УДК $519.651 + 517.518.823$

© ***Н. В. Родионова***

ТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ И НЕВЯЗКИ ОПТИМАЛЬНОГО АППРОКСИМИРУЮЩЕГО СПЛАЙНА ПРОСТЕЙШЕГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Определяется параметрическое семейство конечномерных пространств специальных квадратичных сплайнов лагранжевого типа. В каждом пространстве в качестве решения начально-граничной задачи для простейшего волнового уравнения предлагается оптимальный сплайн, дающий наименьшую невязку, представляющую собой квадрат нормы в пространстве L_2. Для коэффициентов этого сплайна и для его невязки получены точные формулы. Формула для коэффициентов сплайна представляет собой линейную форму от конечных разностей дискретно заданных начальных и граничных условий исходной задачи. Формула для невязки J представляет собой положительно определенную квадратичную форму от этих же величин. Коэффициенты обеих форм вычислимы через многочлены Чебышева 2-го рода. Явный вид формулы для невязки позволяет при заданной точности вычислений $\varepsilon > 0$ решить неравенство $J < \varepsilon^2$ и получить априори достаточное количество узлов разностной схемы.

Исследования проведены для одного слоя по времени, имеющего два подслоя. Получены разностные формулы начального условия для частной производной по времени. Они позволяют формировать разностную схему для нового слоя, что, в свою очередь, позволяет продолжать итерационный вычислительный процесс по времени сколь угодно далеко.

Ключевые слова: интерполяция, аппроксимирующий сплайн, невязка, многочлены Чебышева.

Введение

Мы переносим метод построения разностных схем [1, 2] с уравнения теплопроводности на волновое уравнение: при фиксированных $\gamma \neq 0$ и $\tau > 0$ изучается начально-граничная задача

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}; \quad u(0,\xi) = \phi(\xi), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,\xi) = \psi(\xi), \quad \xi \in [0,1]; \\ u(t,0) = \rho_0(t), \quad u(t,1) = \rho_1(t), \quad t \in [0, 2\tau].\end{gathered} \tag{0.1}$$

Предполагаются выполненными естественные условия сопряжения

$$\rho_0(0) = \phi(0), \quad \rho_1(0) = \phi(1), \quad \rho_0'(0) = \psi(0), \quad \rho_1'(0) = \psi(1).$$

Через Ω обозначим прямоугольник $[0, 2\tau] \times [0,1]$. Пусть $h \doteq \frac{1}{2N}$, где $N \in \mathbb{N}$, $\theta \doteq \gamma^2 \dfrac{\tau^2}{h^2}$, $\nu \doteq \dfrac{h}{\tau^3}$, а точки $(\tau_i, h_j) \in \Omega$ таковы, что $\tau_i \doteq i\tau$, $i = 0,1,2$, $h_j \doteq jh$, $j = 0,1,\ldots,2N$.

§ 1. Постановка задачи построения оптимального аппроксимирующего сплайна

Массив u_j^i, $i = 0,1,2$, $j = 0,1,\ldots,2N$, будем называть *допустимым*, если: 1) $u_j^0 \doteq \phi(h_j)$ для всех $j = 0,1,\ldots,2N$; 2) $u_0^i \doteq \rho_0(\tau_i)$, $u_{2N}^i \doteq \rho_1(\tau_i)$ для всех $i = 0,1,2$. Сетка $\{(\tau_i, h_j)\}$ и допустимый массив (u_j^i) порождают четыре серии ($k = 1,\ldots,N$) полиномов:

$$P_k^1(t,\xi) \doteq \left(u_{2k-2}^2 - 2\,u_{2k-2}^1 + u_{2k-2}^0\right) \frac{t^2}{2\tau^2} + \left(u_{2k-1}^1 - u_{2k-2}^1 - u_{2k-1}^0 + u_{2k-2}^0\right) \frac{t\,(\xi - h_{2k-2})}{\tau h} +$$
$$+ \left(u_{2k}^0 - 2\,u_{2k-1}^0 + u_{2k-2}^0\right) \frac{(\xi - h_{2k-2})^2}{2h^2} + \left(-u_{2k-2}^2 + 4\,u_{2k-2}^1 - 3\,u_{2k-2}^0\right) \frac{t}{2\tau} +$$

$$+\big(-u^0_{2k}+4\,u^0_{2k-1}-3\,u^0_{2k-2}\big)\,\frac{\xi-h_{2k-2}}{2h}\,+\,u^0_{2k-2}\,,$$

$$P^2_k(t,\xi)\doteq\big(u^0_{2k}-2\,u^1_{2k}+u^2_{2k}\big)\,\frac{(2\tau-t)^2}{2\tau^2}+\big(u^1_{2k-1}-u^1_{2k}-u^2_{2k-1}+u^2_{2k}\big)\,\frac{(2\tau-t)\,(h_{2k}-\xi)}{\tau\,h}+$$

$$+\big(u^2_{2k-2}-2\,u^2_{2k-1}+u^2_{2k}\big)\,\frac{(h_{2k}-\xi)^2}{2\,h^2}+\big(-u^0_{2k}+4\,u^1_{2k}-3\,u^2_{2k}\big)\,\frac{2\tau-t}{2\tau}+$$

$$+\big(-u^2_{2k-2}+4\,u^2_{2k-1}-3\,u^2_{2k}\big)\,\frac{h_{2k}-\xi}{2h}\,+\,u^2_{2k}\,,$$

$$P^3_k(t,\xi)\doteq\big(u^2_{2k}-2\,u^1_{2k}+u^0_{2k}\big)\,\frac{t^2}{2\tau^2}+\big(u^1_{2k-1}-u^1_{2k}-u^0_{2k-1}+u^0_{2k}\big)\,\frac{t\,(h_{2k}-\xi)}{\tau\,h}+$$

$$+\big(u^0_{2k-2}-2\,u^0_{2k-1}+u^0_{2k}\big)\,\frac{(h_{2k}-\xi)^2}{2\,h^2}+\big(-u^2_{2k}+4\,u^1_{2k}-3\,u^0_{2k}\big)\,\frac{t}{2\tau}+$$

$$+\big(-u^0_{2k-2}+4\,u^0_{2k-1}-3\,u^0_{2k}\big)\,\frac{h_{2k}-\xi}{2h}\,+\,u^0_{2k}\,,$$

$$P^4_k(t,\xi)\doteq\big(u^0_{2k-2}-2\,u^1_{2k-2}+u^2_{2k-2}\big)\,\frac{(2\tau-t)^2}{2\tau^2}+\big(u^2_{2k}-2\,u^2_{2k-1}+u^2_{2k-2}\big)\,\frac{(\xi-h_{2k-2})^2}{2\,h^2}+$$

$$+\big(u^1_{2k-1}-u^1_{2k-2}-u^2_{2k-1}+u^2_{2k-2}\big)\,\frac{(2\tau-t)\,(\xi-h_{2k-2})}{\tau\,h}+\big(-u^0_{2k-2}+4\,u^1_{2k-2}-3\,u^2_{2k-2}\big)\,\frac{2\tau-t}{2\tau}+$$

$$+\big(-u^2_{2k}+4\,u^2_{2k-1}-3\,u^2_{2k-2}\big)\,\frac{\xi-h_{2k-2}}{2h}\,+\,u^2_{2k-2}\,.$$

