УДК 517.977.5

© *Д. В. Хлопин*

О НЕОБХОДИМЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ СИЛЬНО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ [1]

Рассматриваются задачи управления на бесконечном промежутке времени со свободным правым концом. Получены необходимые условия сильной оптимальности. Сам метод доказательства фактически следует классической работе Халкина, а построенное в работе краевое условие на бесконечности является усилением условия, предложенного Сейерстадом. Построенная в работе полная система соотношений принципа максимума позволяет выписать для сопряженной переменной выражение в виде несобственного интеграла, зависящего лишь от разворачивающейся траектории. С. М. Асеев, А. В. Кряжимский, В. М. Вельев получали такое выражение в качестве необходимого условия в некоторых классах задач управления. Сильная оптимальность в ряде случаев позволяет создать переопределенную систему соотношений; в работе получены условия, достаточные для этого. Разобран пример.

Ключевые слова: задача управления, сильно оптимальное управление, задача на бесконечном промежутке, необходимые условия оптимальности, краевое условие на бесконечности, принцип максимума Понтрягина.

§ 1. Постановка задачи

В качестве промежутка времени будем рассматривать $\mathbb{T} \overset{\triangle}{=} \{t \in \mathbb{R} \,|\, t \geqslant 0\}$. В качестве фазового пространства исходной управляемой системы будем использовать некоторое конечномерное евклидовое пространство $\mathbb{X} \overset{\triangle}{=} \mathbb{R}^m$. Пространство $(AC)(\mathbb{T}, \mathbb{X})$ всех абсолютно непрерывных функций из $\mathbb{T}$ в $\mathbb{X}$ оснастим компактно-открытой топологией. Также считается заданным конечномерное евклидово пространство $\mathbb{U}$ и компактозначное отображение $U : \mathbb{T} \multimap \mathbb{U}$. Будем считать, что это отображение интегрально ограничено на компактах и имеет измеримый по Борелю график.

Под множеством всевозможных допустимых управлений $\mathfrak{U}$ будем понимать множество всех ограниченных на всяком компакте измеримых по Борелю селекторов многозначного отображения U.

Пусть дана управляемая система

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \qquad \text{для п.в. } t \in \mathbb{T}, \tag{1.1a}$$
$$x(0) = x_*, \tag{1.1b}$$
$$u \in U(t) \qquad \text{для п.в. } t \in \mathbb{T}. \tag{1.1c}$$

Наряду с функцией $f : \mathbb{T}\times\mathbb{X}\times\mathbb{U} \mapsto \mathbb{X}$ будем считать заданной функцию $g : \mathbb{T}\times\mathbb{X}\times\mathbb{U} \mapsto \mathbb{R}$. Будем всюду далее предполагать, что функции f, g и их производные по x — локально липшицевые по x отображения Каратеодори, интегрально ограниченные на компактах; кроме того, для f выполнено условие подлинейного роста: для некоторой непрерывной функции $M \in C(\mathbb{T}, \mathbb{T})$

$$||f(t, x, u)|| \leqslant M(t)(1 + ||x||) \quad \forall t \in \mathbb{T}, \quad u \in U(t), \quad x \in \mathbb{X}.$$

Сделанных предположений достаточно, чтобы всякое допустимое управление $u \in \mathfrak{U}$ порождало единственное решение задачи Коши (1.1a)–(1.1b). Это решение также единственным

[1]Работа частично поддержана грантами РФФИ № 12–01–31172–мол-а, №12–01–00537–а и Молодежным грантом ИММ УрО РАН.

образом может быть продолжено на всё $\mathbb{T}$ — до траектории $x(\cdot)$ из $(AC)(\mathbb{T},\mathbb{X})$. Теперь можно сопоставить каждому $u\in\mathfrak{U}$ скалярную функцию $J[u]$ на $\mathbb{T}$ правилом: для каждого $T\in\mathbb{T}$

$$J[u](T)\stackrel{\triangle}{=}\int_0^T g(t,x(t),u(t))\,dt. \tag{1.2}$$

При этом фактически задано отображение $u\mapsto J[u]:\mathfrak{U}\to(AC)(\mathbb{T},\mathbb{R})$.

Отметим, что требовать максимизации на траекториях системы (1.1a)–(1.1c) значения (1.2) для $T=\infty$, вообще говоря, некорректно, поскольку выражение $J[u](T)$ не обязано иметь предел (тем более конечный предел) при $T\to\infty$. Как следствие, требуется дополнительно формализовать понятие оптимальности в задаче максимизации на бесконечном промежутке.

В задачах управления на бесконечном промежутке предложена целая серия таких определений оптимальности [13–15, 21, 22]. Нас будет интересовать понятие сильно оптимального управления (“strongly optimal”; см., например, [14, 15]).

Определение 1. Пусть дана некоторая неограниченно возрастающая последовательность $\tau\stackrel{\triangle}{=}(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ моментов времени из $\mathbb{T}$. Будем говорить, что управление $u^0\in\mathfrak{U}$ является τ-*сильно оптимальным* решением задачи максимизации (1.2) на траекториях системы (1.1a)–(1.1c) вдоль последовательности τ, если для всех $n\in\mathbb{N}$

$$J[u^0](\tau_n)\geqslant J[\overline{u}](\tau_n)\qquad\forall\overline{u}\in\mathfrak{U}.$$

В случае, если управление $u^0\in\mathfrak{U}$ таково для какой-то неограниченно возрастающей последовательности τ, будем говорить о нём как о *сильно оптимальном* решении.

