УДК 515.122.536

© *А. А. Грызлов, Р. А. Головастов*

О ПРОСТРАНСТВАХ СТОУНА НЕКОТОРЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

Рассматриваются пространства Стоуна BD и BS двух булевых алгебр. Доказывается, что множество свободных ультрафильтров пространства BD и пространство BS гомеоморфны канторову совершенному множеству.

Ключевые слова: булева алгебра, пространство Стоуна булевой алгебры, ультрафильтр, компакт.

Введение

В работе продолжается изучение пространств Стоуна булевых алгебр, которое проводилось в [2–5]. В данной работе рассматриваются пространства Стоуна двух булевых алгебр и выясняется их связь с канторовым совершенным множеством.

Конструкцию и свойства канторова совершенного множества можно найти, например, в [1].

Обозначения в работе стандартны. Через $[A]$ обозначается замыкание множества A, через $\operatorname{dom} f$ — область определения функции f, $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ — множество неотрицательных целых чисел. Под n мы понимаем, в зависимости от контекста, как целое число $n \in \omega$, так и подмножество $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ множества ω.

Базисом ультрафильтра ξ называется подсемейство $\xi' \subseteq \xi$ такое, что для любого $A \in \xi$ найдется $C \in \xi'$ такое, что $C \subseteq A$.

§ 1. Пространство BD

Обозначим $P = \{0,1\}^\omega$. Пусть $D = \{f|_n \colon f \in P, n \in \omega\}$. Элементы множества D будем обозначать t, s, r. Для $s \in D$ обозначим $C_s = \{t \in D \colon t|_{\operatorname{dom} s} = s\}$. На множестве D определяется частичный порядок по правилу: $s \leqslant t$, если t есть продолжение s, то есть $t \in C_s$.

Пусть B_D — булева алгебра, порожденная семейством $B'_D = \{C_s \colon s \in D\}$. Отметим, что $\{s\} \in B_D$ для всякого $s \in D$. Обозначим $\hat{D}$ — множество фиксированных ультрафильтров из BD. $\hat{D} = \{\xi_s \in BD \colon \{s\} \in \xi_s\}$. Таким образом, $\hat{D}$ является счетным подмножеством BD, состоящим из изолированных точек.

Через $\hat{C} = BD \setminus \hat{D}$ обозначим множество свободных ультрафильтров из BD.

Из определения топологии пространства Стоуна следует, что у всякого ультрафильтра $\xi \in BD$ есть базис, состоящий из множеств вида

$$(\bigcap_{i<n} C_{s_i}) \bigcap (D \setminus \bigcup_{j<m} C_{t_j}) \quad (n, m \in \omega).$$

Замыкания элементов этих базисов образуют базу из открыто-замкнутых множеств точек $\xi \in BD$.

Лемма 1. *Если $t, s \in D$, то $C_s \cap C_t \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда t и s сравнимы.*

Следствие 1. *Если $\{s_i \colon i < n\} \subseteq D$, то $\bigcap\limits_{i<n} C_{s_i} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\{s_i \colon i < n\}$ является цепью.*

Отсюда следует, что если $\bigcap\limits_{i<n} C_{s_i} \neq \varnothing$ для $\{s_i\colon i < n\} \subseteq D$, то $\bigcap\limits_{i<n} C_{s_i} = C_{s_{i_0}}$, где $\operatorname{dom} s_{i_0} = \max\{\operatorname{dom} s_i\colon i < n\}$.

А отсюда следует, что у всякого ультрафильтра $\xi \in BD$ есть базис, состоящий из множеств вида $C_s \setminus \bigcup\limits_{j<n} C_{t_j}$, где $s, t_j \in D$, $n \in \omega$.

Лемма 2. *Для всякого свободного ультрафильтра $\xi \in BD$ найдется функция $f \in P$ такая, что семейство $\delta_f = \{C_{f|_n}\colon n \in \omega\}$ является базисом ультрафильтра ξ.*

Доказательство. Покажем, что для всякого $n \in \omega$, $n \geqslant 1$, найдется $r \in D$ такой, что $\operatorname{dom} r = n$ и $C_r \in \xi$.

