УДК 517.95

© *Д. Аманов, М. Б. Мурзамбетова*

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМ ЧЛЕНОМ

Изучается одна краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с младшим членом в прямоугольной области. Для решения задачи получена априорная оценка решения, из которой следует единственность решения задачи. Для доказательства существования решения задачи применяется метод разделения переменных. Разрешимость задачи сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно искомой функции, которое решается методом последовательных приближений. Найдены достаточные условия, обеспечивающие абсолютную и равномерную сходимость ряда, представляющего решение задачи, и рядов, полученных из него дифференцированием четыре раза по x и два раза по t.

Ключевые слова: краевая задача, априорная оценка, регулярная разрешимость, интегральное уравнение Фредгольма второго рода, резольвента, метод последовательных приближений.

Введение

Теория краевых задач для уравнений четвертого порядка все еще остается малоизученной. Краевым задачам для уравнений четвертого порядка посвящены работы [1–16] и другие. Особо следует отметить монографию [1], где дается классификация уравнений четвертого порядка с двумя независимыми переменными, указываются приложения этих уравнений и исследуются некоторые краевые задачи, как для одного уравнения, так и для уравнений смешанного типа. Там же можно найти наиболее полную библиографию по уравнениям четвертого порядка.

В настоящей работе в области $\Omega = \{(x,t):\ 0 < x < p,\ 0 < t < T\}$ рассматривается уравнение

$$Lu = f(x,t), \tag{0.1}$$

$$Lu \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c(x,t)u(x,t), \tag{0.2}$$

где $c(x,t)$, $f(x,t)$ — заданные гладкие функции в $\overline{\Omega}$.

§ 1. Постановка задачи

Задача. Найти в области Ω решение $u(x,t)$ уравнения (0.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = p, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k = 0, 1, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,T) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant p. \tag{1.2}$$

Введем обозначения

$$V(\Omega) = \left\{ u(x,t) : u \in C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega}) \cap C^{4,2}_{x,t}(\Omega) \ \text{ и выполняются условия } \ (1.1), (1.2) \right\}.$$

Определение. Функцию $u(x,t) \in V(\Omega)$ назовем *регулярным решением задачи*, если в области Ω она удовлетворяет уравнению (0.1).

Рассмотрим множество $C(\overline{\Omega})$. В этом множестве введем следующее скалярное произведение:

$$(u,v)=\iint_{\Omega}\left[uv+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]dx\,dt. \tag{1.3}$$

Пополним множество $C(\Omega)$ в метрике (1.3). Полученное полное пространство обозначим через $W_2^{4,2}(\Omega)$.

§ 2. Априорная оценка

Лемма 1. *Пусть* $u\in V(\Omega)$, $u_{xxx}\in C(\Omega)\cap L_2(\Omega)$, $u_{xxxx}\in L_2(\Omega)$, $u_{tt}\in L_2(\Omega)$, $c(x,t)<0$. *Тогда существует постоянное число* $C>0$*, зависящее от функции* $c(x,t)$ *и не зависящее от функции* $u(x,t)$*, такое, что имеет место оценка*

$$\|u\|_{W_2^{4,2}(\Omega)}\leqslant C\,\|Lu\|_{L_2(\Omega)}\,. \tag{2.1}$$

Доказательство. Умножим обе части равенства (0.2) на $u(x,t)$. Пусть $\min\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}}c(x,t)=-m$, $m>0$. Интегрируя полученное равенство по области Ω и учитывая условия (1.1), (1.2), получаем

$$\|u_{xx}\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)}+m\,\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant\iint_{\Omega}uLu\,dx\,dt.$$

Легко проверить, что

$$|uLu|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\,|u|^2+\frac{1}{2\varepsilon}\,|uLu|^2\,,\quad \varepsilon>0. \tag{2.2}$$

Используя неравенство (2.2), получаем

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u_{xx}\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant\frac{1}{\lambda_0}\,\|Lu\|^2_{L_2(\Omega)}\,, \tag{2.3}$$

где $\lambda_0=2m-1$. Учитывая условие (1.1) и интегрируя по частям, можно убедиться, что

$$\int_0^T\int_0^p u_x^2\,dx\,dt=-\int_0^T\int_0^p u\cdot u_{xx}\,dx\,dt.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$\|u_x\|^2\leqslant\|u\|\cdot\|u_{xx}\|\,. \tag{2.4}$$