Непосредственным вычислением легко проверить следующие 24 равенства:

$P^2_k(\tau_2,h_{2k-2})=u^2_{2k-2}$	$P^2_k(\tau_2,h_{2k-1})=u^2_{2k-1}$	$P^2_k(\tau_2,h_{2k})=u^2_{2k}$
	$P^2_k(\tau_1,h_{2k-1})=u^1_{2k-1}$	$P^2_k(\tau_1,h_{2k})=u^1_{2k}$
		$P^2_k(\tau_0,h_{2k})=u^0_{2k}$
$P^1_k(\tau_2,h_{2k-2})=u^2_{2k-2}$		
$P^1_k(\tau_1,h_{2k-2})=u^1_{2k-2}$	$P^1_k(\tau_1,h_{2k-1})=u^1_{2k-1}$	
$P^1_k(\tau_0,h_{2k-2})=u^0_{2k-2}$	$P^1_k(\tau_0,h_{2k-1})=u^0_{2k-1}$	$P^1_k(\tau_0,h_{2k})=u^0_{2k}$

$P^4_k(\tau_2,h_{2k-2})=u^2_{2k-2}$	$P^4_k(\tau_2,h_{2k-1})=u^2_{2k-1}$	$P^4_k(\tau_2,h_{2k})=u^2_{2k}$
$P^4_k(\tau_1,h_{2k-2})=u^1_{2k-2}$	$P^4_k(\tau_1,h_{2k-1})=u^1_{2k-1}$	
$P^4_k(\tau_0,h_{2k-2})=u^0_{2k-2}$		
		$P^3_k(\tau_2,h_{2k})=u^2_{2k}$
	$P^3_k(\tau_1,h_{2k-1})=u^1_{2k-1}$	$P^3_k(\tau_1,h_{2k})=u^1_{2k}$
$P^3_k(\tau_0,h_{2k-2})=u^0_{2k-2}$	$P^3_k(\tau_0,h_{2k-1})=u^0_{2k-1}$	$P^3_k(\tau_0,h_{2k})=u^0_{2k}$

Кроме того, сетка $\{\,(\tau_i,h_j)\,\}$ порождает в плоскости (t,ξ) четыре серии треугольников:

$$\Omega^1_k\doteq\{\,t\geqslant 0,\ \xi\geqslant h_{2k-2},\ \xi+\tfrac{h}{\tau}\,t\leqslant h_{2k}\,\},\quad \Omega^2_k\doteq\{\,t\leqslant 2\tau,\ \xi\leqslant h_{2k},\ \xi+\tfrac{h}{\tau}\,t\geqslant h_{2k}\,\},$$

$$\Omega^3_k\doteq\{\,t\geqslant 0,\ \xi\leqslant h_{2k},\ \xi-\tfrac{h}{\tau}\,t\geqslant h_{2k-2}\,\},\quad \Omega^4_k\doteq\{\,t\leqslant 2\tau,\ \xi\geqslant h_{2k-2},\ \xi-\tfrac{h}{\tau}\,t\leqslant h_{2k-2}\,\}.$$

Каждый треугольник содержит ровно шесть точек сетки: три из них расположены в вершинах треугольника, а еще три — в серединах сторон. В соответствии с [1, 2] на множестве Ω определены две непрерывные функции (квадратичные сплайны)

$$u_L(t,\xi)\doteq\begin{cases} P^1_k(t,\xi), & \text{если } k \text{ такое, что } (t,\xi)\in\Omega^1_k\,,\\ P^2_k(t,\xi), & \text{если } k \text{ такое, что } (t,\xi)\in\Omega^2_k\,,\end{cases} \tag{1.1}$$

$$u_R(t,\xi)\doteq\begin{cases} P^3_k(t,\xi), & \text{если } k \text{ такое, что } (t,\xi)\in\Omega^3_k\,,\\ P^4_k(t,\xi), & \text{если } k \text{ такое, что } (t,\xi)\in\Omega^4_k\,.\end{cases} \tag{1.2}$$

Зафиксируем $\lambda \in [0,1]$, и пусть $\mu \doteq 1-\lambda$, $\omega \doteq \lambda-\mu$. Очевидно, $\mu \in [0,1]$, $\omega \in [-1,1]$. Функции (1.1) и (1.2) порождают на множестве Ω квадратичный сплайн $u_\lambda \doteq \lambda\, u_{L} + \mu\, u_{R}$, который мы называем (*специальным*) *аппроксимирующим сплайном*. Разнообразие таких сплайнов определяется лишь наборами чисел u^i_j, $i=1,2$, $j=1,\dots,2N-1$. Это означает, что при фиксированном значении λ аппроксимирующие сплайны образуют конечномерное линейное пространство размерности $4N-2$. Обозначим его $\sigma_\lambda(\Omega) = \sigma_{\lambda,N}(\Omega)$.

Определим оператор $D:\, \sigma_\lambda(\Omega) \to \mathrm{L}_2(\Omega)$ следующим образом. Сплайн $u \in \sigma_\lambda(\Omega)$ имеет все частные производные во всех точках множества Ω, за исключением множества S меры нуль:

$$S \doteq \Omega \cap \big\{\, \{\, t=0 \,\} \cup \{\, t=2\tau \,\} \cup \{\, \xi = h_{2j} \,\}_{j=0}^{N} \cup \{\, \xi + \tfrac{h}{\tau}\, t = h_{2k} \,\}_{k=1}^{N} \cup \{\, \xi - \tfrac{h}{\tau}\, t = h_{2k-2} \,\}_{k=1}^{N} \,\big\}.$$

Пусть $(Du)(t,\xi) \doteq 0$ во всех точках множества S, а в остальных точках прямоугольника Ω полагаем $(Du)(t,\xi) \doteq u_{tt} - \gamma^2 u_{\xi\xi}$. Таким образом, в качестве приближенного решения исходной задачи (0.1) можно принять оптимальный аппроксимирующий сплайн $\overline{u} \in \sigma_\lambda(\Omega)$ задачи

$$J \doteq J(u) \doteq \|\, Du \,\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \to \min, \quad u \in \sigma_\lambda(\Omega), \tag{1.3}$$

решение которой в конечном счете сводится к поиску чисел $\overline{u}^i_j$, $i=1,2$, $j=1,\dots,2N-1$, реализующих минимум функционала J и порождающих оптимальное решение $\overline{u} \in \sigma_\lambda(\Omega)$.

§ 2. Разностный вид начального условия для частной производной по времени

Остановимся подробно на записи начального условия $u_t(0,\xi) = \psi(\xi)$ задачи (0.1) в разностном виде. Пусть $u \in \sigma_\lambda(\Omega)$. Ниже показано, что частная производная $u_t(t,\xi)$ определена не только во всех точках множества $\Omega \setminus S$, но и еще в некоторых точках множества S.

