УДК 519.6

© *А. Г. Ченцов*

К ВОПРОСУ О МАРШРУТИЗАЦИИ КОМПЛЕКСОВ РАБОТ [1]

Рассматривается усложненный вариант задачи последовательного обхода мегаполисов с ограничениями в виде условий предшествования. Накладываются дополнительные ограничения на характер стыковки фрагментов внешних перемещений и внутренних работ (внешних и внутренних — по отношению к мегаполисам). Предполагается, что стоимости внешних перемещений и внутренних работ явным образом зависят от списка заданий. Построена процедура типа динамического программирования и (на её основе) алгоритм на функциональном уровне.

Ключевые слова: маршрут, динамическое программирование, условия предшествования.

Введение

Ниже используются следующие сокращения: АЭС — атомная электростанция, ЗК — задача коммивояжера, МДП — метод динамического программирования, ОЗМ — основная задача маршрутизации, п/м — подмножество, УП — упорядоченная пара.

Прототипом исследуемой в настоящей работе задачи является хорошо известная ЗК [1–3], которую традиционно относят к труднорешаемым (ЗК — одна из классических NP-полных задач; см. [4]). В [1] отмечен целый ряд постановок, связанных с приложениями, которые в той или иной степени близки к ЗК, но имеют существенные особенности; в этой связи отметим сейчас упомянутые в [1] ЗК с выбором и задачу курьера. В связи с методами решения ЗК отметим широко используемый метод ветвей и границ [5], а также МДП [6, 7]. Целесообразность разработки конструкций на основе МДП связана с построением теории, исследованием структуры решений.

В связи с особенностями задач маршрутизации, возникающих в приложениях, отметим здесь ограничения различных типов; к их числу относятся, в частности, условия предшествования (используемые в задаче курьера; см. [1]). Так, например, в задаче, связанной с резкой деталей при использовании станков с числовым программным управлением для каждой из деталей внутренний контур должен обрабатываться раньше внешнего (характерным примером такой детали может служить шайба); данное условие существенно ограничивает выбор маршрута «посещения» вырезаемых деталей. Условия такого типа возникают в задачах атомной энергетики, связанных со снижением облучаемости работников АЭС при перемещениях в радиационных полях. Особо отметим в этой связи задачу о демонтаже оборудования энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации; см., в частности, [8, 9]. В данной инженерной задаче имеется и ещё одна существенная особенность: исполнитель (или исполнители) в процессе перемещений и выполнения работ (в пределах энергоблока) находятся под воздействием источников радиации, которые не демонтированы на текущий момент. Это приводит (на этапе математической формализации) к постановке, в которой стоимости перемещений и выполняемых последовательно работ зависят от списка заданий. В настоящей работе такая зависимость допускается (это отражено в общей постановке, к которой могут быть сведены и некоторые другие содержательные задачи).

По целому ряду причин, связанных с приложениями, представляет интерес рассмотрение задач маршрутизации с многовариантностью на этапах перемещений в условиях, когда требуется оптимизировать процесс исполнения системы макрозаданий, что во многих случаях можно

[1]Работа выполнена в рамках программ Президиума РАН (проекты 12–П–1–1019, 12–П–1–1012) и при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12–01–00537, 11–01–90432–укр-ф-а).

свести к оптимизационной задаче о последовательном обходе мегаполисов (непустых конечных множеств). Упомянутые постановки содержат зачастую различные особенности, обусловленные существом практических задач. В этих случаях применение методов, ориентированных на ЗК и близкие (к ЗК) постановки, вызывает затруднения не только вычислительного, но и качественного характера (что, впрочем, в ряде случаев оказывается тесно связанным). Упомянутые трудности, связанные с подобной адаптацией, удается тем не менее зачастую преодолевать, конструируя процедуры на основе МДП; в этой связи см., например, [10–19]. Настоящая работа следует данному направлению.

§ 1. Обсуждение задачи

Предметом последующего исследования является экстремальная задача маршрутизации перемещений, выполняемых с целью проведения комплекса работ в пределах заданных мегаполисов. Эти работы будем именовать внутренними, для их выполнения требуется, однако, осуществлять внешние (по отношению к мегаполисам) перемещения. Эти перемещения не всегда могут осуществляться в любую наперед выбранную точку мегаполиса; имеется множество возможных пунктов прибытия, причем это множество может зависеть от предыдущего пункта отправления. Такая ситуация естественна в случае использования управляемых систем для осуществления перемещений.

Целью посещения мегаполисов является выполнение некоторых работ, которые сами могут иметь комплексный характер. Логично рассматривать осуществление этих работ как решение некоторых задач нижнего уровня, стоимости которых нельзя, однако, игнорировать при оценивании совокупного процесса. Мы допускаем здесь наличие определенной иерархии; при этом на верхнем уровне имеем макрозадачу, связанную с организацией внешних перемещений. Эта макрозадача (в дальнейшем ОЗМ) должна обеспечиваться целевыми функциями, характеризующими качество выполнения внутренних работ и определяемыми при решении задач нижнего уровня. В дальнейшем используется только аддитивный способ агрегирования затрат, а тогда нужные, для решения задачи верхнего уровня, функции стоимости внутренних работ можно определить в виде системы экстремумов задач нижнего уровня, зависящих от параметров в виде пунктов прибытия и отправления для каждого отдельно взятого мегаполиса. Для некоторых типов внутренних работ упомянутые функции стоимости определяются непосредственно. Сами внутренние работы могут быть при этом весьма разнородными, «простыми» для одних мегаполисов и «сложными» для других.

Осуществление внутренних работ может быть связано с той или иной системой перемещений от пункта прибытия к пункту отправления; на этом этапе также могут возникать ограничения. Мы будем допускать возможность того, что при заданном пункте прибытия не всякий «город» мегаполиса может использоваться в качестве пункта отправления (могут быть те или иные препятствия, запреты на внутренние перемещения и т.п.). В этой связи среди всевозможных УП «пункт прибытия» - «пункт отправления» мы выделяем допустимые. Так, например, в задаче о маршрутизации резки деталей (при естественной её формализации) эти два пункта должны совпадать — деталь должна быть вырезана.

Мы будем рассматривать в общем случае ситуацию, когда стоимости внешних перемещений и внутренних работ могут зависеть от списка заданий, которые не выполнены на текущий момент времени. Такая особенность присутствует в постановке инженерной задачи о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации: «светят» те и только те фрагменты оборудования, которые на данный момент не демонтированы. В данной весьма актуальной прикладной задаче имеется целый ряд ограничений, связанных с условиями предшествования. Так, например, одни излучающие объекты могут размещаться на других, образуя второй ярус; при демонтаже «верхние» объекты следует демонтировать раньше нижних. Полезно отметить и то обстоятельство (см. [19, раздел 6]), что стоимости, зависящие от списка заданий, могут возникать и в некоторых других содержательных задачах. Более того, вводя упомянутую зависимость в математическую постановку, мы получаем некоторый класс маршрутных задач, «объединяющий» весьма разнообразные конкретные случаи общей теорией. Эту цель мы преследуем и в настоящей работе, рассматривая в дальнейшем очень общий вариант маршрутной задачи с ограничениями, для которой будет построена схема решения на основе широко понимаемого МДП.

§ 2. Общие понятия и обозначения

Используем обычную теоретико-множественную символику (кванторы, пропозициональные связки и др.); $\triangleq$ — равенство по определению, $\varnothing$ — пустое множество, выражение def заменяет фразу «по определению». Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Если x и y — объекты, то $\{x;y\}$ есть def множество, содержащее (в качестве своих элементов) $x,\ y$ и не содержащее никаких других элементов. Для всякого объекта z в виде$\{z\} \triangleq \{z;z\}$ имеем одноэлементное множество, содержащее z. Кроме того, для любых двух объектов p и q имеем [20, с. 67] в виде $(p,q) \triangleq \big\{\{p\};\{p;q\}\big\}$ УП с первым элементом p и вторым элементом q. Следуем соглашению: если z есть УП, то объекты $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ есть def первый и второй элементы z, для которых $z = \big(\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)\big)$; в случае $z \in A \times B$, где A и B множества, имеем, конечно, $\mathrm{pr}_1(z) \in A$ и $\mathrm{pr}_2(z) \in B$. Для всяких трёх объектов $a,\ b$ и c, как обычно [21, с. 17], полагаем $(a,b,c) \triangleq \big((a,b),c\big)$; кроме того, для любых трёх множеств A, B и C полагаем, следуя [21, с. 17], что $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$. Эти традиционные соглашения существенны в последующих определениях основной части работы. Заметим, кстати, что для любых трех множеств $A,\ B$ и C имеем в случае $x \in A \times B$ и $y \in C$ свойство $(x,y) \in A \times B \times C$, неоднократно используемое в дальнейшем. При использовании функций нескольких переменных применяем обычные правила экономии скобок. Так, если A, B, C — множества, D есть п/м $A \times B$, $s : D \to C,\ a \in A, b \in B$ и $z \triangleq (a,b) \in D$, то наряду с $s(z)$ используем обозначение $s(a,b)$, полагая $s(a,b) \triangleq s(z)$. Если A, B, C и D — множества,

$$h : A \times B \times C \longrightarrow D,$$

$a \in A,\ b \in B$ и $c \in C$, то $h(a,b,c) \triangleq h(z)$, где $z \triangleq (a,b,c)$; если же $\mu \in A \times B$ и $\nu \in C$, то в соответствии с вышеупомянутым соглашением о представлении множества $A \times B \times C$ определён элемент $h(\mu,\nu) \in D$, так как $(\mu,\nu) \in A \times B \times C$.

В дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $[0,\infty[\triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \xi\}$, $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\}$ и $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0;1;2;\ldots\}$;

$$\overline{k,l} \triangleq \{t \in \mathbb{N}_0 |\, (k \leqslant t) \& (t \leqslant l)\} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall\, l \in \mathbb{N}_0$$

(допускается реализация $\varnothing$). Если S — непустое множество, то через $\mathcal{R}_+[S]$ обозначаем множество всех функций, действующих из S в полупрямую $[0,\infty[$. В дальнейшем широко используется индексная форма записи отображений (см. [22]).

Если H — множество, то $\mathcal{P}(H)$ есть def семейство всех п/м H, $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$, а $\mathrm{Fin}(H)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$ ($\mathrm{Fin}(H)$ — семейство всех непустых конечных п/м H). Каждому непустому конечному множеству K сопоставляем его мощность $|K| \in \mathbb{N}$ и (непустое) множество $(\mathrm{bi})[K]$ всех биекций [23, с. 87] «отрезка» $\overline{1,|K|}$ на множество K. Как следствие, имеем, если S — множество и $K \in \mathrm{Fin}(S)$, что $|K| \in \mathbb{N}$ и $(\mathrm{bi})[K] \neq \varnothing$. Пусть $|\varnothing| \triangleq 0$. Перестановкой непустого множества A называется [23, с. 87] всякая биекция A на себя; если α — перестановка A, то определена перестановка α^{-1} множества A, обратная к $\alpha:\ \alpha\big(\alpha^{-1}(a)\big) = \alpha^{-1}\big(\alpha(a)\big) = a\ \ \forall\, a \in A$.

§ 3. Маршруты и трассы

В настоящем разделе вводится система специальных обозначений, используемых на этапе постановки задачи последовательного обхода мегаполисов, именуемой далее ОЗМ.

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество X, точку $x^0 \in X$, число $N \in \mathbb{N}$, для которого $2 \leqslant N$, а также множества

$$M_1 \in \mathrm{Fin}(X), \quad \ldots, \quad M_N \in \mathrm{Fin}(X), \tag{3.1}$$

именуемые ниже мегаполисами; далее предполагается, что

$$\big(\, M_p \cap M_q = \varnothing \;\; \forall\, p \in \overline{1,N}\; \forall\, q \in \overline{1,N} \setminus \{p\}\,\big) \;\;\&\;\; \big(x^0 \notin M_j \;\forall\, j \in \overline{1,N}\big).$$

Наряду с (3.1) фиксируем далее отношения [20]

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \ldots, \mathbb{M}_N \in \mathcal{P}'(M_N \times M_N); \tag{3.2}$$

полагаем, что при $j \in \overline{1,N}$ УП $z \in \mathbb{M}_j$ определяют всякий раз допустимые пары вход-выход, которые только и могут использоваться при обслуживании мегаполиса M_j ($\mathrm{pr}_1(z) \in M_j$ — вход или пункт прибытия, а $\mathrm{pr}_2(z) \in M_j$ — выход или пункт отправления). Точка x^0 является базой процесса

$$x^0 \longrightarrow (z_1 \in \mathbb{M}_{\alpha(1)}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow (z_N \in \mathbb{M}_{\alpha(N)}), \tag{3.3}$$

где α — перестановка $\overline{1,N}$. Разумеется, (3.3) характеризует внешние перемещения. Здесь выбор α и кортежа $(z_i)_{i\in\overline{1,N}}$ находится в распоряжении исследователя, причем на выбор α могут накладываться дополнительные ограничения (условия предшествования).

Замечание 3.1. Отметим два частных случая (3.2): 1) $\mathbb{M} = M_j \times M_j \;\forall\, j \in \overline{1,N}$; 2) $\mathbb{M}_j = \{(x,x):\; x \in M_j\} \;\forall\, j \in \overline{1,N}$. В случае 1) пункты прибытия и отправления могут всякий раз выбираться независимо, а в случае 2) они должны (всякий раз) совпадать. Возможен «смешанный» вариант, когда часть отношений в (3.2) соответствует 1), а другая часть — диагональной конструкции 2).