Действительно, пусть $C_r \notin \xi$ для некоторого $n_0 \in \omega$, для всякого $r \in D$, $\operatorname{dom} r = n_0$. Тогда множество $D \setminus \bigcup\{C_r\colon \operatorname{dom} r = n_0\}$ или пусто, если $n_0 = 1$, или есть элемент ультрафильтра ξ, и следовательно, ξ — фиксированный ультрафильтр, что противоречит нашему предположению.

По лемме 1 множество $\{r\colon C_r \in \xi\}$ является цепью и, следовательно, найдется $f \in P$ такая, что $\{C_r\colon C_r \in \xi\} = \{C_{f|_n}\colon n \in \omega\} = \delta_f$. Будем обозначать ультрафильтр ξ как ξ_f.

Покажем, что δ_f является базисом ультрафильтра ξ_f. Пусть $C_s \setminus \bigcup\limits_{j<m} C_{t_j}$ — элемент базиса ультрафильтра ξ_f. Пусть $k = \max\{\operatorname{dom} s, \operatorname{dom} t_j\ (j < m)\}$. Тогда $C_{f|_{k+1}} \subseteq C_s \setminus \bigcup\limits_{j<m} C_{t_j}$, поскольку по лемме 1 $C_{f|_{k+1}} \subseteq C_s$ и $C_{f|_{k+1}} \bigcap (\bigcup\limits_{j<m} C_{t_j}) = \varnothing$. □

Очевидно, что если $f, g \in P$ различны, то $\xi_f \neq \xi_g$ и всякая функция $f \in P$ определяет свободный ультрафильтр, для которого семейство $\delta_f = \{C_{f|_n}\colon n \in \omega\}$ является базисом. Таким образом, существует взаимно-однозначное соответствие между множеством $P = \{0,1\}^\omega$ и множеством свободных ультрафильтров $\hat{C} \subseteq BD$.

Теорема 1. *Пространство $\hat{C}$ гомеоморфно канторову совершенному множеству.*

Доказательство. Пространство $P = \{0,1\}^\omega$ является произведением счетного числа двоеточий $\{0,1\}$. Семейство множеств вида $O(s) = \{f \in \{0,1\}^\omega\colon f|_{\operatorname{dom} s} = s\}$, где $s \in D$, определяет базу тихоновской топологии на $\{0,1\}^\omega$. Пространство $P = \{0,1\}^\omega$ с тихоновской топологией гомеоморфно канторову совершенному множеству (см., например, [1]).

Отображение $h\colon \{0,1\}^\omega \to \hat{C}$ определим по правилу: если $f \in \{0,1\}^\omega$, то $h(f) = \xi_f$. Нетрудно видеть, что h является взаимно-однозначным, непрерывным, вместе с обратным, отображением пространства $\{0,1\}^\omega$ на $\hat{C}$. □

§ 2. Пространство BS

Обозначим $S = \{f|_n\colon f \in \omega^\omega, n \in \omega\}$. Элементы множества S будем обозначать t, s, r. Для $s \in S$ обозначим $C_s = \{t \in S\colon t|_{\operatorname{dom} s} = s\}$. На множестве S определяется частичный порядок по правилу: $s \leqslant t$, если t есть продолжение s, то есть $t \in C_s$.

Пусть B_S — булева алгебра, порожденная семейством $B'_S = \{C_s\colon s \in S\}$. Обозначим BS пространство Стоуна булевой алгебры B_S. Точками пространства BS являются ультрафильтры алгебры B_S.

Пусть θ — семейство множеств вида $(\bigcap\limits_{i<n} C_{s_i}) \bigcap (S \setminus \bigcup\limits_{j<m} C_{t_j})$ где $s_i, t_j \in S$, $n, m \in \omega$. Отметим, что если $\xi \in BS$ — элемент пространства BS, то семейство $\theta_\xi = \{U \in \theta\colon U \in \xi\}$ образует базис ультрафильтра ξ, а семейство $\overline{\theta}_\xi = \{[U]\colon U \in \theta_\xi\}$ является базой точки ξ в пространстве BS, состоящей из открыто-замкнутых множеств.

Так же, как и в предыдущем случае, справедливы следующие утверждения.