На протяжении работы будем использовать следующие обозначения:

$$x_j \doteq u^2_j - u^0_j, \quad y_j \doteq u^2_j - 2\, u^1_j + u^0_j, \quad j = 0,1,\dots,2N,$$

$$X_k \doteq x_{2k-2} - 2\, x_{2k-1} + x_{2k}, \quad Z_k \doteq u^0_{2k-2} - 2\, u^0_{2k-1} + u^0_{2k}, \quad k=1,\dots,N.$$

Очевиден обратный переход: $u^1_j = u^0_j + (\, x_j - y_j)/2$ и $u^2_j = u^0_j + x_j$ для всех $j = 0,1,\dots,2N$. В силу этих двух соотношений справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial P^1_k}{\partial t}(t,\xi) = y_{2k-2}\,\frac{t}{\tau^2} + \big(-x_{2k-2} + x_{2k-1} + y_{2k-2} - y_{2k-1}\big)\,\frac{\xi - h_{2k-2}}{2\tau h} + \big(\, x_{2k-2} - 2\, y_{2k-2}\big)\,\frac{1}{2\tau},$$

$$\frac{\partial P^2_k}{\partial t}(t,\xi) = y_{2k}\,\frac{t-2\tau}{\tau^2} + \big(\, x_{2k-1} - x_{2k} + y_{2k-1} - y_{2k}\big)\,\frac{h_{2k} - \xi}{2\tau h} + \big(\, x_{2k} + 2\, y_{2k}\big)\,\frac{1}{2\tau},$$

$$\frac{\partial P^3_k}{\partial t}(t,\xi) = y_{2k}\,\frac{t}{\tau^2} + \big(\, x_{2k-1} - x_{2k} - y_{2k-1} + y_{2k}\big)\,\frac{h_{2k} - \xi}{2\tau h} + \big(\, x_{2k} - 2\, y_{2k}\big)\,\frac{1}{2\tau},$$

$$\frac{\partial P^4_k}{\partial t}(t,\xi) = y_{2k-2}\,\frac{t-2\tau}{\tau^2} + \big(-x_{2k-2} + x_{2k-1} - y_{2k-2} + y_{2k-1}\big)\,\frac{\xi - h_{2k-2}}{2\tau h} + \big(\, x_{2k-2} + 2\, y_{2k-2}\big)\,\frac{1}{2\tau}.$$

Пусть $G^{1k} \doteq \Omega^{1k} \cap \Omega^{3k}$, $G^{2k} \doteq \Omega^{2k} \cap \Omega^{4k}$, $G^{3k} \doteq \Omega^{3k} \cap \Omega^{2k}$, $G^{4k} \doteq \Omega^{4k} \cap \Omega^{1k}$ для всех $k = 1,\dots,N$.

1. Для сужения $u:\, \operatorname{int} G^{1k} \to \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\xi) = \lambda\,\frac{\partial u_{L}}{\partial t}(t,\xi) + \mu\,\frac{\partial u_{R}}{\partial t}(t,\xi) = \lambda\,\frac{\partial P^1_k}{\partial t}(t,\xi) + \mu\,\frac{\partial P^3_k}{\partial t}(t,\xi),$$

$$\lim_{\substack{(t,\xi)\to(0,h_{2k-1})\\ (t,\xi)\in \operatorname{int} G^{1k}}} \frac{\partial u}{\partial t}(t,\xi) = \lambda\,\frac{\partial P^1_k}{\partial t}(0,h_{2k-1}) + \mu\,\frac{\partial P^3_k}{\partial t}(0,h_{2k-1}) = \frac{1}{2\tau}\big(\, x_{2k-1} - \lambda\, y_{2k-2} - y_{2k-1} - \mu\, y_{2k}\big),$$

поэтому у нас есть все основания записать следующее разностное уравнение:

$$\frac{1}{2\tau}\,(\, x_{2k-1} - \lambda\, y_{2k-2} - y_{2k-1} - \mu\, y_{2k}) = \psi(h_{2k-1}), \qquad k = 1,\dots,N. \tag{2.1}$$

2. Для сужения $u:\ \mathrm{int}\, G^{2k} \to \mathbb{R}$ имеем равенства

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\xi) = \lambda\,\frac{\partial u_{_L}}{\partial t}(t,\xi) + \mu\,\frac{\partial u_{_R}}{\partial t}(t,\xi) = \lambda\,\frac{\partial P_k^2}{\partial t}(t,\xi) + \mu\,\frac{\partial P_k^4}{\partial t}(t,\xi). \tag{2.2}$$

3. Для сужения $u:\ \mathrm{int}\, G^{3k} \to \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\xi) = \lambda\,\frac{\partial u_{_L}}{\partial t}(t,\xi) + \mu\,\frac{\partial u_{_R}}{\partial t}(t,\xi) = \lambda\,\frac{\partial P_k^2}{\partial t}(t,\xi) + \mu\,\frac{\partial P_k^3}{\partial t}(t,\xi),$$

$$\lim_{\substack{(t,\xi)\,\to\,(s,h_{2k})\\ (t,\xi)\,\in\,\mathrm{int}\,G^{3k}}} \frac{\partial u}{\partial t}(t,\xi) = \lambda\,\frac{\partial P_k^2}{\partial t}(s,h_{2k}) + \mu\,\frac{\partial P_k^3}{\partial t}(s,h_{2k}) = \frac{1}{2\tau}\,\Big(\,x_{2k} + 2\,y_{2k}\,\frac{s-\tau}{\tau}\,\Big) \quad \forall\, s\in(0,2\tau).$$

4. Для сужения $u:\ \mathrm{int}\, G^{4k} \to \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\xi) = \lambda\,\frac{\partial u_{_L}}{\partial t}(t,\xi) + \mu\,\frac{\partial u_{_R}}{\partial t}(t,\xi) = \lambda\,\frac{\partial P_k^1}{\partial t}(t,\xi) + \mu\,\frac{\partial P_k^4}{\partial t}(t,\xi),$$

$$\lim_{\substack{(t,\xi)\,\to\,(s,h_{2k-2})\\ (t,\xi)\,\in\,\mathrm{int}\,G^{4k}}} \frac{\partial u}{\partial t}(t,\xi) = \lambda\,\frac{\partial P_k^1}{\partial t}(s,h_{2k-2}) + \mu\,\frac{\partial P_k^4}{\partial t}(s,h_{2k-2}) = \frac{1}{2\tau}\,\Big(\,x_{2k-2} + 2\,y_{2k-2}\,\frac{s-\tau}{\tau}\,\Big) \quad \forall\, s\in(0,2\tau).$$

Таким образом, при всех $k=1,\ldots,N-1$ и $s\in(0,2\tau)$ имеют место равенства

$$\lim_{\substack{(t,\xi)\,\to\,(s,h_{2k})\\ (t,\xi)\,\in\,\mathrm{int}\,G^{3k}}} \frac{\partial u}{\partial t}(t,\xi) = \frac{1}{2\tau}\,\Big(\,x_{2k} + 2\,y_{2k}\,\frac{s-\tau}{\tau}\,\Big) = \lim_{\substack{(t,\xi)\,\to\,(s,h_{2k})\\ (t,\xi)\,\in\,\mathrm{int}\,G^{4,k+1}}} \frac{\partial u}{\partial t}(t,\xi), \tag{2.3}$$