В последующих построениях существенно используются проекции отношений (3.2) на «вторую координату»: полагаем, что

$$\mathbf{M}_t \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_2(z):\; z \in \mathbb{M}_t\} \;\;\forall\, t \in \overline{1,N}. \tag{3.4}$$

Разумеется, $\mathbf{M}_j \in \mathrm{Fin}(M_j)\;\forall\, j \in \overline{1,N}$, а объединение всех множеств $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_N$ также конечно. При этом

$$\mathbb{X} \stackrel{\triangle}{=} \{x^0\} \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{N} M_i\Big) \in \mathrm{Fin}(X), \tag{3.5}$$

$$\mathbf{X} \stackrel{\triangle}{=} \{x^0\} \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i\Big) \in \mathrm{Fin}(\mathbb{X}). \tag{3.6}$$

Фиксируем следующий конечный набор отображений (мультифункций)

$$A_1:\; \mathbf{X} \longrightarrow \mathcal{P}'(M_1), \quad \ldots, \quad A_N:\; \mathbf{X} \longrightarrow \mathcal{P}'(M_N). \tag{3.7}$$

Полагаем, что при $j \in \overline{1,N}$ и $x \in \mathbf{X}$ множество $A_j(x) \in \mathcal{P}'(M_j)$ исчерпывает возможности исполнителя в части перемещения из x на M_j : точки из $A_j(x)$ и только они достижимы из x (не исключаем здесь случай $x \in M_j$; однако с точки зрения последующих построений он будет несущественным). Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$\forall\, j \in \overline{1,N}\; \forall\, x \in \mathbf{X}\; \exists\, z \in \mathbb{M}_j:\; \mathrm{pr}_1(z) \in A_j(x). \tag{3.8}$$

Итак (см. (3.8)), постулируется возможность перемещения «извне» в те точки мегаполиса, из которых возможно осуществление внутренних перемещений (при выполнении работ) с завершением в некоторой точке выхода. В этой связи введем отображения

$$\mathbb{A}_1:\; \mathbf{X} \longrightarrow \mathcal{P}'(\mathbb{M}_1), \quad \ldots, \quad \mathbb{A}_N:\; \mathbf{X} \longrightarrow \mathcal{P}'(\mathbb{M}_N) \tag{3.9}$$

посредством следующих правил (см. (3.8)):

$$\mathbb{A}_j(x) \stackrel{\triangle}{=} \{z \in \mathbb{M}_j \mid \mathrm{pr}_1(z) \in A_j(x)\} \ \ \forall j \in \overline{1,N}\ \forall x \in \mathbf{X}. \tag{3.10}$$

Разумеется, операторы (3.9),(3.10) могут рассматриваться как некоторые модификации (3.7). Если же рассматривать УП из отношений (3.2) как крайние пункты «туннелей» вход-выход, то операторы (3.9) определяют возможности исполнителя в части достижения этих «туннелей».

Условия предшествования. Пусть $\mathbb{P} \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$ ($\mathbb{P}$ — множество всех перестановок множества $\overline{1,N}$); тогда (см. раздел 2) $\forall \alpha \in \mathbb{P}$

$$\alpha^{-1} \in \mathbb{P}:\ \alpha\left(\alpha^{-1}(k)\right) = \alpha^{-1}(\alpha(k)) = k\ \ \forall k \in \overline{1,N}.$$

Фиксируем множество $\mathbf{K} \in \mathcal{P}\left(\overline{1,N} \times \overline{1,N}\right)$; элементы $\mathbf{K}$ — УП индексов, такие УП (элементы $\mathbf{K}$) называем адресными. Для каждой адресной УП рассматриваем её первый элемент в качестве отправителя (сообщения, груза), а второй — в качестве получателя; посещение отправителя должно происходить раньше, чем посещение получателя. Всюду в дальнейшем предполагается,что

$$\forall\,\mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K})\ \exists z_0 \in \mathbf{K}_0:\ \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \forall\, z \in \mathbf{K}_0. \tag{3.11}$$

В [11, часть 2] приведены конкретные классы маршрутных задач, удовлетворяющие (3.11). При этом

$$\mathbf{A} \stackrel{\triangle}{=} \left\{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z))\ \forall\, z \in \mathbf{K}\right\} \tag{3.12}$$

есть множество всех $\mathbf{K}$-допустимых перестановок из $\mathbb{P}$, именуемых ниже допустимыми маршрутами: (3.12) есть множество всех маршрутов $\alpha \in \mathbb{P}$ таких, что для всякой адресной пары посещение отправителя (в очередности α) предшествует посещению получателя. Из (3.11) следует, в частности, что

$$\mathrm{pr}_1(z) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \ \forall\, z \in \mathbf{K}. \tag{3.13}$$

Отметим, что, как установлено в [11, часть 2],

$$\mathbf{A} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}). \tag{3.14}$$

Итак, допустимые по предшествованию маршруты существуют.

Частичные маршруты. Рассмотрим некоторое естественное «расширение» конструкции на основе (3.12), привлекая построения [11, часть 2]. Для этого, следуя [11, (2.2.27), (2.2.28)], введем оператор $\mathbf{I}:\ \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{N}$, где (здесь и ниже) $\mathfrak{N} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}'(\overline{1,N})$: если $K \in \mathfrak{N}$, то

$$\mathbf{I}(K) \stackrel{\triangle}{=} K \setminus \{\mathrm{pr}_2(z):\ z \in \Xi[K]\}, \tag{3.15}$$

где $\Xi[K] \stackrel{\triangle}{=} \{z \in \mathbf{K} \mid (\mathrm{pr}_1(z) \in K)\ \&\ (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}$. Конструкция (3.15) широко использовалась при решении задач маршрутизации с ограничениями.

Замечание 3.2. Если $t \in \overline{1,N}$, то $\{t\} \in \mathfrak{N}$ обладает свойством $\mathbf{I}(\{t\}) = \{t\}$. В самом деле, при $z \in \Xi[\{t\}]$ имеем, что $z \in \mathbf{K}$, причем $\mathrm{pr}_1(z) = t$ и $\mathrm{pr}_2(z) = t$, откуда $\mathrm{pr}_1(z) = \mathrm{pr}_2(z)$. Получили противоречие с (3.13), которое означает, что на самом деле $\Xi[\{t\}] = \varnothing$, а тогда согласно (3.15) $\mathbf{I}(\{t\}) = \{t\}$, что и требовалось доказать.

Если $K \in \mathfrak{N}$, то согласно [11, (2.2.54)] определено множество

$$(\mathbf{I}-\mathrm{bi})[K] \stackrel{\triangle}{=} \left\{\alpha \in (\mathrm{bi})[K] \mid \alpha(m) \in \mathbf{I}\left(\{\alpha(i):\ i \in \overline{m,|K|}\}\right)\ \forall\, m \in \overline{1,|K|}\right\} \in \mathcal{P}'((\mathrm{bi})[K]). \tag{3.16}$$

Систему множеств (3.16) при переборе $K \in \mathfrak{N}$ рассматриваем в качестве «расширения» $\mathbf{A}$ (3.12), поскольку [11, (2.2.32), теорема 2.2.1]

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I}-\mathrm{bi})[\overline{1,N}]. \tag{3.17}$$

Элементы множества (3.16) называем с учетом (3.15) маршрутами, допустимыми по вычеркиванию; (3.17) определяет стыкуемость двух вариантов допустимости.

Трассы. Всюду в дальнейшем для каждого $K \in \mathfrak{N}$ обозначаем через $\mathbb{Z}_K$ множество всех кортежей

$$(z_i)_{i \in \overline{0,|K|}} : \ \overline{0,|K|} \longrightarrow \mathbb{X} \times \mathbb{X}.$$

Для краткости полагаем также, что $\mathbb{Z} \overset{\triangle}{=} \mathbb{Z}_{\overline{1,N}}$ (элементы $\mathbb{Z}$ — кортежи, определенные на $\overline{0,N}$).

Если $\alpha \in \mathbb{P}$, то через $\mathcal{Z}_\alpha$ обозначаем множество всех таких кортежей $(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathbb{Z}$, что

$$\big(z_0 = (x^0, x^0)\big) \ \& \ \big(z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \ \forall\, t \in \overline{1,N}\big) \ \& \ \big(\mathrm{pr}_1(z_s) \in A_{\alpha(s)}(\mathrm{pr}_2(z_{s-1})) \ \forall\, s \in \overline{1,N}\big)\,; \qquad (3.18)$$

(3.18) соответствует в идейном отношении схеме (3.3) с теми дополнительными условиями, которые обусловлены возможностью достижимости мегаполисов «извне», определяемыми в терминах (3.7). Для нас существенны множества $\mathcal{Z}_\alpha$, $\alpha \in \mathbf{A}$, отвечающие наборам трасс (3.18) для допустимых по предшествованию маршрутов. Эти множества будут использоваться в постановке ОЗМ.

Имеет смысл ввести в рассмотрение также частичные или укороченные трассы, отвечающие посещению не всех, вообще говоря, мегаполисов: если $x \in \mathbf{X}$, $K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$, то через $\mathcal{Z}(x, K, \alpha)$ обозначаем множество всех кортежей $(z_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \mathbb{Z}_K$, для каждого из которых

$$(z_0 = (x, x)) \ \& \ \Big(z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \ \forall\, t \in \overline{1,|K|}\Big) \ \& \ \Big(\mathrm{pr}_1(z_s) \in A_{\alpha(s)}(\mathrm{pr}_2(z_{s-1})) \ \forall\, s \in \overline{1,|K|}\Big)\,. \qquad (3.19)$$

В частности, отметим следующее «стыковочное» свойство:

$$\mathcal{Z}_\alpha = \mathcal{Z}\left(x^0, \overline{1,N}, \alpha\right) \ \forall\, \alpha \in \mathbb{P}. \qquad (3.20)$$

Пусть $\mathfrak{N}_s \overset{\triangle}{=} \{K \in \mathfrak{N} \mid s = |K|\} \quad \forall\, s \in \overline{1,N}$. Введены множества списков заданий заданной мощности (непустые п/м $\overline{1,N}$ рассматриваем как списки заданий).

Предложение 3.1. *Справедливо свойство* $\mathcal{Z}(x, K, \alpha) \neq \varnothing \ \ \forall\, x \in \mathbf{X}\ \forall\, K \in \mathfrak{N}\ \forall\, \alpha \in (\mathrm{bi})[K]$.

Замечание 3.3. Фиксируя $x \in \mathbf{X}$, из (3.19) непосредственно извлекается свойство

$$\mathcal{Z}(x, K, \alpha) \neq \varnothing \ \ \forall\, K \in \mathfrak{N}_1\ \forall\, \alpha \in (\mathrm{bi})[K].$$

Дальнейшее рассуждение использует индукцию; при этом следует учитывать (3.8), (3.10).

Из (3.20) и предложения 3.1 имеем, что $\mathcal{Z}_\alpha \neq \varnothing\ \forall\, \alpha \in \mathbb{P}$. Как следствие получаем, что

$$(\mathcal{Z}(x, K, \alpha) \in \mathrm{Fin}(\mathbb{Z}_K)\ \forall\, x \in \mathbf{X}\ \forall\, K \in \mathfrak{N}\ \forall\, \alpha \in (\mathrm{bi})[K]) \ \& \ (\mathcal{Z}_\alpha \in \mathrm{Fin}(\mathbb{Z})\ \forall\, \alpha \in \mathbb{P}). \qquad (3.21)$$

Свойства (3.21) используются ниже без дополнительных пояснений. Учитываем также (3.14) и (3.16).

§ 4. Постановка основной задачи и её расширение

В настоящем разделе вводятся сначала функции стоимости, которые затем посредством аддитивного варианта агрегирования порождают критерий ОЗМ (в связи с обозначениями для значений функций стоимости полезно учитывать соглашения раздела 2). Для данной задачи (для ОЗМ) конструируется система частичных или укороченных задач, рассматриваемая как расширение самой ОЗМ. При построении данного расширения используется редукция ограничений с использованием оператора $\mathbf{I}$ и построений раздела 3.

Фиксируем в дальнейшем функции $\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}]$, $f \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X}]$, а также

$$c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}], \quad \ldots, \quad c_N \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}], \qquad (4.1)$$

получая в виде $(\mathbf{c}, f, c_1, \ldots, c_N)$ систему используемых далее функций стоимости. Данные функции полагаем в методических целях «максимально продолженными», имея, однако, в виду, что $\mathbf{c}$ будет (в содержательных построениях) использоваться для оценивания внешних перемещений, f — для оценивания терминальных состояний, а $c_1, \ldots, c_N$ (см. (4.1)) — для работ, выполняемых при посещении мегаполисов. Отметим, что в конкретных задачах построение существенных для дальнейшего фрагментов упомянутых функций (имеются в виду сужения данных функций, которые достаточны для построения аддитивного критерия) может составлять отдельную и достаточно трудную задачу; так, в частности, обстоит дело в задаче о демонтаже энергоблока АЭС (см. раздел 1), где речь идет о перемещении в радиационных полях. Продолжение же нужных зависимостей (фрагментов) до отображений на $\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}$ и $\mathbb{X}$ (в случае построения f), напротив, каких-либо затруднений не представляет и мы не будем на этом останавливаться, имея в виду в настоящей работе исследование вопросов качественного характера.

Итак, в дальнейших построениях значения функций $\mathbf{c}$, f, $c_1, \ldots, c_N$ будут суммироваться, что вполне соответствует процессам во многих реальных задачах; в частности, такая модель естественна для задач атомной энергетики, связанных с проблемой снижения облучаемости работников АЭС. Полагаем при $\alpha \in \mathbb{P}$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathbb{Z}$, что

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \triangleq \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_t), \mathrm{pr}_1(z_{t+1}), \{\alpha(j) :\ j \in \overline{t+1, N}\})+ \\ + \sum_{t=1}^{N} c_{\alpha(t)}(z_t, \{\alpha(j) :\ j \in \overline{t, N}\}) + f(\mathrm{pr}_2(z_N)).\end{aligned} \tag{4.2}$$

Выражение (4.2) содержательно при $\alpha \in \mathbf{A}$ (см. (3.14)) и $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha$. С учетом этого ОЗМ определяем в виде

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \longrightarrow \min,\ \ \alpha \in \mathbf{A},\ (z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha. \tag{4.3}$$

С учетом (3.14), (3.21) и (4.2) получаем, что ограничения ОЗМ совместны, а

$$V \triangleq \min_{\alpha\in\mathbf{A}} \min_{(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in\mathcal{Z}_\alpha} \mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \in [0, \infty[\tag{4.4}$$

есть значение ОЗМ (глобальный экстремум). Оптимальные решения ОЗМ (4.3) существуют и определяются в виде УП $\left(\alpha^0, (z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}\right)$, $\alpha^0 \in \mathbf{A}$, $(z_i^0)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha^0}$, для которых $\mathfrak{C}_{\alpha^0}\left[(z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}\right] = V$. Мы ставим своей целью определение V (4.4) и какого-либо из оптимальных решений.