Всюду далее будем предполагать, что τ-сильно оптимальное управление $u^0\in\mathfrak{U}$ существует при некоторой последовательности τ; соответствующую ему траекторию обозначим через x^0. Зафиксируем u^0,x^0,τ.

Отметим, что в работах [14, 15] при определении сильно оптимального решения накладывалось также дополнительное требование ограниченности отображения $J[u^0]$.

§ 2. Соотношения принципа максимума Понтрягина

Определим функцию Гамильтона–Понтрягина $\mathcal{H}:\mathbb{X}\times\mathbb{T}\times\mathbb{U}\times\mathbb{T}\times\mathbb{X}\mapsto\mathbb{R}$ правилом: $\mathcal{H}(x,t,u,\lambda,\psi)\stackrel{\triangle}{=}\psi f\big(t,x,u\big)+\lambda g\big(t,x,u\big)$. Введём соотношения

$$\dot\psi(t) = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}\big(x^0(t),t,u^0(t),\lambda,\psi(t)\big); \tag{2.1a}$$

$$\sup_{p\in U(t)}\mathcal{H}\big(x^0(t),t,p,\lambda,\psi(t)\big) = \mathcal{H}\big(x^0(t),t,u^0(t),\lambda,\psi(t)\big); \tag{2.1b}$$

$$\lambda=1\qquad\text{или}\qquad\lambda=0,\ ||\psi(0)||=1. \tag{2.1c}$$

Хорошо известно [17], что эти соотношения выполнены для пары (x^0,u^0) при некоторых $\psi^0\in(AC)(\mathbb{T},\mathbb{X}),\lambda^0\in[0,1]$. При этом от u^0 требуется лишь неулучшаемость значения $J[u^0](T)$ при фиксировании правого конца $x^0(T)$ для некоторых, но сколь угодно поздних моментов T; для сильно оптимального управления это заведомо выполнено.

Однако, как отмечено уже в той же статье [17], построенная система соотношений (2.1a)–(2.1c) неполна, и, вообще говоря, требует дополнительного условия на бесконечности. Найти сколько-нибудь универсальное условие трансверсальности хотя бы для задачи со свободным правым концом пока не удается: большинство предложенных условий могут выделять слишком много решений соотношений (2.1a)–(2.1c), или оказаться несовместными с ними (см. [1, § 6 и § 16], [20]).

С другой стороны, в работе [20] для достаточно широкого класса задач управления при исследовании решений принципа максимума А. Сейерстад предложил находить то из них, которое является пределом решений этих же соотношений, но выписанных для задач со сколь угодно поздними моментами окончания. В самой работе [20] необходимость такого условия [20, Theorem 8.1] показана для весьма широкого класса задач управления, но при достаточно сильных предположениях, обеспечивающих в частности, суммируемость целевого функционала, а также сходимость ψ^0 к нулю (подробнее см., например, [1, §12]).

В рамках этого подхода для задачи на бесконечном промежутке со свободным правым концом стоит искать решение (ψ^0, λ^0) соотношений принципа максимума (2.1a)–(2.1c), у которого сопряженная переменная ψ^0 является поточечным пределом сопряженных переменных ψ^n — решений (2.1a), — но зануляющихся вдоль неограниченно возрастающей последовательности моментов времени.

Определим подобное асимптотическое условие для сильно оптимального решения. В отличие от работы [20] мы не будем предполагать (или доказывать) нормальность задачи, поэтому в анормальных задачах переходить к пределу придется не только в компоненте ψ, но и в компоненте λ. С другой стороны, в отличие от [20] мы сможем гарантировать, что пары (λ^n, ψ^n) удовлетворяют не только сопряженной системе (2.1a), но и условию максимума (2.1b). Формализуем сказанное.

Определение 2. Будем говорить, что нетривиальное решение (λ^0, ψ^0) соотношений принципа максимума (2.1a)–(2.1b) *строго τ-исчезающее* (или просто строго исчезающее), если для некоторой подпоследовательности $\tau' = (\tau'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности τ существуют сходящаяся к λ^0 последовательность чисел $\lambda^n \in (0,1]$, сходящаяся к ψ^0 равномерно на всяком компакте последовательность функций $\psi^n \in (AC)(\mathbb{T}, \mathbb{X})$, удовлетворяющих для всякого $n \in \mathbb{N}$ при $\lambda = \lambda^n$, $\psi = \psi^n$ соотношениям (2.1a), (2.1b) почти всюду на $[0, \tau'_n]$, а также краевому условию

$$\psi^n(\tau'_n) = 0. \tag{2.2}$$

Такое определение названо строго исчезающим решением соотношений принципа максимума по аналогии с работой [18], в которой было показано более слабое необходимое условие оптимальности (названное там «исчезающим решением») для критерия «равномерно слабообгоняющего оптимального управления» (“weakly uniformly overtaking optimal”).

Покажем при сделанных выше предположениях необходимость подобного условия для всякого сильно оптимального решения. Само доказательство при этом фактически повторяет доказательство принципа максимума из работы [17], нужно лишь дополнительно отслеживать краевое условие.