поэтому производная u_t определена и непрерывна во всех точках множеств $\mathrm{int}\,(\,G^{3k}\cup G^{4,k+1})$, причем если в равенствах (2.3) устремить $s\to 0$, то у нас есть все основания записать следующее разностное уравнение:

$$\frac{1}{2\tau}\,(\,x_{2k} - 2\,y_{2k}) = \psi(h_{2k}), \qquad k=1,\ldots,N-1. \tag{2.4}$$

Замечание 1. Предположим, что известны все значения массива $(\,u_j^i\,)$ на сетке $\{\,(\tau_i,h_j)\,\}$ множества Ω, и мы продолжаем вычисления на множестве $\Omega^{\mathrm{next}} \doteq [2\tau,4\tau]\times[0,1]$. Если в равенствах (2.3) устремить $s\to 2\tau$, то определены новые значения

$$\psi^{\mathrm{next}}(h_{2k}) \doteq \frac{1}{2\tau}\,(\,x_{2k} + 2\,y_{2k}), \qquad k=1,\ldots,N-1.$$

Величины x_j, y_j вычисляемы через значения $(\,u_j^i\,)$. В силу (2.2) справедливы равенства

$$\lim_{\substack{(t,\xi)\,\to\,(2\tau,h_{2k-1})\\ (t,\xi)\,\in\,\mathrm{int}\,G^{2k}}} \frac{\partial u}{\partial t}(t,\xi) = \lambda\,\frac{\partial P_k^2}{\partial t}(2\tau,h_{2k-1}) + \mu\,\frac{\partial P_k^4}{\partial t}(2\tau,h_{2k-1}) = \frac{1}{2\tau}(\,x_{2k-1} + \mu\,y_{2k-2} + y_{2k-1} + \lambda\,y_{2k}),$$

следовательно, определены новые значения

$$\psi^{\mathrm{next}}(h_{2k-1}) \doteq \frac{1}{2\tau}\,(\,x_{2k-1} + \mu\,y_{2k-2} + y_{2k-1} + \lambda\,y_{2k}), \qquad k=1,\ldots,N.$$

Таким образом, величины $\psi^{\mathrm{next}}(h_j)$, $j=1,\ldots,2N-1$ могут быть взяты в качестве начальных условий при вычислениях на множестве $\Omega^{\mathrm{next}} \doteq [2\tau,4\tau]\times[0,1]$. Это обстоятельство позволяет продолжать итерационный вычислительный процесс по переменной t сколь угодно далеко.

§ 3. Точная формула для функционала невязок аппроксимирующих сплайнов

Легко проверить следующие равенства:

$$(DP_m^1)(t,\xi) = y_{2m-2}\,\frac{1}{\tau^2} - \gamma^2 Z_m\,\frac{1}{h^2} = \frac{1}{\tau^2}\,[\,y_{2m-2} - \theta\,Z_m\,],$$

$$(DP_m^2)(t,\xi) = y_{2m}\,\frac{1}{\tau^2} - \gamma^2(\,X_m + Z_m)\,\frac{1}{h^2} = \frac{1}{\tau^2}\,[\,y_{2m} - \theta\,X_m - \theta\,Z_m\,],$$

$$(DP_m^3)(t,\xi) = y_{2m}\,\frac{1}{\tau^2} - \gamma^2 Z_m\,\frac{1}{h^2} = \frac{1}{\tau^2}\,[\,y_{2m} - \theta\,Z_m\,],$$

$$(DP_m^4)(t,\xi) = y_{2m-2}\,\frac{1}{\tau^2} - \gamma^2(\,X_m + Z_m)\,\frac{1}{h^2} = \frac{1}{\tau^2}\,[\,y_{2m-2} - \theta\,X_m - \theta\,Z_m\,].$$

Зафиксируем произвольный аппроксимирующий сплайн $u \in \sigma_\lambda(\Omega)$. Для сужений $u\colon \operatorname{int} G^{\ell m} \to \mathbb{R}$, $\ell = 1,\ldots,4$, $m = 1,\ldots,N$ справедливы равенства:

$$(t,\xi) \in \operatorname{int} G^{1m} \Longrightarrow (Du)(t,\xi) = \lambda\,(Du_{L})(t,\xi) + \mu\,(Du_{R})(t,\xi) = \lambda\,(DP_m^1)(t,\xi) + \mu\,(DP_m^3)(t,\xi) =$$
$$= \frac{1}{\tau^2}\,[\,\lambda\,y_{2m-2} + \mu\,y_{2m} - \theta\,Z_m\,],$$

$$(t,\xi) \in \operatorname{int} G^{2m} \Longrightarrow (Du)(t,\xi) = \lambda\,(Du_{L})(t,\xi) + \mu\,(Du_{R})(t,\xi) = \lambda\,(DP_m^2)(t,\xi) + \mu\,(DP_m^4)(t,\xi) =$$
$$= \frac{1}{\tau^2}\,[\,\mu\,y_{2m-2} + \lambda\,y_{2m} - \theta\,X_m - \theta\,Z_m\,],$$

$$(t,\xi) \in \operatorname{int} G^{3m} \Longrightarrow (Du)(t,\xi) = \lambda\,(Du_{L})(t,\xi) + \mu\,(Du_{R})(t,\xi) = \lambda\,(DP_m^2)(t,\xi) + \mu\,(DP_m^3)(t,\xi) =$$
$$= \frac{1}{\tau^2}\,[\,y_{2m} - \lambda\theta\,X_m - \theta\,Z_m\,],$$

$$(t,\xi) \in \operatorname{int} G^{4m} \Longrightarrow (Du)(t,\xi) = \lambda\,(Du_{L})(t,\xi) + \mu\,(Du_{R})(t,\xi) = \lambda\,(DP_m^1)(t,\xi) + \mu\,(DP_m^4)(t,\xi) =$$
$$= \frac{1}{\tau^2}\,[\,y_{2m-2} - \mu\theta\,X_m - \theta\,Z_m\,].$$

Следовательно, функционал (1.3) приобретает вид

$$J = \|\,Du\,\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} = \int_\Omega (Du)^2(t,\xi)\,dt\,d\xi = \sum_{m=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{4}\int_{G^{\ell m}}(Du)^2(t,\xi)\,dt\,d\xi =$$

$$= \nu\sum_{m=1}^{N}\Big(\,[\,\lambda\,y_{2m-2} + \mu\,y_{2m} - \theta\,Z_m\,]^2 + [\,\mu\,y_{2m-2} + \lambda\,y_{2m} - \theta\,X_m - \theta\,Z_m\,]^2 +$$
$$+ [\,y_{2m} - \lambda\theta\,X_m - \theta\,Z_m\,]^2 + [\,y_{2m-2} - \mu\theta\,X_m - \theta\,Z_m\,]^2\Big), \tag{3.1}$$

и он вычислим через величины X_j, $j = 1,\ldots,N$, и y_{2j}, $j = 0,1,\ldots,N$, которые, в свою очередь, вычислимы через исходный массив u_j^i, $i = 0,1,2$, $j = 0,1,\ldots,2N$.

