УДК 519.712 : 510.25 : 510.67

© *Н. И. Калядин*

СИМУЛЬТАННОСТЬ В ЗАДАЧАХ КЛАССИФИКАЦИИ КОНЕЧНЫХ ОБЪЕКТОВ

Рассматривается проблема эффективной вычислимости разрешимых моделей классификации конечных объектов. Исследуется конструктивизация условий симультанности (предельно короткого цикла) принятия решения в классификации. Симультанность («однотактность») достигается параллельным сравнением компонент неизвестной реализации с информативными элементами всех эталонов в обучающей выборке. Конструктивизация условий симультанности предусматривает: выделение информативных элементов (идентификационных меток) в информативных зонах классифицируемых множеств; параллельное покомпонентное сравнение неизвестной реализации конечного объекта с информативными элементами всех эталонов из обучающей выборки. Полученные результаты симультанной схемы принятия решений в классификации интерпретируются в нейронных сетях, в обобщенной модели распознавания, в задачах идентификации.

Ключевые слова: конструктивизация, симультанность, классификация, сигнатура, предикат, конечная модель.

Введение

Данная статья продолжает исследования в работе [1], где сформулированы условия существования *симультанной* («одномоментной») модели классификации конечных объектов, гарантирующие однозначную разрешимость принятия решения в классификации.

Симультанная модель классификации конечных объектов является эффективно вычислимой, так как обеспечивает предельно короткий цикл принятия решения и является *инвариантной* к количеству эталонов в обучающей выборке и количеству признаков, описывающих эти эталоны.

Цель настоящей работы — конструктивизировать условия симультанности.

Напомним введенные в работе [1] обозначения и условия существования симультанной модели классификации конечных объектов.

Пусть $\mathfrak{M} \rightleftharpoons \{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_m\}$ — основное множество конечных подмножеств $\mathfrak{X}_i \in \Phi$, где Φ — семейство всех конечных подмножеств натурального ряда $N \rightleftharpoons \{0, 1, 2, \ldots\}$; $S \rightleftharpoons \{\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_t\}$ — некоторое конечное разбиение множества $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ — неизвестное и предъявляемое для классификации конечное подмножество из N, t — число классов эквивалентности разбиения S, $i = \overline{1, m}$.

Вопрос о разрешимости предиката принадлежности (классификации)

$$P(\mathfrak{X}, \mathfrak{N}_j) = \begin{cases} и, & \text{если } \mathfrak{X} \in \mathfrak{N}_j,\ j = \overline{1, t};\ и \text{ — «истина»}, \\ л, & \text{в противном случае; } л \text{ — «ложь»}\ , \end{cases}$$

исследован в [2], где показано, что для разрешимости предиката классификации $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{N}_j)$ (или проблемы распознавания для класса $\mathfrak{N}_j$) требуется, чтобы $\mathfrak{N}_j$ было сильно рекурсивным.

Для поиска симультанного способа вычислений разрешимого предиката классификации построим рекуррентную схему следующего вида.

Исходные множества $\mathfrak{X}_i \in \mathfrak{M}$ назовем *индексными* и положим $V_i^1 \rightleftharpoons \mathfrak{X}_i,\ i, j = \overline{1, m}$,

$$V_i^{j+1} = \begin{cases} V_i^j \backslash \mathfrak{X}_j, & \text{если } V_i^j \backslash \mathfrak{X}_j \neq \varnothing,\ (i, j = \overline{1, m}); \\ V_i^j, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Индексные множества V_i^{j+1} представляют *информативные зоны* при классификации неизвестного множества $\mathfrak{X}$ в разбиении S обучающей выборки $\mathfrak{M}$.

Введем дополнительно элементы логической матрицы $q = \|q_{ij}\|_{m\times m}$ следующим образом:

$$q_{ij} = \begin{cases} и, & \text{если } V_i^j \backslash \mathfrak{X}_j = \varnothing; \\ л, & \text{если } V_i^j \backslash \mathfrak{X}_j \neq \varnothing. \end{cases}$$

Нахождение разрешимого предиката принадлежности $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{N}_k)$ сводится к вычислению системы частных предикатов равенства $\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil : P(\mathfrak{X}, \mathfrak{N}_k) = \bigvee\limits_{i\in D_k} \lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil$, где множество номеров эталонных классов (объектов) $\mathfrak{X}_i$ есть $D_k = \{i | f(i) = k\}$, $k = \overline{1,t}$; $f : \mathfrak{I}_m \to \mathfrak{I}_t$ — классифицирующая функция, связывающая номера конечных подмножеств $\mathfrak{X}_i$, $(i = \overline{1,m})$ из основного множества $\mathfrak{M}$ с номерами классов эквивалентности разбиения S; индексные множества $\mathfrak{I}_m \rightleftharpoons \{1, 2, \ldots, m\}$, $\mathfrak{I}_t \rightleftharpoons \{1, 2, \ldots, t\}$, $m, t \in N$.

Зная классифицирующую функцию $f(i)$ для неизвестной реализации $\mathfrak{X} \in \mathfrak{M}$, достаточно вычислить предикат равенства множеств $\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil$ тем или иным способом, а затем уже судить о предикате принадлежности $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{N}_{f(i)})$ посредством импликации $\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil \Rightarrow$ $\Rightarrow P(\mathfrak{X}, \mathfrak{N}_{f(i)})$, где $i \in \mathfrak{I}_m$, $f(i) = k \in \mathfrak{I}_t$.

Доказанная теорема о существовании информативных элементов (см. [1, с. 157]) позволяет конструктивно представить предикат равенства $\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil$ через предикат классификации с использованием информативных зон в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $(\forall i \in \mathfrak{I}_m)[\mathfrak{X}_i \neq \varnothing]$ *и* $(\forall i \neq j \in \mathfrak{I}_m)\,[q_{ij} = и \Rightarrow q_{ji} = л]$. *Тогда существует* m *информативных элементов («идентификационных меток»)* $a_i \in V_i^{m+1}$ *таких, что предикат равенства* $\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil$, *предъявленного для классификации множества* $\mathfrak{X}$ *и одного из эталонных классов* $\mathfrak{X}_i$:

$$\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil = \lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil \;\&\; \neg \left[\bigvee_{j\in\mathfrak{I}_m\backslash\{i\}} (\lceil a_j \in \mathfrak{X} \rceil \;\&\; q_{ij}) \right],$$

обращается в «истину» тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{X}_i \in \mathfrak{M}$.