Теорема 1. *Пусть управление $u^0 \in \mathfrak{U}$ является τ-сильно оптимальным управлением в задаче максимизации* (1.2) *на траекториях* (1.1a)–(1.1c) *вдоль последовательности τ.*

Тогда найдётся нетривиальное строго τ-исчезающее решение $(\lambda^0, \psi^0) \in \{0,1\} \times (AC)(\mathbb{T}, \mathbb{X})$ соотношений принципа максимума (2.1a)–(2.1c)*, то есть существуют сходящаяся к нему последовательность пар $(\lambda^n, \psi^n) \in (0,1] \times (AC)(\mathbb{T}, \mathbb{X})$ и такая подпоследовательность $\tau' \subset \tau$, что каждая пара (λ^n, ψ^n) является на $[0, \tau'_n]$ решением* (2.1a)–(2.1c) *с краевым условием* (2.2)*. Если при этом $\lambda^0 = 1$, то можно считать, что $\lambda^n = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Из определения τ-сильной оптимальности следует, что $J[u^0](\tau'_n) \geqslant J[u](\tau'_n)$ для всех допустимых $u \in \mathfrak{U}$. Тогда $u^0|_{[0,\tau_n]}$ является оптимальным при максимизации

$$J[u](\tau_n) \triangleq \int_0^{\tau_n} g(t, x(t), u(t))\, dt$$

на траекториях (1.1a)–(1.1c). По принципу максимума [3, 4] для этой задачи найдётся пара $(\lambda^n, \psi^n) \in (0,1] \times (AC)([0,\tau_n], \mathbb{X})$, для которой на промежутке $[0, \tau_n]$ выполнены соотношения (2.1a), (2.1b), а кроме того выполнено условие трансверсальности на правый конец, то есть $\psi^n(\tau_n) = 0$. Более того, поскольку $||\psi^n(0)|| + \lambda^n \neq 0$, то поделив как ψ^n, так и λ^n на такую сумму, можно всегда считать выполненным условие

$$||\psi^n(0)|| + \lambda^n = 1. \tag{2.3}$$

Продолжим также в силу управления u^0 функцию ψ^n как решение сопряженной системы (2.1a) на всю ось $\mathbb{T}$.

Заметим, что, в силу условия (2.3), $(\psi^n(0), \lambda^n)$ лежат в компакте, следовательно, перейдя при необходимости к подпоследовательности (в том числе к подпоследовательности $\tau' \subset \tau$), можно считать, что последовательность пар $(\psi^n(0), \lambda^n)$ сходится к некоторой $(\overline{\psi}, \overline{\lambda})$. Рассмотрим решение ψ^∞ сопряженной системы (2.1a) с начальным условием $\psi^\infty(0) = \overline{\psi}$ при $\lambda^\infty = \overline{\lambda}$. По теореме о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных имеем, что последовательность ψ^n сходится к ψ^∞ равномерно на каждом компакте. Для почти каждого $t \in \mathbb{T}$ условие максимума (2.1b) выполнено для всех (λ^n, ψ^n), начиная с некоторого n. Переходя к пределу, имеем условие максимума (2.1b) уже и для $(\lambda^\infty, \psi^\infty)$ при почти всех $t \in \mathbb{T}$. Построенное решение, в силу предельного перехода в (2.3), удовлетворяет условию $||\psi^\infty(0)|| + \lambda^\infty = 1$, в частности, оно нетривиально.

Построим теперь строго τ-исчезающее решение (ψ^0, λ^0), удовлетворяющее (2.1c). Действительно, если $\lambda^\infty = 1$, то примем $\psi^0 \triangleq \psi^\infty, \lambda^0 \triangleq 1$. Если $\lambda^\infty = 0$, то дополнительно поделим для каждого $n \in \mathbb{N}$ функции ψ^n, λ^n на $||\psi^n(0)||$; тогда они сойдутся к $\psi^0 \triangleq \psi^\infty/||\psi^\infty(0)||, \lambda^0 \triangleq 0$. Если же $\lambda^\infty \neq 0$, то дополнительно поделим для каждого $n \in \mathbb{N}$ (начиная с некоторого) функции ψ^n, λ^n на λ^n; тогда они сойдутся к $\psi^0 \triangleq \psi^\infty/(1 - ||\psi^\infty(0)||), \lambda^0 \triangleq 1$. Во всех случаях условие (2.1c) выполнено. $\square$

Покажем, что можно найти дополнительное условие уже на саму последовательность τ.

Следствие 1. *Пусть управление $u^0 \in \mathfrak{U}$ является τ-сильно оптимальным управлением в задаче максимизации* (1.2) *на траекториях* (1.1a)–(1.1c) *вдоль последовательности τ.*

Тогда для управления $u^0 \in \mathfrak{U}$ и порожденной им траектории $x^0 \in (AC)(\mathbb{T}, \mathbb{X})$ для всех $n \in \mathbb{N}$, кроме, быть может, конечного их числа, выполнено также