Расширение ОЗМ. Рассмотрим систему задач, связанную с ОЗМ и являющуюся по смыслу её естественным расширением; будем при этом использовать (3.17), (3.20). Введем «укороченный вариант» аддитивного критерия ОЗМ, полагая при $K \in \mathfrak{N}$, $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$ и $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_K$, что

$$\begin{aligned}\hat{\mathfrak{C}}_\alpha[\mathbf{z}|K] \triangleq \sum_{t=0}^{|K|-1} \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(t)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(t+1)), \{\alpha(j) :\ j \in \overline{t+1, |K|}\})+ \\ + \sum_{t=1}^{|K|} c_{\alpha(t)}(\mathbf{z}(t), \{\alpha(j) :\ j \in \overline{t, |K|}\}) + f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(|K|))).\end{aligned} \tag{4.5}$$

В частности, (4.5) определяется в случае, когда $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha)$, где $x \in \mathbf{X}$. С учетом этого введем в рассмотрение «укороченные» (вообще говоря) задачи. Итак, при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ рассматриваем задачу

$$\hat{\mathfrak{C}}_\alpha[\mathbf{z}|K] \longrightarrow \min,\ \alpha \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K],\ \mathbf{z} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha) \tag{4.6}$$

(см. (3.16), (3.21)); данной задаче сопоставляется значение (экстремум)

$$v(x, K) \triangleq \min_{\alpha\in(\mathbf{I}-\mathrm{bi})[K]} \min_{\mathbf{z}\in\mathcal{Z}(x,K,\alpha)} \hat{\mathfrak{C}}_\alpha[\mathbf{z}|K] \in [0, \infty[\tag{4.7}$$

и непустое множество оптимальных решений, определяемых каждое в виде УП «маршрут–трасса». В частности, (4.7) определено при $x = x^0$ и $K = \overline{1, N}$. В этой связи отметим, что согласно (4.2) и (4.5)

$$\hat{\mathfrak{C}}_\alpha[\mathbf{z}|\overline{1, N}] = \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] \quad \forall \alpha \in \mathbf{A}\ \forall \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha. \tag{4.8}$$

В свою очередь, из (4.4), (4.7) и (4.8) вытекает очевидное равенство

$$V = v\left(x^0, \overline{1, N}\right). \tag{4.9}$$

Условимся также о следующем естественном соглашении:

$$v(x, \varnothing) \stackrel{\triangle}{=} f(x) \ \ \forall x \in \mathbf{X}. \tag{4.10}$$

Посредством (4.7) и (4.10) определена функция

$$v:\ \mathbf{X} \times \mathbf{N} \longrightarrow [0, \infty[, \tag{4.11}$$

где (здесь и ниже) $\mathbf{N} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}(\overline{1, N})$: значения функции v (4.11) извлекаются из (4.7) и (4.10), поскольку $\mathbf{N} = \mathfrak{N} \cup \{\varnothing\}$. Равенство (4.9) позволяет рассматривать систему задач (4.6) как расширение ОЗМ.

§ 5. Динамическое программирование

Настоящий раздел посвящен выводу уравнения Беллмана, отвечающего идее расширения ОЗМ на основе (4.6), (4.9). Учитываем при этом (3.17), (3.20) и будем использовать операторы (3.9), (3.10); заметим, что в силу (3.8) и (3.10)

$$\mathbb{A}_j(x) \in \mathcal{P}'(\mathbb{M}_j) \ \ \forall j \in \overline{1, N}\ \forall x \in \mathbf{X}. \tag{5.1}$$

Итак, посредством (3.10) определены (см. (5.1)) непустые множества УП. Возвращаясь к (3.18), отметим следующее свойство: если $x \in \mathbf{X}$, $K \in \mathfrak{N}$, $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$, $(z_i)_{i \in \overline{0, |K|}} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha)$ и $t \in \overline{1, |K|}$, то $\mathrm{pr}_2(z_t) \in \mathbf{M}_{\alpha(t)}$. В частности, это имеет место при $\alpha \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]$. Напомним, что вообще $\mathrm{pr}_2(z) \in \mathbf{M}_t\ \forall t \in \overline{1, N}\ \forall z \in \mathbb{M}_t$. С учетом (3.6), (3.10) и (4.11) это позволяет определять $v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in [0, \infty[$ при $x \in \mathbf{X}$, $K \in \mathfrak{N}$, $j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in \mathbb{A}_j(x)$; см. в этой связи (5.1).

Теорема 5.1. *Если $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$, то справедливо равенство*

$$v(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x)} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})]. \tag{5.2}$$

Доказательство. Через ω обозначим правую часть (5.2); пусть $n \stackrel{\triangle}{=} |K|$. Тогда $(n = 1) \vee (n \in \overline{2, N})$. Два упомянутых случая рассмотрим отдельно.

1) Пусть $n = 1$. Тогда $K = \{\mathbf{r}\}$, где $\mathbf{r} \in \overline{1, N}$; при этом $(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] = \{\mathbf{a}\}$, где $\mathbf{a}:\ \{1\} \longrightarrow K$ таково, что $\mathbf{a}(1) = \mathbf{r}$. Из определений легко следует, что

$$v(x, K) = \min_{z \in \mathbb{A}_{\mathbf{r}}(x)} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), \{\mathbf{r}\}) + c_{\mathbf{r}}(z, \{\mathbf{r}\}) + f(\mathrm{pr}_2(z))].$$

С учетом (4.10) получаем, что $v(x, K) = \omega$ при $n = 1$.

2) Пусть $n \in \overline{2, N}$. Тогда $n - 1 \in \overline{1, N - 1}$ и при $j \in K \quad K \setminus \{j\} \in \mathfrak{N}_{n-1}$. С учетом (4.7) подберем маршрут $\alpha^0 \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]$ и трассу $\left(z_t^0\right)_{t \in \overline{0, n}} \in \mathcal{Z}\left(x, K, \alpha^0\right)$ так, что

$$\hat{\mathfrak{C}}_{\alpha^0}\left[\left(z_t^0\right)_{t \in \overline{0, n}} | K\right] = v(x, K). \tag{5.3}$$

При $\mathbb{K} \stackrel{\triangle}{=} K \setminus \{\alpha^0(1)\}$ имеем, что $\mathbb{K} \in \mathfrak{N}_{n-1}$ и $z_1^0 \in \mathbb{A}_{\alpha^0(1)}(x)$, где $\alpha^0(1) \in \mathbf{I}(K)$ (см. (3.16)). В итоге

$$\omega \leqslant \mathbf{c}\left(x, \mathrm{pr}_1\left(z_1^0\right), K\right) + c_{\alpha^0(1)}\left(z_1^0, K\right) + v\left(\mathrm{pr}_2\left(z_1^0\right), \mathbb{K}\right). \tag{5.4}$$

Легко видеть, что $\alpha_0 \triangleq (\alpha^0(i+1))_{i\in\overline{1,n-1}} \in (\mathbf{I}-\mathrm{bi})[\mathbb{K}]$. Кроме того, $z^0_{t+1} \in \mathbb{M}_{\alpha_0(t)}$ при $t \in \overline{1,n-1}$. С учетом этого введем

$$(z^\natural_t)_{t\in\overline{0,n-1}} : \overline{0,n-1} \longrightarrow \mathbb{X}\times\mathbb{X}$$

по правилу

$$\left(z^\natural_0 \triangleq \left(\mathrm{pr}_2\left(z^0_1\right), \mathrm{pr}_2\left(z^0_1\right)\right)\right) \& \left(z^\natural_t \triangleq z^0_{t+1}\ \forall\, t\in\overline{1,n-1}\right).$$

Тогда $\left(z^\natural_t\right)_{t\in\overline{0,n-1}} \in \mathcal{Z}\left(\mathrm{pr}_2\left(z^0_1\right), \mathbb{K}, \alpha_0\right)$, а потому (см. (5.1))

$$v\left(\mathrm{pr}_2\left(z^0_1\right), \mathbb{K}\right) \leqslant \hat{\mathfrak{C}}_{\alpha_0}\left[(z^\natural_t)_{t\in\overline{0,n-1}}|\mathbb{K}\right], \tag{5.5}$$

откуда извлекается следующая оценка

$$\begin{aligned} v\left(\mathrm{pr}_2\left(z^0_1\right), \mathbb{K}\right) \leqslant \sum_{t=1}^{n-1} \mathbf{c}\left(\mathrm{pr}_2\left(z^0_t\right), \mathrm{pr}_1\left(z^0_{t+1}\right), \{\alpha^0(j):\ j\in\overline{t+1,n}\}\right) + \\ + \sum_{t=2}^{n} c_{\alpha^0(t)}\left(z^0_t, \{\alpha^0(j):\ j\in\overline{t,n}\}\right) + f\left(\mathrm{pr}_2\left(z^0_n\right)\right). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Из (4.5), (5.3), (5.4) и (5.6) вытекает неравенство $\omega \leqslant v(x,K)$.

Для проверки противоположного неравенства выберем и зафиксируем $q \in \mathbf{I}(K)$ и $\mathbf{u} \in \mathbb{A}_q(x)$, для которых при $Q \triangleq K \setminus \{q\}$

$$\omega = \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{u}), K) + c_q(\mathbf{u}, K) + v(\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}), Q). \tag{5.7}$$

Тогда $Q \in \mathfrak{N}_{n-1}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{M}_q$ и $\mathrm{pr}_1(\mathbf{u}) \in A_q(x)$. При этом $\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}) \in \mathbf{M}_q$ и, в частности, $\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}) \in \mathbf{X}$, а тогда в силу (4.7)

$$v(\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}), Q) = \min_{\alpha\in(\mathbf{I}-\mathrm{bi})[Q]}\ \min_{\mathbf{z}\in\mathcal{Z}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}),Q,\alpha)} \hat{\mathfrak{C}}_\alpha[\mathbf{z}|Q]. \tag{5.8}$$

С учетом (5.8) выберем маршрут $\beta_0 \in (\mathbf{I}-\mathrm{bi})[Q]$ и трассу $(w_i)_{i\in\overline{0,n-1}} \in \mathcal{Z}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}), Q, \beta_0)$, для которых

$$v(\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}), Q) = \hat{\mathfrak{C}}_{\beta_0}[(w_i)_{i\in\overline{0,n-1}}|Q]. \tag{5.9}$$

Тогда, в частности, получаем, что

$$\begin{aligned} (w_0 = (\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}), (\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}))) \ \&\ (w_t \in \mathbb{M}_{\beta_0(t)}\ \forall\, t\in\overline{1,n-1})\ \& \\ \&(\mathrm{pr}_1(w_s) \in A_{\beta_0(s)}(\mathrm{pr}_2(w_{s-1}))\ \forall\, s\in\overline{1,n-1}). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Кроме того, определены индексы $\beta_0(t-1) \in K\ \forall\, t\in\overline{2,n}$. С учетом этого конструируем отображение

$$\beta^0 :\ \overline{1,n} \longrightarrow K \tag{5.11}$$

по следующему правилу: $\left(\beta^0(1) \triangleq q\right)\ \&\ \left(\beta^0(t) \triangleq \beta_0(t-1)\ \forall\, t\in\overline{2,n}\right)$. Легко видеть, что

$$\beta^0 \in (\mathbf{I}-\mathrm{bi})[K]. \tag{5.12}$$

Заметим, что $w_{t-1} \in \mathbb{X}\times\mathbb{X}$ при $t\in\overline{2,n}$. Введем в рассмотрение вспомогательный кортеж

$$(\tilde{w}_t)_{t\in\overline{1,n}} :\ \overline{1,n} \longrightarrow \mathbb{X}\times\mathbb{X}, \tag{5.13}$$

полагая, что $\left(\tilde{w}_1 \triangleq \mathbf{u}\right)\ \&\ \left(\tilde{w}_t \triangleq w_{t-1}\ \forall\, t\in\overline{2,n}\right)$. Легко видеть, что $\tilde{w}_t \in \mathbb{M}_{\beta^0(t)}\ \forall\, t \in \overline{1,n}$. Наконец,

$$\mathrm{pr}_1(\tilde{w}_t) \in A_{\beta^0(t)}(\mathrm{pr}_2(\tilde{w}_{t-1}))\ \forall\, t\in\overline{2,n}.$$

Дополним кортеж (5.13) начальной УП, полагая, что $(\hat{w}_t)_{t\in\overline{0,n}} \in \mathbb{Z}_K$ определяется правилами $\Big(\hat{w}_0 \triangleq (x,x)\Big)$ & $\Big(\hat{w}_t \triangleq \tilde{w}_t \ \forall\, t \in \overline{1,n}\Big)$. В итоге $(\hat{w}_t)_{t\in\overline{0,n}} \in \mathcal{Z}(x,K,\beta^0)$, а потому имеем оценку

$$v(x,K) \leqslant \hat{\mathfrak{C}}_{\beta^0}[(\hat{w}_t)_{t\in\overline{0,n}}|K]; \tag{5.14}$$

раскрывая правую часть (5.14), приходим к неравенству

$$v(x,K) \leqslant \mathbf{c}(x,\mathrm{pr}_1(\mathbf{u}),K) + c_q(\mathbf{u},K) + \sum_{t=0}^{n-2} \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(w_t),\mathrm{pr}_1(w_{t+1}),\{\beta_0(j):\ j\in\overline{t+1,n-1}\}) +$$
$$+\sum_{t=1}^{n-1} c_{\beta_0(t)}(w_t,\{\beta_0(j):\ j\in\overline{t,n-1}\}) + f(\mathrm{pr}_2(w_{n-1})).$$

Используя (5.9), получаем, в свою очередь, что $v(x,K) \leqslant \mathbf{c}(x,\mathrm{pr}_1(\mathbf{u}),K)+c_q(\mathbf{u},K)+v(\mathrm{pr}_2(\mathbf{u}),Q)$. С учетом (5.7) получаем, что $v(x,K) \leqslant \omega$, чем и завершается проверка равенства $v(x,K)=\omega$ при $n\in\overline{2,N}$. □

Следствие 5.1. *Справедливо равенство*

$$V = \min_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{z\in\mathbb{A}_j(x^0)} \left[\mathbf{c}\left(x^0,\mathrm{pr}_1(z),\overline{1,N}\right) + c_j(z,\overline{1,N}) + v(\mathrm{pr}_2(z),\overline{1,N}\setminus\{j\})\right].$$

Для доказательства достаточно сравнить (4.9) и теорему 5.1. В принципе теорема 5.1 может непосредственно использоваться для построения решения в задачах малой размерности. Для построения более работоспособной процедуры рассмотрим вариант конструкции [11, § 4.9]. При этом существенную роль будут играть условия предшествования.

§ 6. Слои функции Беллмана

Приводимая ниже схема является естественной модификацией построений [11, § 4.9]. Введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{G} \triangleq \{K\in\mathfrak{N}\mid \forall\, z\in\mathbf{K}\ \ (\mathrm{pr}_1(z)\in K)\Longrightarrow(\mathrm{pr}_2(z)\in K)\} \tag{6.1}$$

всех существенных (в смысле предшествования) списков, а также его п/м $\mathcal{G}_s \triangleq \mathcal{G}\cap\mathfrak{N}_s\ \forall\, s\in\overline{1,N}$. При $s\in\overline{1,N}$ в виде $\mathcal{G}_s$ получаем семейство всех s-элементных существенных списков.