Таким образом, необходимо вычислить частные производные $\dfrac{\partial J}{\partial y_{2k}}$, $k = 1,\ldots,N-1$ и $\dfrac{\partial J}{\partial X_k}$, $k = 1,\ldots,N$ и приравнять их к нулю. Для произвольных $a,b,c_m \in \mathbb{R}$ имеют место равенства

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial y_{2k}}\sum_{m=1}^{N}[\,a\,y_{2m-2} + b\,y_{2m} + c_m\,]^2 = \sum_{m=1}^{N}[\,a\,y_{2m-2} + b\,y_{2m} + c_m\,]\Big[\,a\,\frac{\partial y_{2m-2}}{\partial y_{2k}} + b\,\frac{\partial y_{2m}}{\partial y_{2k}}\,\Big] =$$

$$= \sum_{m=1}^{N}[\,a\,y_{2m-2} + b\,y_{2m} + c_m\,]\,[\,a\,\delta_{k,m-1} + b\,\delta_{km}\,] = a\,[\,a\,y_{2k} + b\,y_{2k+2} + c_{k+1}\,] + b\,[\,a\,y_{2k-2} + b\,y_{2k} + c_k\,],$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Следовательно, для всех $k=1,\ldots,N-1$ справедливо

$$\frac{1}{2\,\nu}\,\frac{\partial J}{\partial y_{2k}}=\lambda\,[\,\lambda\,y_{2k}+\mu\,y_{2k+2}-\theta\,Z_{k+1}\,]+\mu\,[\,\lambda\,y_{2k-2}+\mu\,y_{2k}-\theta\,Z_k\,]+$$

$$+\mu\,[\,\mu\,y_{2k}+\lambda\,y_{2k+2}-\theta\,X_{k+1}-\theta\,Z_{k+1}\,]+\lambda\,[\,\mu\,y_{2k-2}+\lambda\,y_{2k}-\theta\,X_k-\theta\,Z_k\,]+$$

$$+[\,y_{2k}-\lambda\theta\,X_k-\theta\,Z_k\,]+[\,y_{2k}-\mu\theta\,X_{k+1}-\theta\,Z_{k+1}\,]=$$

$$=2\,[\,\lambda\mu\,y_{2k-2}+2\,(\,1-\lambda\mu\,)\,y_{2k}+\lambda\mu\,y_{2k+2}-\lambda\theta\,X_k-\mu\theta\,X_{k+1}-\theta\,Z_k-\theta\,Z_{k+1}\,].$$

Аналогично, для всех $k=1,\ldots,N$ имеют место равенства

$$-\frac{1}{2\,\theta\nu}\,\frac{\partial J}{\partial X_k}=[\,\mu\,y_{2k-2}+\lambda\,y_{2k}-\theta\,X_k-\theta\,Z_k\,]+\lambda\,[\,y_{2k}-\lambda\theta\,X_k-\theta\,Z_k\,]+\mu\,[\,y_{2k-2}-\mu\theta\,X_k-\theta\,Z_k\,]=$$

$$=2\,[\,\mu\,y_{2k-2}+\lambda\,y_{2k}-(\,1-\lambda\mu\,)\,\theta\,X_k-\theta\,Z_k\,].$$

Приравняем частные производные нулю. Очевидно, $1-\lambda\mu=(3+\omega^2)/4>0$. Следовательно,

$$\theta\,X_k=\frac{1}{1-\lambda\mu}\,[\,\mu\,y_{2k-2}+\lambda\,y_{2k}-\theta\,Z_k\,],\tag{3.2}$$

$$0=\lambda\mu\,y_{2k-2}+2\,(\,1-\lambda\mu\,)\,y_{2k}+\lambda\mu\,y_{2k+2}-\frac{\lambda}{1-\lambda\mu}\,[\,\mu\,y_{2k-2}+\lambda\,y_{2k}-\theta\,Z_k\,]-$$

$$-\frac{\mu}{1-\lambda\mu}\,[\,\mu\,y_{2k}+\lambda\,y_{2k+2}-\theta\,Z_{k+1}\,]-\theta\,Z_k-\theta\,Z_{k+1}=$$

$$=-\frac{1}{1-\lambda\mu}\,\Big(\,\lambda^2\mu^2\,y_{2k-2}-(\,\lambda^2+\mu^2+2\,\lambda^2\mu^2)\,y_{2k}+\lambda^2\mu^2\,y_{2k+2}+\mu^2\theta\,Z_k+\lambda^2\theta\,Z_{k+1}\Big).\tag{3.3}$$

§ 4. Система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов оптимального аппроксимирующего сплайна

Равенства (2.1), (3.2), (2.4), (3.3) порождают итоговые уравнения разностной схемы:

$$x_{2k-1}-\lambda\,y_{2k-2}-y_{2k-1}-\mu\,y_{2k}=2\tau\,\psi(h_{2k-1}),\quad k=1,\ldots,N\,,\tag{4.1}$$

$$\mu\,y_{2k-2}+\lambda\,y_{2k}-(\,1-\lambda\mu\,)\,\theta\,(\,x_{2k-2}-2\,x_{2k-1}+x_{2k}\,)-\theta\,Z_k=0,\quad k=1,\ldots,N\,,\tag{4.2}$$

$$x_{2k}-2\,y_{2k}=2\tau\,\psi(h_{2k}),\quad k=1,\ldots,N-1\,,\tag{4.3}$$

$$\lambda^2\mu^2\,y_{2k-2}-(\,\lambda^2+\mu^2+2\,\lambda^2\mu^2)\,y_{2k}+\lambda^2\mu^2\,y_{2k+2}+\mu^2\theta\,Z_k+\lambda^2\theta\,Z_{k+1}=0,\quad k=1,\ldots,N-1\,.\tag{4.4}$$

Совокупность уравнений (4.4) имеет самостоятельный характер: ее уравнения связывают между собой лишь переменные вида y_{2m}. Очевидно, матрица системы уравнений (4.4) при $\lambda\mu=0$ имеет диагональный, а при $\lambda\mu\neq 0$ — трехдиагональный вид, и ниже мы установим, что система однозначно разрешима. В частности, справедливы явные формулы (5.1), кроме того, для решения системы (4.4) примени́м метод прогонки. Из уравнений (4.3) находим величины x_{2k} для всех $k=1,\ldots,N-1$, а из уравнений (4.2) легко находим все значения x_{2k-1}. Наконец, из уравнений (4.1) вычисляем значения y_{2k-1}. Полученные значения позволяют, в конечном счете, найти искомые величины $\overline{u}_j^{\,i}$, поскольку для всех $j=1,\ldots,2N-1$ справедливы формулы $\overline{u}_j^{\,1}=\overline{u}_j^{\,0}+(x_j-y_j)/2=\phi(h_j)+(x_j-y_j)/2$, $\overline{u}_j^{\,2}=\overline{u}_j^{\,0}+x_j=\phi(h_j)+x_j$.

