернов А.В. О вольтерровых функционально-операторных играх на заданном множестве // Математическая теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3. Вып. 1. С. 91–117.
11. Чернов А.В. О существовании ε-равновесия в вольтерровых функционально-операторных играх без дискриминации // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4. Вып. 1. С. 74–92.
12. Чернов А.В. Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Известия вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107.
13. Чернов А.В. О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Известия вузов. Математика. 2012. № 3. С. 62–73.
14. Чернов А.В. О сходимости метода условного градиента в распределенных задачах оптимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 9. С. 1616–1629.
15. Сумин В.И., Чернов А.В. Вольтерровы операторные уравнения в банаховых пространствах: устойчивость существования глобальных решений / ННГУ. Нижний Новгород, 2000. 75 с. Деп. в ВИНИТИ 25.04.2000. № 1198-В00.
16. Сумин В.И., Чернов А.В. О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровых операторных уравнений // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2003. Вып. 1 (26). С. 39–49.
17. Сумин В.И. Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т. 30. № 1. С. 3–21.

18. Сумин В.И. Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1998. Вып. 2 (19). С. 138–151.
19. Сумин В.И., Чернов А.В. Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402–1411.
20. Чернов А.В. О вольтерровом обобщении метода монотонизации для нелинейных функционально-операторных уравнений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 2. С. 84–99.
21. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
22. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: ГИТТЛ, 1953. 280 с.

Поступила в редакцию 25.11.2012

Чернов Андрей Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, Нижегородский государственный технический университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24; Нижегородский государственный университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: chavnn@mail.ru

A. V. Chernov
On controllability of nonlinear distributed systems on a set of discretized controls

Keywords: nonlinear distributed systems, controllability, discretized controls, Volterra functional operator equation.

Mathematical Subject Classifications: 47J05, 47J35, 93B05

For nonlinear distributed systems representable as a Volterra functional operator equation in a Lebesgue space, sufficient conditions for pointwise controllability with respect to a nonlinear functional are proved. The controls are assumed to belong to a given set $\mathcal{D}$ of piecewise constant vector functions id est can be regarded as discretized controls. For the equation under study we define the set Ω of global solvability as the set of all admissible controls for which the equation has a global solution. As an auxiliary result having a separate interest, we also establish under our hypotheses the equality $\Omega = \mathcal{D}$. The reduction of controlled distributed systems to the functional operator equation under study is illustrated by two examples, namely a Dirichlet boundary value problem for a second order parabolic equation and a mixed boundary value problem for a second order hyperbolic equation; both equations of a rather general form.

REFERENCES

1. Vasil'ev F.P. Duality in linear control and observation problems, *Differ. Uravn.*, 1995, vol. 31, pp. 1893–1900.

2. Egorov A.I., Znamenskaya L.N. Two-end controllability of elastic vibrations of systems with distributed and lumped parameters, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2006, vol. 46, no. 11, pp. 1940–1952. Original Russian text publishied in *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2006, vol. 46, no. 11, pp. 2032–2044.

3. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* (Optimization methods), Moscow: Faktorial, 2002, 824 p.

4. Egorov A.I. *Osnovy teorii upravleniya* (Fundamentals of control theory), Moscow: Fizmatlit, 2004, 504 p.

5. Lions J.-L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems, *SIAM Rev.*, 1988, vol. 30, no. 1, pp. 1–68.

6. Fursikov A.V. *Optimal'noe upravleniye raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya* (Optimal control of distributed parameter systems. Theory and applications), Novosibirsk: Nauchnaya kniga, 1999, 352+xii p.

7. Rozanova A.V. Controllability for a nonlinear abstract evolution equation, *Math. Notes*, 2004, vol. 76, no. 4, pp. 511–524. Original Russian text publishied in *Mat. Zametki*, 2004, vol. 76, no. 4, pp. 553–567.