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть $\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil = и$. Покажем, что

$$\lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil \;\&\; \neg \left[\bigvee_{j\in\mathfrak{I}_m\backslash\{i\}} (\lceil a_j \in \mathfrak{X} \rceil \;\&\; q_{ij}) \right] = и.$$

Если $\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil = и$, то $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i$ и предикат $\lceil a_i \in \mathfrak{X}_i \rceil = и$. Если $(\forall j \neq i \in \mathfrak{I}_m)\,[\lceil a_j \in \mathfrak{X}_i \rceil = л]$, то $\left[\bigvee\limits_{j\in\mathfrak{I}_m\backslash\{i\}} \lceil a_j \in \mathfrak{X}_i \rceil \;\&\; q_{ij} \right] = л$ независимо от q_{ij}. В этом случае

$$\lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil \;\&\; \neg\lceil \bigvee_{j\in\mathfrak{I}_m\backslash\{i\}} \lceil a_j \in \mathfrak{X} \rceil \;\&\; q_{ij} = и.$$

Предположим противное, то есть $(\forall i \neq j \in \mathfrak{I}_m)\,[\lceil a_j \in \mathfrak{X}_i \rceil = и]$. В силу леммы 4.1 [8, с. 41] имеем $q_{ji} = и$. Тогда по условию теоремы имеем $q_{ij} = л$. Отсюда вытекает, что $\lceil a_j \in \mathfrak{X}_i \rceil \;\&$ $q_{ij} = л$. Пусть $j_1, j_2, \ldots, j_r \neq i$ — все такие индексы, что $\lceil a_{j_k} \in \mathfrak{X}_i \rceil = и$. Отсюда $\lceil a_{j_k} \in \mathfrak{X}_i \rceil \;\&$ $q_{j_k i} = л$ по тем же соображениям. А с другой стороны, для всех $j \in \mathfrak{I}_m \backslash \{j_1, j_2, \ldots, j_r, i\}$ $\lceil a_j \in \mathfrak{X}_i \rceil$ $\&$ $q_{ij} = л$. В силу того, что $\lceil a_j \in \mathfrak{X}_i \rceil = л$, получим $\left[\bigvee\limits_{j\in\mathfrak{I}_m\backslash\{i\}} (\lceil a_j \in \mathfrak{X}_i \rceil \;\&\; q_{ij}) \right] = л$. Следовательно, $\lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil \;\&\; \neg \left[\bigvee\limits_{j\in\mathfrak{I}_m\backslash\{i\}} (\lceil a_j \in \mathfrak{X}_i \rceil \;\&\; q_{ij}) \right] = и$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil = л$. Нужно показать, что в этом случае $\lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil \;\&\; \neg \left[\bigvee\limits_{j\in\mathfrak{I}_m\backslash\{i\}} (\lceil a_j \in \mathfrak{X} \rceil \;\&\; q_{ij}) \right] = л$. Пусть $\forall j \in \mathfrak{I}_m \backslash \{i\}$. Тогда имеем $\mathfrak{X}_j \neq \mathfrak{X}_i$. Иначе нарушилось бы условие теоремы $(\forall i \neq j \in \mathfrak{I}_m)\,[q_{ij} = и \Rightarrow q_{ji} = л]$. Пусть $\mathfrak{X}_k \neq \mathfrak{X}_i$. Подставим его в правую часть и вычислим высказывание $\lceil a_i \in \mathfrak{X}_k \rceil \ \& \ \neg \left[\bigvee_{j \in \mathfrak{I}_m \setminus \{i\}} (\lceil a_j \in \mathfrak{X}_k \rceil \ \& \ q_{ij}) \right]$.

Возможны два случая: $\lceil a_i \in \mathfrak{X}_k \rceil = л$ или $\lceil a_i \in \mathfrak{X}_k \rceil = и$. В первом случае вся конъюнкция ложна. Рассмотрим второй случай: $\lceil a_i \in \mathfrak{X}_k \rceil = и$. В силу леммы 4.1 [8, с. 41] имеем $q_{ik} = и$, то есть $\lceil a_i \in \mathfrak{X}_k \rceil \ \& \ q_{ik} = и$. Отсюда $\bigvee_{j \in \mathfrak{I}_m \setminus \{i\}} (\lceil a_j \in \mathfrak{X}_k \rceil \ \& \ q_{ij}) = и$. Следовательно,

$\neg \left[\bigvee_{j \in \mathfrak{I}_m \setminus \{i\}} (\lceil a_j \in \mathfrak{X}_k \rceil \ \& \ q_{ij}) \right] = л$. Тогда $(\forall k \in \mathfrak{I}_m)\,\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_k \rceil$ получим:

$\lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil \ \& \ \neg \left[\bigvee_{j \in \mathfrak{I}_m \setminus \{i\}} (\lceil a_j \in \mathfrak{X} \rceil \ \& \ q_{ij}) \right] = л$. Теорема доказана. □

Для получения симультанного (предельно короткого) цикла принятия решений в классификации необходимо, в первую очередь, чтобы у предикатов из теоремы 1 не было «хвоста» вида $\left[\bigvee_{j \in \mathfrak{I}_m \setminus \{i\}} \lceil a_j \in \mathfrak{X} \rceil \ \& \ q_{ij} \right]$, то есть чтобы логическая матрица была единичной: $\|q_{ij}\|_{m \times m} = E_{m \times m}$, где $[q_{ii} = и, q_{ij} = л]$.

§ 1. Условия симультанности принятия решений в классификации

В данном параграфе исследуется конструктивизация условий симультанности принятия решений в классификации конечных объектов.

Лемма 1. *Если* $a \in V_i^{m+1}$, *то* $\lceil a \in \mathfrak{X}_i \rceil = и$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $V_i^{m+1} \subseteq V_i^1$ в силу транзитивности отношения $\subseteq$. Но $V_i^1 \rightleftharpoons \mathfrak{X}_i$. Тогда для любого $a \in V_i^{m+1}$ имеем $a \in \mathfrak{X}_i$. □

Пусть семейство $\mathfrak{M} \rightleftharpoons \{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_m\}$ таково, что $\mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{X}_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Тогда имеет место очевидная

Лемма 2. *Если* $(\forall i \in \mathfrak{I}_m)\,[q_{ii} = и] \ \& \ \left[V_i^{m+1} = \mathfrak{X}_i\right]$, *то* $(\forall i \neq j \in \mathfrak{I}_m)\ [q_{ij} = л]$.

Пусть семейство $\mathfrak{M} \rightleftharpoons \{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_m\}$ таково, что для каждого $i \in \mathfrak{I}_m$

$$\left[\mathfrak{X}_i \setminus \bigcup_{j \in \mathfrak{I}_m \setminus \{i\}} \mathfrak{X}_j \neq \varnothing \right]. \qquad (*)$$

Тогда имеет место

Лемма 3. $(\forall i \in \mathfrak{I}_m) \left[V_i^{m+1} = \mathfrak{X}_i \setminus \bigcup_{j \in \mathfrak{I}_m \setminus \{i\}} \mathfrak{X}_j \right]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем лемму 3 индукцией по i и m. Возьмем произвольное $i \in \mathfrak{I}_m$. Тогда по определению

$$V_i^1 \rightleftharpoons \mathfrak{X}_i, \qquad V_i^2 = \begin{cases} V_i^1 \setminus V_1^1, & \text{если } V_i^1 \setminus V_1^1 \neq \varnothing; \\ V_i^1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $i = 1$, то $V_i^2 = V_1^1 = \mathfrak{X}_1$. Если $1 < i \leqslant m$, то $V_i^2 = V_i^1 \setminus V_1^1 = \mathfrak{X}_i \setminus \mathfrak{X}_1$ в силу того, что $\mathfrak{X}_i \setminus \mathfrak{X}_1 \neq \varnothing$ по условию $(*)$. Тогда $V_i^3 = \begin{cases} V_i^2 \setminus V_2^1, & \text{если } V_i^2 \setminus V_2^1 \neq \varnothing; \\ V_i^2, & \text{в противном случае.} \end{cases}$ Если $i = 1$, то $V_i^2 = \mathfrak{X}_1$, и, следовательно, $V_i^3 = \mathfrak{X}_1 \setminus \mathfrak{X}_2$ в силу того, что $\mathfrak{X}_1 \setminus \mathfrak{X}_2 \neq \varnothing$ по условию (*). Если $i = 2$, то $V_2^2 = \mathfrak{X}_2 \setminus \mathfrak{X}_1$, а $V_2^3 = V_2^2$, поскольку $V_2^2 \setminus V_2^1 = V_2^2 \setminus \mathfrak{X}_2 = \varnothing$. Таким образом, $V_1^3 = \mathfrak{X}_1 \setminus \mathfrak{X}_2$, а $V_2^3 = \mathfrak{X}_2 \setminus \mathfrak{X}_1$. База индукции для $m = 2$ очевидно выполнена.

Индуктивное предположение. Пусть $V_i^{n+1} = \mathfrak{X}_i \setminus \bigcup_{j \in \mathfrak{I}_n \setminus \{i\}} \mathfrak{X}_j$ для $m = n$, $(n \geqslant 2)$. Покажем, что $V_i^{n+2} = \mathfrak{X}_i \setminus \bigcup_{j \in \mathfrak{I}_{n+1} \setminus \{i\}} \mathfrak{X}_j$. Проведем доказательство индукции по интервалу $1 \leqslant i \leqslant n+1$.

Для $i = 1$ надо показать, что $V_1^{n+2} = \mathfrak{X}_1 \backslash \bigcup_{j\in\mathfrak{I}_{n+1}\backslash\{i\}} \mathfrak{X}_j$. По индуктивному предположению $V_1^{n+1} = \mathfrak{X}_1 \backslash \bigcup_{j\in\mathfrak{I}_{n}\backslash\{i\}} \mathfrak{X}_j$. По определению $V_1^{n+2} = \begin{cases} V_1^{n+1}\backslash V_{n+1}^1, \text{ если } V_1^{n+1}\backslash V_{n+1}^1 \neq \varnothing; \\ V_1^{n+1}, \text{ в противном случае.}\end{cases}$ Тогда $V_1^{n+1}\backslash V_{n+1}^1 = \left\{\mathfrak{X}_1 \backslash \bigcup_{j\in\mathfrak{I}_{n}\backslash\{i\}} \mathfrak{X}_j\right\} \backslash \mathfrak{X}_{n+1} = \mathfrak{X}_1 \backslash \bigcup_{j\in\mathfrak{I}_{n+1}\backslash\{i\}} \mathfrak{X}_j$.

Но по условию $(*)$ последнее выражение не пустое. Поэтому, $V_1^{n+2} = \mathfrak{X}_1 \backslash \bigcup_{j\in\mathfrak{I}_{n+1}\backslash\{i\}} \mathfrak{X}_j$. Предположим, что для $1 \leqslant i \leqslant n+1$ выполнено условие $V_i^{n+2} = \mathfrak{X}_i \backslash \bigcup_{j\in\mathfrak{I}_{n+1}\backslash\{i\}} \mathfrak{X}_j$ и докажем, что в этом случае $V_{i+1}^{n+2} = \mathfrak{X}_{i+1} \backslash \bigcup_{j\in\mathfrak{I}_{n+1}\backslash\{i+1\}} \mathfrak{X}_j$.

По индуктивному предположению $V_{i+1}^{n+1} = \mathfrak{X}_{i+1} \backslash \bigcup_{j\in\mathfrak{I}_{n}\backslash\{i+1\}} \mathfrak{X}_j$.

По определению $V_{i+1}^{n+2} = \begin{cases} V_{i+1}^{n+1}\backslash V_{n+1}^1, \text{ если } V_{i+1}^{n+1}\backslash V_{n+1}^1 \neq \varnothing; \\ V_{i+1}^{n+1}, \text{ в противном случае.}\end{cases}$ Следовательно,

$$V_{i+1}^{n+1}\backslash V_{n+1}^1 = \mathfrak{X}_{i+1} \backslash \bigcup_{j\in\mathfrak{I}_{n}\backslash\{i+1\}} \mathfrak{X}_j \backslash V_{n+1}^1 = \mathfrak{X}_{i+1} \backslash \bigcup_{j\in\mathfrak{I}_{n}\backslash\{i+1\}} \mathfrak{X}_j \backslash \mathfrak{X}_{n+1} = \mathfrak{X}_{i+1} \backslash \bigcup_{j\in\mathfrak{I}_{n+1}\backslash\{i+1\}} \mathfrak{X}_j.$$

Но по условию $(*)$ это выражение не пусто. Отсюда $V_{i+1}^{n+2} = \mathfrak{X}_{i+1} \backslash \bigcup_{j\in\mathfrak{I}_{n+1}\backslash\{i+1\}} \mathfrak{X}_j$. Что и требовалось доказать. □

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{M} \rightleftharpoons \{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_m\}$ *таково, что* $(\forall i \in \mathfrak{I}_m)$ $[\mathfrak{X}_i \backslash \bigcup_{j\in\mathfrak{I}_{m}\backslash\{i\}} \mathfrak{X}_j \neq \varnothing]$. *Тогда* $(\forall i \in \mathfrak{I}_m)$ $(\forall a_i \in V_i^{m+1})$ *предикаты равенства* $\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil$ *и принадлежности* $\lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil$ *совпадают:* $\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil = \lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil$, *где* $\mathfrak{X} \in \mathfrak{M}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что $\lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil = u \Rightarrow \lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil$ и наоборот, $\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil \Rightarrow$ $\Rightarrow \lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil = u$. Возьмем произвольное $i \in \mathfrak{I}_m$ и $a_i \in V_i^{m+1}$.

($\Rightarrow$) Пусть $\lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil = u$. В силу леммы 3 и условия теоремы 2 можно записать

$$V_i^{m+1} = \mathfrak{X}_i \backslash \bigcup_{j\in\mathfrak{I}_{m}\backslash\{i\}} \mathfrak{X}_j \neq \varnothing. \qquad (**)$$

Следовательно, $a_i \in V_i^{m+1} \Rightarrow a_i \in \mathfrak{X}_i$, то есть $\lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil \Rightarrow \lceil a_i \in \mathfrak{X}_i \rceil$. Докажем, что $\mathfrak{X}_i$ — единственное из $\mathfrak{M}$ такое, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i$. Предположим, что нашлось $\mathfrak{X}_j, j \in \mathfrak{I}_m \backslash \{i\}$, такое, что $\lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil \Rightarrow \lceil a_i \in \mathfrak{X}_j \rceil = u$. Но из выражения $(**)$ следует, что $(\forall j \in \mathfrak{I}_m \backslash \{i\})$ $\lceil a_i \in \mathfrak{X}_j \rceil$, то есть $\lceil a_i \in \mathfrak{X}_j \rceil = л$. Противоречие. Итак, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i$.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i$. Покажем, что в этом случае $\lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil = u$. В самом деле, $\lceil a_i \in \mathfrak{X}_i \rceil = u$ в силу того, что $a_i \in V_i^{m+1} \subseteq \mathfrak{X}_i$, но $\mathfrak{X}_i = \mathfrak{X}$. Следовательно, $\lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil = u$. Теорема доказана. □

Теорема 3. *Логическая матрица* $q = \|q_{ij}\|_{m\times m}$ *является единичной тогда и только тогда, когда* $(\forall i \in \mathfrak{I}_m)$ $\left[V_i^1 \backslash \bigcup_{j\in\mathfrak{I}_{m}\backslash\{i\}} V_j^1 \neq \varnothing\right]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. ($\Rightarrow$) Предположим, что матрица q — единичная, то есть $(\forall i \in \mathfrak{I}_m)$ $(\forall j \in \mathfrak{I}_m \backslash \{i\})$ $[q_{ij} = л, q_{ii} = u]$. По определению $q_{ij} = л$, когда $V_i^j \backslash V_j^1 \neq \varnothing$. Исходя из ранее доказанной теоремы 2.2 [1, с. 157], получим

$$V_i^j \subseteq V_i^1 \Rightarrow V_i^1 \backslash V_j^1 \neq \varnothing \Rightarrow V_i^1 \backslash \bigcup_{j\in\mathfrak{I}_{m}\backslash\{i\}} V_j^1 \neq \varnothing.$$

Прямое утверждение доказано.

($\Leftarrow$) Предположим, что выполняется условие $V_i^1 \backslash \bigcup_{j\in\mathfrak{I}_{m}\backslash\{i\}} V_j^1 \neq \varnothing$. Так как матрица q единичная, то должно быть $q_{ii} = u$, $q_{ij} = л$, $j \in \mathfrak{I}_m \backslash \{i\}$.

Докажем, что q_{ii} =и. Для этого рассмотрим выражение $V_i^j \backslash V_j^1$ при $i = j$, то есть $V_i^i \backslash V_i^1$. Из условия $V_i^j \subseteq V_i^1$ следует $V_i^i \backslash V_i^1 = \varnothing$. Тогда по определению q_{ii} =и.

Следующим шагом докажем, что

$$(\forall i \in \mathfrak{I}_m)\,(\forall j \in \mathfrak{I}_m \backslash \{i\})\,[q_{ij} = \text{л}]\,.$$

Из условия теоремы 2 получим $V_i^j = \mathfrak{X}_i \backslash \bigcup\limits_{k \in \mathfrak{I}_{j-1} \backslash \{i\}} \mathfrak{X}_k \neq \varnothing$ или, исходя из определения: $V_i^j = V_i^1 \backslash \bigcup\limits_{k \in \mathfrak{I}_{j-1} \backslash \{i\}} V_k^1$.

Тогда выражение $V_i^j \backslash \mathfrak{X}_j = V_i^j \backslash V_j^1 = V_i^1 \backslash \bigcup\limits_{k \in \mathfrak{I}_j \backslash \{i\}} V_k^1$. Очевидно, что для $i \leqslant j \leqslant 1$, если $V_i^j \backslash \bigcup\limits_{k \in \mathfrak{I}_m \backslash \{i\}} V_k^1 \neq \varnothing$, то $V_i^1 \backslash \bigcup\limits_{k \in \mathfrak{I}_j \backslash \{i\}} V_k^1 \neq \varnothing$.

Таким образом, $V_i^j \backslash \mathfrak{X}_j \neq \varnothing$ и по определению q_{ij} =л, то есть доказали, что q_{ii} = и и q_{ij} =л, если $i \in \mathfrak{I}_m, j \in \mathfrak{I}_m \backslash \{i\}$. Теорема доказана в обе стороны. □

С учетом теоремы 3 усилим теорему 2 в следующем виде.

Теорема 4. *Пусть* $\mathfrak{M} \rightleftharpoons \{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_m\}$ *— множество подмножеств из* Φ, *для которых выполняется условие* $\|q_{ij}\|_{m \times m} = E_{m \times m}$. *Тогда* $(\forall i \in \mathfrak{I}_m)\left(\forall a_i \in V_i^{m+1}\right)(\forall \mathfrak{X}_i \in \mathfrak{M})$ *предикаты равенства и принадлежности совпадают:* $\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil = \lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\|q_{ij}\|_{m \times m} = E_{m \times m}$, то из теоремы 3 получаем, что $(\forall i \in \mathfrak{I}_m)\left[\mathfrak{X}_i \backslash \bigcup\limits_{j \in \mathfrak{I}_m \backslash \{i\}} \mathfrak{X}_j \neq \varnothing\right]$. Докажем, что предикаты равенства $\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil$ и принадлежности $\lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil$ совпадают.

($\Leftarrow$) Пусть $a_i \in \mathfrak{X}$. Так как $a_i \in V_i^{m+1}$, то $\mathfrak{X} \cap V_i^{m+1} \neq \varnothing$. При $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{X}_i \cap V_i^{m+1} \neq \varnothing$, поскольку из теоремы 2.2 [1, с. 157] $V_i^{m+1} \subseteq \mathfrak{X}_i$. Предположим, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i$, то есть $(\forall j \in \mathfrak{I}_m \backslash \{i\})\,\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_j \rceil$.

Тогда $\mathfrak{X} \cap V_i^{m+1} \neq \varnothing$. С другой стороны, $V_i^{m+1} = \mathfrak{X}_i \backslash \bigcup\limits_{j \in \mathfrak{I}_m \backslash \{i\}} \mathfrak{X}_j$ по теореме 2. Но $(\mathfrak{X}_j \cap \mathfrak{X}_i) \backslash \mathfrak{X}_j = \varnothing \Rightarrow \mathfrak{X} \cap \left(\mathfrak{X}_i \backslash \bigcup\limits_{k \in \mathfrak{I}_m \backslash \{i\}} \mathfrak{X}_k\right) = \varnothing$, то есть $\mathfrak{X} \cap V_i^{m+1} = \varnothing$. Противоречие. Значит, $(\forall j \in \mathfrak{I}_m \backslash \{i\})\,\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_j \rceil$.

($\Rightarrow$) Предположим $a_i \notin \mathfrak{X}_i$. Поскольку $a_i \in V_i^{m+1}$, то $V_i^{m+1} \backslash \mathfrak{X}_i \neq \varnothing$. С другой стороны, $V_i^{m+1} \subseteq \mathfrak{X}_i \Rightarrow \mathfrak{X}_i \backslash V_i^{m+1} \neq \varnothing$, то есть $a_i \in \mathfrak{X}_i$. Противоречие. Теорема доказана. □

Теорема 4 показывает, что единичность логической матрицы $\|q_{ij}\|_{m \times m}$ представляет возможным упрощенное вычисление предиката равенства $\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil$ посредством вычисления предиката принадлежности $\lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil$ элемента («идентификационной метки») информативной зоны $a_i \in V_i^{m+1}$ соответствующему множеству $\mathfrak{X} \in \mathfrak{M}$.

В силу симметричности отношения «равно» из теоремы 1 вытекает справедливость обратного утверждения: представимость предиката классификации через предикат равенства в виде следующей теоремы.

Теорема 5. *Пусть* $(\forall i \in \mathfrak{I}_m)\ [\mathfrak{X}_i \neq \varnothing]\ (\forall i \neq j \in \mathfrak{I}_m)\ [q_{ij} = \text{и} \Rightarrow q_{ji} = \text{л}]$. *Тогда существует* m *информативных элементов («идентификационных меток»)* $a_i \in V_i^{m+1}$ *таких, что предикат классификации представим через предикат равенства:*

$$\lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil \ \& \ \neg \left[\bigvee_{j \in \mathfrak{I}_m \backslash \{i\}} (\lceil a_j \in \mathfrak{X} \rceil \ \& \ q_{ij})\right] = \lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil\,.$$

Будем рассматривать $\bar{u}_i = \langle x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in} \rangle$, $i = \overline{1, m}$, то есть вектора размерности n и $V_i^1 = \langle \mathfrak{X}_{i1}, \mathfrak{X}_{i2}, \ldots, \mathfrak{X}_{in} \rangle$. Из теоремы 5 имеем утверждение.

Следствие 1. *Если выполнено условие $\|q_{ij}\|_{m\times m} = E_{m\times m}$, тогда существует m информативных элементов $a_i \in V_i^{m+1}$ из информативных зон таких, что предикат*

$$\lceil \bar{u} = \bar{u}_i \rceil = \begin{cases} 1, \text{\textit{если}}\ \ a_i = u_j; \\ 0, \text{\textit{в противном случае,}} \end{cases}$$

где индекс j выбирается из условия $a_i = x_{ij}$.

Доказанные теоремы 4, 5 и следствие 1 показывают способ *конструктивизации* условий симультанности: чтобы получить предельно короткий цикл принятия решения при классификации, необходимо и достаточно предъявленную реализацию конечного объекта с эталонами сравнить параллельно по всем кортежам обучающей выборки только по одному информативному значению каждого признака, предварительно выделив его в информативных зонах классифицируемых множеств.

§ 2. Симультанный метод распознавания отношений

Пусть согласно работе [4, с. 74] $M \rightleftharpoons \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ — некоторое конечное множество числовых объектов $a_i \in N \rightleftharpoons \{0, 1, 2, \ldots\}$; $|M| = m$; M^n — n-ая декартова степень множества M; $\mathfrak{X}$ — предъявленное отношение, $(\mathfrak{X} \subseteq M^n)$; $O_1, O_2, \ldots, O_l$ — эталонные множества $O_i \subseteq M^n, \left(i = \overline{1, l}\right)$.

Рассмотрим произвольное множество $F \subseteq M^n$ и нумерацию множества M^n вида:

$$\gamma\,(i_1, i_2, \ldots, i_n) = i_1 + (i_2 - 1)\, m + \ldots + (i_n - 1)\, m^{n-1}.$$

С помощью нумерации γ и множества F вычислим предикат

$$Q_F\,(\mathfrak{X}) = \begin{cases} 1, \ \text{если}\ \mathfrak{X} = \gamma\,(i_1, i_2, \ldots, i_n)\,,\ \langle i_1, i_2, \ldots, i_n \rangle \in F; \\ 0, \ \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим кортеж введенных предикатов:

$$\hat{F} = \left\langle Q_F^{(1)}, \ldots, Q_F^{(|m^n|)} \right\rangle,$$

где эталонные описания предикатов представим вектором $\hat{Q}_i = \langle u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{im^n} \rangle$, компоненты которого $u_{ij} = Q_{0_i}\,(j)$. Далее для каждого эталонного описания $\hat{Q}_i$, предъявленного объекта-отношения $\mathfrak{X} \subseteq M^n$, применяем *псевдолинеаризацию*, то есть каждую компоненту $u_{ij} \in \hat{Q}_i$ заменяем на ее расширение $\overline{u}_{ij} = \langle u_{i1} + c_1, \ldots, u_{im^n} + c_{m^n} \rangle$, где $c_j = 2j, \left(j = \overline{1, |m^n|}\right)$.

Тогда существование информативных элементов при линеаризации [5, теорема 3.1] позволяет, используя необходимые и достаточные условия симультанности в принятии решений [6, теоремы 4.3, 4.4, следствие 4.1], сформулировать следующую теорему.

Теорема 6 (см. [4, с. 75]). *Пусть $(\forall i \in \mathfrak{I}_l)\,[u_i \neq \varnothing]$ и пусть логическая матрица — единичная: $\|q_{ij}\|_{l\times l} = E_{l\times l}$. Тогда существует l информативных элементов $a_i \in V_i^{l+1}$ таких, что предикат*

$$\Psi_i\,(\mathfrak{X}) = \begin{cases} 1, \text{\textit{если}}\ a_i = x_{ij} + c_j; \\ 0, \text{\textit{в противном случае,}} \end{cases}$$

обращается в «единицу» тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X} = O_i$, $\mathfrak{X} \in \mathfrak{M}$; здесь индекс j выбирается из условия $j = \mu j\,[u_{ij} + c_j = a_i]$, μ — оператор минимизации [7]; $V_i^1 \rightleftharpoons u_i, \left(i = \overline{1, l}\right)$; элементы V_i^{j+1} и q_{ij} задаются рекуррентной схемой:

$$V_i^{j+1} = \begin{cases} V_i^j \backslash V_j^1, \text{\textit{если}}\ V_i^j \backslash V_j^1 \neq \varnothing; \\ V_i^j, \text{\textit{в противном случае.}} \end{cases} \quad q_{ij} = \begin{cases} 1, \text{\textit{если}}\ V_i^j \backslash V_j^1 = \varnothing, \left(i, j = \overline{1, l}\right); \\ 0, \text{\textit{в противном случае.}} \end{cases}$$

Таким образом, линейные преобразования отношений, а затем применение псевдолинеаризаций позволяют при единичной логической матрице $\|q_{ij}\|_{l\times l}$ распознавать отношения симультанным методом, то есть конструктивно находить в каждом отношении информативное значение признака (точку a_i) и параллельно вести сравнение всех таких точек из обучающей информации.

§ 3. Симультанность в принятии решений при обучении

Исследование однотактных моделей принятия решений при идентификации неизвестной реализации, подвергнутой шумам и помехам, безусловно является актуальной задачей [8].

Рассмотрим стандартную обучающую выборку $O = \left\|\overline{U}_i\right\|, \left(i=\overline{1,\ell}\right)$, содержащую ℓ кортежей конструктивных элементов фиксированной длины n $\overline{U}_i = \langle U_{i1}, U_{i2}, \ldots, U_{in}\rangle$, которые варьируются в пределах ε-сети, то есть если $U_{ij} - \varepsilon \leqslant U_j \leqslant U_{ij} + \varepsilon$, $j=\overline{1,n}$, то распознаем U_j как U_{ij}, где $U_j \in \overline{U}$, $\overline{U} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$ — неизвестная реализация, ε — допуск на шум (помеху).

Задача состоит в том, чтобы предельно быстро (однотактно) идентифицировать неизвестную реализацию $\overline{U}$ к одному из кортежей обучающей выборки O.

Очевидно, для достижения поставленной цели необходимо, во-первых, сравнивать неизвестную реализацию $\overline{U}$ с эталонами $\overline{U_i} \in O$ параллельно и, во-вторых, только по одному информативному элементу из каждого эталона, то есть применить симультанный метод идентификации.

1. Симультанность при идентификации

Пусть ρ и $\leqslant$ — расстояние и частичный порядок между эталонами в обучении. Положим в качестве исходных индексных множеств $V_i^1 \rightleftharpoons \{U_{i1}, U_{i2}, \ldots, U_{in}\}, \left(i=\overline{1,\ell}\right)$; $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\ell} V_i^1$. Возьмем в качестве ρ_0 — минимальное, не равное нулю расстояние $\rho(x,y)$, где $x,y \in A$; допуск на шум ε можно выбрать из условия $\varepsilon < \dfrac{\rho_0}{2}$.

Тогда конструктивизация условий симультанного принятия решения при идентификации определяется следующей теоремой

Теорема 7 (см. [8, с. 88]). *Если $\|q_{ij}\|_{\ell\times\ell} = E_{\ell\times\ell}$ — единичная матрица размера $\ell\times\ell$, то существует ℓ информативных элементов $a_i \in V_i^{\ell+1}$ таких, что предикат*

$$Q_i\left(\overline{U}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho(a_i, U_{ij}) \leqslant \varepsilon, \left(i=\overline{1,\ell}\right); \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

обращается в «единицу» тогда и только тогда, когда $\overline{U}_i \tau \overline{U}$; здесь τ — отношение толерантности такое, что $\overline{U}_i \tau \overline{U} \Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} \rho(U_{ij}, U_j) \leqslant n\varepsilon$, где индекс $j = \mu j\,[a_i = U_{ij}]$, μ — оператор минимизации [7].

«Наброшенную» на обучающую выборку O ε-сеть можно интерпретировать как выборку, фильтрующую зашумленные реальные объекты, не превышающие уровень шума ε, и позволяющую с помощью выбранных информативных элементов a_i, $\left(i=\overline{1,\ell}\right)$ сравнивать их параллельно с неизвестной реализацией $\overline{U}$, выбирая для каждого индекса i одну и только одну необходимую компоненту U_{ij} реализации $\overline{U}$, и находить расстояние $\rho(a_i, U_{ij})$ между элементом a_iи этой компонентой U_{ij}, не превышающее уровень шума ε.

Такая фильтрация и быстрый поиск номера кортежа i в обучающей выборке, удовлетворяющего отношению толерантности τ с неизвестной реализацией $\overline{U}$, говорит о том, что можно найти наиболее близкий кортеж обучающей выборки к неизвестной реализации $\overline{U}$, подвергнутой шумам в пределах *компактной* ε-сети. Ограничения на шум ε выбираются исходя из самой обучающей выборки O так, чтобы максимально верно идентифицировать неизвестную реализацию $\overline{U}$ к одному из кортежей $\overline{U}_i \in O$ [9].

2. Обобщенная симультанная модель распознавания

Пусть имеется основное множество $M \rightleftharpoons \{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_m\}$ конечных подмножеств $\mathfrak{X}_i \in \Phi$, где Φ — множество всех конечных подмножеств натурального ряда $N \rightleftharpoons \{0, 1, 2, \ldots\}$, конечное разбиение $S \rightleftharpoons \{M_1, M_2, \ldots, M_t\}$ множества M, t — число классов эквивалентности разбиения S.

Построим обучающую выборку O для распознавания неизвестных объектов $\mathfrak{X} \in M$:

$$O = \begin{Vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & \ldots, & u_{1n} \\ u_{21}, & u_{22}, & \ldots, & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{\ell 1}, & u_{\ell 2}, & \ldots, & u_{\ell n} \end{Vmatrix} \text{ или } O = ||u_{ij}||_{\ell \times n},$$

где n — число признаков объекта распознавания $\mathfrak{X}_i$, $j = \overline{1, n}$; ℓ — число эталонов объектов распознавания $\mathfrak{X}_i$, $i = \overline{1, \ell}$; $f : \mathfrak{I}_\ell \to \mathfrak{I}_t$ — классифицирующая функция, распределяющая номера $\mathfrak{I}_\ell \rightleftharpoons \{1, 2, \ldots, \ell\}$ эталонных элементов основного множества M по номерам $\mathfrak{I}_t \rightleftharpoons \{1, 2, \ldots, t\}$ классов разбиения S; $D_k \rightleftharpoons \{i | f(i) = k\}$, $(k = \overline{1, t})$ — множество эталонных номеров разбиения S; неизвестная реализация $\overline{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in \mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}$ — множество неизвестных реализаций распознаваемого объекта.

Необходимо найти в каждом кортеже $\overline{u}_i = \langle u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in} \rangle$ обучающей выборки O по одному информативному элементу a_i так, чтобы частные предикаты

$$Q_i(\mathfrak{X}) = \begin{cases} 1, \text{ если } a_i \in \mathfrak{X}_i \rightleftharpoons \{u_{i1}, \ldots, u_{in}\}, \ (i = \overline{1, \ell}); \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

можно было вычислить параллельно, используя одно сравнение компоненты $x_j \in \overline{x}$ посредством бинарного отношения $*$ с информативным элементом $a_i : x_j * a_i$, где j выбирается из условия $a_i = u_{ij}, j = \overline{1, n}$.

Обозначим $V_i^1 \rightleftharpoons \mathfrak{X}_i$, $i \in \mathfrak{I}_\ell \rightleftharpoons \{1, 2, \ldots, \ell\}, V_i^{\ell+1} \subseteq \mathfrak{X}_i$. Подмножества $\mathfrak{X}_i$, то есть элементы из разности множеств $\{\mathfrak{X}_i \backslash V_i^{\ell+1}\}$, оставшиеся в процессе их вычисления, назовем *информативными зонами.*

Информативные элементы a_i будем искать в информативных зонах $\{\mathfrak{X}_i \backslash V_i^{\ell+1}\}$ множеств $V_i^{\ell+1}$, где $V_i^{\ell+1}$ строятся по рекуррентной схеме (см. Введение):

$$V_i^1 \rightleftharpoons \{u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in}\}, \ (i = \overline{1, \ell});$$

$$V_i^{j+1} = \begin{cases} V_i^j \backslash V_i^1, \text{ если } V_i^j \backslash V_i^1 \neq \varnothing, \ (i, j = \overline{1, \ell}); \\ V_i^j, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Наряду с индексными множествами V_i^j построим логическую матрицу $q = ||q_{ij}||$ следующим образом:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } V_i^j \backslash V_i^1 = \varnothing, \ (i, j = \overline{1, \ell}); \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 8 (см. [8, с. 89]). *Пусть* $(\forall i \in \mathfrak{I}_\ell)$ $[V_i^\ell \neq \varnothing]$, $(\forall i \neq j \in \mathfrak{I}_\ell)$ $[q_{ij} = 1 \Rightarrow q_{ji} = 0]$. *Тогда существует ℓ информативных элементов $a_i \in V_i^{\ell+1}$ таких, что предикат классификации*

$$Q_i(V) = \lceil a_i \in V \rceil \, \& \neg \left[\bigvee_{j \in \mathfrak{I}_\ell \backslash \{i\}} \lceil a_j \in V \rceil \, \& q_{ij} \right]$$

обращается в «единицу» тогда и только тогда, когда $V = V_i^1$; $V_i^1 = \{u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in}\} \in O$.

Следствие 2 (см. [8, с. 89]). *Если выполнены условия:* $V_i^1 \neq \varnothing, (i = \overline{1, \ell})$,

$$(\forall i, j \in \mathfrak{I}_\ell)[i \neq j \Rightarrow \overline{u_i} \neq \overline{u_j}], (\forall i \in \mathfrak{I}_\ell)[V_i^1 \backslash \bigcup_{j \in \mathfrak{I}_\ell \backslash \{i\}} V_j^1 \neq \varnothing],$$

то существует ℓ информативных элементов $a_i \in V_i^{\ell+1}$ таких, что предикат принадлежности

$$Q_i(\overline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i \in \mathfrak{X}_i, i \in \mathfrak{I}_\ell; \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

обращается в «единицу» тогда и только тогда, когда $\overline{x} = \overline{u}_i$; индекс j выбирается из условия $a_i = u_{ij}$.

Обозначим $\mathfrak{I}_\ell \rightleftharpoons \{1, 2, \ldots, \ell\}$, $\mathfrak{I}_t \rightleftharpoons \{1, 2, \ldots, t\}$, $\mathfrak{I}_n \rightleftharpoons \{1, 2, \ldots, n\}$.

Пусть на множестве $A \rightleftharpoons \{u_{ij} | i = \overline{1, \ell};\ j = \overline{1, n}\}$ задано некоторое расстояние $\rho(x, y)$ и линейный порядок $\leqslant$.

Обозначим $(\forall x, y \in A)[x \leqslant y \vee y \leqslant x]$ через ρ_0 — минимальное расстояние между эталонными элементами множества $A : \rho_0 = \min\limits_{\langle i,j\rangle, \langle d,p\rangle \in \mathfrak{I}_\ell \times \mathfrak{I}_n} \rho(u_{ij}, u_{dp}) \neq 0$, где u_{ij} и u_{dp} взяты из $\bigcup\limits_{j=1}^{n} \{x_j | x_j \in V_i^{\ell+1}\}$. Эталонные множества формируются по мере близости к ρ.

Пусть все значения j-го признака x_j, удовлетворяющие некоторой заданной мере близости [8] к эталонному значению u_{ij}, «стянуты» в *общий таксон* — одно множество обучающей выборки $O_{ij} = \{x_j | \rho(u_{ij}, x_j) < 1/2\rho_0\}$.

Представим эталонное описание распознаваемого i-го объекта в виде декартова произведения «стягивающих» множеств $O_{ij} : B_i = O_{i1} \times O_{i2} \times \ldots \times O_{in}$.

Множество неизвестных реализаций $\mathfrak{X}$ выразим через объединение всех декартовых произведений эталонных множеств $B_i : \mathfrak{X} = \bigcup\limits_{i=1}^{\ell} B_i$.

Введем на множестве неизвестных реализаций $\mathfrak{X}$ отношение толерантности τ_ε следующим образом:

$$\overline{x} \tau_\varepsilon \overline{u_i} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \rho(x_j, u_{ij}) < 1/2n\rho_0 - \varepsilon,$$

где $\overline{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \mathfrak{X}$, $\overline{u}_i = \langle u_{i1}, \ldots, u_{in} \rangle$, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая величина. Пусть линейный порядок $\leqslant$ и расстояние ρ распространяется на всё множество $C = \bigcup\limits_{i=1}^{\ell} \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathrm{O}_{ij}$.

Очевидно, $A \subseteq C$. Тогда имеет место

Теорема 9 (см. [8, с. 90]). *Если выполнены условия: $V_i^1 \neq \varnothing, (i = \overline{1, \ell})$,*

$$(\forall i, j \in \mathfrak{I}_\ell)[i \neq j \Rightarrow \overline{u_i} \neq \overline{u_j}], (\forall i \in \mathfrak{I}_\ell)[(V_i^1 \setminus \bigcup_{j \in \mathfrak{I}_\ell \setminus \{i\}}^{n} V_j^1) \neq \varnothing],$$

то существует ℓ информативных элементов $a_i \in V_i^{\ell+1}$ таких, что предикат

$$Q(\overline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho(a_i, x_j) < 1/2\rho_0,\ (i \in \mathfrak{I}_\ell); \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

обращается в «единицу» тогда и только тогда, когда $\overline{x} \tau_\mathcal{E} \overline{u}_i$, где индекс j выбирается из условия $a_i = u_{ij}$.

Сформулированные утверждения (теорема 8, следствие 2, теорема 9) являются примерами конструктивизации в обобщенной симультанной модели распознавания.

3. Нейронные сети симультанной схемы принятия решений

Рассмотрим симультанные (однотактные) схемы принятия решений на основе нейронных сетей в персептронах с распараллеленной структурой связанных между собой информативных нейронов [8].

Под изображением $\mathfrak{X}$, подаваемым на вход персептрона для распознавания, будем понимать некоторое подмножество точек множества $R = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

Пусть на множестве R задано m изображений $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_m$, составляющих обучающую выборку $O \rightleftharpoons \{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_m\}$. Для идентификации множества $\mathfrak{X}$ воспользуемся введенными обозначениями в предыдущем п. 2 § 3.

Частный решатель $\Psi_i(\mathfrak{X})$ в схеме принятия решения об идентификации $\mathfrak{X}$ определим следующим образом: $\Psi_i(\mathfrak{X}) = \sum\limits_{a_i \in V_i^{m+1}} \lceil a_i \in \mathfrak{X} \rceil \geqslant 1$, $i \in \mathfrak{I}_m$. Общее решение дает

Теорема 10 (см. [8, с. 92]). *Пусть* $(\forall i \in \mathfrak{I}_m)[\mathfrak{X}_i \neq \varnothing]$ *и* $(\forall i \neq j \in \mathfrak{I}_m)[q_{ij} = 1 \Rightarrow q_{ji} = 0]$. *Тогда общее решение — предикат классификации:* $Q_i(\mathfrak{X}) = \psi_i(\mathfrak{X}) \,\&\left\lceil \sum\limits_{j \in \mathfrak{I}_m} \psi_j(\mathfrak{X}) \cdot q_{ij} \geqslant 1 \right\rceil$ *обращается в «единицу» тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i$, *где* $\mathfrak{X}_i \in O$.

Предикаты классификации $Q_i(\mathfrak{X})$, $(i \in \mathfrak{I}_m)$ реализуются нелинейными персептронами, частные предикаты при этом $\lceil a \in \mathfrak{X} \rceil$ для $\mathfrak{X} \subseteq R$ можно интерпретировать нейронами [8].

Рассмотрим конструктивизацию условий способа принятия решения для нейронных сетей.

Возьмем векторы $\bar{u}_i = \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n} \rangle$, $(i \in \mathfrak{I}_m)$ из обучающей выборки O как множества $V_i^1 = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\}$, $\overline{u} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ — неизвестная реализация распознаваемого множества $\mathfrak{X} = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $n \leqslant k$. Тогда на основе теоремы 3 имеет место

Следствие 3 (см. [6, с. 39]). *Если выполнены условия* $q = \|q_{ij}\|_{m \times m} = E_{m \times m}$, *где* $E_{m \times m}$ — *единичная матрица порядка* $m \times m$, *то существует* m *идентификационных элементов* $a_i \in V_i^{m+1}$ *таких, что предикат*

$$Q_i(\mathfrak{X}) = \begin{cases} 1, \textit{если } a_i = a_{ij}; \\ 0, \textit{в противном случае, } i \in \mathfrak{I}_m \end{cases}$$

обращается в «единицу» тогда и только тогда, когда $\overline{u} = \overline{u}_i$, $j = \mu j[a_i = a_{ij}]$, *где* μ — *оператор минимизации* [7].

Симультанность способа принятия решения об идентификации неизвестного множества $\mathfrak{X}$ с эталонным множеством из обучающей выборки $\mathfrak{X}_i \in O$ достигается за счет параллельного вычисления информативных нейронов в условиях единичности логической матрицы $\|q_{ij}\|$ путем сравнения неизвестной реализации $\overline{u}$ с кортежами в обучении $\overline{u}_i$ по одному информативному элементу a_{ij} с идентификационным элементом a_i из информативной зоны V_i^{m+1}.

Таким образом, приведенные примеры демонстрируют общий подход в конструктивизации условий симультанности в задачах классификации конечных объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоусов В.А., Калядин Н.И. К вопросу существования симультанной модели классификации объектов // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2006. № 1. С. 151–160.
2. Калядин Н.И. Конструктивизация в классификации образов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 2. С. 188–193.
3. Калядин Н.И. Распознавание отношений методом коллективного голосования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 3. С. 154–162.
4. Калядин Н.И. Временная оптимизация решающих правил классификации // Вестник МАРТИТ. 2004. № 3 (11). С. 70–76.
5. Калядин Н.И. Классификация сильно слипающихся множеств // Вестник МАРТИТ. 2004. №4 (12). С. 41–46.
6. Калядин Н.И. Симультанная классификация множеств конечных объектов // Вестник МАРТИТ. 2004. №4 (12). С. 34–40.
7. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1965. 391 с.
8. Калядин Н.И. Конструктивизация моделей классификации конечных объектов // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2007. Вып. 1 (38). С. 3–231.

9. Belousov V.A., Kalyadin N.I. A Simultaneous Approach to Decision Making // Pattern Recognition and Image Analysis. 1998. Vol. 8. № 2. P. 106–107.

Поступила в редакцию 27.12.2011

Калядин Николай Иванович, к. т. н., профессор, кафедра прикладной математики и информатики, Ижевский государственный технический университет, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7.
E-mail: pmi@istu.ru

N. I. Kalyadin
Simultaneity in the problems of classification of finite objects

Keywords: constructivization, simultaneity, classification, signature, predicate, the final model.

Mathematical Subject Classifications: 03B70, 03C64, 03G05

Consideration is given to the problem of efficient computability of solvable models of finite objects classification. We investigate the constructivization of simultaneity (extremely short cycle) conditions of decision adoption in the classification. Simultaneity is achieved by parallel comparing of the components of the unknown implementation with informative elements of all etalons in the training sample. Constructivization of simultaneity conditions includes: a selection of informative elements (identification labels) in the informative areas of classified sets; the parallel component-wise comparison of the unknown realization of a finite object with informative elements of etalons from the training set. The obtained results of simultaneous decision trees in classification is interpreted in neural networks, in a generalized model of recognition, in problems of identification.

REFERENCES

1. Belousov V.A., Kalyadin N.I. To the question of existence of simultaneous models of classification of objects, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat.*, 2006, no. 1, pp. 151–160.

2. Kalyadin N.I. Constructivization in the classification of images, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2008, no. 2, pp. 188–193.

3. Kalyadin N.I. Recognition of relations by the method of collective vote, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, no. 3, pp. 154–162.

4. Kalyadin N.I. Time optimization of decision rules classification, *Vestn. Moskov. Akad. Ryn. Tr. Inform. Tekhnol.*, 2004, no. 3 (11), pp. 70–76.

5. Kalyadin N.I. Classification of strongly sticky sets, *Vestn. Moskov. Akad. Ryn. Tr. Inform. Tekhnol.*, 2004, no. 4 (12), pp. 41–46.

6. Kalyadin N.I. Simultaneous classification sets of finite objects, *Vestn. Moskov. Akad. Ryn. Tr. Inform. Tekhnol.*, 2004, no. 4 (12), pp. 34–40.

7. Mal'tsev A.I. *Algoritmy i rekursivnye funktsii* (Algorithms and recursive functions), Moscow: Nauka, 1965, 391 p.

8. Kalyadin N.I. Constructivization of the models of classification of finite objects, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2007, no. 1 (38), pp. 3–231.

9. Belousov V.A., Kalyadin N.I. A Simultaneous Approach to Decision Making, *Pattern Recognition and Image Analysis*, 1998, vol. 8, no. 2, pp. 106–107.

Received 27.12.2011

Kalyadin Nikolai Ivanovich, Candidate of Engineering, Professor, Department of Applied Mathematics and Informatics, Izhevsk State Technical University, ul. Studencheskaya, 7, Izhevsk, 426069, Russia.
E-mail: pmi@istu.ru