В силу (2.3) получим

$$\|u_x\|^2\leqslant\frac{1}{\lambda_0}\,\|Lu\|^2\,. \tag{2.5}$$

Возведем равенство (0.2) в квадрат и полученное равенство проинтегрируем по области Ω, тогда

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u_{tt}\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u_{xx}\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u_{xxxx}\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant\frac{1}{\delta_0}\,\|Lu\|^2_{L_2(\Omega)}\,, \tag{2.6}$$

где $\delta_0=\min\left\{1;m^2;-2m\right\}$. Аналогично (2.4), имеем $\|u_{xxx}\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant\|u_{xx}\|_{L_2(\Omega)}\cdot\|u_{xxxx}\|_{L_2(\Omega)}$.

В силу (2.6) находим

$$\|u_{xxx}\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant\frac{1}{\delta_0}\,\|Lu\|^2_{L_2(\Omega)}\,. \tag{2.7}$$

Складывая (2.3), (2.5), (2.6) и (2.7), получаем $\|u\|^2_{W_2^{4,2}}\equiv\|u\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u_x\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u_{tt}\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u_{xx}\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u_{xxx}\|^2_{L_2(\Omega)}+\|u_{xxxx}\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant C^2\,\|Lu\|^2_{L_2(\Omega)}$, или $\|u\|_{W_2^{4,2}}\leqslant C\,\|Lu\|_{L_2(\Omega)}$ где $C^2=2\left(\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\delta_0}\right)$. □

Замечание 1. При $c(x,t)=0$ оценка (2.1) установлена в [9].

Следствие 1. *Из оценки* (2.1) *следует единственность решения задачи.*

§ 3. Регулярная разрешимость задачи

Решение задачи ищем в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\cdot X_n(x), \tag{3.1}$$

где $X_n(x)=\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\frac{n\pi}{p}$, $n=1,2,\ldots$. Функции $X_n(x)$ образуют полную ортонормированную систему в $L_2(0,p)$. Обозначим

$$f_1(x,t)=f(x,t)+c(x,t)u(x,t).$$

Функцию $f_1(x,t)$ разложим в ряд Фурье по функциям $X_n(x)$:

$$f_1(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{1n}(t)X_n(x), \tag{3.2}$$

$$f_{1n}(t)=\int_0^p f(x,t)X_n(x)\,dx+\int_0^p c(x,t)u(x,t)X_n(x)\,dx. \tag{3.3}$$

Подставим (3.1) и (3.2) в уравнение (0.1). Тогда получим следующие дифференциальные уравнения

$$u_n''(t)-\lambda_n^4u_n(t)=-f_{1n}(t),\quad n=1,2,\ldots.$$

Учитывая (1.2) и условия (3.3), имеем

$$u_n(t)=\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^T\int_0^p K_n(t,\tau)X_n(\xi)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau+\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^T\int_0^p K_n(t,\tau)X_n(\xi)c(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в уравнение (0.1), получаем следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$u(x,t)-\int_0^T\int_0^p K_1(x,t;\xi,\tau)u(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau=F(x,t), \tag{3.5}$$

где $K_1(x,t;\xi,\tau)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}X_n(x)X_n(\xi)K_n(t,\tau)c(\xi,\tau)$,

$$K_n(t,\tau)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sh}\lambda_n^2\tau\cdot\operatorname{ch}\lambda_n^2(T-t)}{\operatorname{ch}\lambda_n^2T}, & 0\leqslant\tau\leqslant t,\\[2mm] \frac{\operatorname{sh}\lambda_n^2t\cdot\operatorname{ch}\lambda_n^2(T-\tau)}{\operatorname{ch}\lambda_n^2T}, & t\leqslant\tau\leqslant T,\end{cases} \tag{3.6}$$

$$F(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^T\int_0^p K_n(t,\tau)X_n(x)X_n(\xi)f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau.$$

Из (3.6) следует, что $K_n(t,\tau)=K_n(\tau,t)$ и выполнена оценка

$$|K_n(t,\tau)|\leqslant 1. \tag{3.7}$$

Пусть

$$\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}|c(x,t)|=M,\quad M\equiv const>0,\qquad \max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}|f(x,t)|=N,\quad N\equiv const>0.$$