Лемма 3. *Если $t, s \in S$, то $C_s \cap C_t \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда t и s сравнимы.*

Следствие 2. *Если $\{s_i\colon i < n\} \subseteq D$, то $\bigcap\limits_{i<n} C_{s_i} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\{s_i\colon i < n\}$ является цепью.*

Отсюда следует, что если $\bigcap\limits_{i<n} C_{s_i} \neq \varnothing$ для $\{s_i\colon i < n\} \subseteq D$, то $\bigcap\limits_{i<n} C_{s_i} = C_{s_{i_0}}$, где $\operatorname{dom} s_{i_0} = \max\{\operatorname{dom} s_i\colon i < n\}$. Из этого следует, что подсемейство $\theta' \subseteq \theta$, где

$$\theta' = \{S \setminus \bigcup_{j<m} C_{t_j}\colon t_j \in S, m \in \omega\} \bigcup \{C_s \setminus \bigcup_{j<m} C_{t_j}\colon s, t_j \in S,\ m \in \omega\}$$

обладает тем свойством, что замыкание его элементов также образует открыто-замкнутую базу пространства BS, и всякая точка ξ пространства BS как ультрафильтр алгебры B_S обладает базисом, состоящим из элементов семейства θ'.

Рассмотрим три вида ультрафильтров из BS. Для всякого $s \in S$ обозначим через ξ_s фиксированный ультрафильтр из BS, определяемый s, то есть состоящий из всех элементов булевой алгебры BS, содержащих s.

Обозначим $\hat{S} = \{\xi_s\colon s \in S\}$ — множество всех фиксированных ультрафильтров из BS.

Лемма 4. *Пусть $\xi_s \in \hat{S}$ для некоторого $s \in S$. Тогда $\sigma_s = \{C_s \setminus \bigcup\limits_{j<m} C_{t_j}\colon t_j \nleqslant s, m \in \omega\}$ является базисом ультрафильтра ξ_s.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, прежде всего, что $\sigma_s \subseteq \xi_s$, поскольку всякий элемент семейства σ_s содержит s. Рассмотрим базис ультрафильтра ξ_s, состоящий из элементов семейства θ' вида $C_r \setminus \bigcup\limits_{j<m} C_{t_j}$, где $r, t_j \in S$, $m \in \omega$. И пусть $C_r \setminus \bigcup\limits_{j<m} C_{t_j}$ один из элементов этого базиса.

Поскольку $C_r \setminus \bigcup\limits_{j<m} C_{t_j} \ni s$, то $r \leqslant s$ и всякий элемент t_j $(j < m)$ либо не сравним с s, либо $s < t_j$. Следовательно, для множества $C_s \setminus \bigcup\limits_{j<m} C_{t_j} \in \sigma_s$ выполняется $C_s \setminus \bigcup\limits_{j<m} C_{t_j} \subseteq C_r \setminus \bigcup\limits_{j<m} C_{t_j}$. Таким образом, семейство σ_s есть базис ультрафильтра ξ_s. □

Лемма 5. *Пусть $f \in \omega^\omega$ и $\{s_n = f|_n\colon n \in \omega\}$ — полная цепь элементов S. Тогда семейство $\sigma_f = \{C_{s_n}\colon n \in \omega\}$ является базисом некоторого ультрафильтра $\xi_f \in BS$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку σ_f является центрированной системой множеств, её можно дополнить до ультрафильтра $\xi_f \in BS$. Покажем, что σ_f является базисом этого ультрафильтра. Отметим, что отсюда будет следовать единственность ультрафильтра ξ_f, мажорирующего σ_f. Рассмотрим базис ультрафильтра ξ_f, состоящий из элементов семейства θ'. Пусть $C_r \setminus \bigcup\limits_{j<m} C_{t_j}$ — одно из множеств этого базиса. Рассмотрим множество $C_{s_{n_0}} \in \sigma_f$ такое, что $\operatorname{dom} s_{n_0} > \max\{\operatorname{dom} r, \operatorname{dom} t_j\ (j < m)\}$. Так как $\sigma_f \subseteq \xi_f$, то по лемме 3 имеем $C_r \supseteq C_{s_{n_0}}$ и $C_{s_{n_0}} \cap C_{t_j} = \varnothing$ для всех $j < m$. Следовательно, $C_{s_{n_0}} \subseteq C_r \setminus \bigcup\limits_{j<m} C_{t_j}$. Таким образом, семейство σ_f есть базис ультрафильтра ξ_f. □

Заметим, что, если $f, g \in \omega^\omega$ различны, то ультрафильтры ξ_f и ξ_g, определяемые цепями $\sigma_f = \{C_{f|_n}\colon n \in \omega\}$ и $\sigma_g = \{C_{g|_n}\colon n \in \omega\}$, различны.