При $\mathbf{K}_1 \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z):\ z\in\mathbf{K}\}$ имеем равенство $\mathcal{G}_1 = \{\{t\}:\ t\in\overline{1,N}\setminus\mathbf{K}_1\}$; $\mathcal{G}_N = \{\overline{1,N}\}$ (одноэлементное семейство). Кроме того [24],

$$\mathcal{G}_{s-1} = \{K\setminus\{t\}:\ K\in\mathcal{G}_s,\ t\in\mathbf{I}(K)\}\ \ \forall\, s\in\overline{2,N}. \tag{6.2}$$

С учетом (6.2) можно рекуррентно построить все множества $\mathcal{G}_1,\ldots,\mathcal{G}_N$. Для «переноса» (6.2) в пространство позиций отметим некоторые вспомогательные положения. Пусть

$$\mathfrak{M} \triangleq \bigcup_{i\in\overline{1,N}\setminus\mathbf{K}_1} \mathbf{M}_i;$$

тогда $\mathfrak{M}\subset\mathbf{X}$ и мы полагаем, что

$$D_0 \triangleq \{(x,\varnothing):\ x\in\mathfrak{M}\};\ \ D_N \triangleq \left\{\left(x^0,\overline{1,N}\right)\right\}. \tag{6.3}$$

В (6.3) определены крайние слои пространства $\mathbf{X}\times\mathbf{N}$ (пространство позиций). В [24, предложение 1] показано, что

$$\forall\,\tilde{\mathbf{K}}\in\mathcal{P}'(\mathbf{K})\ \exists\, z\in\tilde{\mathbf{K}}:\ \mathrm{pr}_1(\tilde{z})\neq\mathrm{pr}_2(z)\ \ \forall\,\tilde{z}\in\tilde{\mathbf{K}}. \tag{6.4}$$

В свою очередь, из (6.4) вытекает, что $\overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1 \neq \varnothing$ и, стало быть, $\mathfrak{M} \neq \varnothing$, а потому $D_0 \neq \varnothing$. В итоге $D_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathbf{N})$. Также очевидно свойство $D_N \neq \varnothing$; точнее, $D_N \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathfrak{N})$, где $\mathbf{X} \times \mathfrak{N}$ — существенная «часть» пространства $\mathbf{X} \times \mathbf{N}$. Как и в [11, § 4.9], полагаем, что при $s \in \overline{1,N}$ и $K \in \mathcal{G}_s$

$$\mathcal{J}_s(K) \stackrel{\triangle}{=} \{t \in \overline{1,N} \setminus K \mid \{t\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}\}; \tag{6.5}$$

в [24, предложение 2] установлено, что $\mathcal{J}_s(K) \neq \varnothing$, то есть $\mathcal{J}_s(K) \in \mathcal{P}'(\overline{1,N} \setminus K)$. С учетом этого получаем, что

$$\mathcal{M}_s[K] \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s(K)} \mathbf{M}_j \in \mathcal{P}'(\mathbf{X}) \ \ \forall\, s \in \overline{1,N-1}\ \forall\, K \in \mathcal{G}_s. \tag{6.6}$$

Посредством (6.6) конструируются клетки пространства позиций: если $s \in \overline{1,N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$, то получаем, что

$$\mathbb{D}_s[K] \stackrel{\triangle}{=} \{(x,K):\ x \in \mathcal{M}_s[K]\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathfrak{N}). \tag{6.7}$$

В (6.7) имеем более удобный для применения (в схеме на основе МДП) аналог множеств (6.6). Согласно [11, предложение 4.9.2] $\mathcal{G}_s \in \mathcal{P}'(\mathfrak{N})\ \forall\, s \in \overline{1,N}$. С учетом этого и (6.7) получаем, что

$$D_s \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{K \in \mathcal{G}_s} \mathbb{D}_s[K] \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathfrak{N}) \ \ \forall\, s \in \overline{1,N}. \tag{6.8}$$

Таким образом, $D_0, D_1, \ldots, D_N$ — непустые п/м $\mathbf{X} \times \mathbf{N}$. При этом подобно [11, § 4.9] устанавливается, что

$$(y, K \setminus \{k\}) \in D_{s-1} \ \ \forall\, s \in \overline{1,N}\ \forall\, K \in \mathcal{G}_s\ \forall\, k \in \mathbf{I}(K)\ \forall\, y \in \mathbf{M}_k. \tag{6.9}$$

Свойство (6.9) дополняется тем очевидным положением, что (см. (6.3), (6.7), (6.8))

$$K \in \mathcal{G}_s \ \ \forall\, s \in \overline{1,N}\ \forall\, (x,K) \in D_s. \tag{6.10}$$

Из (6.9), (6.10) получаем, в частности, следующее свойство: если $s \in \overline{1,N},\ (x,K) \in D_s,\ j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in \mathbb{A}_j(x)$, то

$$(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1} \tag{6.11}$$

(действительно, согласно (3.10) имеем включение $z \in \mathbb{M}_j$, а потому (см. (3.4)) $\mathrm{pr}_2(z) \in \mathbf{M}_j$; теперь следует использовать комбинацию (6.9), (6.10)). С учетом (4.11), (6.3) и (6.8) определяем слои функции Беллмана в виде её сужений: если $s \in \overline{0,N}$, то полагаем, что $v_s \in \mathcal{R}_+[D_s]$ определяется условиями

$$v_s(x,K) \stackrel{\triangle}{=} v(x,K) \ \ \forall\, (x,K) \in D_s. \tag{6.12}$$

При этом (см. (6.3)) $v_0(x, \varnothing) = f(x)\ \ \forall\, x \in \mathfrak{M}$. Тем самым определена функция $v_0 \in \mathcal{R}_+[D_0]$.

Предложение 6.1. *Если $s \in \overline{1,N}$ и $(x,K) \in D_s$, то справедливо равенство*

$$v_s(x,K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x)} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z,K) + v_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})].$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией (6.11), (6.12) и теоремы 5.1. Итак, предложение 6.1 определяет преобразование v_{s-1} в v_s при $s \in \overline{1,N}$. Получили рекуррентную процедуру

$$v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow v_N,$$

позволяющую (коль скоро функция v_0 известна) построить все слои функции Беллмана и, в частности, определить глобальный экстремум ОЗМ $V = v_N\left(x^0, \overline{1,N}\right)$; см. (4.9), (6.12).

§ 7. Построение оптимального решения (алгоритм на функциональном уровне)

В настоящем разделе предполагаем известными все функции $v_0,\ v_1, \ldots, v_N$ (значения функции v, не принадлежащие ни одному из слоев $D_0,\ D_1, \ldots, D_N$, известными не предполагаются). В этих условиях рассмотрим построение оптимального решения в виде УП «маршрут–трасса». Всюду в дальнейшем полагаем, что $\mathbf{z}^{(0)} \triangleq \left(x^0, x^0\right)$. При этом $\mathbf{z}^{(0)} \in \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ и, в частности, $\mathbf{z}^{(0)} \in \mathbb{X} \times \mathbf{X}$. Будем конструировать частичные маршруты и кортежи в $\mathbb{X} \times \mathbf{X}$.

Заметим, что $\mathbf{I}(\overline{1,N}) \in \mathcal{P}'(\overline{1,N})$ согласно (3.15). Согласно (3.9), (3.10) имеем при $j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$, что

$$\mathbb{A}_j\left(x^0\right) = \mathbb{A}_j\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(0)}\right)\right) \in \mathcal{P}'(\mathbb{M}_j), \tag{7.1}$$

а потому $\mathrm{pr}_2(z) \in \mathbf{M}_j\ \forall\, z \in \mathbb{A}_j(x^0)$; более того, при $h \in \mathbb{A}_j(x^0)$ согласно (6.11) реализуется $(\mathrm{pr}_2(h), \overline{1,N} \setminus \{j\}) \in D_{N-1}$ и определено значение

$$v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(h), \overline{1,N} \setminus \{j\}) = v(\mathrm{pr}_2(h), \overline{1,N} \setminus \{j\}) \in [0, \infty[. \tag{7.2}$$

Наконец, из (4.9) и предложения 6.1 следует (см. (7.2)) равенство

$$V = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})}\ \min_{z \in \mathbb{A}_j(x^0)} \left[\mathbf{c}\left(x^0, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}\right) + c_j(z, \overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})\right] \tag{7.3}$$

(напомним, что функция v_{N-1} нам известна). С учетом (7.3) выбираем индекс $\mathbf{j}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и УП $\mathbf{z}^{(1)} \in \mathbb{A}_{\mathbf{j}_1}\left(x^0\right)$, для которых

$$V = \mathbf{c}\left(x^0, \mathrm{pr}_1\left(\mathbf{z}^{(1)}\right), \overline{1,N}\right) + c_{\mathbf{j}_1}\left(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1,N}\right) + v_{N-1}\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(1)}\right), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}\right). \tag{7.4}$$

Подчеркнем то обстоятельство, что при выборе $\mathbf{j}_1$ и $\mathbf{z}^{(1)}$ использовалась информация только о V и значениях функции v_{N-1}. Из (7.2), (7.4) следует цепочка равенств

$$v_N\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(0)}\right), \overline{1,N}\right) = V = \mathbf{c}\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(0)}\right), \mathrm{pr}_1\left(\mathbf{z}^{(1)}\right), \overline{1,N}\right) + c_{\mathbf{j}_1}\left(\mathbf{z}^{(1)}, \overline{1,N}\right) +$$

$$+ v\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(1)}\right), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}\right). \tag{7.5}$$

По выбору $\mathbf{z}^{(1)}$ имеем свойство $\mathbf{z}^{(1)} \in \mathbb{M}_{\mathbf{j}_1}$, а тогда, в частности, $\mathbf{z}^{(1)} \in \mathbb{X} \times \mathbf{X}$ (учли (3.2), (3.4)–(3.6)). Поэтому $\mathbf{j}_1 \in \overline{1,N}$ и $(\mathbf{z}^{(i)})_{i \in \overline{0,1}} :\ \overline{0,1} \longrightarrow \mathbb{X} \times \mathbf{X}$. В (7.2), (7.4) и (7.5) реализуется естественный беллмановский принцип выбора, который будет использоваться и далее при описании регулярного шага (этапа) процедуры.

Пусть $\mathbf{r} \in \overline{1,N}$ и уже построены кортежи

$$(\mathbf{j}_k)_{k \in \overline{1,\mathbf{r}}} :\ \overline{1,\mathbf{r}} \longrightarrow \overline{1,N},\ \ \left(\mathbf{z}^{(k)}\right)_{k \in \overline{0,\mathbf{r}}} :\ \overline{0,\mathbf{r}} \longrightarrow \mathbb{X} \times \mathbf{X} \tag{7.6}$$

со следующими свойствами:

1') $\mathbf{j}_k \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_s :\ s \in \overline{1,k-1}\})\ \ \forall\, k \in \overline{1,\mathbf{r}}$;

2') $\left(\mathbf{z}^0 = \left(x^0, x^0\right)\right)\ \&\ \left(\mathbf{z}^{(t)} \in \mathbb{A}_{\mathbf{j}_t}\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(t-1)}\right)\right)\ \ \forall\, t \in \overline{1,\mathbf{r}}\right)$;

3') $\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(t)}\right), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,t}\}\right) \in D_{N-t}\ \ \forall\, t \in \overline{1,\mathbf{r}}$;

4') $V = \sum\limits_{s=0}^{\mathbf{r}-1} \mathbf{c}\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(s)}\right), \mathrm{pr}_1\left(\mathbf{z}^{(s+1)}\right), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_l :\ l \in \overline{1,s}\}\right) +$

$+ \sum\limits_{s=1}^{\mathbf{r}} c_{\mathbf{j}_s}\left(\mathbf{z}^{(s)}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_l :\ l \in \overline{1,s-1}\}\right) + v\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(\mathbf{r})}\right), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_l :\ l \in \overline{1,\mathbf{r}}\}\right)$.

Замечание 7.4. В случае $\mathbf{r} = 1$ все условия 1')– 4') выполнены. Действительно, 1') получаем по выбору $\mathbf{j}_1$, так как $\overline{1,0} = \varnothing$ и, как следствие, $\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_s :\ s \in \overline{1,0}\} = \overline{1,N}$. Свойство 2') имеем по выбору $\mathbf{z}^{(1)}$, поскольку $x^0 = \mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(0)}\right)$; см. в этой связи (7.1). Свойство 3') вытекает из (6.11) по выбору $\mathbf{j}_1$ и $\mathbf{z}^{(1)}$, так как $\left(x^0, \overline{1,N}\right) \in D_N$. Свойство 4') извлекается из (7.5); здесь также надо учитывать равенство $\overline{1,0} = \varnothing$.

Возвращаясь к общему случаю $\mathbf{r}$, отметим, что возможен один из следующих двух вариантов: $(\mathbf{r} = N) \vee (\mathbf{r} \in \overline{1, N-1})$. Эти варианты рассмотрим отдельно.

a) Пусть $\mathbf{r} = N$. Тогда (по смыслу) наше построение завершено. Из (7.6) следует, что $\eta \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{j}_k)_{k\in\overline{1,N}}$ есть кортеж в $\overline{1,N}$, а $\left(\mathbf{z}^{(k)}\right)_{k\in\overline{0,\mathbf{r}}} = \left(\mathbf{z}^{(k)}\right)_{k\in\overline{0,N}} \in \mathbb{Z}$ (см. раздел 3); при этом

$$\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(s)}\right) \in \mathbf{X} \ \ \forall\, s \in \overline{0,N}. \tag{7.7}$$

В отношении η заметим, что $\eta(k) \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\eta(s) :\ s \in \overline{1,k-1}\})\ \forall\, k \in \overline{1,N}$. Отсюда легко следует, что $\eta \in \mathbf{A}$ (см. (3.15) – (3.17)), то есть η — маршрут, допустимый по предшествованию.