Справедливы следующие оценки: $|K_1(x,t;\xi,\tau)|\leqslant Mp/3$,

$$|F(x,t)|\leqslant C,\quad C\equiv const>0. \tag{3.8}$$

Интегральное уравнение (3.5) решаем методом последовательных приближений. В результате получаем

$$u(x,t)=F(x,t)+\int_0^T\int_0^p R(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{3.9}$$

где

$$R(x,t;\xi,\tau)=\sum_{i=1}^{\infty}K_i(x,t;\xi,\tau), \tag{3.10}$$

$$K_i(x,t;\xi,\tau)=\int_0^T\int_0^p K_1(x,t;\xi_1,\tau_1)K_{i-1}(\xi_1,\tau_1;\xi,\tau)\,d\xi_1 d\tau_1.$$

Ряд (3.10) сходится при

$$M<\frac{3}{p^2T}. \tag{3.11}$$

Установим сходимость полученного решения (3.9) и рядов

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\int_0^T\int_0^p K_n(t,\tau)X_n(x)X_n(\xi)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau+$$

$$+\int_0^T\int_0^p\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2K_n(t,\tau)X_n(x)X_n(\xi)c(\xi,\tau)F(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau+$$

$$+\int_0^T\int_0^p\sum_{i=2}^{\infty}\int_0^T\int_0^p\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2X_n(x)X_n(\xi_1)K_n(t,\tau_1)c(\xi_1,\tau_1)K_{i-1}(\xi_1,\tau_1;\xi,\tau)F(\xi,\tau)\,d\xi_1\,d\tau_1\,d\xi\,d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-f(x,t)-c(x,t)F(x,t)-c(x,t)\int_0^T\int_0^p R(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{3.12}$$

Введем обозначения:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=I_1+I_2+I_3,$$

$$I_1=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\int_0^T\int_0^p K_n(t,\tau)X_n(x)X_n(\xi)f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \tag{3.13}$$

$$I_2=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\int_0^T\int_0^p K_n(t,\tau)X_n(x)X_n(\xi)c(\xi,\tau)F(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}I_3=\int_0^T\int_0^p\sum_{i=2}^{\infty}\int_0^T\int_0^p\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2X_n(x)X_n(\xi_1)K_n(t,\tau_1)c(\xi_1,\tau_1)\times\\ \times K_{i-1}(\xi_1,\tau_1;\xi,\tau)F(\xi,\tau)\,d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Лемма 2. *Если $f(x,t)\in C^{3,0}_{x,t}(\overline{\Omega})$, $\frac{\partial^{2k}f(0,t)}{\partial x^{2k}}=\frac{\partial^{2k}f(p,t)}{\partial x^{2k}}=0$, $k=0,1$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\in Lip_\alpha[0,p]$ равномерно по t, $0<\alpha<1$, то ряд (3.13) сходится абсолютно и равномерно и принадлежит $C(\overline{\Omega})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функцию $f(x,t)$ разложим в ряд Фурье по функциям $X_n(x)$:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x),$$

$$f_n(t)=\int_0^p f(x,t)X_n(x)\,dx. \tag{3.16}$$

Интегрируем (3.16) по частям; получим $f_n(t) = \frac{1}{\lambda_n^3}\overline{f}_n(t)$, где

$$\overline{f}_n(t) = -\int_0^p \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \cdot \sqrt{\frac{2}{p}} \cos \lambda_n x \, dx.$$

Так как $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \in Lip_\alpha[0,p]$ равномерно по t, то $\left|\overline{f}_n(t)\right| \leqslant C_1 \frac{1}{\lambda_n^\alpha}$, $C_1 = const > 0$; тогда имеем

$$|f_n(t)| \leqslant C_1 \frac{1}{\lambda_n^{3+\alpha}}. \tag{3.17}$$

Мажорирующий ряд для (3.13) будет

$$\sqrt{\frac{2}{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left| \int_0^T K_n(t,\tau) f_n(\tau) \, d\tau \right|.$$

Применяя (3.7) и (3.17), последний ряд перепишем в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left| \int_0^T K_n(t,\tau) f_n(\tau) \, d\tau \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left| K_n(t,\tau) \right| \left| f_n(\tau) \right| \leqslant C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \cdot \frac{1}{\lambda_n^{3+\alpha}} = C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}},$$