Отметим также, что всякая полная цепь в S — это множество вида $\{f|_n\colon n \in \omega\}$ для некоторой $f \in \omega^\omega$.

Обозначим $\hat{P} = \{\xi_f\colon f \in \omega^\omega\}$, где ξ_f — ультрафильтр, мажорирующий полную цепь $\sigma_f = \{C_{f|_n}\colon n \in \omega\}$ для $f \in \omega^\omega$.

Лемма 6. *Семейство $\sigma_0 = \{S \setminus \bigcup\limits_{j<m} C_{t_j}\colon t_j \in S, m \in \omega\}$ является базисом некоторого ультрафильтра $\xi_0 \in BS$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Семейство σ_0 центрированно. Пусть $\xi_0 \in BS$ — ультрафильтр, мажорирующий σ_0. Имеем, с одной стороны, $\sigma_0 \subseteq \theta'$; с другой стороны, никакое множество из θ'

вида $C_s \setminus \bigcup_{j<m} C_{t_j}$ не принадлежит ультрафильтру ξ_0. Следовательно, σ_0 — базис ультрафильтра ξ_0, состоящий из элементов θ'. □

Таким образом, нами выделены три подмножества пространства BS, именно $\hat{S}, \hat{P}$ и $\{\xi_0\}$.

Теорема 2. $BS = \{\xi_0\} \cup \hat{P} \cup \hat{S}$.

Доказательство. Пусть $\xi \in BS$ — произвольный ультрафильтр из BS. Положим $A = \{C_s : C_s \in \xi, s \in S\}$ и $A' = \{s \in S : C_s \in A\}$. Возможны три случая:

(1) $A = \varnothing$;

(2) A конечно;

(3) A бесконечно.

(1) Пусть $A = \varnothing$. Тогда $\sigma_0 = \{S \setminus C_s : s \in S\} \subseteq \xi$, и следовательно, $\xi = \xi_0$.

(2) Пусть A конечно, $A = \{C_{s_i} : i \leqslant k\}$. По лемме 3 множество A' является конечной цепью; будем считать, что $C_{s_0} \subseteq \ldots \subseteq C_{s_k}$. Тогда $\bigcap_{i \leqslant k} C_{s_i} = C_{s_k}$ и $C_{s_k} \in \xi$.

Покажем, что ξ есть фиксированный ультрафильтр ξ_{s_k}, что означает, что всякий элемент ξ содержит s_k. Рассмотрим базис ультрафильтра ξ, состоящий из элементов семейства θ'. Пусть $C_r \setminus \bigcup_{j<m} C_{t_j}$ — одно из множеств этого базиса. Отметим, во-первых, что $r \leqslant s_k$. Действительно, если r не сравним с s_k, то $(C_r \setminus \bigcup_{j<m} C_{t_j}) \bigcap C_{s_k} = \varnothing$; если $s_k < r$, то получаем противоречие с максимальностью s_k в A'.

Итак, $r \leqslant s_k$, следовательно, $s \in C_r$. Для всякого t_j $(j < m)$ имеем либо $s_k < t_j$, либо t_j не сравним с s_k. В противном случае $C_{s_k} \notin \xi$.

Следовательно, $s_k \in C_r \setminus \bigcup_{j<m} C_{t_j}$. Таким образом, всякий элемент $C_r \setminus \bigcup_{j<m} C_{t_j}$ базиса ультрафильтра ξ содержит s_k и $\xi = \xi_{s_k}$.

(3) Пусть A бесконечно. Тогда по лемме 3 A' является бесконечной цепью. Пусть $\sigma_f = \{f|_n : n \in \omega\}$ для некоторой функции $f \in \omega^\omega$ — полная цепь, содержащая A'. Тогда σ_f является базисом ультрафильтра $\xi_f \in \hat{P}$ и $\xi_f = \xi$. □

Теорема 3. *Подпространство $\hat{P}$ пространства BS гомеоморфно множеству иррациональных чисел.*

Доказательство. Множество ω^ω является счетным произведением счетных множеств. Для всякого $s \in S$ определим множество $O(s) = \{f \in \omega^\omega : f|_{\mathrm{dom}\, s} = s\}$. Тогда семейство $\{O(s) : s \in S\}$ является базой тихоновской топологии на ω^ω. Хорошо известно, что ω^ω с тихоновской топологией гомеоморфно множеству P иррациональных чисел (см., например, [1]).