С учетом (7.7) имеем, что при $k \in \overline{1,N}$ определено (см. (3.9)) множество

$$\mathbb{A}_{\eta(k)}\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(k-1)}\right)\right) \in \mathcal{P}'(\mathbb{M}_{\eta(k)}).$$

Как следствие, получаем в силу свойства 2'), что $\mathbf{z}^{(t)} \in \mathbb{M}_{\eta(t)}\ \forall\, t \in \overline{1,N}$. Из 2') получаем также с учетом (3.10), что

$$\mathrm{pr}_1\left(\mathbf{z}^{(t)}\right) \in A_{\eta(t)}\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(t-1)}\right)\right) \ \ \forall\, t \in \overline{1,N}.$$

Таким образом (см. (3.18)), $\left(\mathbf{z}^{(k)}\right)_{k\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\eta$, а УП $\left(\eta, \left(\mathbf{z}^{(k)}\right)_{k\in\overline{0,N}}\right)$ есть допустимое решение ОЗМ. Поскольку в рассматриваемом случае

$$\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_l :\ l \in \overline{1,\mathbf{r}}\} = \overline{1,N} \setminus \{\eta(l) :\ l \in \overline{1,N}\} = \varnothing,$$

имеем следующую цепочку равенств:

$$v\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(\mathbf{r})}\right), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_l :\ l \in \overline{1,\mathbf{r}}\}\right) = v\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(\mathbf{r})}\right), \varnothing\right) = v\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(N)}\right), \varnothing\right) = f\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(N)}\right)\right)$$

и согласно 4') $\mathfrak{C}_\eta\left[\left(\mathbf{z}^{(k)}\right)_{k\in\overline{0,N}}\right] = V$ (см. (4.2)). Итак, в случае a) (а это финал процедуры) мы уже имеем оптимальное решение ОЗМ.

b) Пусть $\mathbf{r} \in \overline{1,N-1}$ (рассматривается регулярный шаг процедуры). Тогда $\mathbf{r}+1 \in \overline{2,N}$ и согласно 3')

$$\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(\mathbf{r})}\right), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\}\right) \in D_{N-\mathbf{r}}, \tag{7.8}$$

где $\mathbf{z}^{(\mathbf{r})} \in \mathbb{X} \times \mathbf{X}$. В силу (7.8) имеем равенство

$$v\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(\mathbf{r})}\right), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\}\right) = v_{N-\mathbf{r}}\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(\mathbf{r})}\right), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\}\right). \tag{7.9}$$

С учетом (6.11) и (7.8) получаем следующее положение:

$$\begin{gathered}(\mathrm{pr}_2(z), (\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\}) \setminus \{j\}) \in D_{N-(\mathbf{r}+1)} \\ \forall\, j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\})\ \forall\, z \in \mathbb{A}_j\Big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(\mathbf{r})})\Big).\end{gathered} \tag{7.10}$$

При этом $\mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\})$ и $\mathbb{A}_j\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(\mathbf{r})}\right)\right)$, $j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\})$, — суть непустые множества. Свойство (7.10) доставляет (см. (6.12)) систему равенств

$$\begin{gathered}v_{N-(\mathbf{r}+1)}(\mathrm{pr}_2(z), (\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\}) \setminus \{j\}) = v(\mathrm{pr}_2(z), (\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\}) \setminus \{j\}) \\ \forall\, j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\})\ \forall\, z \in \mathbb{A}_j\Big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(\mathbf{r})})\Big).\end{gathered} \tag{7.11}$$

В рассматриваемом случае $N - \mathbf{r} \in \overline{1,N-1}$, а потому (см. (7.8)) согласно предложению 6.1

$$\begin{gathered}v_{N-\mathbf{r}}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(\mathbf{r})}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\}) = \min_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_k:\ k\in\overline{1,\mathbf{r}}\})}\ \min_{z\in\mathbb{A}_j\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(\mathbf{r})}\right)\right)}[\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(\mathbf{r})}), \mathrm{pr}_1(z), \\ \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\}) + c_j(z, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\}) + \\ + v_{N-(\mathbf{r}+1)}(\mathrm{pr}_2(z), (\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\}) \setminus \{j\})].\end{gathered} \tag{7.12}$$

С учетом (7.12) выберем индекс $\mathbf{j}_{\mathbf{r}+1} \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\})$ и УП $\mathbf{z}^{(\mathbf{r}+1)} \in \mathbb{A}_{\mathbf{j}_{\mathbf{r}+1}}\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(\mathbf{r})}\right)\right)$, для которых

$$\begin{aligned} &v_{N-\mathbf{r}}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(\mathbf{r})}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\}) = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(\mathbf{r})}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(\mathbf{r}+1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\})+ \\ &+ c_{\mathbf{j}_{\mathbf{r}+1}}(\mathbf{z}^{(\mathbf{r}+1)}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\}) + v_{N-(\mathbf{r}+1)}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(\mathbf{r}+1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}+1}\}). \end{aligned} \tag{7.13}$$

Отметим, что выбор $\mathbf{j}_{\mathbf{r}+1}$ и $\mathbf{z}^{(\mathbf{r}+1)}$ из условия (7.13) определяет основную операцию используемой здесь процедуры на основе широко понимаемого МДП (выполнение операции, подобной выбору из условия (7.13), постулируется для каждого регулярного шага (этапа) процедуры). Учитывая (7.9), (7.11) и (7.13), имеем теперь следующее равенство:

$$\begin{aligned} &v(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(\mathbf{r})}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\}) = \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(\mathbf{r})}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(\mathbf{r}+1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\})+ \\ &+ c_{\mathbf{j}_{\mathbf{r}+1}}(\mathbf{z}^{(\mathbf{r}+1)}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}}\}) + v(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(\mathbf{r}+1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}+1}\}). \end{aligned} \tag{7.14}$$

Заметим, что согласно (3.10) $\mathbf{z}^{(\mathbf{r}+1)} \in \mathbb{M}_{\mathbf{j}_{\mathbf{r}+1}}$ и, в частности, $\mathbf{z}^{(\mathbf{r}+1)} \in \mathbb{X} \times \mathbf{X}$ (см. (3.4)–(3.6)). Таким образом, получены новые продолженные кортежи

$$(\mathbf{j}_k)_{k \in \overline{1,\mathbf{r}+1}} :\ \overline{1,\mathbf{r}+1} \longrightarrow \overline{1,N}, \ \ (\mathbf{z}^{(k)})_{k \in \overline{0,\mathbf{r}+1}} :\ \overline{0,\mathbf{r}+1} \longrightarrow \mathbb{X} \times \mathbf{X}.$$

С учетом 1') имеем по выбору $\mathbf{j}_{\mathbf{r}+1}$ свойство

1") $\mathbf{j}_k \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_s :\ s \in \overline{1,k-1}\}) \ \ \forall k \in \overline{1,\mathbf{r}+1}$.

Далее, по выбору $\mathbf{z}^{(\mathbf{r}+1)}$ получаем положение

2") $\left(\mathbf{z}^{(0)} = \left(x^0, x^0\right)\right) \ \& \ \left(\mathbf{z}^{(t)} \in \mathbb{A}_{\mathbf{j}_t}\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(t-1)}\right)\right) \ \ \forall t \in \overline{1,\mathbf{r}+1}\right)$.

Из (7.10) имеем по выбору $\mathbf{j}_{\mathbf{r}+1}$ и $\mathbf{z}^{(\mathbf{r}+1)}$, что

$$\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(\mathbf{r}+1)}\right), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,\mathbf{r}+1}\}\right) \in D_{N-(\mathbf{r}+1)}. \tag{7.15}$$

Из (7.15) и 3') извлекается следующее свойство:

3") $\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(t)}\right), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_k :\ k \in \overline{1,t}\}\right) \in D_{N-t} \ \ \forall t \in \overline{1,\mathbf{r}+1}$.

Наконец, из (7.14) и 4') получаем равенство

4") $V = \sum\limits_{s=0}^{\mathbf{r}} \mathbf{c}\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(s)}\right), \mathrm{pr}_1\left(\mathbf{z}^{(s+1)}\right), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_l :\ l \in \overline{1,s}\}\right) +$

$+ \sum\limits_{s=1}^{\mathbf{r}+1} c_{\mathbf{j}_s}(\mathbf{z}^{(s)}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_l :\ l \in \overline{1,s-1}\}) + v\left(\mathrm{pr}_2\left(\mathbf{z}^{(\mathbf{r}+1)}\right), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_l :\ l \in \overline{1,\mathbf{r}+1}\}\right)$.

Таким образом, в случае b) мы смогли, применяя естественное правило выбора на основе (7.13), продолжить каждый из кортежей (7.6) на один шаг с сохранением всех основных свойств: 1') – 4') $\longrightarrow$ 1") – 4"). После выполнения N регулярных шагов типа b) будет, следовательно, реализован случай a), то есть получено оптимальное решение ОЗМ.

§ 8. Клеточное представление слоёв функции Беллмана

Наиболее трудным этапом решения ОЗМ является построение требуемого (пусть даже частичного) массива значений функции Беллмана. Следуя на идейном уровне [24,25], рассмотрим далее одну гипотетическую схему организации независимых вычислений упомянутого массива с использованием конечного набора процессоров (практическая реализация этой схемы в настоящее время осложняется жесткими требованиями к ресурсам памяти). Однако сначала мы обсудим одну полезную модификацию конструкций раздела 6. Это обсуждение начнем с конкретизации выражения для V (значение ОЗМ), имея в виду, что (см. (6.2))

$$\mathcal{G}_{N-1} = \{\overline{1,N} \setminus \{t\} :\ t \in \mathbf{I}(\overline{1,N})\} \tag{8.1}$$

есть $\mathbf{n}$-элементное семейство, где $\mathbf{n} \stackrel{\triangle}{=} |\mathbf{I}(\overline{1,N})| \in \overline{1,N}$. Согласно (6.6)

$$\mathcal{M}_{N-1}[K] = \bigcup_{j \in \mathcal{J}_{N-1}(K)} \mathbf{M}_j \in \mathcal{P}'(\mathbf{X}) \ \ \forall K \in \mathcal{G}_{N-1}. \tag{8.2}$$

С учетом (6.2) из (6.6) извлекаются очевидные представления множеств $\mathcal{M}_{N-1}[\overline{1,N}\setminus\{t\}]$, $t\in\mathbf{I}(\overline{1,N})$. Однако $\mathcal{J}_{N-1}(\overline{1,N}\setminus\{t\})=\{t\}\ \forall t\in\mathbf{I}(\overline{1,N})$. Как следствие, при $t\in\mathbf{I}(\overline{1,N})$ имеем $\mathcal{M}_{N-1}[\overline{1,N}\setminus\{t\}]=\mathbf{M}_t$ и поэтому $\mathbb{D}_{N-1}[\overline{1,N}\setminus\{t\}]=\{(x,\overline{1,N}\setminus\{t\}):\ x\in\mathbf{M}_t\}$. При этом

$$D_{N-1}=\bigcup_{K\in\mathcal{G}_{N-1}}\mathbb{D}_{N-1}[K]=\bigcup_{t\in\mathbf{I}(N)}\mathbb{D}_{N-1}[\overline{1,N}\setminus\{t\}]. \tag{8.3}$$

Теперь можно построить систему клеток функции v_{N-1}. Сделаем, однако, подобное построение сразу для всех функций $v_1,\ldots,v_{N-1}$. Учитываем при этом, что при $s\in\overline{1,N-1}$, $K\in\mathcal{G}_s$ и $x\in\mathcal{M}_s[K]$ непременно $(x,K)\in\mathbb{D}_s[K]$; используем также (6.8). Тогда определяем клетки

$$\mathcal{V}_s[K]\stackrel{\triangle}{=}(v_s(x,K))_{x\in\mathcal{M}_s[K]}\in\mathcal{R}_+[\mathcal{M}_s[K]]\ \ \forall s\in\overline{1,N-1}\ \forall K\in\mathcal{G}_s. \tag{8.4}$$

В частности, получаем с учетом (8.1), что

$$\mathcal{V}_{N-1}[\overline{1,N}\setminus\{t\}]=(v_{N-1}(x,\overline{1,N}\setminus\{t\}))_{x\in\mathbf{M}_t}=(v(x,\overline{1,N}\setminus\{t\}))_{x\in\mathbf{M}_t}\in\mathcal{R}_+[\mathbf{M}_t]\ \forall t\in\mathbf{I}(\overline{1,N}). \tag{8.5}$$

Легко видеть, что $\forall s\in\overline{1,N-1}\ \forall (x,K)\in D_s$

$$K\in\mathcal{G}_s:\ \ x\in\mathcal{M}_s[K]. \tag{8.6}$$

Из (8.6) в свою очередь следует, что при $s\in\overline{1,N-1}$ и $(x,K)\in D_s$ в силу (8.4) определено значение $\mathcal{V}_s[K](x)\in[0,\infty[$ и при этом справедлива цепочка равенств $\mathcal{V}_s[K](x)=v_s(x,K)=v(x,K)$. В частности, данное свойство имеет место при $s=N-1$. Как следствие, отметим (см. (8.6)), что

$$\mathrm{pr}_2(z)\in\mathcal{M}_{N-1}[\overline{1,N}\setminus\{j\}]\ \ \forall j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})\ \forall z\in\mathbb{A}_j\left(x^0\right). \tag{8.7}$$

С учетом отмеченного ранее представления множества (8.2) из (8.7) получаем, что

$$\mathrm{pr}_2(z)\in\mathbf{M}_j\ \ \forall j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})\ \forall z\in\mathbb{A}_j\left(x^0\right). \tag{8.8}$$

При $j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $z\in\mathbb{A}_j\left(x^0\right)$ согласно (8.5) и (8.8) определено значение $\mathcal{V}_{N-1}[\overline{1,N}\setminus\{j\}](\mathrm{pr}_2(z))\in[0,\infty[$, для которого $\mathcal{V}_{N-1}[\overline{1,N}\setminus\{j\}](\mathrm{pr}_2(z))=v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z),\overline{1,N}\setminus\{j\})=v(\mathrm{pr}_2(z),\overline{1,N}\setminus\{j\})$. Из предложения 6.1 имеем теперь следующее «клеточное» представление V :

$$V=\min_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})}\ \min_{z\in\mathbb{A}_j(x^0)}\left[\mathbf{c}\left(x^0,\mathrm{pr}_1(z),\overline{1,N}\right)+c_j(z,\overline{1,N})+\mathcal{V}_{N-1}[\overline{1,N}\setminus\{j\}](\mathrm{pr}_2(z))\right]. \tag{8.9}$$

Рассмотрим «клеточное» представление функций v_s, $s\in\overline{1,N-1}$. Согласно (6.7) и (6.8) при $s\in\overline{1,N-1}$, $K\in\mathcal{G}_s$ и $x\in\mathcal{M}_s[K]$ $\ (x,K)\in D_s$, а потому (см. предложение 6.1)

$$\mathcal{V}_s[K](x)=\min_{j\in\mathbf{I}(K)}\ \min_{z\in\mathbb{A}_j(x)}[\mathbf{c}(x,\mathrm{pr}_1(z),K)+c_j(z,K)+v_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z),K\setminus\{j\})]. \tag{8.10}$$

Отдельно рассмотрим случаи, когда $s\in\overline{2,N-1}$ и $s=1$.