где $C_2 = C_1 \left(\frac{p}{\pi}\right)^{1+\alpha}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ сходится по интегральному признаку Коши. □

Лемма 3. *Если* $c(x,t) \in C^{3,0}_{x,t}(\overline{\Omega})$, $\frac{\partial^{2k} c(0,t)}{\partial x^{2k}} = \frac{\partial^{2k} c(p,t)}{\partial x^{2k}} = 0$, $k = 0, 1$, $\frac{\partial^3 c}{\partial x^3} \in Lip_\alpha[0,p]$ *равномерно по* t, $0 < \alpha < 1$, *то ряд* (3.14) *сходится абсолютно и равномерно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функцию $c(x,t)$ разложим в ряд Фурье по функциям $X_n(x)$:

$$c(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) X_n(x),$$

$$c_n(t) = \int_0^p c(x,t) X_n(x) \, dx. \tag{3.18}$$

Интегрируем (3.18) по частям, получим

$$c_n(t) = \frac{1}{\lambda_n^3} \overline{c}_n(t), \qquad \text{где} \qquad \overline{c}_n(t) = -\int_0^p \frac{\partial^3 c}{\partial x^3} \cdot \sqrt{\frac{2}{p}} \cos \lambda_n x \, dx.$$

Так как $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \in Lip_\alpha[0,p]$ равномерно по t, то

$$|\overline{c}_n(t)| \leqslant C_3 \frac{1}{\lambda_n^\alpha}, \quad C_3 = const > 0;$$

тогда имеем

$$|c_n(t)| \leqslant C_3 \frac{1}{\lambda_n^{3+\alpha}}. \tag{3.19}$$

Мажорирующий ряд для (3.14) будет

$$\sqrt{\frac{2}{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left| \int_0^T K_n(t,\tau) c_n(\tau) F(\xi,\tau) \, d\tau \right|.$$

Применяя (3.7), (3.17) и (3.19), последний ряд перепишем в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left| \int_0^T K_n(t,\tau) c_n(\tau) F(\xi,\tau) \, d\tau \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \int_0^T |K_n(t,\tau)| \, |c_n(\tau)| \, |F(\xi,\tau)| \, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant CC_3 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \cdot \frac{1}{\lambda_n^{3+\alpha}} = C_4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}},$$

где $C_4 = CC_3 \left(\frac{p}{\pi}\right)^{1+\alpha}$. □

Лемма 4. *Если выполняется* (3.11) *и* $c(x,t) \in C^{3,0}_{x,t}(\overline{\Omega})$, $\frac{\partial^{2k}c(0,t)}{\partial x^{2k}} = \frac{\partial^{2k}c(p,t)}{\partial x^{2k}} = 0$, $k = 0, 1$, $\frac{\partial^3 c}{\partial x^3} \in Lip_\alpha[0,p]$ *равномерно по* t, $0 < \alpha < 1$, *то ряд* (3.15) *сходится абсолютно и равномерно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мажорирующий ряд для (3.15) будет

$$\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^T\int_0^p |R(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)|\, d\xi d\tau \int_0^T \left|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2 K_n(t,\tau_1)c_n(\tau_1)\, d\tau_1\right|.$$

Применяя (3.7), (3.8) и (3.19), имеем

$$\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^T\int_0^p |R(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)|\, d\xi d\tau \int_0^T \left|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2 K_n(t,\tau_1)c_n(\tau_1)\, d\tau_1\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^T\int_0^p \sum_{i=1}^{\infty}|K_i(x,t;\xi,\tau)|\,|F(\xi,\tau)|\, d\xi d\tau \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\,|K_n(t,\tau_1)|\,|c_n(\tau_1)|\, d\tau_1 \leqslant$$
$$\leqslant CC_3\sqrt{\frac{2}{p}}\left(\frac{p}{\pi}\right)^{1+\alpha}\cdot T\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{MT}{3}\right)^i (p)^{2i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}} < \infty$$