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t \to \tau_n - 0} \sup_{p \in U(t)} \big[g\big(t, x^0(t), p\big) - g\big(t, x^0(t), u^0(t)\big)\big] = 0. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала, что это верно для моментов времени из построенной в теореме подпоследовательности $\tau' \subset \tau$. Как показано выше, для построенной там последовательности пар (λ^n, ψ^n) при каждом $n \in \mathbb{N}$ для почти всех $t < \tau'_n$ выполнено (2.1b), то есть

$$\sup_{p \in U(t)} \Big(\psi^n(t)\big[f\big(t, x^0(t), p\big) - f\big(t, x^0(t), u^0(t)\big)\big] + \lambda^n\big[g\big(t, x^0(t), p\big) - g\big(t, x^0(t), u^0(t)\big)\big]\Big) = 0.$$

Поскольку $f\big(t, x^0(t), p\big)$ ограничено в силу условия подлинейного роста, а по построению имеет место $\psi^n(\tau'_n) = 0$ (тогда, в частности, из (2.1c) следует также $\lambda^n > 0$), то, переходя к ess lim при $t \to \tau'_n - 0$, имеем (2.4) для данного $n \in \mathbb{N}$, то есть для всех моментов времени из подпоследовательности τ'.

Покажем, что (2.4) выполнено для всех элементов из τ, кроме, быть может, конечного их числа. Допустим, что это не так, и (2.4) не выполнено для счетного числа элементов. Тогда из них можно составить неограниченно возрастающую последовательность τ', для каждого момента из которой равенство (2.4) не имеет места. Поскольку управление u^0 τ-сильно оптимально, то оно окажется и τ'-сильно оптимальным. В частности, для него найдется строго τ'-исчезающее решение соотношений принципа максимума, а следовательно, по предыдущему абзацу, (2.4) будет выполнено для каких-то элементов из τ', что противоречит выбору τ'. $\square$

Отметим также, что все показанное выше можно распространить на управляемые системы с негладкой правой частью. Для этого достаточно вместо уравнения (2.1a) рассмотреть соответствующее включение (см., например, [3]), а затем воспользоваться полунепрерывностью сверху субдифференциала Кларка; ровно так, как показанный в [17] принцип максимума был перенесен в [23, Theorem 2.1] на негладкие задачи.

Отметим, что вообще говоря не утверждается, что $\psi^0(t) \to 0$ при $t \to \infty$, это может быть не так, даже если ψ^0 действительно имеет предел на бесконечности. Соответствующий пример будет приведен ниже.

§ 3. Явная формула для сопряженной переменной

Отметим, что сопряженная система (2.1a) линейна, что позволяет выразить всякое её решение с помощью формулы Коши.

Пусть 1_m — единичная матрица размера $m \times m$ над $\mathbb{R}$. В пространстве действительных матриц соответствующего размера, как в фазовом, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{\partial f(t, x^0(t), u^0(t))}{\partial x} A(t), \quad A(0) = 1_m.$$

Эта задача имеет решение, определенное на всём T, обозначим его через A; введем для него векторнозначную функцию I времени правилом: для всех $T \in \mathbb{T}$

$$I(T) \stackrel{\triangle}{=} \int_0^T \frac{\partial g(t, x^0(t), u^0(t))}{\partial x}\, A(t)\, dt.$$

Теперь всякое решение ψ сопряженной системы (2.1a) для всех $t \in \mathbb{T}$ удовлетворяет формуле Коши:

$$\psi(t) = (\psi(0) - \lambda I(t)) A^{-1}(t). \tag{3.1}$$

Предложение 1. *Пусть дано некоторое строго τ-исчезающее решение (ψ^0, λ^0) соотношений принципа максимума* (2.1a)–(2.1c)*. Тогда для некоторой подпоследовательности $\tau' \subset \tau$*

$$\textit{либо} \quad \lambda^0 = 1, \quad \psi^0(0) = \lim_{n\to\infty} I(\tau'_n), \tag{3.2a}$$

а последовательность $I(\tau'_n)$ будет сходящейся и ограниченной,

$$\textit{либо} \quad \lambda^0 = 0, \quad \psi^0(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{I(\tau'_n)}{||I(\tau'_n)||}, \tag{3.2b}$$

где данный предел существует, а последовательность $I(\tau'_n)$ неограничена.
Кроме того, для подпоследовательности τ' при всех $n \in \mathbb{N}$ дополнительно выполнено (2.4).

Доказательство. Пусть некоторое решение (λ^0, ψ^0) является строго τ-исчезающим решением; тогда (λ^0, ψ^0) является пределом решений (λ^n, ψ^n) системы (2.1a), причем $\psi^n(\tau'_n) = 0$ для некоторой подпоследовательности $\tau' \subset \tau$.

По формуле Коши (3.1) для $t = \tau'_n$ из $\psi^n(\tau'_n) = 0$ имеем $\psi^n(0) = \lambda^n I(\tau'_n)$, отсюда

$$\psi^0(0) = \lim_{n\to\infty} \lambda^n I(\tau'_n).$$

В случае $\lambda^0 \neq 0$ фактически показано равенство $\psi^0(0) = \lambda^0 \lim_{n\to\infty} I(\tau'_n)$. Если же $\lambda^0 = 0$, то, поскольку исчезающее решение нетривиально, получим из (2.1c), что $||\psi^0(0)|| = 1$. Поделим полученное выражение на его же норму, имеем

$$\psi^0(0) = \frac{\psi^0(0)}{||\psi^0(0)||} = \lim_{n\to\infty} \frac{I(\tau'_n)}{||I(\tau'_n)||}.$$

$\square$

Полученные формулы можно несколько упростить.