§ 5. Точные формулы для коэффициентов оптимального аппроксимирующего сплайна

Последовательность $\{U_n(x),\, x \in \mathbb{R}\}$, состоящую из многочленов Чебышева 2-го рода, определяем рекурсивно: $U_{-1}(x) \doteq 0,\ U_0(x) \doteq 1,\ U_{n+1}(x) \doteq 2x\, U_n(x) - U_{n-1}(x)$. Известно [3, с. 96], что $U_n(x) \neq 0$ для любых $x \notin (-1,1)$ и $n \in \mathbb{N}$. При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ определена симметрическая матрица $B(x) \doteq \big(B_{ij}(x)\big),\ i,j = 1,\ldots,n$ такая, что

$$B_{ij}(x) \doteq (-1)^{i+j} \begin{cases} U_{i-1}(x)\, U_{n-j}(x), & \text{если } i \leqslant j\,, \\ U_{j-1}(x)\, U_{n-i}(x), & \text{если } i \geqslant j\,. \end{cases}$$

Зафиксируем $x \notin (-1,1)$, числа $\xi_0,\ \xi_{n+1}$, вектор $\eta \in \mathbb{R}^n$. Они порождают трехдиагональную систему уравнений $\xi_{k-1} + 2x\,\xi_k + \xi_{k+1} = \eta_k,\ k = 1,\ldots,n$, относительно неизвестных $\xi_1,\ldots,\xi_n$. Согласно [2, § 7] для решения системы имеет место явное представление

$$\xi_k = \frac{1}{U_n(x)} \Big(-B_{k1}(x)\,\xi_0 - B_{kn}(x)\,\xi_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} B_{kj}(x)\,\eta_j \Big), \qquad k = 1,\ldots,n.$$

При $\lambda = 0$ система (4.4) имеет тривиальный вид $y_{2k} = \theta\, Z_k$, при $\mu = 0$ имеем $y_{2k} = \theta\, Z_{k+1}$, а при $\lambda\mu \neq 0$ для нее справедливо представление $y_{2k-2} + 2x\, y_{2k} + y_{2k+2} = W_k$, $k = 1,\ldots,n$, где

$$x \doteq -1 - \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{2\mu^2} < -1, \qquad W_k \doteq -\frac{1}{\lambda^2}\,\theta\, Z_k - \frac{1}{\mu^2}\,\theta\, Z_{k+1}, \qquad n \doteq N-1,$$

поэтому для любого $k = 1,\ldots,N-1$

$$y_{2k} = \begin{cases} \dfrac{1}{U_n(x)} \Big(-B_{k1}(x)\, y_0 - B_{kn}(x)\, y_{2N} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} B_{kj}(x)\, W_j \Big), & \text{если} \quad \lambda\mu \neq 0, \\ \theta\, Z_k, & \text{если} \quad \lambda = 0, \\ \theta\, Z_{k+1}, & \text{если} \quad \mu = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Таким образом, в терминах введенных в работе обозначений справедлива

Теорема 1. *Система уравнений* (4.1) – (4.4) *имеет единственное решение. При этом решение уравнения* (4.4) *допускает явное представление для величин* y_{2k} *в виде* (5.1), *что позволяет, в конечном счете, последовательно вычислить значения* x_{2k}, x_{2k-1} *и* y_{2k-1} *из уравнений* (4.3), (4.2) *и* (4.1) *соответственно.*

§ 6. Точная формула для невязки оптимального аппроксимирующего сплайна

Пусть J^* — значение функционала J на решении системы (4.1) – (4.4) (другими словами, J^* — это минимальное значение J в пространстве аппроксимирующих сплайнов $\sigma_{\lambda}(\Omega)$). Зафиксируем это решение. В силу формул (3.1) и (3.2) справедливы равенства

$$\frac{1}{\nu}\, J^* = \sum_{k=1}^{N} \bigg([\,\lambda\, y_{2k-2} + \mu\, y_{2k} - \theta\, Z_k\,]^2 + \Big[\,\mu\, y_{2k-2} + \lambda\, y_{2k} - \frac{1}{1-\lambda\mu}\,[\,\mu\, y_{2k-2} + \lambda\, y_{2k} - \theta\, Z_k\,] - \theta\, Z_k\Big]^2 +$$

$$+ \Big[\, y_{2k} - \frac{\lambda}{1-\lambda\mu}\,[\,\mu\, y_{2k-2} + \lambda\, y_{2k} - \theta\, Z_k\,] - \theta\, Z_k\Big]^2 + \Big[\, y_{2k-2} - \frac{\mu}{1-\lambda\mu}\,[\,\mu\, y_{2k-2} + \lambda\, y_{2k} - \theta\, Z_k\,] - \theta\, Z_k\Big]^2 \bigg) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \bigg([\,\lambda\, y_{2k-2} + \mu\, y_{2k} - \theta\, Z_k\,]^2 + \frac{\lambda^2\mu^2}{(1-\lambda\mu)^2}\,[\,\mu\, y_{2k-2} + \lambda\, y_{2k} - \theta\, Z_k\,]^2 +$$

$$+ \frac{\mu^2}{(1-\lambda\mu)^2}\,[\,-\lambda\, y_{2k-2} + y_{2k} - \mu\theta\, Z_k\,]^2 + \frac{\lambda^2}{(1-\lambda\mu)^2}\,[\, y_{2k-2} - \mu\, y_{2k} - \lambda\theta\, Z_k\,]^2 \bigg).$$

Следовательно, имеет место легко проверяемая цепочка равенств

$$\frac{(1-\lambda\mu)^2}{\nu}J^* = \sum_{k=1}^{N}\Big((1-\lambda\mu)^2[\lambda y_{2k-2}+\mu y_{2k}-\theta Z_k]^2+\lambda^2\mu^2[\mu y_{2k-2}+\lambda y_{2k}-\theta Z_k]^2+$$

$$+\mu^2[-\lambda y_{2k-2}+y_{2k}-\mu\theta Z_k]^2+\lambda^2[y_{2k-2}-\mu y_{2k}-\lambda\theta Z_k]^2\Big)=$$

$$=[\lambda^2(1-\lambda\mu)^2+\lambda^2\mu^4+\lambda^2\mu^2+\lambda^2]\sum_{k=1}^{N}y_{2k-2}^2+[\mu^2(1-\lambda\mu)^2+\lambda^4\mu^2+\mu^2+\lambda^2\mu^2]\sum_{k=1}^{N}y_{2k}^2+$$

$$+[(1-\lambda\mu)^2+\lambda^2\mu^2+\mu^4+\lambda^4]\sum_{k=1}^{N}\theta^2 Z_k^2+2[\lambda\mu(1-\lambda\mu)^2+\lambda^3\mu^3-\lambda\mu^2-\lambda^2\mu]\sum_{k=1}^{N}y_{2k-2}\,y_{2k}-$$