1) Пусть $s\in\overline{2,N-1}$. Тогда $s-1\in\overline{1,N-2}$, определены семейство $\mathcal{G}_{s-1}=\{H\setminus\{t\}:\ H\in\mathcal{G}_s,\ t\in\mathbf{I}(H)\}$ и, при $K\in\mathcal{G}_s$ и $j\in\mathbf{I}(K)$, множества $\mathcal{M}_{s-1}[K\setminus\{j\}]\in\mathcal{P}'(\mathbf{X})$ и

$$\mathbb{D}_{s-1}[K\setminus\{j\}]=\{(x,K\setminus\{j\}):\ x\in\mathcal{M}_{s-1}[K\setminus\{j\}]\}\in\mathcal{P}'(\mathbf{X}\times\mathfrak{N}).$$

Как следствие, $(x,K\setminus\{j\})\in D_{s-1}\ \forall K\in\mathcal{G}_s\ \forall j\in\mathbf{I}(K)\ \forall x\in\mathcal{M}_{s-1}[K\setminus\{j\}]$. С учетом этого проверяется, что при $s\in\overline{2,N-1}$, $(x,K)\in D_s$, $j\in\mathbf{I}(K)$ и $z\in\mathbb{A}_j(x)$ $\ \mathrm{pr}_2(z)\in\mathcal{M}_{s-1}[K\setminus\{j\}]$, определено значение $\mathcal{V}_{s-1}[K\setminus\{j\}](\mathrm{pr}_2(z))\in[0,\infty[$, для которого

$$\mathcal{V}_{s-1}[K\setminus\{j\}](\mathrm{pr}_2(z))=v_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z),K\setminus\{j\})=v(\mathrm{pr}_2(z),K\setminus\{j\}).$$

Из предложения 6.1 и (8.10) имеем теперь «клеточное» представление v_s :

$$\mathcal{V}_s[K](x) = \min_{j\in\mathbf{I}(K)} \min_{z\in\mathbb{A}_j(x)} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + \mathcal{V}_{s-1}[K \setminus \{j\}](\mathrm{pr}_2(z))]$$
$$\forall\, K \in \mathcal{G}_s\ \forall\, x \in \mathcal{M}_s[K]. \tag{8.11}$$

2) Рассмотрим случай, когда в (8.10) $s = 1$; согласно предложению 6.1 при $(x, K) \in D_1$

$$v_1(x, K) = \min_{j\in\mathbf{I}(K)} \min_{z\in\mathbb{A}_j(x)} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + v_0(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})]. \tag{8.12}$$

Легко видеть, что при $(x, K) \in D_1,\ j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in \mathbb{A}_j(x)$ $\ \mathrm{pr}_2(z) \in \mathfrak{M}$ и $K \setminus \{j\} = \varnothing$, а тогда

$$v_0(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) = v_0(\mathrm{pr}_2(z), \varnothing) = f(\mathrm{pr}_2(z)). \tag{8.13}$$

Из (8.12) и (8.13) вытекает, что при $(x, K) \in D_1$

$$v_1(x, K) = \min_{j\in\mathbf{I}(K)} \min_{z\in\mathbb{A}_j(x)} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + f(\mathrm{pr}_2(z))] \tag{8.14}$$

и, кроме того, $\exists\, t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1 :\ K = \{t\}$. При $K \in \mathcal{G}_1$ и $x \in \mathcal{M}_1[K]$ $\quad (x, K) \in D_1$, а тогда из (8.14) следует, что

$$\mathcal{V}_1[K](x) = \min_{j\in\mathbf{I}(K)} \min_{z\in\mathbb{A}_j(x)} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + f(\mathrm{pr}_2(z))].$$

Однако, используя специфику рассматриваемого случая, «клеточное» представление v_1 логично переписать следующим образом:

$$\mathcal{V}_1[\{t\}](x) = \min_{j\in\mathbf{I}(\{t\})} \min_{z\in\mathbb{A}_j(x)} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), \{t\}) + c_j(z, \{t\}) + f(\mathrm{pr}_2(z))]$$
$$\forall\, t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1\ \forall\, x \in \mathcal{M}_1[\{t\}]. \tag{8.15}$$

С учетом замечания 3.2 из (8.15) получаем, что

$$\mathcal{V}_1[\{t\}](x) = \min_{z\in\mathbb{A}_t(x)} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), \{t\}) + c_t(z, \{t\}) + f(\mathrm{pr}_2(z))]\ \ \forall\, t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1\ \forall\, x \in \mathcal{M}_1[\{t\}]. \tag{8.16}$$

Посредством (8.16) полностью определена функция v_1. В самом деле, согласно (8.6) при $(x_*, K_*) \in D_1$ имеем $K_* \in \mathcal{G}_1$ и $x_* \in \mathcal{M}_1[K_*]$. Тогда $K_* = \{t_*\}$, где $t_* \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1$. При этом

$$v_1(x_*, K_*) = v(x_*, K_*) = v_1(x_*, \{t_*\}) = \mathcal{V}_1[K_*](x_*) = \mathcal{V}_1[\{t_*\}](x_*),$$

а тогда согласно (8.16) имеем следующую цепочку равенств

$$v_1(x_*, K_*) = \mathcal{V}_1[\{t_*\}](x_*) = \min_{z\in\mathbb{A}_{t_*}(x_*)} [\mathbf{c}(x_*, \mathrm{pr}_1(z), \{t_*\}) + c_{t_*}(z, \{t_*\}) + f(\mathrm{pr}_2(z))]. \tag{8.17}$$

§ 9. Схема независимых вычислений

В последующих построениях используются положения [24, 25]. Всюду в дальнейшем полагаем, что $3 \leqslant N$. Для всякого $K \in \mathcal{G}_{N-1}$ через $\mathcal{T}[K]$ обозначаем множество всех кортежей

$$(K_i)_{i\in\overline{0, N-2}} :\ \overline{0, N-2} \longrightarrow \mathcal{G}, \tag{9.1}$$

для каждого из которых

$$(K_0 = K)\ \&\ (\forall\, t \in \overline{1, N-2}\ \exists\, s \in \mathbf{I}(K_{t-1}) :\ K_t = K_{t-1} \setminus \{s\}). \tag{9.2}$$

Определение (9.1), (9.2) соответствует [24, (44), (45)] при условии, что (в [24, (44), (45)]) $r = 2$; для всех последующих наших построений этот случай достаточен. Конечно, в терминах (9.1), (9.2) определены (см. (8.1)) множества $\mathcal{T}[\overline{1,N}\setminus\{j\}],\ j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})$; при этом $\{\mathcal{T}[K]:\ K\in\mathcal{G}_{N-1}\}=\{\mathcal{T}[\overline{1,N}\setminus\{j\}]:\ j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})\}$. Согласно [24, предложения 6, 7] $\mathcal{T}[K]\neq\varnothing\ \forall\,K\in\mathcal{G}_{N-1}$; при этом

$$K_s\in\mathcal{G}_{N-(s+1)}\ \ \forall\,K\in\mathcal{G}_{N-1}\ \forall\,(K_i)_{i\in\overline{0,N-2}}\in\mathcal{T}[K]\ \forall\,s\in\overline{0,N-2}. \tag{9.3}$$

В [24, 25] кортежи (9.1), (9.2) рассматриваются как траектории дискретных динамических систем. В этой связи по аналогии с [24, раздел 5] введем соответствующие области достижимости (ОД):

$$\tilde{\mathbb{T}}[K;t]\overset{\triangle}{=}\{K_t:\ (K_i)_{i\in\overline{0,N-2}}\in\mathcal{T}[K]\}\ \ \forall\,K\in\mathcal{G}_{N-1}\ \forall\,t\in\overline{0,N-2}. \tag{9.4}$$

Из (9.4) следует, что (см. (8.1)) определены ОД $\tilde{\mathbb{T}}[\overline{1,N}\setminus\{j\};t],\ j\in\mathbf{I}(\overline{1,N}),\ t\in\overline{0,N-2}$. Если $K\in\mathcal{G}_{N-1}$, то

$$\Big(\tilde{\mathbb{T}}[K;0]=\{K\}\Big)\ \ \&\ \ \Big(\tilde{\mathbb{T}}[K;N-2]\subset\mathcal{G}_1\Big). \tag{9.5}$$

Отметим также, что (см. (8.1), [24, предложение 12])

$$\mathcal{G}_{N-(t+1)}=\bigcup_{K\in\mathcal{G}_{N-1}}\tilde{\mathbb{T}}[K;t]=\bigcup_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})}\tilde{\mathbb{T}}[\overline{1,N}\setminus\{j\};t]\ \ \forall\,t\in\overline{0,N-2}. \tag{9.6}$$

Итак (см. (9.6)), получили свойство исчерпывания семейства существенных списков заданной мощности системой ОД при переборе всевозможных начальных состояний, определяемых каждое как существенный список мощности $N-1$. Согласно [24, предложение 13]

$$H\setminus\{l\}\in\tilde{\mathbb{T}}[K;t+1]\ \ \forall\,K\in\mathcal{G}_{N-1}\ \forall\,t\in\overline{0,N-3}\ \forall\,H\in\tilde{\mathbb{T}}[K;t]\ \forall\,l\in\mathbf{I}(H). \tag{9.7}$$

Замечание 9.5. Пусть $s\in\overline{2,N-1},\ \hat{K}\in\mathcal{G}_s$ и $x\in\mathcal{M}_s[\hat{K}]$. Тогда при $j\in\mathbf{I}(\hat{K})\quad \hat{K}\setminus\{j\}\in\mathcal{G}_{s-1}$ и $\mathrm{pr}_2(z)\in\mathcal{M}_{s-1}[\hat{K}\setminus\{j\}]\ \forall\,z\in\mathbb{A}_j(x)$. Введем теперь $t\overset{\triangle}{=}N-(s+1)$, получая $t\in\overline{0,N-3}$ и (см. (9.6)) очевидное равенство

$$\mathcal{G}_s=\mathcal{G}_{N-(t+1)}=\bigcup_{\tilde{K}\in\mathcal{G}_{N-1}}\tilde{\mathbb{T}}[\tilde{K};t], \tag{9.8}$$

так как $N-(t+1)=s$. В силу (9.8) имеем по выбору $\hat{K}$, что для некоторого $P\in\mathcal{G}_{N-1}$ $\hat{K}\in\tilde{\mathbb{T}}[P;t]$, а потому согласно (9.7)

$$\hat{K}\setminus\{l\}\in\tilde{\mathbb{T}}[P;t+1]\ \ \forall\,l\in\mathbf{I}(\hat{K}). \tag{9.9}$$

Вместе с тем из (6.2) имеем по выбору $\hat{K}$, что $\hat{K}\setminus\{l\}\in\mathcal{G}_{s-1}\ \forall\,l\in\mathbf{I}(\hat{K})$. Тогда получаем, что $s-1\in\overline{1,N-2}$ и определены значения $\mathcal{V}_{s-1}[\hat{K}\setminus\{l\}](\mathrm{pr}_2(z))\in[0,\infty[\ \forall\,l\in\mathbf{I}(\hat{K})\ \forall\,z\in\mathbb{A}_l(x)$. В итоге (см. (8.11))

$$\mathcal{V}_s[\hat{K}](x)=\min_{l\in\mathbf{I}(\hat{K})}\ \min_{z\in\mathbb{A}_l(x)}[\mathbf{c}(x,\mathrm{pr}_1(z),\hat{K})+c_l(z,\hat{K})+\mathcal{V}_{s-1}[\hat{K}\setminus\{l\}](\mathrm{pr}_2(z))], \tag{9.10}$$

причем (и это важно) согласно (9.9)

$$\hat{K}\in\tilde{\mathbb{T}}[P;t]:\ \hat{K}\setminus\{l\}\in\tilde{\mathbb{T}}[P;t+1]\ \ \forall\,l\in\mathbf{I}(\hat{K}), \tag{9.11}$$

где $t=N-(s+1)\in\overline{0,N-3}$. Итак, процесс «клеточных» вычислений в (9.10) реализуется в рамках ОД для фиксированного начального состояния P, то есть «в пределах полномочий» дискретной системы [24, 25], стартующей из P.

Заметим, что [24, предложение 14] справедливы свойства

$$\tilde{\mathbb{T}}[K;t]\in\mathcal{P}'(\mathcal{G}_{N-(t+1)})\ \ \forall\,K\in\mathcal{G}_{N-1}\ \forall\,t\in\overline{0,N-2}. \tag{9.12}$$

Построение частичного массива значений функции Беллмана при фиксированном начальном состоянии. До конца настоящего раздела фиксируем список

$$\mathbb{K} \in \mathcal{G}_{N-1}. \tag{9.13}$$

Тогда в силу (9.12), (9.13) имеем набор ОД дискретной системы, стартующей из начального состояния $\mathbb{K}$:

$$\tilde{\mathbb{T}}[\mathbb{K}; t] \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}_{N-(t+1)}) \ \ \forall\, t \in \overline{0, N-2}. \tag{9.14}$$

Как следствие, $\tilde{\mathbb{T}}[\mathbb{K}; N-(s+1)] \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}_s)\ \forall\, s \in \overline{1, N-1}$. Поэтому

$$\mathcal{D}_s[\mathbb{K}] \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{P \in \tilde{\mathbb{T}}[\mathbb{K}; N-(s+1)]} \mathbb{D}_s[P] \in \mathcal{P}'(D_s) \ \ \forall\, s \in \overline{1, N-1}. \tag{9.15}$$

Предложение 9.1. *Если* $t \in \overline{1, N-2}$, $(x, Q) \in \mathcal{D}_{t+1}[\mathbb{K}]$, $s \in \mathbf{I}(Q)$ *и* $y \in \mathbf{M}_s$, *то*

$$(y, Q \setminus \{s\}) \in \mathcal{D}_t[\mathbb{K}]. \tag{9.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем t, (x, Q), s и y в соответствии с условиями, получая $N-(t+1) \in \overline{1, N-2}$. Из (9.15) получаем, что

$$\mathcal{D}_t[\mathbb{K}] \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{P \in \tilde{\mathbb{T}}[\mathbb{K}; N-(t+1)]} \mathbb{D}_t[P] \in \mathcal{P}'(D_t). \tag{9.17}$$