8. Chernov A.V. Sufficient conditions for the controllability of nonlinear distributed systems, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2012, vol. 52, no. 8, pp. 1115–1127. Original Russian text publishied in *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2012, vol. 52, no. 8, pp. 1400–1414. DOI: 10.1134/S0965542512050053.

9. Chernov A.V. On the convexity of global solvability sets for controlled initial-boundary value problems, *Differ. Equations*, 2012, vol. 48, no. 4, pp. 586–595. Original Russian text publishied in *Differ. Uravn.*, 2012, vol. 48, no. 4, pp. 577–586. DOI: 10.1134/S001226611204012X.

10. Chernov A.V. Volterra functional operator games on a given set, *Mat. Teor. Igr Prilozh.*, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 91–117.

11. Chernov A.V. On existence of ε-equilibrium in Volterra functional operator games without discrimination, *Mat. Teor. Igr Prilozh.*, 2012, vol. 4, no. 1, pp. 74–92.

12. Chernov A.V. A majorant criterion for the total preservation of global solvability of controlled functional operator equation, *Russian Mathematics* (*Iz. VUZ*), 2011, vol. 55, no. 3, pp. 85–95. Original Russian text publishied in *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.*, 2011, no. 3, pp. 95–107. DOI: 10.3103/S1066369X11030108.

13. Chernov A.V. A majorant-minorant criterion for the total preservation of global solvability of a functional operator equation, *Russian Mathematics* (*Iz. VUZ*), 2012, vol. 56, no. 3, pp. 55–65. Original Russian text publishied in *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.*, 2012, no. 3, pp. 62–73. DOI: 10.3103/S1066369X12030085.

14. Chernov A.V. On the convergence of the conditional gradient method in distributed optimization problems, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 9, pp. 1510–1523. Original Russian text publishied in *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2011, vol. 51, no. 9, pp. 1616–1629. DOI: 10.1134/S0965542511090077.

15. Sumin V.I., Chernov A.V. Volterra operator equations in Banach spaces: existence stability of global solutions, NNSU, Nizhni Novgorod, 2000, 75 p. Deposited in VINITI 25.04.2000, no. 1198-V00.

16. Sumin V.I., Chernov A.V. On sufficient conditions of existence stability of global solutions of Volterra operator equations, *Vestn. Nizhegorod. Univ. N.I. Lobachevskogo, Mat. Model. Optim. Upr.*, 2003, no. 1 (26), pp. 39–49.

17. Sumin V.I. The features of gradient methods for distributed optimal control problems, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1990, vol. 30, no. 1, pp. 1–15. Original Russian text publishied in *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1990, vol. 30, no. 1, pp. 3–21.

18. Sumin V.I. Controlled functional Volterra equations in Lebesgue spaces, *Vestn. Nizhegorod. Univ. N.I. Lobachevskogo, Mat. Model. Optim. Upr.*, 1998, no. 2 (19), pp. 138–151.

19. Sumin V.I., Chernov A.V. Operators in spaces of measurable functions: the Volterra property and quasinilpotency, *Differ. Equations*, 1998, vol. 34, no. 10, pp. 1403–1411. Original Russian text publishied in *Differ. Uravn.*, 1998, vol. 34, no. 10, pp. 1402–1411.

20. Chernov A.V. On Volterra type generalization of monotonization method for nonlinear functional operator equations, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 2, pp. 84–99.

21. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa* (Linear and quasilinear equations of the parabolic type), Moscow: Nauka, 1967, 736 p.

22. Ladyzhenskaya O.A. *Smeshannaya zadacha dlya giperbolicheskogo uravneniya* (The mixed problem for a hyperbolic equation), Moscow: Gos. Izd. Tekh. Teor. Lit., 1953, 280 p.

Received 25.11.2012

Chernov Andrei Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Nizhni Novgorod State Technical University, ul. Minina, 24, Nizhni Novgorod, 603950, Russia; Nizhni Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: chavnn@mail.ru