в силу (3.11). □

Теорема 1. *Пусть выполнены условия лемм* (2)–(4)*. Тогда регулярное решение задачи существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство следует из лемм (2)–(4). Из представления (3.12) следует, что $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in C(\overline{\Omega})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Ташкент: Фан, 2000. 144 с.
2. Отарова Ж.А. Разрешимость и спектральные свойства краевых задач для уравнений смешанного типа четвертого порядка: автореф. дис. . . . канд. физ.-матем. наук. Ташкент. АНРУз. 2009. 16 с.
3. Salimova G. On a boundary value problem for a fourth order partial differential equation // Proc. Inst. Math. Mech. Azerb. Acad. Sci. 2006. Vol. 25. P. 95–104.
4. Байкузиев К.Б., Касимова М. Смешанная задача для нелинейного уравнения четвертого порядка, вырождающегося на границе области // Известия АН Узб. ССР. Серия физ.-мат. наук. Ташкент. 1968. № 5. С. 7–12.
5. Каримов Д.Х., Касимова М. Смешанная задача для линейного уравнения четвертого порядка, вырождающегося на границе области // Известия АН Узб. ССР. Серия физ.-мат. наук. Ташкент. 1968. № 2. С. 27–31.
6. Мередов М.М. О единственности решения краевых задач для уравнения смешанного типа четвертого порядка // Известия АН Туркмен. ССР. Серия физ.-тех., хим. и геол. наук. Ашхабад. 1967. №4. С. 11–16.
7. Салахитдинов М.С., Аманов Д. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженных задач для уравнения четвертого порядка // Современные проблемы математической физики и информационных технологии: тр. междунар. конф., посвященной 60-летию со дня рождения Ш.А. Алимова. НУУз. Ташкент. 2005. С. 151–155.
8. Салахитдинов М.С., Аманов Д. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка // УзМЖ. Ташкент. 2005. №3. С. 72–77.
9. Аманов Д., Юлдашева А.В. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка // УзМЖ. Ташкент. 2007. №4. С. 3–8.
10. Худавердиев К.И., Алиева А.Г. О существовании в малом классического решения одномерной смешанной задачи для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева четвертого порядка // Вестник Бакинского университета. Серия физ.-мат. наук. 2009. №1. С. 5–17.
11. Yang Yang, Zhang Jihui. Existence of infinitely many mountain pass solutions for some fourth-order boundary value problems with a parameter // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2009. Vol. 71. Issue 12. P. 6135–6143.

12. Karaca Ilkay Yaslan. On positive solutions for fourth-order boundary value problem with impulse // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2009. Vol. 225. №2. P. 356–364.
13. Ханхасаев В.Н. Первая краевая задача для нелинейного вырождающегося уравнения четвертого порядка // Вестн. Бурят. гос. ун-та. 2010. №9. С. 183–186.
14. Zhao Junfang, Wang Libo, Ge Weigao. Necessary and sufficient conditions for the existence of positive solutions of fourth order multi-point boundary value problems // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2010. Vol. 72. Issue 2. P. 822–835.
15. Мустафаев А.П. Представление частных решений составного уравнения четвертого порядка // Естественные и технические науки. 2010. №2. С. 51–53.
16. Runzhang Xu, Yacheng Liu. Global existence and blow-up of solutions for generalized Pochhammer-Chree equations // Acta Mathematica Scientia. 2010. Vol. 30. Issue 5. P. 1793–1807.

Поступила в редакцию 30.11.2012

Аманов Джумаклыч, к. ф.-м. н., доцент, отдел дифференциальных уравнений, Институт математики и информационных технологий, 100125, Узбекистан, Ташкент, ул. Дурмон йули, 29.
E-mail: amanov1942@mail.ru
Мурзамбетова Мехрибан Бегдуллаевна, аспирант, отдел дифференциальных уравнений, Институт математики и информационных технологий, 100125, Узбекистан, Ташкент, ул. Дурмон йули, 29.
E-mail: mehri_8282@mail.ru

D. Amanov, M. B. Murzambetova
A boundary value problem for a fourth order partial differential equation with the lowest term

Keywords: boundary value problem, a priori estimate, regular solvability, Fredholm integral equation of the second kind, resolvent, method of successive approximations.