Замечание 1. Пусть существует конечный предел

$$I_* \stackrel{\triangle}{=} \lim_{n\to\infty} I(\tau^n).$$

Тогда выполнено (3.2a), причем ψ^0 задается формулой: для всех $T \in \mathbb{T}$

$$\psi^0(T) = \big(I_* - I(T)\big) A^{-1}(T) = \Big(I_* - \int_0^T \frac{\partial g(t, x^0(t), u^0(t))}{\partial x}\, A(t)\, dt\Big) A^{-1}(T). \tag{3.3a}$$

Если же I_* не зависит от выбора последовательности τ, то есть существует конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty} I(t)$, последняя формула упрощается до

$$\psi^0(T) = \int_T^\infty \frac{\partial g(t, x^0(t), u^0(t))}{\partial x} A(t)\, dt\, A^{-1}(T), \tag{3.3b}$$

где несобственный интеграл понимается в смысле Римана.

Отметим, что формула (3.3b), как явное выражение для сопряженной переменной, достаточно известна. Для линейных задач она была получена в работе [12]. Для ряда стационарных задач, как необходимое условие оптимальности, она получена С. М. Асеевым, А. В. Кряжимским в работах [1, 2, 7, 8]; для некоторых нестационарных систем её получили С. М. Асеев, В. М. Вельев (см. [10,11]). Кроме вышеперечисленных работ, условия, достаточные для применимости (3.3b), рассматриваются также в работах автора [5, 6, 18]. Там же есть условия, при выполнении которых применимы формулы (3.3a), (3.2b).

Приведем еще несколько отдельных замечаний для линейно-квадратичных задач.

Замечание 2. Пусть функцию g можно представить в виде $g(t,x,u) \stackrel{\triangle}{=} g_1(t,x) - r(t)||u||^2$, где функция r положительна и ограничена на всяком компакте. Пусть кроме того, для почти всех $t \in \mathbb{T}$ выполнено условие $0 \in U(t)$. Тогда если τ-сильно оптимальное управление u^0 существует, то выполнено равенство $u(\tau_n - 0) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, кроме, быть может, конечного их числа.

Для доказательства замечания достаточно подставить такое g в (2.4) и заметить, что только нуль доставляет минимум выражению $r(t)||u||^2$.

Замечание 3. Пусть в условиях замечания 2 функцию f можно представить в виде $f(t,x,u) = f_1(t,x) + S(t)u$. Пусть кроме того, для каждого $n \in \mathbb{N}$ некоторая окрестность точки 0 в $\mathbb{X}$ содержится в $S(t)U(t)$ для почти всех $t < n$.

Тогда для всякого строго τ-исчезающего решения (λ^0, ψ^0) вместе с $u^0(\tau_n - 0)$ зануляются $\psi^0(\tau_n)S(\tau_n - 0)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, кроме, быть может, конечного их числа. Более того, при этом $\lambda^0 > 0$.

Действительно, для ψ^0 почти всюду выполнено (2.1b). Подставляя такие f, g получаем, что $u^0(t)$ почти всюду является максимумом (на $p \in U(t)$) функционала $\psi^0(t)S(t)p - \lambda^0||p||^2$; осталось заметить, что, в силу предыдущего замечания, $u^0(\tau_n - 0) = 0$, а 0 — внутренняя точка образа $S \circ U$.

В задачах оптимизации на бесконечном промежутке часто накладывают условие выпуклости вектограммы управляемой системы (см., например, [1, условие (A2)]). Рассмотрим отдельно случай, когда эта вектограмма строго выпукла.

Следствие 2. *Пусть множество*

$$\Big\{ \big(f(t, x^0(t), u), g(t, x^0(t), u)\big) \,\Big|\, u \in U(t) \Big\}$$

строго выпукло при любом $t \in \mathcal{T}$ для некоторого множества ненулевой меры $\mathcal{T} \subset \mathbb{T}$.

Тогда существует единственное строго τ-исчезающее решение (λ^0, ψ^0) соотношений принципа максимума (2.1a)–(2.1b)*, при этом выполнены свойства:*
1) $\lambda^0 > 0$;
2) $\psi^0(\tau_n) = 0$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, возьмем произвольные решения (λ^0, ψ^0), $(\lambda^\infty, \psi^\infty)$, удовлетворяющие (2.1b) почти всюду на $[0, \tau_1]$. Тогда для них найдется момент $T \in \mathcal{T}$, в который выполнено (2.1b). Теперь, в силу строгой выпуклости, вектор $(\lambda^\infty, \psi^\infty(T))$ сонаправлен с $(\lambda^0, \psi^0(T))$, то есть они отличаются лишь на неотрицательный множитель. По формуле

Коши (3.1), отсюда, как значения $\psi^\infty(0)$, $\psi^0(0)$, так и сами функции ψ^∞, ψ^0, также отличаются на тот же множитель. В силу (2.1c) единственность строго τ-исчезающего решения (λ^0, ψ^0) показана. Для всякого $n \in \mathbb{N}$ также найдется (λ^n, ψ^n), удовлетворяющее (2.1b) почти всюду на $[0, \tau_1]$ с краевым условием $\psi^n(\tau_n) = 0$. Теперь, из сонаправленности, следует $\psi^0(\tau_n) = 0$. В силу нетривиальности ψ^0 как решения линейного уравнения, из 2) следует 1). $\square$

Отметим, что само по себе наличие формулы (2.4) позволяет лишь написать некоторую систему соотношений, связывающую последовательность τ и значения функции g на оптимальной траектории. Последнее же утверждение указывает класс управляемых систем, в которых соотношения принципа максимума вместе со всеми краевыми условиями создают переопределенную систему соотношений, поскольку на каждый скалярный параметр τ_n, в случае $\dim \mathbb{X} > 1$, мы получаем больше одного соотношения. Именно этим, по-видимому, можно объяснить редкость сильно оптимальных управлений.