При этом $t+1 \in \overline{2, N-1}$ и $N-((t+1)+1) = N-(t+2) \in \overline{0, N-3}$. Тогда с учетом (9.15)

$$\mathcal{D}_{t+1}[\mathbb{K}] = \bigcup_{P \in \tilde{\mathbb{T}}[\mathbb{K}; N-(t+2)]} \mathbb{D}_{t+1}[P] \in \mathcal{P}'(D_{t+1}). \tag{9.18}$$

Поэтому $(x, Q) \in D_{t+1}$ и согласно (6.10) $Q \in \mathcal{G}_{t+1}$. С учетом (6.9) имеем свойство $(y, Q \setminus \{s\}) \in D_t$. Вообще же

$$H \setminus \{l\} \in \tilde{\mathbb{T}}[\mathbb{K}; N-(t+1)] \ \ \forall\, H \in \tilde{\mathbb{T}}[\mathbb{K}; N-(t+2)]\ \forall\, l \in \mathbf{I}(H). \tag{9.19}$$

По выбору (x, Q) имеем, согласно (9.18), для некоторого $\Lambda \in \tilde{\mathbb{T}}[\mathbb{K}; N-(t+2)]$ включение $(x, Q) \in \mathbb{D}_{t+1}[\Lambda]$. Разумеется (см. (9.12)), $\Lambda \in \mathcal{G}_{t+1}$. При этом

$$\mathbb{D}_{t+1}[\Lambda] = \{(z, \Lambda) :\ z \in \mathcal{M}_{t+1}[\Lambda]\}, \tag{9.20}$$

где $\mathcal{M}_{t+1}[\Lambda]$ есть объединение всех множеств $\mathbf{M}_j$, $j \in \mathcal{J}_{t+1}(\Lambda)$. Тогда (см. (9.20)) имеем равенство $(x, Q) = (\bar{z}, \Lambda)$, где $\bar{z} \in \mathcal{M}_{t+1}[\Lambda]$. Тогда, в частности, $Q = \Lambda$, а потому $Q \in \tilde{\mathbb{T}}[\mathbb{K}; N-(t+2)]$ и, как следствие, $\mathbb{D}_{t+1}[Q] \subset \mathcal{D}_{t+1}[\mathbb{K}]$. С учетом (9.19) получаем теперь, что

$$Q \setminus \{s\} \in \tilde{\mathbb{T}}[\mathbb{K}; N-(t+1)], \tag{9.21}$$

а тогда из (9.17) и (9.21) следует, что

$$\mathbb{D}_t[Q \setminus \{s\}] \subset \mathcal{D}_t[\mathbb{K}]. \tag{9.22}$$

Напомним представление $\mathbb{D}_t[Q \setminus \{s\}]$, следуя (6.6), (6.7). Имеем $t \in \overline{1, N-2}$ и $Q \setminus \{s\} \in \mathcal{G}_t$. Согласно (6.6) получаем следующее равенство:

$$\mathcal{M}_t[Q \setminus \{s\}] = \bigcup_{j \in \mathcal{J}_t(Q \setminus \{s\})} \mathbf{M}_j \in \mathcal{P}'(\mathbf{X}). \tag{9.23}$$

Наконец, согласно (6.7) имеем равенство

$$\mathbb{D}_t[Q \setminus \{s\}] = \{(\bar{y}, Q \setminus \{s\}) :\ \bar{y} \in \mathcal{M}_t[Q \setminus \{s\}]\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathfrak{N}). \tag{9.24}$$

Легко видеть, что $s \in \mathcal{J}_t(Q \setminus \{s\})$, а потому, с учетом (9.23), получаем

$$\mathbf{M}_s \subset \mathcal{M}_t[Q \setminus \{s\}]. \tag{9.25}$$

Из (9.24) и (9.25) следует, что $(y, Q \setminus \{s\}) \in \mathbb{D}_t[Q \setminus \{s\}]$. С учетом (9.22) получаем (9.16). $\square$

§ 10. Потоки значений функции Беллмана

Поскольку $\mathbb{K}$ (9.13) выбиралось произвольно, мы используем (9.15) при произвольных (начальных) списках из $\mathcal{G}_{N-1}$:

$$\mathcal{D}_s[K] \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{P \in \tilde{\mathbb{T}}[K;N-(s+1)]} \mathbb{D}_s[P] \in \mathcal{P}'(D_s) \ \ \forall\, K \in \mathcal{G}_{N-1}\ \forall\, s \in \overline{1, N-1}. \tag{10.1}$$

В частности, таким образом определены множества $\mathcal{D}_s[\overline{1,N} \setminus \{j\}],\ j \in \mathbf{I}(\overline{1,N}),\ s \in \overline{1,N-1}$. Из предложения 9.1 получаем (поскольку выбор $\mathbb{K}$ (9.13) был произвольным), что

$$(y, Q \setminus \{s\} \in \mathcal{D}_t[K] \ \ \forall\, K \in \mathcal{G}_{N-1}\ \forall\, t \in \overline{1,N-2}\ \forall\,(x,Q) \in \mathcal{D}_{t+1}[K]\ \forall\, s \in \mathbf{I}(Q)\ \forall\, y \in \mathbf{M}_s. \tag{10.2}$$

В связи с (10.2) полезно учесть (8.1). Из (6.12) и (10.1) следует, что

$$\begin{gathered}\mathcal{W}_s[K] \stackrel{\triangle}{=} (v_s(x,P))_{(x,P)\in\mathcal{D}_s[K]} = (v(x,P))_{(x,P)\in\mathcal{D}_s[K]} \in \mathcal{R}_+[\mathcal{D}_s[K]] \\ \forall\, K \in \mathcal{G}_{N-1}\ \forall\, s \in \overline{1,N-1}.\end{gathered} \tag{10.3}$$

Таким образом, определены функции $\mathcal{W}_s[\overline{1,N} \setminus \{j\}],\ j \in \mathbf{I}(\overline{1,N}),\ s \in \overline{1,N-1}$.

Рассмотрим представление функций $\mathcal{W}_1[K],\ K \in \mathcal{G}_{N-1}$, или, что то же самое (см. (8.1)), функций $\mathcal{W}_1[\overline{1,N} \setminus \{j\}],\ j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$. В этой связи учтем, что $\mathcal{D}_1[K] \subset D_1\ \forall\, K \in \mathcal{G}_{N-1}$. Тогда при $K \in \mathcal{G}_{N-1}$ и $(x,P) \in \mathcal{D}_1[K] \quad P \in \mathcal{G}_1$. Это означает, что (см. представление $\mathcal{G}_1$ в разделе 6)

$$\forall\, K \in \mathcal{G}_{N-1}\ \forall\,(x,P) \in \mathcal{D}_1[K]\ \exists\, t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1 :\ P = \{t\}. \tag{10.4}$$

Из общих соображений (см. замечание 3.2, (10.3) и определения раздела 6) получаем, что

$$\begin{gathered}\mathcal{W}_1[K](x,P) = \min_{j \in P}\ \min_{z \in \mathbb{A}_j(x)} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), P) + c_j(z,P) + f(\mathrm{pr}_2(z))] \\ \forall\, K \in \mathcal{G}_{N-1}\ \forall\,(x,P) \in \mathcal{D}_1[K].\end{gathered} \tag{10.5}$$

С учетом (10.4) получаем теперь следующее представление: если $K \in \mathcal{G}_{N-1},\ (x,P) \in \mathcal{D}_1[K],\ t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1$ и при этом $P = \{t\}$, то (см. (10.5))

$$\mathcal{W}_1[K](x,P) = \min_{z \in \mathbb{A}_t(x)} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), \{t\}) + c_t(z,\{t\}) + f(\mathrm{pr}_2(z))]. \tag{10.6}$$

Из (10.4) следует, что все функции $\mathcal{W}_1[K],\ K \in \mathcal{G}_{N-1}$, могут быть определены посредством соотношений, подобных (10.6). Разумеется (см. (8.1)), правило (10.6) позволяет построить все функции

$$\mathcal{W}_1[\overline{1,N} \setminus \{t\}],\ t \in \mathbf{I}(\overline{1,N}), \tag{10.7}$$

что достаточно для всех последующих рассуждений.

Рекуррентная процедура в схеме с фиксированным начальным состоянием. В (10.6) указан способ построения всех функций $\mathcal{W}_1[K],\ K \in \mathcal{G}_{N-1}$. Распределяя списки из $\mathcal{G}_{N-1}$ между $\mathbf{n}$ процессорами, мы полагаем, что каждый из этих процессоров располагает ровно одним таким списком (можно считать, что между процессорами распределяются индексы из $\mathbf{I}(\overline{1,N})$ с выделением каждому процессору одного из этих индексов; тогда каждый процессор с учетом (10.4) строит свой вариант функции (10.7) независимо от остальных вычислителей).

Рассмотрим дальнейшее построение (10.3), фиксируя для большей краткости список

$$K_* \in \mathcal{G}_{N-1}; \tag{10.8}$$

в силу (8.1) это означает, что фиксирован индекс $j_* \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$, для которого $K_* = \overline{1,N} \setminus \{j_*\}$. Тогда функция $\mathcal{W}_1[K_*] \in \mathcal{R}_+[\mathcal{D}_1[K_*]]$ определяется правилами (10.5), (10.6); она уже построена.

Пусть теперь $l \in \overline{1, N-2}$ и уже построена функция

$$\mathcal{W}_l[K_*] \in \mathcal{R}_+[\mathcal{D}_l[K_*]]. \tag{10.9}$$

Это означает, что все значения

$$\mathcal{W}_l[K_*](x, P), \ (x, P) \in \mathcal{D}_l[K_*], \tag{10.10}$$

нам известны. Покажем, как, используя только значения (10.10), построить функцию

$$\mathcal{W}_{l+1}[K_*] \in \mathcal{R}_+[\mathcal{D}_{l+1}[K_*]]. \tag{10.11}$$

Учитываем здесь, что $l+1 \in \overline{2, N-1}$. Будем использовать предложение 9.1. Согласно (10.8) и (10.1) $\mathcal{D}_{l+1}[K_*] \in \mathcal{P}'(D_{l+1})$. При этом (см. (10.2), (10.8))

$$(y, Q \setminus \{s\}) \in \mathcal{D}_l[K_*] \ \ \forall\, (x, Q) \in \mathcal{D}_{l+1}[K_*] \ \forall\, s \in \mathbf{I}(Q) \ \forall\, y \in \mathbf{M}_s. \tag{10.12}$$

С учетом (3.4) и (3.10) имеем (см. (6.8)) также свойство $\mathrm{pr}_2(z) \in \mathbf{M}_s \ \ \forall\, (x, Q) \in \mathcal{D}_{l+1}[K_*] \ \forall\, s \in \mathbf{I}(Q) \ \forall\, z \in \mathbb{A}_s(x)$. Поэтому из (10.12) следует, в частности, что

$$(\mathrm{pr}_2(z), Q \setminus \{s\}) \in \mathcal{D}_l[K_*] \ \ \forall\, (x, Q) \in \mathcal{D}_{l+1}[K_*] \ \forall\, s \in \mathbf{I}(Q) \ \forall\, z \in \mathbb{A}_s(x). \tag{10.13}$$

Тогда (см. (10.9), (10.13)) имеем, что при $(x, Q) \in \mathcal{D}_{l+1}[K_*], \ s \in \mathbf{I}(Q)$ и $z \in \mathbb{A}_s(x)$ определено значение $\mathcal{W}_l[K_*](\mathrm{pr}_2(z), Q \setminus \{s\}) \in [0, \infty[$. Как следствие, получаем, что корректно определяется

$$\min_{j \in \mathbf{I}(Q)} \ \min_{z \in \mathbb{A}_j(x)} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), Q) + c_j(z, Q) + \mathcal{W}_l[K_*](\mathrm{pr}_2(z), Q \setminus \{j\})] \in [0, \infty[\ \ \forall\, (x, Q) \in \mathcal{D}_{l+1}[K_*]. \tag{10.14}$$

С другой стороны, $\mathcal{D}_l[K_*] \in \mathcal{P}'(D_l)$. При этом согласно (10.3)

$$\mathcal{W}_l[K_*](y, S) = v_l(y, S) \in [0, \infty[\ \ \forall\, (y, S) \in \mathcal{D}_l[K_*]. \tag{10.15}$$

С учетом (10.13) и (10.15) имеем также, что

$$\begin{gathered}\mathcal{W}_l[K_*](\mathrm{pr}_2(z), Q \setminus \{j\}) = v_l(\mathrm{pr}_2(z), Q \setminus \{j\}) \in [0, \infty[\\ \forall\, (x, Q) \in \mathcal{D}_{l+1}[K_*] \quad \forall\, j \in \mathbf{I}(Q) \quad \forall\, z \in \mathbb{A}_j(x).\end{gathered} \tag{10.16}$$

Из (10.15), (10.16) и предложения 6.1 следует (см. (10.14)) теперь, что

$$\begin{gathered}\mathcal{W}_{l+1}[K_*](x, Q) = \min_{j \in \mathbf{I}(Q)} \ \min_{z \in \mathbb{A}_j(x)} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), Q) + c_j(z, Q) + \\ + \mathcal{W}_l[K_*](\mathrm{pr}_2(z), Q \setminus \{j\})] \quad \forall\, (x, Q) \in \mathcal{D}_{l+1}[K_*].\end{gathered} \tag{10.17}$$

Таким образом (см. (10.11), (10.17)), определено правило преобразования $\mathcal{W}_l[K_*] \longrightarrow \mathcal{W}_{l+1}[K_*]$. Поскольку выбор l был произвольным, построена рекуррентная процедура

$$\mathcal{W}_1[K_*] \longrightarrow \mathcal{W}_2[K_*] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{W}_{N-1}[K_*],$$

задаваемая правилом (10.17). При этом $\mathcal{W}_1[K_*]$ определяется в (10.6).

Коль скоро и выбор K_* (10.8) был произвольным, для всякого $K \in \mathcal{G}_{N-1}$ указана реализуемая рекуррентная процедура построения функций

$$\mathcal{W}_1[K] \longrightarrow \mathcal{W}_2[K] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{W}_{N-1}[K]. \tag{10.18}$$

Иными словами (см. (8.1), (10.18)), каждому $j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$ сопоставлена (конечная) рекуррентная процедура

$$\mathcal{W}_1[\overline{1, N} \setminus \{j\}] \longrightarrow \mathcal{W}_2[\overline{1, N} \setminus \{j\}] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{W}_{N-1}[\overline{1, N} \setminus \{j\}]. \tag{10.19}$$

Каждое из соотношений (10.18), (10.19) определяет систему из $\mathbf{n}$ независимых вычислительных процедур. В следующем разделе будет показано, что на этой основе можно построить все функции $v_s, \ s \in \overline{0, N}$, что, в свою очередь, доставляет возможность для определения V и построения (см. раздел 7) оптимального решения ОЗМ.