$$-2[\lambda(1-\lambda\mu)^2+\lambda^2\mu^3-\lambda\mu^3+\lambda^3]\sum_{k=1}^{N}y_{2k-2}\,\theta Z_k-2[\mu(1-\lambda\mu)^2+\lambda^3\mu^2+\mu^3-\lambda^3\mu]\sum_{k=1}^{N}y_{2k}\,\theta Z_k=$$

$$=2\lambda^2(1+\mu^2)(1-\lambda\mu)\sum_{k=1}^{N}y_{2k-2}^2+2\mu^2(1+\lambda^2)(1-\lambda\mu)\sum_{k=1}^{N}y_{2k}^2+2(\lambda^2+\mu^2)(1-\lambda\mu)\sum_{k=1}^{N}\theta^2 Z_k^2-$$

$$-4\lambda^2\mu^2(1-\lambda\mu)\sum_{k=1}^{N}y_{2k-2}\,y_{2k}-4\lambda^2(1-\lambda\mu)\sum_{k=1}^{N}y_{2k-2}\,\theta Z_k-4\mu^2(1-\lambda\mu)\sum_{k=1}^{N}y_{2k}\,\theta Z_k.$$

Все шесть коэффициентов, стоящие перед суммами, мы записали в мультипликативной форме (вывод такого представления требует определенных усилий). Таким образом, заменив в первой сумме индекс k на $k+1$, получим

$$\frac{1-\lambda\mu}{2\nu}J^*=\lambda^2(1+\mu^2)\sum_{k=0}^{N-1}y_{2k}^2+\mu^2(1+\lambda^2)\sum_{k=1}^{N}y_{2k}^2+(\lambda^2+\mu^2)\sum_{k=1}^{N}\theta^2 Z_k^2-$$

$$-2\lambda^2\mu^2\sum_{k=1}^{N}y_{2k-2}\,y_{2k}-2\lambda^2\sum_{k=1}^{N}y_{2k-2}\,\theta Z_k-2\mu^2\sum_{k=1}^{N}y_{2k}\,\theta Z_k=$$

$$=\lambda^2(1+\mu^2)y_0^2+\mu^2(1+\lambda^2)y_{2N}^2+\sum_{k=1}^{N-1}\Big\{(\lambda^2+\mu^2+2\lambda^2\mu^2)y_{2k}\Big\}y_{2k}+(\lambda^2+\mu^2)\sum_{k=1}^{N}\theta^2 Z_k^2-$$

$$-2\lambda^2\mu^2\sum_{k=1}^{N}y_{2k-2}\,y_{2k}-2\lambda^2\sum_{k=1}^{N}y_{2k-2}\,\theta Z_k-2\mu^2\sum_{k=1}^{N}y_{2k}\,\theta Z_k.$$

Воспользовавшись формулой (4.4), заменим выражение, стоящее в фигурных скобках. Тогда

$$\frac{1-\lambda\mu}{2\nu}J^*=\lambda^2(1+\mu^2)y_0^2+\mu^2(1+\lambda^2)y_{2N}^2+\sum_{k=1}^{N-1}\Big\{\lambda^2\mu^2 y_{2k-2}+\lambda^2\mu^2 y_{2k+2}+\mu^2\theta Z_k+\lambda^2\theta Z_{k+1}\Big\}y_{2k}+$$

$$+(\lambda^2+\mu^2)\sum_{k=1}^{N}\theta^2 Z_k^2-2\lambda^2\mu^2\sum_{k=1}^{N}y_{2k-2}\,y_{2k}-2\lambda^2\sum_{k=1}^{N}y_{2k-2}\,\theta Z_k-2\mu^2\sum_{k=1}^{N}y_{2k}\,\theta Z_k.$$

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\frac{1-\lambda\mu}{2\nu}J^*=\lambda^2(1+\mu^2)y_0^2+\mu^2(1+\lambda^2)y_{2N}^2+(\lambda^2+\mu^2)\sum_{k=1}^{N}\theta^2 Z_k^2+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3,$$

где

$$\sigma_1 \doteq \lambda^2\mu^2 \sum_{k=1}^{N-1} y_{2k-2}\, y_{2k} + \lambda^2\mu^2 \sum_{k=1}^{N-1} y_{2k}\, y_{2k+2} - 2\,\lambda^2\mu^2 \sum_{k=1}^{N} y_{2k-2}\, y_{2k},$$

$$\sigma_2 \doteq \mu^2 \sum_{k=1}^{N-1} y_{2k}\,\theta\, Z_k - 2\,\mu^2 \sum_{k=1}^{N} y_{2k}\,\theta\, Z_k, \qquad \sigma_3 \doteq \lambda^2 \sum_{k=1}^{N-1} y_{2k}\,\theta\, Z_{k+1} - 2\,\lambda^2 \sum_{k=1}^{N} y_{2k-2}\,\theta\, Z_k.$$

После замены индекса суммирования k на $k-1$ во втором слагаемом у σ_1 произойдут массовые сокращения, и мы получим равенство $\sigma_1 = -\lambda^2\mu^2\,(\,y_0\, y_2 + y_{2N-2} y_{2N})$. Очевидно,

$$\sigma_2 = -2\,\mu^2 y_{2N}\,\theta\, Z_N - \mu^2 \sum_{k=1}^{N-1} y_{2k}\,\theta\, Z_k, \qquad \sigma_3 = -2\,\lambda^2 y_0\,\theta\, Z_1 - \lambda^2 \sum_{k=1}^{N-1} y_{2k}\,\theta\, Z_{k+1}$$

(во втором слагаемом у σ_3 сделали замену k на $k+1$). Таким образом, имеем

$$\frac{1-\lambda\mu}{2\,\nu}\, J^* = \lambda^2\,(\,1+\mu^2)\, y_0^2 + \mu^2\,(\,1+\lambda^2)\, y_{2N}^2 - \lambda^2\mu^2\,(\,y_0\, y_2 + y_{2N-2} y_{2N})-$$

$$-2\,\lambda^2 y_0\,\theta\, Z_1 - 2\,\mu^2 y_{2N}\,\theta\, Z_N - \sum_{k=1}^{N-1} y_{2k}\,(\,\mu^2\theta\, Z_k + \lambda^2\theta\, Z_{k+1}\,) + (\,\lambda^2+\mu^2) \sum_{k=1}^{N} \theta^2 Z_k^2 \tag{6.1}$$

и замечаем, что это выражение зависит от величин $y_2, y_4, \ldots, y_{2N-2}$ линейно. Осталось лишь применить формулы (5.1).