§ 4. Пример

Для демонстрации возможностей некоторых показанных выше утверждений рассмотрим модификацию примера Халкина [17] (см. также [19, Ex. 5.1], [9, Ex. 1], [10, Ex. 2.4]). Пусть дана скалярная билинейная управляемая система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ux \qquad \text{для п.в. } t \in \mathbb{T}; \\ x(0) &= x_* > 0, \\ u &\in [\alpha, \beta] \qquad (\alpha \leqslant \beta). \end{aligned}$$

Будем искать сильно оптимальные управления u^0 в задаче максимизации

$$J[u](T) \stackrel{\triangle}{=} \int_0^T \big(1 - u(t)\big) x(t)\, dt$$

на траекториях этой системы при $T \to \infty$. Каждому такому управлению u^0 соответствует некоторая неограниченно возрастающая последовательность τ. В силу (2.4) можно считать, что $u^0(\tau_n - 0) = \alpha$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Легко видеть, что $A(T) = x^0(T)$ и $I(T) = J[u^0](T)$ (в силу скалярности системы можно не различать числа, векторы размера 1 и матрицы размера 1×1). Переходя при необходимости от τ к ее подпоследовательности, мы всегда можем считать выполненным вдоль τ ровно один случай из трех:

1) $J[u^0](\tau_n) \to -\infty$. Теперь по формуле (3.2b) имеем $\psi^0(0) = -1$, $\lambda = 0$; подставляя найденное в гамильтониан, получаем $H = -ux$. Теперь из условия его максимума следует, что $u^0 \equiv \alpha$. Проверкой убеждаемся, что для $J[u^0](\tau_n) \to -\infty$ необходимо $\alpha > 1$. Итак, если в этом случае сильно оптимальные управления есть, то только $u^0 \equiv \alpha$ при $\alpha > 1$.

2) $J[u^0](\tau_n) \to +\infty$; подобным образом получаем $\psi^0(0) = -1$, $\lambda = 0$; $H = -ux$, $u^0 \equiv \beta$, но это противоречит условию (2.4) на выбор точек из τ, следовательно, в этом случае сильно оптимальных управлений нет.

3) $J[u^0](\tau_n)$ сходится к некоторому конечному I_*. Теперь можно воспользоваться (3.3a), в частности считать $\lambda^0 = 1$. Введем функцию $R(t) \stackrel{\triangle}{=} I_* - J[u^0](t) - x^0(t)$. Тогда

$$H[t] = \big(I_* - J[u^0](t)\big) A^{-1}(t) u x^0(t) + (1-u) x^0(t) = \big(I_* - J[u^0](t) - x^0(t)\big) u + x^0(t) = R(t) u + x^0(t),$$

и $u^0(t)$, в силу (2.1b), определяется знаком $R(t)$. Поскольку $\dot{R}(t) = -x(t) < 0$, то R монотонно убывает, а управление u^0 имеет самое большее один момент переключения. Более того, u^0 принимает минимально возможное значение α в сколь угодно далекие моменты времени, следовательно R на больших временах отрицательно. Но тогда, начиная с некоторого момента $T \in \mathbb{T}$ (это или момент переключения, или $T = 0$), функция R отрицательна, управление u^0 тождественно совпадает с α, а $x^0(t) = x^0(T) e^{\alpha(t-T)}$ для всех $t > T$.

С другой стороны, последовательность чисел $I_* - J[u^0](\tau_n)$ сходится к 0, а последовательность чисел $R(\tau_n)$ монотонно убывает, принимая, начиная с некоторого номера, лишь отрицательные значения. Тогда их разность, последовательность чисел $x^0(\tau_n) = x^0(T)e^{\alpha(\tau_n - T)}$, не может сходиться к 0. Таким образом, $\alpha > 0$.

В силу фундаментальности последовательности чисел $I(\tau_n) = J[u^0](\tau_n)$, для их попарных разностей, чисел $\int_{[\tau_n,\tau_k]}(1-\alpha)e^{\alpha(t-\tau_n)}\,dt$, имеет место сходимость к 0 при $k, n \to \infty$, что в силу $\alpha > 0$ эквивалентно $\alpha = 1$.

Но тогда, начиная с момента T, функция $J[u^0]$ не изменяется, принимая значение I_*, следовательно, $R(T) = -x(T) < 0$. Теперь, если бы T был моментом переключения управления u^0 (зависящего лишь от знака R), то $R(T)$ был бы равен 0, следовательно, переключения не было; тогда $T = 0$, то есть $u^0 \equiv \alpha = 1$. Итак, если в третьем случае сильно оптимальные управления есть, то $u^0 \equiv \alpha = 1$.