Покажем, что подмножество $\hat{P} \subseteq BS$ гомеоморфно ω^ω с тихоновской топологией. Построим отображение $q : \omega^\omega \to \hat{P}$ по правилу: если $f \in \omega^\omega$, то $q(f) = \xi_f$. Нетрудно видеть, что q есть взаимно-однозначное отображение ω^ω на $\hat{P}$. Его непрерывность и непрерывность обратного отображения следует из того, что $q(O(s)) = [C_s] \cap \hat{P}$. □

Хорошо известно (см., например, [1]), что всякое совершенное ограниченное нигде не плотное подмножество прямой гомеоморфно канторову совершенному множеству.

Мы построим нигде не плотное совершенное подмножество T отрезка $[0,1]$, гомеоморфное пространству BS.

§ 3. Конструкция множества T

Определение 1. Для произвольного отрезка $[a,b]$ семейство отрезков $\{[a_i, b_i] : i \in \omega\}$ назовем правильным, если $a_0 = \frac{a+b}{2}$, $a_{i+1} > b_i$ для всякого $i \in \omega$, и последовательность $\{a_i : i \in \omega\}$ сходится к точке b.

Рассмотрим отрезок $[0,1]$. Обозначим $\Gamma_0 = \{[a_{i^0}, b_{i^0}]\colon i^0 \in \omega\}$ — правильное семейство для отрезка $[0,1]$. Положим $\tilde{\Gamma}_0 = \bigcup\{[a_{i^0}, b_{i^0}]\colon i^0 \in \omega\}$ — тело семейства Γ_0, $\bar{\Gamma}_0 = [\tilde{\Gamma}_0]$. Очевидно, $\bar{\Gamma}_0 = \tilde{\Gamma}_0 \cup \{1\}$.

Пусть $\gamma_{i^0} = \{[a_{i^0 i^1}, b_{i^0 i^1}]\colon i^1 \in \omega\}$ — правильное семейство для отрезка $[a_{i^0}, b_{i^0}]$ $(i^0 \in \omega)$. Положим $\Gamma_1 = \bigcup\{\gamma_{i^0}\colon i^0 \in \omega\}$, $\tilde{\Gamma}_1$ — тело семейства Γ_1, $\bar{\Gamma}_1 = [\tilde{\Gamma}_1]$. Нетрудно видеть, что $\bar{\Gamma}_1 = \tilde{\Gamma}_1 \cup \{1\} \cup \{b_{i^0}\colon i^0 \in \omega\}$.

Пусть $\gamma_{i^0 i^1} = \{[a_{i^0 i^1 i^2}, b_{i^0 i^1 i^2}]\colon i^2 \in \omega\}$ — правильное семейство для отрезка $[a_{i^0 i^1}, b_{i^0 i^1}] \in \Gamma_1$, $(i^0, i^1 \in \omega)$. Тогда $\Gamma_2 = \bigcup\{\gamma_{i^0 i^1}\colon i^0, i^1 \in \omega\}$, $\tilde{\Gamma}_2$ — тело Γ_2, $\bar{\Gamma}_2 = [\tilde{\Gamma}_2]$. Нетрудно видеть, что $\bar{\Gamma}_2 = \tilde{\Gamma}_2 \cup \{1\} \cup \{b_{i^0}\colon i^0 \in \omega\} \cup \{b_{i^0 i^1}\colon i^0, i^1 \in \omega\}$.

Продолжая этот процесс построения, получим для всякого $k \in \omega$ семейство

$$\Gamma_k = \bigcup\{\gamma_{i^0 \ldots i^k}\colon i^0, \ldots, i^k \in \omega\},$$

где $\gamma_{i^0 \ldots i^k}$ — правильное семейство для отрезка $[a_{i^0 \ldots i^k}, b_{i^0 \ldots i^k}]$,

$$\gamma_{i^0 \ldots i^k} = \{[a_{i^0 \ldots i^k i^{k+1}}, b_{i^0 \ldots i^k i^{k+1}}]\colon i^{k+1} \in \omega\},$$

$\tilde{\Gamma}_k$ — тело Γ_k, $\bar{\Gamma}_k = [\tilde{\Gamma}_k]$. Имеем $\bar{\Gamma}_k = \tilde{\Gamma}_k \cup \{1\} \cup \{b_{i^0}\colon i^0 \in \omega\} \cup \ldots \cup \{b_{i^0 \ldots i^k}\colon i^0, \ldots, i^k \in \omega\}$.