§ 11. Реализация схемы с независимыми вычислениями (алгоритм на функциональном уровне)

Рассмотрим вариант соединения вычислительных процессов (10.18), (10.19) в единую схему построения слоёв функции Беллмана. В этой связи напомним сначала, что [24, предложение 16]

$$\tilde{\mathbb{T}}[K;t+1] = \{P\setminus\{h\}:\ P\in\tilde{\mathbb{T}}[K;t],\ h\in\mathbf{I}(P)\}\ \ \forall\, K\in\mathcal{G}_{N-1}\ \forall\, t\in\overline{0,N-3}. \tag{11.1}$$

С учетом (8.1) и (11.1) получаем, что

$$\tilde{\mathbb{T}}[\overline{1,N}\setminus\{j\};t+1] = \{P\setminus\{h\}:\ P\in\tilde{\mathbb{T}}[\overline{1,N}\setminus\{j\};t],\ h\in\mathbf{I}(P)\}\ \ \forall\, j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})\ \forall\, t\in\overline{0,N-3}. \tag{11.2}$$

Соотношения (11.1), (11.2) определяют естественные рекуррентные процедуры построения ОД

$$\tilde{\mathbb{T}}[K;0]\longrightarrow\tilde{\mathbb{T}}[K;1]\longrightarrow\ldots\longrightarrow\tilde{\mathbb{T}}[K;N-2], \tag{11.3}$$

где $K\in\mathcal{G}_{N-1}$. Естественной модификацией (11.3) является (см. (8.1)) следующая рекуррентная процедура:

$$\tilde{\mathbb{T}}[\overline{1,N}\setminus\{j\};0]\longrightarrow\tilde{\mathbb{T}}[\overline{1,N}\setminus\{j\};1]\longrightarrow\ldots\longrightarrow\tilde{\mathbb{T}}[\overline{1,N}\setminus\{j\};N-2], \tag{11.4}$$

где $j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})$. Комбинируя (10.1), (11.3), получаем схему

$$\mathcal{D}_{N-1}[K]\longrightarrow\mathcal{D}_{N-2}[K]\longrightarrow\ldots\longrightarrow\mathcal{D}_1[K], \tag{11.5}$$

где $K\in\mathcal{G}_{N-1}$. С учетом (8.1) процедуру (11.5), связанную с (11.4), можно рассматривать в виде

$$\mathcal{D}_{N-1}[\overline{1,N}\setminus\{j\}]\longrightarrow\mathcal{D}_{N-2}[\overline{1,N}\setminus\{j\}]\longrightarrow\ldots\longrightarrow\mathcal{D}_1[\overline{1,N}\setminus\{j\}], \tag{11.6}$$

где $j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})$. Для построения (11.5) и (11.6) следует использовать комбинацию (10.1), (11.3) и (11.4). Рассматриваем (11.5), (11.6) как потенциально реализуемые процедуры.

Предложение 11.1. *Если $s\in\overline{1,N-1}$, то справедливо равенство $D_s=\bigcup\limits_{K\in\mathcal{G}_{N-1}}\mathcal{D}_s[K]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (10.1) непосредственно следует вложение

$$\bigcup_{K\in\mathcal{G}_{N-1}}\mathcal{D}_s[K]\subset D_s \tag{11.7}$$

(индекс $s\in\overline{1,N-1}$ в пределах доказательства фиксируем). Пусть $(x^*,K^*)\in D_s$. С учетом (6.8) подберем

$$\Theta\in\mathcal{G}_s \tag{11.8}$$

со свойством $(x^*,K^*)\in\mathbb{D}_s[\Theta]$; «момент времени»

$$\tau\overset{\triangle}{=}N-(s+1)\in\overline{0,N-2} \tag{11.9}$$

реализует равенство $s=N-(\tau+1)$. Поэтому (см. (9.6), (11.9))

$$\mathcal{G}_s=\bigcup_{K\in\mathcal{G}_{N-1}}\tilde{\mathbb{T}}[K;\tau]. \tag{11.10}$$

С учетом (11.8) и (11.10) подберем список $Q\in\mathcal{G}_{N-1}$, для которого $\Theta\in\tilde{\mathbb{T}}[Q;\tau]$. Поскольку $s\in\overline{1,N-1}$, имеем из (10.1) равенство

$$\mathcal{D}_s[Q]=\bigcup_{P\in\tilde{\mathbb{T}}[Q;\tau]}\mathbb{D}_s[P]. \tag{11.11}$$

Тогда, в частности, согласно (11.11) $\mathbb{D}_s[\Theta] \subset \mathcal{D}_s[Q]$ и, как следствие, по выбору Θ имеем $(x^*, K^*) \in \mathcal{D}_s[Q]$; тем более

$$(x^*, K^*) \in \bigcup_{K \in \mathcal{G}_{N-1}} \mathcal{D}_s[K].$$

Поскольку выбор (x^*, K^*) был произвольным, установлено вложение, противоположное (11.7), а стало быть, и требуемое равенство. $\square$

Теперь можно указать следующий вариант построения функций $v_s, \ s \in \overline{1, N-1}$ (напомним, что v_0 нам известна; см. раздел 6).

Итак, пусть в схеме с независимыми вычислениями (см. (10.18)) уже построены все функции

$$\mathcal{W}_s[K] \in \mathcal{R}_+[\mathcal{D}_s[K]], \ K \in \mathcal{G}_{N-1}, \ s \in \overline{1, N-1},$$

определяемые в (10.3). Итак, нам известны значения

$$\mathcal{W}_s[K](x, P) \in [0, \infty[\ \ \forall K \in \mathcal{G}_{N-1} \, \forall s \in \overline{1, N-1} \, \forall (x, P) \in \mathcal{D}_s[K]. \tag{11.12}$$

Пусть выбраны произвольно $\nu \in \overline{1, N-1}$ и $(x_0, K_0) \in D_\nu$. Тогда с учетом предложения 11.1 имеем, что

$$(x_0, K_0) \in \mathcal{D}_\nu \left[K^0\right], \tag{11.13}$$

где $K^0 \in \mathcal{G}_{N-1}$; тогда согласно (11.12) определено число $\mathcal{W}_\nu \left[K^0\right](x_0, K_0) \in [0, \infty[$. При этом согласно (10.3) и (11.13) справедливо равенство

$$\mathcal{W}_\nu \left[K^0\right](x_0, K_0) = v_\nu(x_0, K_0). \tag{11.14}$$

Посредством (11.14) определено значение $v_\nu(x_0, K_0)$.

Поскольку выбор ν и (x_0, K_0) был произвольным, получено следующее правило: если $s \in \overline{1, N-1}$ и требуется построить функцию v_s (определяемую конечным набором значений), то, выбирая произвольную позицию $(y, P) \in D_s$, следует подобрать с учетом предложения 11.1 список $K \in \mathcal{G}_{N-1}$ со свойством $(y, P) \in \mathcal{D}_s[K]$, после чего достаточно положить, что $v_s(y, P) = \mathcal{W}_s[K](y, P)$. Напомним, что функция v_{N-1}, которая также определяется вышеупомянутым правилом, реализует глобальный экстремум V : следует воспользоваться правилом (7.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.
2. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3–29.
3. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3–26.
4. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
5. Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // Экономика и математические методы. 1965. Т. 1. Вып. 1. С. 90–107.
6. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
7. Хелд М., Карп Р.М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.
8. Ташлыков О.Л. Ремонт оборудования атомных станций: учеб. пособие для вузов / под ред. С.Е. Щеклеина. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2003. 320 с.
9. Ташлыков О.Л., Сесекин А.Н., Щеклеин С.Е., Ченцов А.Г. Разработка оптимальных алгоритмов вывода АЭС из эксплуатации с использованием методов математического моделирования // Изв. вузов. Ядерная энергетика. 2009. № 2. С. 115–120.
10. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Экстремальная задача маршрутизации перемещений с ограничениями и внутренними потерями // Изв. вузов. Математика. 2010. № 6. С. 64–81.
11. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. Москва; Ижевск: РХД, 2008. 238 с.

12. Сесекин А.Н., Ченцов А.А., Ченцов А.Г. Обобщенная задача курьера с функцией затрат, зависящей от списка заданий // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 2. С. 68–77.
13. Ченцов А.Г. Метод динамического программирования в экстремальных задачах маршрутизации с ограничениями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 3. С. 52–66.
14. Ченцов А.А., Ченцов А.Г. Об одной задаче маршрутизации с внутренними работами // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 1. С. 298–317.
15. Ченцов А.А., Ченцов А.Г. Об одной итерационной процедуре решения задачи маршрутизации с ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 3. С. 261–281.
16. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Динамическое программирование в одной нестационарной задаче маршрутизации // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 1 (39). С. 151–154.
17. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Маршрутизация перемещений с ограничениями и нестационарными функциями стоимости // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. Санкт-Петербург. 2012. № 4. С. 88–93
18. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Об одной нестационарной задаче маршрутизации с ограничениями // Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль. 2012. Т. 19. № 4. С. 5–24.
19. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Динамическое программирование в экстремальных задачах маршрутизации: общая теория и элементы параллельной структуры // Параллельные вычисления и задачи управления: труды шестой международной конференции. Москва. 2012. Т. 2. С. 183–198.
20. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
21. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
22. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
23. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1990. 960 с.
24. Ченцов А.Г. Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Математическое моделирование и программирование. 2012. Вып. 12. С. 53–76.
25. Ченцов А.Г. Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 134–149.

Поступила в редакцию 11.02.2013

Ченцов Александр Георгиевич, член-корреспондент РАН, заведующий отделом управляемых систем, Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

A. G. Chentsov

To question of routing of works complexes

Keywords: route, dynamic programming, preceding conditions.

Mathematical Subject Classifications: 28A33

The complicated variant of the problem of sequential megalopolis circuit with constraints in the form of preceding conditions is considered. The additional constraints on the junction character for fragments of exterior permutations and interior works (with respect to megalopolis) are imposed upon. It is supposed that costs of exterior permutations and interior works depend on the task list explicitly. The procedure of the dynamic programming type and (on their base) algorithm on the functional level are constructed.

REFERENCES

1. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Problems of the theory, *Avtomatika i telemekhanika*, 1989, no. 9, pp. 3–34.

2. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Exact algorithms, *Avtomatika i telemekhanika*, 1989, no. 10, pp. 3–29.

3. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Approximation algorithms, *Avtomatika i telemekhanika*, 1989, no. 11, pp. 3–26.

4. Garey M., Johnson D. *Computers and Intractability*, 1979, 340 p. Translated under the title *Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi*, Moscow: Mir, 1982, 416 p.

5. Little J., Murty K., Sweeney D., Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem, *Ekonom. Mat. Met.*, 1965, vol. 1, no. 1, pp. 90–107.

6. Bellmann R. Application of dynamic programming to traveling salesman problem, *Kibernet. Sb.*, Moscow: Mir, 1964, vol. 9, pp. 219–228.

7. Kheld M., Karp R.M. Application of dynamic programming to the problem of ordering, *Kibernet. Sb.*, Moscow: Mir, 1964, vol. 9, pp. 202–218.

8. Tashlykov O.L. *Remont oborudovaniya atomnykh stantsii* (Repair of equipment of nuclear power plants), Yekaterinburg: USTU–UPI, 2003, 320 p.

9. Tashlykov O.L., Sesekin A.N., Shcheklein S.E., Chentsov A.G. Development of optimal algorithms for decommissioning by using mathematical modeling, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Yadern. Energ.* 2009, no. 2, pp. 115–120.

10. Chentsov A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. An extremal constrained routing problem with internal losses, *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 2010, vol. 54, no. 6, pp. 54–68.

11. Chentsov A.G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadanii: voprosy teorii* (Extremal problems of routing and assignment of tasks: questions of theory), Izhevsk: Institute of Computer Science, 2008, 240 p.

12. Sesekin A.N., Chentsov A.A., Chentsov A.G. Generalized problem with the courier cost function that depends on the job list, *Izv. Ross. Akad. Nauk Teor. Sist. Upr.*, 2010, no. 2, pp. 68–77.

13. Chentsov A.G. Dynamic programming method in extremal constrained routing problems, *Izv. Ross. Akad. Nauk Teor. Sist. Upr.*, 2010, no. 3, pp. 52–66.

14. Chentsov A.A., Chentsov A.G. On a routing problem with the inner workings, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2012, vol. 18, no. 1, pp. 298–317.

15. Chentsov A.A., Chentsov A.G. About one of the iterative procedure for solving the routing problem with restriction, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2012, vol. 18, no. 3, pp. 261–281.

16. Chentsov A.G., Chentsov P.A. Dynamic programming in a nonstationary route problem, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2012, no. 1 (39), pp. 151–154.

17. Chentsov A.G., Chentsov P.A. Routing movement restrictions and time-dependent cost functions, *Nauch. Tekhn. Vedom. SPb Gos. Politekh. Univ. Inform. Telekom. Upr.*, St. Petersburg, 2012, no. 4, pp. 88–93.

18. Chentsov A.G., Chentsov P.A. On a time-dependent routing problem with restrictions, *Model. Anal. Inf. Sist.*, Yaroslavl', 2012, vol. 19, no. 4, pp. 5–24.

19. Chentsov A.A. Chentsov A.G., Chentsov P.A. Dynamic programming in extreme routing problems: general theory and elements of parallel structure, *Parallel Computations and Control Problems: Abstracts of Int. Conf.*, Moscow, 2012, vol. 2, pp. 183–198

20. Kuratovskii K., Mostovskii A. *Teoriya mnozhestv* (Theory of sets), Moscow: Mir, 1970, 416 p.

21. Dieudonne J. *Osnovy sovremennogo analiza* (Foundations of modern analysis), Moscow: Mir, 1964, 430 p.

22. Warga J. *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami* (Optimal control of differential and functional equations), Moscow: Nauka, 1977, 624 p.

23. Kormen A., Leizerson Ch., Rivest R. *Algoritmy. Postroenie i analiz* (The algorithms. Construction and analysis), Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 1990, 960 p.

24. Chentsov A.G. One parallel procedure for the construction of the Bellman function in the generalized problem of the courier with the inner workings, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Model. Program.*, 2012, no. 12, pp. 53–76.

25. Chentsov A.G. One parallel procedure for the construction of the Bellman function in the generalized problem of the courier with the inner workings, *Avtomatika i telemekhanika*, 2012, no. 3, pp. 134–149.

Received 11.02.2013

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia. E-mail: chentsov@imm.uran.ru