Таким образом, анализ всех случаев показал, что если сильно оптимальное управление u^0 существует, то $u^0 \equiv \alpha \geqslant 1$.

Проверим, что в случае $\alpha \geqslant 1$ управление $u^0 \equiv \alpha$ сильно оптимально, причем в качестве τ годится любая неограниченно возрастающая последовательность моментов времени. Действительно, если для пары допустимых управлений u, v поточечно верно $u \geqslant v$, то это верно и для их траекторий $x \geqslant y$. Подставляя это в целевой функционал, имеем $J[u] \leqslant J[v]$ в силу $\alpha \geqslant 1$. Следовательно, $u^0 \equiv \alpha$, как наименьшее из допустимых управлений, доставляет наибольший результат для каждого момента времени, в частности оно τ-сильно оптимально для всякой неограниченно возрастающей последовательности τ моментов времени.

Итак, в данном примере сильно оптимальное управление существует в точности при $\alpha \geqslant 1$, единственным (с точностью до меры нуль) сильно оптимальным управлением является $u^0 \equiv \alpha$, и каждое такое управление τ-сильно оптимально для всякой неограниченно возрастающей последовательности τ моментов времени. $\diamond$

Отметим, что, хотя у всякого строго исчезающего решения сопряженная переменная ψ^0 является поточечным пределом зануляющихся во все более поздние моменты времени решений той же сопряженной системы, в рассмотренном выше примере при $\alpha > 1$ сама эта функция $\psi^0 \equiv 1$ не стремится на бесконечности к нулю. Кроме того, найденное сильно оптимальное решение является анормальным, в частности, при $\alpha > 1$ формула (3.3b), равно как и её более общие модификации (3.2a), (3.3a), неприменима. Данный пример также показывает, что в замечании 2 условие строгой выпуклости существенно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асеев С.М., Кряжимский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды Математического ин-та им. В.А. Стеклова. 2007. Т. 257. С. 1–271.
2. Асеев С.М., Бесов К.О., Кряжимский А.В. Задачи оптимального управления на бесконечном промежутке времени в экономике // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67. № 2 (404). С. 3—64.
3. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 392 с.
5. Хлопин Д.В. Об условии трансверсальности на бесконечности в задачах управления // Дифференциальные уравнения и оптимальное управление: тез. докл. междунар. конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Е.Ф. Мищенко. МИ РАН. Москва, 2012. С. 144–146.
6. Хлопин Д.В. О τ-исчезающей сопряженной переменной в задачах управления на бесконечном промежутке // Тез. докл. Междунар. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Владимир, 2012. С. 173–174.
7. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V. The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 43. P. 1094—1119.
8. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V. Shadow prices in infinite-horizon optimal control problems with dominating discounts // Applied Mathematics and Computation. 2008. Vol. 204. № 2. P. 519–531.
9. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V., Tarasyev A.M. The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for an optimal control problem with infinite time interval // Proc. Steklov Inst. Math. 2001. № 233. P. 64–80.

10. Aseev S.M., Veliov V.M. Needle variations in infinite-horizon optimal control // IIASA Interim Rept. IASA. Laxenburg. Research Report 2012–04. September 2012. 22 p.
11. Aseev S.M., Veliov V.M. Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B. 2012. Vol. 19. № 1–2. P. 43–63.
12. Aubin J.P., Clarke F.H. Shadow prices and duality for a class of optimal control problems // SIAM J. Control Optim. 1979. Vol. 17. P. 567–586.
13. Bogucz D. On the existence of a classical optimal solution and of an almost strongly optimal solution for an infinite-horizon control problem // J. Optim. Theory Appl. 2013. Vol. 156. № 2. P. 650–682.
14. Carlson D.A. Uniformly overtaking and weakly overtaking optimal solutions in infinite-horizon optimal control: when optimal solutions are agreeable // J. Optim. Theory Appl. 1990. Vol. 64. № 1. P. 55–69.
15. Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A. Infinite horizon optimal control. Deterministic and stochastic systems. Berlin: Springer, 1991.
16. Chakravarty S. The existence of an optimum savings program // Econometrica. 1962. Vol. 30. P. 178–187.
17. Halkin H. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // Econometrica. 1974. Vol. 42. P. 267–272.
18. Khlopin D.V. Necessity of vanishing shadow price in infinite horizon control problems // arXiv:1207.5358
19. Pickenhain S. On adequate transversality conditions for infinite horizon optimal control problems — a famous example of Halkin // In: Crespo Cuaresma J.; Palokangas T.; Tarasyev A. (Eds.): Dynamic Systems, Economic Growth, and the Environment. Berlin etc.: Springer, 2010 (Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance, 12). P. 3–22.
20. Seierstad A. Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems // J. Optim. Theory Appl. 1999. Vol. 103. № 1. P. 201–230.
21. Stern L.E. Criteria of optimality in the infinite-time optimal control problem // J. Optim. Theory Appl. 1984. Vol. 44. № 3. P. 497–508.
22. Wachs A.O., Schochetman I.E., Smith R.L. Average optimality in nonhomogeneous infinite horizon Markov decision processes // Math. Oper. Res. 2011. Vol. 36. № 1. P. 147–164.
23. Ye J.J. Nonsmooth Maximum Principle for infinite-horizon problems // J. Optim. Theory Appl. 1993. Vol. 76. № 3. P. 485–500.

Поступила в редакцию 11.02.2013

Хлопин Дмитрий Валерьевич, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: khlopin@imm.uran.ru

D. V. Khlopin

On necessary boundary conditions for strongly optimal control in infinite horizon control problems

Keywords: control problem, strong optimal control, infinite horizon problem, necessary conditions of optimality, transversality condition for infinity, Pontryagin maximum principle.

Mathematical Subject Classifications: 49K15, 49J45, 37N40

In the paper we consider the infinite horizon control problems in the free end case. We obtain the necessary conditions of strong optimality. The method of the proof actually follows the classic paper by Halkin, and the boundary condition for infinity that we construct in our paper is a stronger variety of the Seierstad condition. The complete system of relations of the maximum principle that was obtained in the paper allows us to write the expression for the adjoint variable in the form of improper integral that depends only on the developing trajectory. S. M. Aseev, A. V. Kryazhimskii, and V. M. Veliov obtained the similar condition as a necessary condition for certain classes of control problems. As we note in our paper, the obtained conditions of strong optimality lead us to a redefined system of relations for sufficiently broad class of control problems. An example is considered.

REFERENCES

1. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V. The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems, *Proc. Steklov Inst. Math.,* 2007, vol. 257, pp. 1–255.

2. Aseev S.M., Besov K.O., Kryazhimskii A.V. Infinite-horizon optimal control problems in economics, *Russ. Math. Surv.,* 2012, vol. 67, no. 2, pp. 195–253.

3. Clarke F.H. *Optimization and nonsmooth analysis*, New York: J. Wiley, 1983.

4. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Mathematical theory of optimal processes*, New York: Interscience Publishers, John Wiley and Sons, 1962.

5. Khlopin D.V. On transversality condition in control problems for infinity horizon, *Differential Equations and Optimal Control: Abstracts of Int. Conf. Dedicated to the 90th Anniversary of E.F. Mishchenko*, Steklov Inst. Math., Moscow, 2008, pp. 144–146.

6. Khlopin D.V. On τ-vanishing adjoint variable for infinity-horizon control problems, *Abstracts of Int. Conf. on Differential Equations and Dynamical Systems*, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 2012, pp. 173–174.

7. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V. The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons, *SIAM J. Control Optim.*, 2004, vol. 43, pp. 1094—1119.

8. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V. Shadow prices in infinite-horizon optimal control problems with dominating discounts, *Applied Mathematics and Computation*, 2008, vol. 204, no. 2, pp. 519–531.

9. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V., Tarasyev A.M. The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for an optimal control problem with infinite time interval, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2001, no. 233, pp. 64–80.

10. Aseev S.M., Veliov V.M. Needle variations in infinite-horizon optimal control, *IIASA Interim Rept. IASA. Laxenburg, Research Report*, 2012–04, September 2012, 22 pp.

11. Aseev S.M., Veliov V.M. Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B*, 2012, vol. 19, no. 1–2, pp. 43–63.

12. Aubin J.P., Clarke F.H. Shadow prices and duality for a class of optimal control problems, *SIAM J. Control Optim.*, 1979, vol. 17, pp. 567–586.

13. Bogucz D. On the existence of a classical optimal solution and of an almost strongly optimal solution for an infinite-horizon control problem, *J. Optim. Theory Appl.*, 2013, vol. 156, no. 2, pp. 650–682.

14. Carlson D.A. Uniformly overtaking and weakly overtaking optimal solutions in infinite-horizon optimal control: when optimal solutions are agreeable, *J. Optim. Theory Appl.*, 1990, vol. 64, no. 1, pp. 55–69.

15. Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A. *Infinite horizon optimal control. Deterministic and stochastic systems.* Berlin: Springer, 1991.

16. Chakravarty S. The existence of an optimum savings program, *Econometrica*, 1962, vol. 30, pp. 178–187.

17. Halkin H. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons, *Econometrica*, 1974, vol. 42, pp. 267–272.

18. Khlopin D.V. Necessity of vanishing shadow price in infinite horizon control problems, *arXiv:1207.5358.*

19. Pickenhain S. On adequate transversality conditions for infinite horizon optimal control problems — a famous example of Halkin. In: Crespo Cuaresma J.; Palokangas T.; Tarasyev A. (Eds.): *Dynamic Systems, Economic Growth, and the Environment*, Springer, 2010, pp. 3–22.

20. Seierstad A. Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems, *J. Optim. Theory Appl.*, 1999, vol. 103, no. 1, pp. 201–230.

21. Stern L.E. Criteria of optimality in the infinite-time optimal control problem, *J. Optim. Theory Appl.*, 1984, vol. 44, no. 3, pp. 497–508.

22. Wachs A.O., Schochetman I.E., Smith R.L. Average optimality in nonhomogeneous infinite horizon Markov decision processes, *Math. Oper. Res.*, 2011, vol. 36, no. 1, pp. 147–164.

23. Ye J.J. Nonsmooth maximum principle for infinite-horizon problems, *J. Optim. Theory Appl.*, 1993, vol. 76, no. 3, pp. 485–500.

Received 11.02.2013

Khlopin Dmitrii Valer'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia. E-mail: khlopin@imm.uran.ru