Положим $T = \bigcap\{\bar{\Gamma}_k\colon k \in \omega\}$. Нетрудно видеть, что T — совершенное нигде не плотное подмножество отрезка $[0,1]$. Точками пространства T являются точки $\{1\}$, $\{b_{i^0 \ldots i^k}\colon i^0, \ldots, i^k \in \omega, k \in \omega\}$, а также точки $x(f)$, где $f \in \omega^\omega$, определяемые следующим образом:

$$x(f) = [a_{f(0)}, b_{f(0)}] \cap \ldots \cap [a_{f(0) \ldots f(k)}, b_{f(0) \ldots f(k)}] \cap \ldots \ .$$

Базу окрестностей в точке $\{1\}$ образуют множества вида $([0,1] \setminus [a_{i^0 \ldots i^k}, b_{i^0 \ldots i^k}]) \cap T$. Базу окрестностей в точке $\{b_{i^0 \ldots i^k}\}$ образуют множества вида $([a_{i^0 \ldots i^k}, b_{i^0 \ldots i^k}] \setminus [a_{i^0 \ldots i^k i^{k+1}}, b_{i^0 \ldots i^k i^{k+1}}]) \cap T$. Базу окрестностей в точках $x(f)$, $f \in \omega^\omega$ образуют множества вида $[a_{f(0) \ldots f(k)}, b_{f(0) \ldots f(k)}] \cap T$.

Теорема 4. *Пространство BS гомеоморфно пространству T.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отображение $h\colon BS \to T$, определяемое по следующему правилу:

— $h(\xi_0) = 1$;

— для фиксированного ультрафильтра $\xi_s \in \hat{S}$, где $s \in S$, то есть $s = f|_n$ для некоторой функции $f \in \omega^\omega$ и $n \in \omega$, положим $h(\xi_s) = b_{f(0) \ldots f(n-1)}$;

— для ультрафильтра $\xi_f \in \hat{P}$, определяемого функцией $f \in \omega^\omega$, положим $h(\xi_f) = x(f)$.

Из конструкции и определения топологий пространств BS и T следует, что $h\colon BS \to T$ — взаимно-однозначное и непрерывное вместе с обратным отображение BS на T.

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977. 368 с.
2. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. On Bell's compactification of N // Topology Proceedings. 2010. Vol. 35. P. 177–185.
3. Грызлов А.А., Бастрыков Е.С., Головастов Р.А. О точках одного бикомпактного расширения N // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17.
4. Головастов Р.А. Об одном бикомпактном расширении счетного дискретного пространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки. 2011. Вып. 1. С. 14–19.
5. Головастов Р.А. О пространстве Стоуна одной булевой алгебры // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки. 2012. Вып. 3. С. 19–24.

Поступила в редакцию 11.02.2013

Грызлов Анатолий Александрович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: gryzlov@udsu.ru
Головастов Роман Александрович, старший преподаватель, кафедра алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: rpa4@bk.ru

A. A. Gryzlov, R. A. Golovastov
The Stone spaces of Boolean algebras

Keywords: Boolean algebra, Stone space of Boolean algebra, ultrafilter, compact.

Mathematical Subject Classifications: 54D35

We consider the Stone spaces BD and BS of two Boolean algebras. We prove, that the subspace $\hat{C} \subseteq BD$ of free ultrafilters of the space BD, and the space BS are homeomorphic to the Cantor set.

REFERENCES

1. Alexandrov P.S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu* (Introduction to set theory and general topology), Moscow: Nauka, 1977, 368 p.

2. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. On Bell's compactification of N, *Topology Proceedings*, 2010, vol. 35, pp. 177–185.

3. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. About points of compactification of N, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 10–17.

4. Golovastov R.A. About one compactifications of countable discrete space, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 14–19.

5. Golovastov R.A. About Stone space of one Boolean algebra, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 19–24.

Received 11.02.2013

Gryzlov Anatolii Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Algebra and Topology, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: gryzlov@udsu.ru

Golovastov Roman Aleksandrovich, Senior Lecturer, Department of Algebra and Topology, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: rpa4@bk.ru