Mathematical Subject Classifications: 35G15, 35D05

In this paper we study a boundary value problem for the fourth order partial differential equation with the lowest term in a rectangular domain. For the solution of the problem a priori estimate is obtained. From a priori estimate the uniqueness of the solution of the problem follows. For the proof of the solvability of this problem we use the method of separation of variables. The solvability of this problem is reduced to the Fredholm integral equation of the second kind with respect to unknown function. Integral equation is solved by the method of successive approximations. We find the sufficient conditions for the absolute and uniform convergence of series representing the solution of the problem and the series obtained by differentiation four times with respect x and two times with respect to t.

REFERENCES

1. Dzhurayev T.D., Sopuev.A.K. *K teorii differentsial'nykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh chetvertogo poryadka* (Theory of partial differential equations of fourth order), Tashkent: Fan, 2000, 144 p.

2. Otarova Zh.A. Solvability and spectral properties of the boundary value problems for fourth order equations of mixed type, *Abstract of Cand. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation*, Tashkent, 2009, 16 p.

3. Salimova G. On a boundary value problem for a fourth order partial differential equation, *Proc. Inst. Math. Mech., Azerb. Acad. Sci.*, 2006, vol. 25, pp. 95–104.

4. Baikuziev K.B., Kasimova M. Initial boundary value problem for nonlinear degenerating fourth order equation, *Izv. Akad. Nauk UzSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, 1968, no. 5, pp. 7–12.

5. Karimov D.Kh., Kasimova M. Initial boundary value problems for linear degenerating fourth order equation, *Izv. Akad. Nauk UzSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, 1968, no. 2, pp. 27–31.

6. Meredov M.M. About uniqueness of solutions of boundary value problems for fourth order mixed type equation, *Izv. Akad. Nauk Turkm. SSR, Ser. Fiz.-Tekh., Khim. Geol. Nauk*, 1967, no. 4, pp. 11–16.

7. Salakhitdinov M.S., Amanov D. Solvability and spectral properties of the self-adjoint problems for fourth order equation, *Modern Problems of Mathematical Physics and Information Technologies: Transaction of the International Conference*, Ulugbek National University of Uzbekistan, Tashkent, 2005, pp. 151–155.

8. Salakhitdinov M.S., Amanov D. Solvability and spectral properties of a self-adjoint problem for a equation of fourth order, *Uzb. Mat. Zh.*, 2005, no. 3, pp. 72–77.

9. Amanov D., Yuldasheva A.V. Solvability and spectral properties of a self-adjoint problem for a equation of fourth order, *Uzb. Mat. Zh.*, 2007, no. 4. pp. 3–8.

10. Hudaverdiev K.I., Alieva A.G. About existence in small of the classical solution of one-dimensional mixed problem for one class of the semilinear Sobolev type equations of the fourth order, *Vestn. Bakin. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, 2009, no. 1, pp. 5–17.

11. Yang Yang, Zhang Jihui. Existence of infinitely many mountain pass solutions for some fourth-order boundary value problems with a parameter, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2009, vol. 71, issue 12, pp. 6135–6143.

12. Karaca Ilkay Yaslan. On positive solutions for fourth-order boundary value problem with impulse *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009, vol. 225, no. 2, pp. 356–364.

13. Khankhasaev V.N. First boundary value problem for nonlinear degenerating equation of fourth order, *Vestn. Buryat. Gos. Univ.*, 2010, no. 9, pp. 183–186.

14. Zhao Junfang, Wang Libo, Ge Weigao. Necessary and sufficient conditions for the existence of positive solutions of fourth order multi-point boundary value problems, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2010, vol. 72, issue 2, pp. 822–835.

15. Mustafaev A.P. Representation of partial solutions of fourth order composite type equation, *Est. Tekhn. Nauki*, 2010, no. 2, pp. 51–53.

16. Runzhang Xu, Yacheng Liu. Global existence and blow-up of solutions for generalized Pochhammer-Chree equations, *Acta Mathematica Scientia*, 2010, vol. 30, issue 5, pp. 1793–1807.

Received 30.11.2012

Amanov Djumaklych, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Differential Equations, Institute of Mathematics and Information Technologies, ul. Do'rmon yo'li, 29, Tashkent, 100125, Uzbekistan.
E-mail: amanov1942@mail.ru
Murzambetova Mekhriban Begdullaevna, postgraduate student, Department of Differential Equations, Institute of Mathematics and Information Technologies, ul. Do'rmon yo'li, 29, Tashkent, 100125, Uzbekistan.
E-mail: mehri_8282@mail.ru