Если $\lambda = 0$, то $\mu = 1$, $y_{2k} = \theta\, Z_k$ для всех $k = 1,\ldots,N-1$,

$$\frac{1}{2\,\nu}\, J^* = y_{2N}^2 - 2\, y_{2N}\,\theta\, Z_N - \sum_{k=1}^{N-1} y_{2k}\,\theta\, Z_k + \sum_{k=1}^{N} \theta^2 Z_k^2 = y_{2N}^2 - 2\, y_{2N}\,\theta\, Z_N + \theta^2 Z_N^2 = (\,y_{2N} - \theta\, Z_N)^2. \tag{6.2}$$

Если $\mu = 0$, то $\lambda = 1$, $y_{2k} = \theta\, Z_{k+1}$ для всех $k = 1,\ldots,N-1$,

$$\frac{1}{2\,\nu}\, J^* = y_0^2 - 2\, y_0\,\theta\, Z_1 - \sum_{k=1}^{N-1} y_{2k}\,\theta\, Z_{k+1} + \sum_{k=1}^{N} \theta^2 Z_k^2 = y_0^2 - 2\, y_0\,\theta\, Z_1 - \sum_{k=1}^{N-1} \theta^2 Z_{k+1}^2 + \sum_{k=1}^{N} \theta^2 Z_k^2 =$$

$$= y_0^2 - 2\, y_0\,\theta\, Z_1 - \sum_{k=2}^{N} \theta^2 Z_k^2 + \sum_{k=1}^{N} \theta^2 Z_k^2 = y_0^2 - 2\, y_0\,\theta\, Z_1 + \theta^2 Z_1^2 = (\,y_0 - \theta\, Z_1)^2. \tag{6.3}$$

Если же $\lambda\mu \neq 0$, то есть $\lambda, \mu \in (0,1)$, то

$$y_{2k} = \frac{1}{U_n(x)} \Big(-B_{k1}(x)\, y_0 - B_{kn}(x)\, y_{2N} + \sum_{j=1}^{n} B_{kj}(x)\, W_j\Big), \qquad k = 1,\ldots,N-1,$$

$$y_2 = \frac{1}{U_n(x)} \Big(-B_{11}(x)\, y_0 - B_{1n}(x)\, y_{2N} + \sum_{j=1}^{n} B_{1j}(x)\, W_j\Big),$$

$$y_{2N-2} = \frac{1}{U_n(x)} \Big(-B_{n1}(x)\, y_0 - B_{nn}(x)\, y_{2N} + \sum_{j=1}^{n} B_{nj}(x)\, W_j\Big).$$

Подставив полученные выражения в формулу (6.1) (предварительно заменив в ней сумму $\mu^2\theta\, Z_k + \lambda^2\theta\, Z_{k+1}$ на $-\lambda^2\mu^2 W_k$), получим для случая $\lambda\mu \neq 0$ итоговую формулу

$$\frac{1-\lambda\mu}{2\,\nu}\, J^* = \lambda^2\,(\,1+\mu^2)\, y_0^2 + \mu^2\,(\,1+\lambda^2)\, y_{2N}^2 - 2\,\lambda^2 y_0\,\theta\, Z_1 - 2\,\mu^2 y_{2N}\,\theta\, Z_N + (\,\lambda^2+\mu^2) \sum_{k=1}^{N} \theta^2 Z_k^2 -$$

$$-\lambda^2\mu^2 \frac{1}{U_n(x)}\, y_0 \Big(-B_{11}(x)\, y_0 - B_{1n}(x)\, y_{2N} + \sum_{j=1}^{n} B_{1j}(x)\, W_j \Big) -$$

$$-\lambda^2\mu^2 \frac{1}{U_n(x)} \Big(-B_{n1}(x)\, y_0 - B_{nn}(x)\, y_{2N} + \sum_{j=1}^{n} B_{nj}(x)\, W_j \Big)\, y_{2N} +$$

$$+\lambda^2\mu^2 \frac{1}{U_n(x)} \sum_{k=1}^{n} \Big(-B_{k1}(x)\, y_0 - B_{kn}(x)\, y_{2N} + \sum_{j=1}^{n} B_{kj}(x)\, W_j \Big)\, W_k, \tag{6.4}$$

— положительно определенную квадратичную форму от исходных конечных разностей

$$y_0 = u_0^2 - 2\,u_0^1 + u_0^0 = \rho_0(2\tau) - 2\,\rho_0(\tau) + \rho_0(0), \quad y_{2N} = u_{2N}^2 - 2\,u_{2N}^1 + u_{2N}^0 = \rho_1(2\tau) - 2\,\rho_1(\tau) + \rho_1(0),$$

$$Z_k = u_{2k-2}^0 - 2\,u_{2k-1}^0 + u_{2k}^0 = \phi(h_{2k-2}) - 2\,\phi(h_{2k-1}) + \phi(h_{2k}), \quad k = 1, \ldots, N$$

(напомним, что величины W_k вычислимы через разности Z_k и Z_{k+1}). Таким образом, в терминах введенных в работе обозначений справедлива

Теорема 2. *Минимум J^* функционала J достигается на решении системы* (4.1) – (4.4), *и в зависимости от $\lambda \in [0,1]$ для него имеет место одна из формул* (6.2) – (6.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Родионов В.И. О применении специальных многомерных сплайнов произвольной степени в численном анализе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 4. С. 146–153.
2. Родионов В.И., Родионова Н.В. Точные формулы для коэффициентов и невязки оптимального аппроксимирующего сплайна простейшего уравнения теплопроводности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 4. С. 154–171.
3. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 328 с.

Поступила в редакцию 11.10.2011

Родионова Надежда Витальевна, аспирант, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru

N. V. Rodionova

Exact formulas for coefficients and residual of optimal approximate spline of simplest wave equation

Keywords: interpolation, approximate spline, residual, Chebyshev's polynomials.

Mathematical Subject Classifications: 41A15

We define the parameter family of finite-dimensional spaces of special quadratic splines of Lagrange's type. In each space, the optimal spline which gives the smallest residual being a square of the norm in the space L_2, is proposed as a solution to the initial-boundary problem for the simplest wave equation. The exact formulas for the coefficients of the spline and its residual are obtained. The formula for the coefficients of this spline is a linear form of finite differences of the discretely given initial and boundary conditions of the original problem. The formula for the residual J is a positive definite quadratic form of these quantities. The coefficients of both forms are computable via Chebyshev's polynomials of the second kind. The explicit form of the formula for the residual allows to solve the inequality $J < \varepsilon^2$ for a given computing accuracy $\varepsilon > 0$ and to receive a priori sufficient number of nodes of a difference scheme.

The investigations were carried out for one time layer, which has two sublayers. We obtained difference formulas of the initial condition for the partial derivative with respect to time. They allow to create a difference

scheme for the new layer, which in turn allows to continue the iterative computational process in time as far as desired.

REFERENCES

1. Rodionov V.I. On application of special multivariate splines of any degree in the numerical analysis, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2010, no. 4, pp. 146–153.

2. Rodionov V.I., Rodionova N.V. Exact formulas for coefficients and residual of optimal approximate spline of simplest heat conduction equation, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2010, no. 4, pp. 154–171.

3. Suetin P.K. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* (Classical orthogonal polynomials), Moscow: Nauka, 1976, 328 p.

Received 11.10.2011

Rodionova Nadezhda Vital'evna, post-graduate student, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru