УДК 531.55+514.85

© *В. В. Чистяков*

# ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОЙ ТОЧКИ В СРЕДЕ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ ПЛОТНОСТИ

Резольвентный метод, базирующийся на преобразованиях Лежандра, применен для интегрирования уравнений баллистики в среде со степенным по скорости сопротивлением, коэффициент которого падает линейно с высотой. Во втором приближении по градиенту плотности и с учетом уменьшения с высотой ускорения свободного падения $g(y)$ задача сведена к линейному дифференциальному уравнению. Его решением получены универсальные формулы для неоднородностной добавки к резольвентной функции $f_n(b)$, а также к вертикальной и горизонтальной координатам $\delta y(b)$, $\delta x(b)$, $b = \operatorname{tg}\theta$ — наклон траектории. Подробно рассмотрен случай квадратичного сопротивления.

*Ключевые слова*: преобразование Лежандра, резольвентная функция, степенной закон сопротивления, линейная неоднородность плотности.

## Введение

Проблема актуальна как в силу сугубо прикладных потребностей внешней баллистики [1–4], космонавтики, метеорологии, спорта [5], анимации и других, так и с фундаментальной точки зрения регулярной нелинейной динамики и обыкновенных дифференциальных уравнений.

Традиционно сопротивление описывают кусочно-степенными по скорости зависимостями или же предполагается, что при неизменном базовом показателе степени изменяется коэффициент. Чаще всего за базовое значение принимается $n = 2$, но в ряде баллистических подходов за основу берется кубическая зависимость силы $R$ от скорости [4].

Случай квадратичного рэлеевского сопротивления $R = C_\mathrm{d}\rho S V^2 = \alpha m g V^2$, $V$ — скорость, $\rho$ — плотность, $S$ — фронтальная площадь, и $C_\mathrm{d}$ — коэффициент формы, чрезвычайно важен, так как он реализуется для тел (снаряды, ракеты, автомобили, воланы, шарики и так далее) вплоть до чисел Маха $M \approx 0{,}7$ (см графики в [2]). Однако в сверхзвуковой области коэффициент $\alpha$ для многих тел падает как $1/V^{1/2}$, и сила оказывается пропорциональной $V^{3/2}$ («закон трех вторых» [3]).

Первые результаты интегрирования в квадратурах уравнений свободного движения в однородной по плотности среде со степенным по скорости сопротивлением были получены еще в девятнадцатом веке [6]. Но, несмотря на давность, исследования, как теоретические [7,8], так и экспериментальные, продолжаются и в наши дни, приводя к созданию неких универсальных для динамики подходов.

В настоящей работе применен резольвентный метод для интегрирования уравнений плоского движения с одночленным степенным сопротивлением $R = \alpha(y)\cdot mgV^n$, когда коэффициент $\alpha(y)$ убывает линейно с вертикальной координатой $y$.

## § 1. Преобразования Лежандра: однородная среда

В каждой точке баллистической траектории вектор скорости $\vec{V}$ составляет свой уникальный угол $\theta$ с горизонтом, равно как уникальны и параметры в уравнении касательной $y_\text{к} = a + bx$: *угловой коэффициент* $b = \operatorname{tg}\theta$ и *прерывание* $a(\theta(b)) \equiv a(b)$ (рис. 1). Следовательно, альтернативно можно описать траекторию как зависимость

$$a = a(b), \quad b = b(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

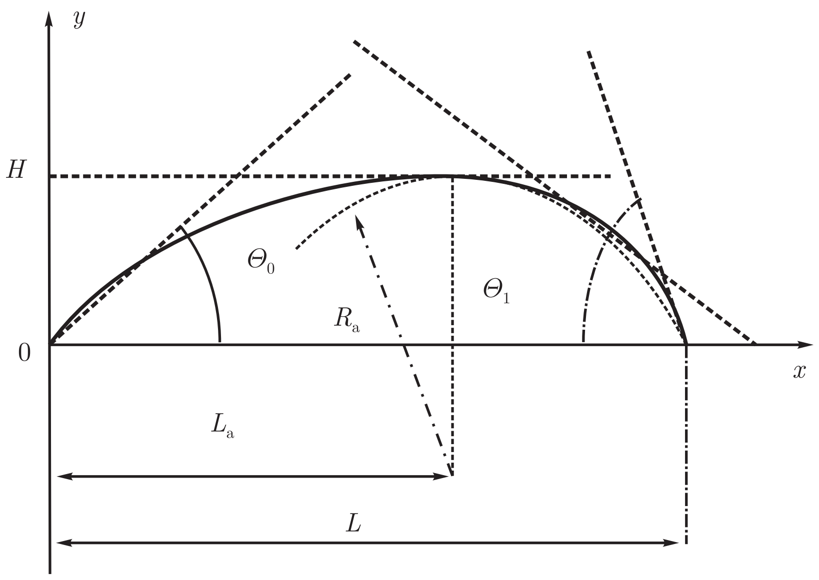


**Рис. 1.** Баллистическая траектория (—) и ее касательное расслоение (- - -)

то есть через ее *касательное расслоение*, уравнение которого получается при помощи преобразования Лежандра.

Обратный переход осуществляется по формулам

$$\left\{ x = -\frac{\dot{a}}{\dot{b}} = -\frac{da}{db},\ y = a - \frac{da}{db}\, b,\ t(b) = \int_{b_0}^{b} \frac{d\widetilde{b}}{\dot{b}(\widetilde{b})} \right\}. \tag{1.1}$$

Соотношения позволяют найти закон движения и рассчитать основные параметры траектории: дальность $L$, высоту $H$, абсциссу вершины $L_a$, наклон приземления $b_1 = \operatorname{tg}\theta_1$ (рис. 1) [8]. Примечательно, что все эти параметры выражаются через три ключевых: $b_0 = \operatorname{tg}\theta_0$ — стартовый наклон траектории, $R_a$ — вершинный радиус ее кривизны и $\beta_0$ — безразмерный квадрат разворотной скорости [там же].

Имеет смысл изложить результаты применения подхода для среды с постоянным коэффициентом сопротивления.

Сила сопротивления тогда равна $\vec{R} = -\alpha m g V^{n-1}\overline{V}$, и уравнения движения составляют систему

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\alpha m g \dot{x} V^{n-1}, \\ m\ddot{y} = -\alpha m g \dot{y} V^{n-1} - mg \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ddot{x} = -\alpha g \dot{x} \left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right)^{n-1}, \\ \ddot{y} = -\alpha g \dot{y} \left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right)^{n-1} - g. \end{cases} \tag{1.2}$$

По аналогии с [8] умножением верхнего уравнения на $b$ и вычитанием его из нижнего получается $\dot{b}\dot{x} = -g$, что с учетом (1.1) эквивалентно $\dot{b}\left(-\dfrac{d^2 a}{db^2}\,\dot{b}\right) = -g$ и, следовательно,

$$\dot{b} = -\sqrt{\frac{g}{a''_{bb}}}, \quad b(0) = b_0 = \operatorname{tg}\theta_0, \tag{1.3}$$

что справедливо для любого «лобового» закона $R(V)$, вплоть до противоречащего причинно-следственной связи отрицательного сопротивления (тяги).

Аналогичной цепочкой несложных преобразований [там же] выводится задача Коши для резольвентной функции $a(b)$

$$a'''_{bbb} = 2\alpha g^{\frac{n}{2}} (a''_{bb})^{\frac{n}{2}+1} \left(\sqrt{1+b^2}\right)^{n-1}, \quad a(b_0) = \frac{da(b_0)}{db} = 0, \quad \frac{d^2 a(b_0)}{db^2} = \frac{V_0^2 \cos^2\theta_0}{g}. \tag{1.4}$$

Ее решение есть [6]

$$a_{bb}^{(0)\prime\prime}(b)=\left[\left(\frac{V_0^2\cos^2\theta_0}{g}\right)^{-\frac{n}{2}}+n\alpha g^{\frac{n}{2}}b_0F\left(\frac{1}{2},-\frac{n}{2}+\frac{1}{2};\frac{3}{2},-b_0^2\right)-\right.$$

$$\left.-n\alpha g^{\frac{n}{2}}bF\left(\frac{1}{2},-\frac{n}{2}+\frac{1}{2};\frac{3}{2},-b^2\right)\right]^{-2/n}=\frac{R_a}{\left(1-n\beta_n bF\left(\frac{1}{2},-\frac{n}{2}+\frac{1}{2};\frac{3}{2},-b^2\right)\right)^{\frac{2}{n}}}\equiv f_n(b),$$

где $R_a=f_n(0)=\dfrac{V_a^2}{g}=\dfrac{V_0^2}{g\left((1+b_0^2)^{\frac{n}{2}}+n\alpha V_0^n b_0F\left(\frac{1}{2},-\frac{n}{2}+\frac{1}{2};\frac{3}{2},-b_0^2\right)\right)^{\frac{2}{n}}}$ — радиус кривизны в вершине траектории, $V_a^2=\dfrac{V_0^2}{C_n}$ — вершинный квадрат скорости, $C_n=\dfrac{V_0^2}{V_a^2}=\Bigg((1+b_0^2)^{\frac{n}{2}}+$ $+n\alpha V_0^n b_0F\left(\frac{1}{2},-\frac{n}{2}+\frac{1}{2};\frac{3}{2},-b_0^2\right)\Bigg)^{\frac{2}{n}}$, $\beta_n=\dfrac{\alpha V_0^n}{C_n}=\dfrac{V_a^2}{V_T^2}$ — отношение квадрата вершинной скорости к квадрату предельной ($V_{\rm t}$) при падении с неограниченной высоты в однородном поле, $bF\left(\frac{1}{2},-\frac{n}{2}+\frac{1}{2};\frac{3}{2},-b^2\right)=\int_0^b\left(\sqrt{1+b'^2}\right)^{n-1}db'=\int_0^{\operatorname{arcsh}b}(\operatorname{ch}u)^n\,du.$

Из (1.4) легко получаются наглядные формулы для координат и времени

$$x_0(b)=-R_a\int_{b_0}^b\frac{d\widetilde{b}}{\phi_n(\widetilde{b})},\quad y_0(b)=-R_a\int_{b_0}^b\frac{\widetilde{b}\,d\widetilde{b}}{\phi_n(\widetilde{b})},\quad t_0(b)=-\sqrt{\frac{R_a}{g}}\int_{b_0}^b\frac{d\widetilde{b}}{\sqrt{\phi_n(\widetilde{b})}},$$
$$\phi_n(\widetilde{b})=\left(1-n\beta_n\widetilde{b}F\left(\frac{1}{2},-\frac{n}{2}+\frac{1}{2};\frac{3}{2},-\widetilde{b}^2\right)\right)^{\frac{2}{n}}. \tag{1.5}$$

## § 2. Линейно неоднородная плотность

Вообще, неоднородность плотности земной атмосферы может быть локально вызвана как погодными условиями, так и природными явлениями, а также искусственными артефактами: туман, вулканическая пыль, дымовая завеса и прочими.

Есть и глобальные причины, связанные с тем, что относительная плотность воздуха падает с высотой в согласии с барометрической формулой, линеаризуемой как $\rho(y)/\rho_0=1-c'y$, $c'/м^{-1}$ — ее постоянный градиент. Такое поведение имеет место для земных высот, не превышающих 2 000 м, и градиент оценивается как $c'\approx10^{-4}$ м$^{-1}$.

Кроме того, в первом приближении линейно с высотой убывает также приповерхностное ускорение свободного падения $g(y)=g_0\left(1-\dfrac{2y}{\Re}\right)$, $\Re$ — радиус Земли/планеты.

Резольвентное уравнение в (1.4) учитывает локальные и глобальные факторы мультипликативно, но в линейном приближении они складываются в *эффективный* градиент $c/м^{-1}$

$$\left(1-\frac{2y}{\Re}\right)^{\frac{n}{2}}(1-c'y)=1-\left(c'+\frac{n}{\Re}\right)y+\frac{c'n}{\Re}y^2+\ldots\approx1-\left(c'+\frac{n}{\Re}\right)y\equiv1-cy. \tag{2.1}$$

В итоге резольвентное уравнение примет вид

$$a_{bbb}'''=2\alpha_0g_0^{\frac{n}{2}}(a_{bb}'')^{\frac{n}{2}+1}\left(\sqrt{1+b^2}\right)^{n-1}\cdot\left(1-c(a-a_b'b)\right). \tag{2.2}$$

Интегрирование с применением приема «по частям» дает

$$\int_{b_0}^b\frac{a_{\widetilde{b}\widetilde{b}\widetilde{b}}'''}{(a_{\widetilde{b}\widetilde{b}}'')^{\frac{n}{2}+1}}\,d\widetilde{b}=2\alpha_0g^{\frac{n}{2}}\int_{b_0}^b\left(\sqrt{1+\widetilde{b}^2}\right)^{n-1}d\widetilde{b}-c\cdot2\alpha_0g^{\frac{n}{2}}\int_{b_0}^b\left(a-a'\widetilde{b}\right)\left(\sqrt{1+\widetilde{b}^2}\right)^{n-1}d\widetilde{b},$$

в результате

$$\frac{(a''_{bb}(b))^{-\frac{n}{2}}-(a''_{bb}(b_0))^{-\frac{n}{2}}}{-\dfrac{n}{2}}=$$

$$=\frac{(f_n(b))^{-\frac{n}{2}}-(f_n(b_0))^{-\frac{n}{2}}}{-\dfrac{n}{2}}-\frac{c\cdot y(b)\,(f_n(b))^{-\frac{n}{2}}}{-\dfrac{n}{2}}+c\int_{b_0}^{b}\frac{(-a''\widetilde{b})\,(f_n(b))^{-\frac{n}{2}}}{-\dfrac{n}{2}}\,d\widetilde{b}.$$

Здесь $y(b)=-\displaystyle\int_{b_0}^{b}a''_{\widetilde{b}\widetilde{b}}(\widetilde{b})\widetilde{b}\,d\widetilde{b}$ — зависимость вертикальной координаты от наклона, $g\equiv g_0$ — тяготение на высоте старта.

С учетом универсальности начальных условий на обе резольвенты $f_n(b)$ и $a''_{bb}(b)$

$$a''_{bb}(b)=\left((f_n(b))^{-\frac{n}{2}}-c\cdot y(b)(f_n(b))^{-\frac{n}{2}}+c\int_{b_0}^{b}(-a''\widetilde{b})(f_n(\widetilde{b}))^{-\frac{n}{2}}\,d\widetilde{b}\right)^{-\frac{2}{n}},$$

следовательно,

$$a''_{bb}(b)=\frac{f_n(b)}{\left(1+c\displaystyle\int_{b_0}^{b}a''_{\widetilde{b}\widetilde{b}}(\widetilde{b})\widetilde{b}\,d\widetilde{b}-cf_n(b)^{\frac{n}{2}}\int_{b_0}^{b}a''(\widetilde{b})\widetilde{b}\left(f_n(\widetilde{b})\right)^{-\frac{n}{2}}\,d\widetilde{b}\right)^{\frac{2}{n}}}. \tag{2.3}$$

Это нелинейное интегральное уравнение можно решать итеративно с $f_n(b)$ в качестве нулевого приближения, получая в первом

$$a^{(I)''}_{bb}(b)=\frac{f_n(b)}{\left(1+c\displaystyle\int_{b_0}^{b}f_n(\widetilde{b})\widetilde{b}\,d\widetilde{b}-cf_n(b)^{\frac{n}{2}}\int_{b_0}^{b}\widetilde{b}\left(f_n(\widetilde{b})\right)^{1-\frac{n}{2}}\,d\widetilde{b}\right)^{\frac{2}{n}}}. \tag{2.4}$$

Кроме того, для малоугловых траекторий прицельной стрельбы приближенное решение можно найти в виде степенного ряда по наклону $b$, аналогично [8].

## § 3. Приближение 2-го порядка

Однако, альтернативный путь позволяет достаточно точно найти решение резольвентного уравнения (2.2) при не слишком больших градиентах *с/м*$^{-1}$.

Интегрированием с учетом невозмущенного уравнения (1.4) получается

$$a''_{bb}(b)=\frac{f_n(b)}{\left(1+c\cdot n\alpha g^{\frac{n}{2}}f_n(b)^{\frac{n}{2}}\displaystyle\int_{b_0}^{b}y(\widetilde{b})\left(\sqrt{1+b^2}\right)^{n-1}\,d\widetilde{b}\right)^{\frac{2}{n}}}. \tag{3.1}$$

Если ввести в качестве новой переменной $G(b)=\displaystyle\int_{b_0}^{b}y(\widetilde{b})\left(\sqrt{1+\widetilde{b}^2}\right)^{n-1}\,d\widetilde{b}\leqslant 0$, то

$$\frac{dG(b)}{db}=y(b)\left(\sqrt{1+b^2}\right)^{n-1},$$

следовательно

$$y(b)=G'_b\left(\sqrt{1+b^2}\right)^{1-n},$$

и с учетом $a''_{bb} = -\dfrac{y'_b(b)}{b}$ получается

$$-\frac{G''_{bb}\left(\sqrt{1+b^2}\right)^{1-n} + G'_b\left(\left(\sqrt{1+b^2}\right)^{1-n}\right)'_b}{b} = \frac{f_n(b)}{\left(1 + c\cdot n\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} G(b)\right)^{\frac{2}{n}}}.$$

Тогда

$$\frac{G''_{bb}\left(\sqrt{1+b^2}\right)^{1-n} + G'_b\left(b(1-n)\left(\sqrt{1+b^2}\right)^{-n-1}\right)}{b} = -\frac{f_n(b)}{\left(1 + c\cdot n\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} G(b)\right)^{\frac{2}{n}}},$$

что в итоге равносильно уравнению

$$G''_{bb} + G'_b\left(\frac{b}{1+b^2}(1-n)\right) = -\frac{f_n(b)b\left(\sqrt{1+b^2}\right)^{n-1}}{\left(1 + c\cdot n\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} G(b)\right)^{\frac{2}{n}}}. \tag{3.2}$$

С введением $G_0(b) = \displaystyle\int_{b_0}^{b} y_0(\widetilde{b})\left(\sqrt{1+\widetilde{b}^2}\right)^{n-1} d\widetilde{b}$ и учетом того, что

$$G''_{(0)bb} + G'_{(0)b}\left(\frac{b}{1+b^2}(1-n)\right) = -f_n(b)b(1+b^2)^{\frac{n-1}{2}},$$

оно преобразуется к виду

$$G''_{bb} + G'_b\left(\frac{b}{1+b^2}(1-n)\right) = \frac{G''_{(0)b} + G'_{(0)b}\left(\dfrac{b}{1+b^2}(1-n)\right)}{\left(1 + c\cdot n\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} G(b)\right)^{\frac{2}{n}}}. \tag{3.3}$$

Теперь решение можно искать в виде $G(b) = G_0(b) + cD(b)$, используя при этом биномиальное разложение для знаменателя и полагая, что

$$c\cdot n\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} G(b) \ll 1, \quad \forall b \in [b_0, b_1]. \tag{3.4}$$

Нетрудно максимизацией левой части по $b$ с учетом уравнения (2.2) для $f_n(b)$ показать, что это условие автоматически выполняется, если $c\cdot\max\limits_b[y_0(b)] = cH_0 \ll 1$.

Во втором порядке такого разложения уравнение сохранят свою линейность

$$\begin{aligned}
&cD''_{bb} + cD'_b\left(\frac{b}{1+b^2}(1-n)\right) + \left(G''_{(0)bb} + G'_{(0)b}\left(\frac{b}{1+b^2}(1-n)\right)\right) = \\
&\quad = \left(G''_{(0)b} + G'_{(0)b}\left(\frac{b}{1+b^2}(1-n)\right)\right)\left(1 + c\cdot n\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} G_0 + c^2 n\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} D\right)^{-\frac{2}{n}} \approx \\
&\quad \approx \left(1 - c\cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} G_0(b) - c^2\cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} D(b) + c^2\cdot 4(2+n)\alpha^2 g^n f_n(b)^n G_0^2(b)\right)\cdot \\
&\quad \cdot\left(G''_{(0)bb} + G'_{(0)b}\left(\frac{b}{1+b^2}(1-n)\right)\right).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&D''_{bb} + D'_b\left(\frac{b}{1+b^2}(1-n)\right) + c\cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} D(b)\left(G''_{(0)bb} + G'_{(0)b}\left(\frac{b}{1+b^2}(1-n)\right)\right) \approx \\
&\quad \approx -\left(2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} G_0(b) - c\cdot 4(2+n)\alpha^2 g^n f_n(b)^n G_0^2(b)\right)\cdot\left(G''_{(0)bb} + G'_{(0)b}\left(\frac{b}{1+b^2}(1-n)\right)\right).
\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $G''_{(0)bb}+G'_{(0)b}\left(\dfrac{b}{1+b^2}(1-n)\right)=-f_n(b)b(1+b^2)^{\frac{n-1}{2}}$, преобразуем уравнение к виду

$$\begin{aligned}
&D''_{bb}+D'_b\left(\frac{b}{1+b^2}(1-n)\right)+c\cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}}f_n(b)^{\frac{n}{2}}D(b)\left(-f_n(b)b(1+b^2)^{\frac{n-1}{2}}\right)\approx\\
&\approx-\left(2\alpha g^{\frac{n}{2}}f_n(b)^{\frac{n}{2}}G_0(b)-c\cdot 4(2+n)\alpha^2g^nf_n(b)^nG_0^2(b)\right)\cdot\left(-f_n(b)b(1+b^2)^{\frac{n-1}{2}}\right)\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\left(D''_{bb}+D'_b\left(\frac{b}{1+b^2}(1-n)\right)\right)(1+b^2)^{\frac{1-n}{2}}-c\cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}}f_n(b)^{\frac{n}{2}+1}bD(b)\approx\\
&\approx b\left(2\alpha g^{\frac{n}{2}}f_n(b)^{\frac{n}{2}+1}G_0(b)-c\cdot 4(2+n)\alpha^2g^nf_n(b)^{n+1}G_0^2(b)\right).
\end{aligned}\tag{3.5}$$

Представив теперь $D(b)=D_1(b)+c\cdot D_2(b)$, получим для первого члена

$$\left(D'_{1b}(b)(1+b^2)^{\frac{1-n}{2}}\right)'_b=2\alpha g^{\frac{n}{2}}\left(bf_n(b)^{\frac{n}{2}+1}G_0(b)\right),$$

следовательно,

$$D'_{1b}(b)=2\alpha g^{\frac{n}{2}}\int_{b_0}^{b}\widetilde{b}f_n(\widetilde{b})^{\frac{n}{2}+1}G_0(\widetilde{b})\,d\widetilde{b}\cdot(1+b^2)^{\frac{n-1}{2}},$$

и добавка первого порядка равна

$$D_1(b)=2\alpha g^{\frac{n}{2}}\int_{b_0}^{b}\left(\int_{b_0}^{b'}\widetilde{b}f_n(\widetilde{b})^{\frac{n}{2}+1}G_0(\widetilde{b})\,d\widetilde{b}\right)\cdot(1+b'^2)^{\frac{n-1}{2}}\,db'.\tag{3.6}$$

Аналогично находится и второй порядок:

$$\left(D'_{2b}(b)(1+b^2)^{\frac{1-n}{2}}\right)'_b=2\alpha g^{\frac{n}{2}}f_n(b)^{\frac{n}{2}+1}bD_1(b)-4(2+n)\alpha^2g^nf_n(b)^{n+1}G_0^2(b)b,$$

следовательно,

$$D'_{2b}(b)=(1+b^2)^{\frac{n-1}{2}}\left(\int_{b_0}^{b}2\alpha g^{\frac{n}{2}}f_n(\widetilde{b})^{\frac{n}{2}+1}\widetilde{b}D_1(\widetilde{b})-4(2+n)\alpha^2g^nf_n(\widetilde{b})^{n+1}G_0^2(\widetilde{b})\widetilde{b}\right)d\widetilde{b},$$

и добавка равна

$$\begin{aligned}
D_2(b)=\int_{b_0}^{b}\Bigg((1+b'^2)^{\frac{n-1}{2}}\Bigg(\int_{b_0}^{b'}&2\alpha g^{\frac{n}{2}}f_n(\widetilde{b})^{\frac{n}{2}+1}\widetilde{b}D_1(\widetilde{b})-\\
&-4(2+n)\alpha^2g^nf_n(\widetilde{b})^{n+1}G_0^2(\widetilde{b})\widetilde{b}\Bigg)d\widetilde{b}\Bigg)\,db'.
\end{aligned}\tag{3.7}$$

В итоге с точностью до членов 2-го порядка по градиенту $c/м^{-1}$ функция $G(b)$ определится как

$$\begin{aligned}
G(b)\approx\int_{b_0}^{b}y_0(\widetilde{b})\left(\sqrt{1+\widetilde{b}^2}\right)^{n-1}d\widetilde{b}+c\cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}}\int_{b_0}^{b}\left(\int_{b_0}^{b'}\widetilde{b}f_n(\widetilde{b})^{\frac{n}{2}+1}G_0(\widetilde{b})\,d\widetilde{b}\right)\cdot(1+b'^2)^{\frac{n-1}{2}}\,db'+\\
+c^2\cdot\int_{b_0}^{b}\left((1+b'^2)^{\frac{n-1}{2}}\left(\int_{b_0}^{b'}2\alpha g^{\frac{n}{2}}f_n^{\frac{n}{2}+1}(\widetilde{b})\widetilde{b}D_1(\widetilde{b})-4(2+n)\alpha^2g^nf_n^{n+1}(\widetilde{b})G_0^2(\widetilde{b})\widetilde{b}\right)d\widetilde{b}\right)db'.
\end{aligned}\tag{3.8}$$

Зависимость от $b$ вертикальной координаты —

$$\begin{aligned}
y(b)=\frac{dG(b)}{db}\left(\sqrt{1+b^2}\right)^{1-n}\approx y_0(b)+c\cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}}\int_{b_0}^{b}\widetilde{b}f_n^{\frac{n}{2}+1}(\widetilde{b})G_0(\widetilde{b})\,d\widetilde{b}+\\
+c^2\cdot 4\alpha^2g^n\int_{b_0}^{b}\Bigg(f_n^{\frac{n}{2}+1}(k)\left(\int_{b_0}^{k}\left(\int_{b_0}^{b'}\widetilde{b}f_n^{\frac{n}{2}+1}(\widetilde{b})G_0(\widetilde{b})\,d\widetilde{b}\right)\cdot\left(1+b'^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\,db'\right)-\\
-(2+n)G_0^2(k)kf_n^{n+1}(k)\Bigg)dk.
\end{aligned}\tag{3.9}$$

Соответственно, резольвента $f(b) = a''_{bb}(b)$ для нахождения $x(b)$ и $t(b)$ —

$$\begin{aligned}
a''_{bb}(b) = -\frac{1}{b}\cdot\frac{dy(b)}{db} \approx f_n(b) - c\cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n^{\frac{n}{2}+1}(b) G_0(b) - \\
- c^2\cdot 4\alpha^2 g^n \left( f_n^{\frac{n}{2}+1}(b) \left( \int_{b_0}^{b} \left( \int_{b_0}^{b'} \widetilde{b} f_n^{\frac{n}{2}+1}(\widetilde{b}) G_0(\widetilde{b})\, d\widetilde{b} \right) \cdot \left(1+b'^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\, db' \right) - \\
- (2+n) f_n^{n+1}(b) G_0^2(b) \right).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

С учетом знака $G_0(b)$ и пределов интегрирования видно, что обе добавки к $f_0(b)$ положительны как минимум на взлетном участке траектории $b \geqslant 0$, и они взаимно усиливают друг друга, уменьшая кривизну этого участка.

Линейное по $c/м^{-1}$ слагаемое (обозначим его $ca_{bb}^{(I)''}(b)$) можно преобразовать все тем же интегрированием по частям

$$\begin{aligned}
ca_{bb}^{(I)''}(b) = -c\cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n^{\frac{n}{2}+1}(b) G_0(b) = \frac{c\cdot 2 f_n^{\frac{n}{2}+1}(b)}{n} \int_{b_0}^{b} y_0(\widetilde{b}) \left( -n\alpha g^{\frac{n}{2}} \left( \sqrt{1+\widetilde{b}^2} \right)^{n-1} \right) d\widetilde{b} = \\
= \frac{c\cdot 2 f_n^{\frac{n}{2}+1}(b) y_0(b) f_n^{-\frac{n}{2}}(b)}{n} + \frac{c\cdot 2 f_n^{\frac{n}{2}+1}(b)}{n} \int_{b_0}^{b} f_n(\widetilde{b}) f_n^{-\frac{n}{2}}(\widetilde{b}) \widetilde{b}\, d\widetilde{b},
\end{aligned}$$

следовательно,

$$ca_{bb}^{(I)''}(b) = c\cdot\frac{2}{n} f_n(b) \left( y_0(b) + f_n^{\frac{n}{2}}(b) \int_{b_0}^{b} f_n^{1-\frac{n}{2}}(\widetilde{b}) \widetilde{b}\, d\widetilde{b} \right). \tag{3.11}$$

Тогда содержащая 4-кратное интегрирование квадратичная добавка $c^2 a_{bb}^{(II)''}(b)$ преобразуется как

$$\begin{aligned}
c^2 a_{bb}^{(II)''}(b) = c\cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}} \frac{f_n^{\frac{n}{2}+1}(b)}{b} \left( \int_{b_0}^{b} \left( \int_{b_0}^{b'} \widetilde{b} \left( -c\cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n^{\frac{n}{2}+1}(b)_0(\widetilde{b}) G_0(\widetilde{b}) \right) d\widetilde{b} \right) \cdot \left(1+b'^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\, db' \right) + \\
+ (2+n) \left( -c\cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n^{\frac{n}{2}+1}(b) G_0(b) \right)^2 = \\
= c^2\cdot \left\{ 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n^{\frac{n}{2}+1}(b) \left( \int_{b_0}^{b} \left( \int_{b_0}^{b'} \widetilde{b} \left( \frac{2}{n} f_n(\widetilde{b}) \left( y_0(\widetilde{b}) + f_n(\widetilde{b})^{\frac{n}{2}} \int_{b_0}^{\widetilde{b}} f_n^{1-\frac{n}{2}}(k) k\, dk \right) \right) d\widetilde{b} \right) \cdot \right.\right. \\
\left. \cdot \left(1+b'^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\, db' \right) + (2+n) \left( \frac{2}{n} f_n(b) \left( y_0(b) + f_n^{\frac{n}{2}}(b) \int_{b_0}^{b} f_n^{1-\frac{n}{2}}(\widetilde{b}) \widetilde{b}\, d\widetilde{b} \right) \right)^2 \right\},
\end{aligned}$$

и она определится следующим образом:

$$\begin{aligned}
c^2 a_{bb}^{(II)''}(b) = c^2\cdot \left\{ 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n^{\frac{n}{2}+1}(b) \left( \int_{b_0}^{b} \left( -\frac{y_0^2(b')}{n} + \int_{b_0}^{b'} \left( \frac{2}{n} f_n^{\frac{n}{2}+1}(\widetilde{b}) \int_{b_0}^{\widetilde{b}} f_n^{1-\frac{n}{2}}(k) k\, dk \right) \widetilde{b}\, d\widetilde{b} \right) \cdot \right.\right. \\
\left. \cdot \left(1+b'^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\, db' \right) + (2+n) \left( \frac{2}{n} f_n(b) \left( y_0(b) + f_n^{\frac{n}{2}}(b) \int_{b_0}^{b} f_n^{1-\frac{n}{2}}(\widetilde{b}) \widetilde{b}\, d\widetilde{b} \right) \right)^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Кратность интегрирования таким преобразованием понижается на единицу, что немаловажно при численном интегрировании.

Линейные по градиенту поправки добавки к горизонтальной координате и времени движения определятся как

$$\delta x^{(I)}(b) = -c\cdot\frac{2}{n}\int_{b_0}^{b} f_n(b')\left(y_0(b') + f_n^{\frac{n}{2}}(b')\int_{b_0}^{b} f_n^{1-\frac{n}{2}}(\widetilde{b})\widetilde{b}\,d\widetilde{b}\right)db' = \left|-f_n(b')\,db' = dx_0(b')\right| =$$

$$= c\cdot\frac{2}{n}S_{xy}^{(0)}(b) - c\cdot\frac{2}{n}\int_{b_0}^{b} f_n^{\frac{n}{2}+1}(b')\left(\int_{b_0}^{b} f_n^{1-\frac{n}{2}}(\widetilde{b})\widetilde{b}\,d\widetilde{b}\right)db',$$

$$\delta t^{(I)}(b) = -\frac{1}{\sqrt{g}}\int_{b_0}^{b} f_n^{-\frac{1}{n}}(b')\left[1 + c\cdot\frac{2}{n}\left(y_0(b') + f_n^{\frac{n}{2}}(b')\int_{b_0}^{b'} f_n^{1-\frac{n}{2}}(\widetilde{b})\widetilde{b}\,d\widetilde{b}\right)\right]^{-\frac{1}{n}} db' +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{g}}\int_{b_0}^{b} f_n^{-\frac{1}{n}}(b)\,db' \approx c\frac{2}{\sqrt{g}n^2}\int_{b_0}^{b} f_n^{-\frac{1}{n}}(b')\left(y_0(b) + f_n^{\frac{n}{2}}(b)\int_{b_0}^{b} f_n^{1-\frac{n}{2}}(\widetilde{b})\widetilde{b}\,d\widetilde{b}\right)^{-\frac{1}{n}} db'.$$

Интегрирование по частям с учетом уравнения в (1.4) дает в итоге

$$\delta t^{(I)}(b) = -c\frac{2t_0(b)y_0(b)}{n^2} + c\frac{2\alpha g^{\frac{n}{2}}}{n}\int_{b_0}^{b}\left(\int_{b_0}^{b'} f_n^{1-\frac{n}{2}}(\widetilde{b})\widetilde{b}\,d\widetilde{b}\right)t_0(b')\left(f_n(b')\right)^n\left(\sqrt{1+b'^2}\right)^{n-1} b'\,db'.$$

Здесь $S_{xy}^{(0)}(b)$ — площадь под невозмущенной траекторией от стартовой точки до точки с наклоном $b$.

Из-за своей громоздкости квадратичные поправки к $x$ и $t$ не приводятся. Тем не менее, не представляет труда их высокоточная нумеризация через резольвентную функцию (3.10) при помощи таких продуктов, как Maple [8], MatLab и другие, хорошо интегрирующие медленно меняющиеся функции. И не будет смелым утверждение о большей надежности резольвентного метода по сравнению с вычислением по векторной разностной схеме 2-го порядка для двух переменных, то есть по скалярной 4-го.

## § 4. Квадратичный закон

Случай рэлеевского сопротивления чрезвычайно важен в баллистике, в динамике любого движения твердого тела в диссипирующей среде.

Метод дает выражение для невозмущенной резольвенты [8] —

$$f_2(b) \equiv a_{bb}^{(0)''}(b) = \frac{R_a}{1 - \beta_2\left(b\sqrt{b^2+1} + \operatorname{arcsh} b\right)}, \tag{4.1}$$

где $R_a = \dfrac{V_a^2}{g} = \dfrac{V_0^2}{gC_0}$ — радиус кривизны траектории в точке разворота (*разворотный*),

$$C_0 = \frac{V_0^2}{V_a^2} = 1 + b_0^2 + \alpha V_0^2\left(b_0\sqrt{b_0^2+1} + \operatorname{arcsh} b_0\right) \tag{4.2}$$

— отношение квадратов скоростей на старте и в точке разворота, а

$$\beta_2 = \frac{\alpha V_0^2}{C_0} = \frac{V_a^2}{V_T^2} = \frac{\alpha V_0^2\cos^2(\theta_0)}{1 + \alpha V_0^2\left(\sin\theta_0 + \cos^2(\theta_0)\cdot\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\theta_0}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)} \tag{4.3}$$

— безразмерный квадрат *разворотной* скорости.

Знаменательно, что при квадратичном сопротивлении эта резольвента под интегралом в (3.11) сокращается, и линейная добавка выражается просто:

$$ca_{bb}^{(0)''}(b) = c\cdot\left(y_0(b)f_2(b) + f_2^2(b)\cdot\frac{b^2 - b_0^2}{2}\right). \tag{4.4}$$

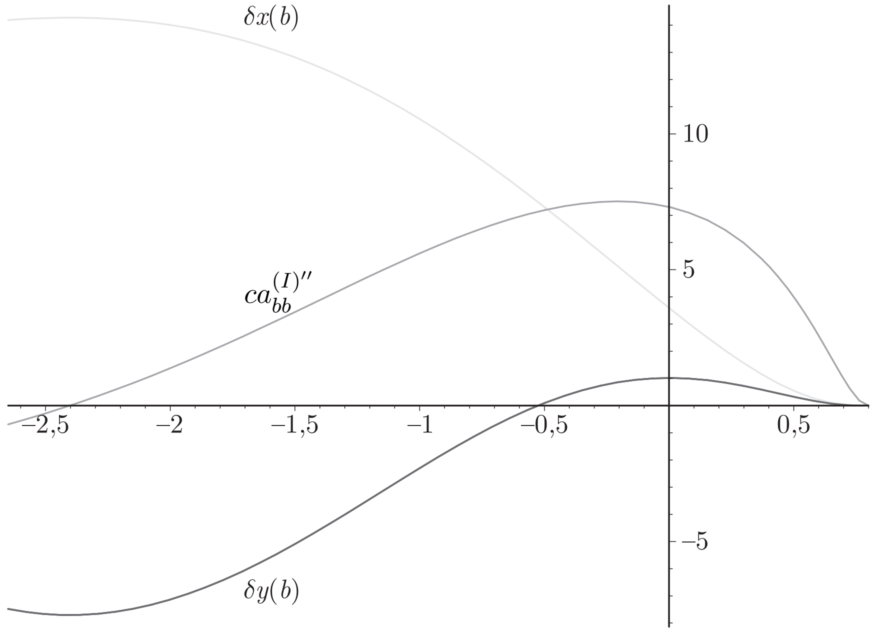


**Рис. 2.** Кривые $\delta y(b)$ (4.6), $\delta x(b)$ (4.5), $ca_{bb}^{(I)''}$ (4.4) и $\delta y(b)$ (4.6)

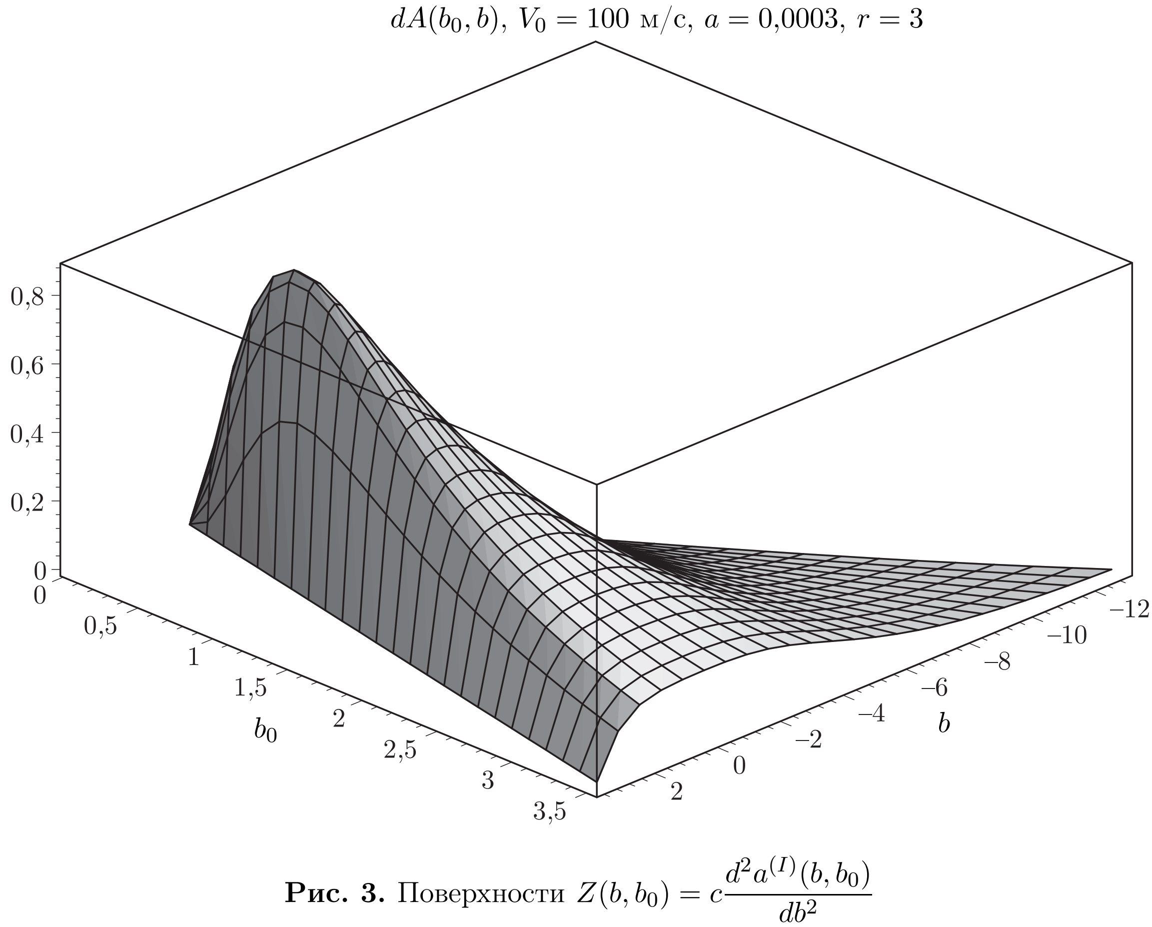


**Рис. 3.** Поверхности $Z(b, b_0) = c\dfrac{d^2 a^{(I)}(b, b_0)}{db^2}$

Квадратичная равна

$$c^2 a_{bb}^{(II)''} = c^2 \cdot \left\{ 2\alpha g f_2^2(b) \left( \int_{b_0}^{b} \left( -\frac{y_0^2(b')}{2} - \int_{b_0}^{b'} f_2(\widetilde{b}) \left( \frac{\widetilde{b}^2 - b_0^2}{2} \right) \left( -f_2(\widetilde{b})\widetilde{b} \right) d\widetilde{b} \right) \cdot \left(1 + b'^2\right)^{\frac{1}{2}} db' \right) + \right.$$
$$\left. +4 \left( f_2(b) \left( y_0(b) + f_2(b) \cdot \frac{\widetilde{b}^2 - b_0^2}{2} \right) \right)^2 \right\},$$

что дает после несложных преобразований

$$c^2 a_{bb}^{(II)''}(b) = c^2 \cdot 2\alpha g \left\{ f_2^2(b) \left( \int_{b_0}^{b} \left( -y_0^2(b') - y_0(b') f_2(b') \left( \frac{b'^2 - b_0^2}{2} \right) \right) \cdot \left(1 + b'^2\right)^{\frac{1}{2}} db' \right) + \right.$$
$$\left. + \int_{b_0}^{b} \left( \int_{b_0}^{b'} y_0(\widetilde{b}) f_2^2(\widetilde{b}) \left(1 + \widetilde{b}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\widetilde{b}^2 - b_0^2}{2} \right) d\widetilde{b} \right) db' + 4 \left( f_2(b) \left( y_0(b) + f_2(b) \cdot \frac{\widetilde{b}^2 - b_0^2}{2} \right) \right)^2 \right\}.$$

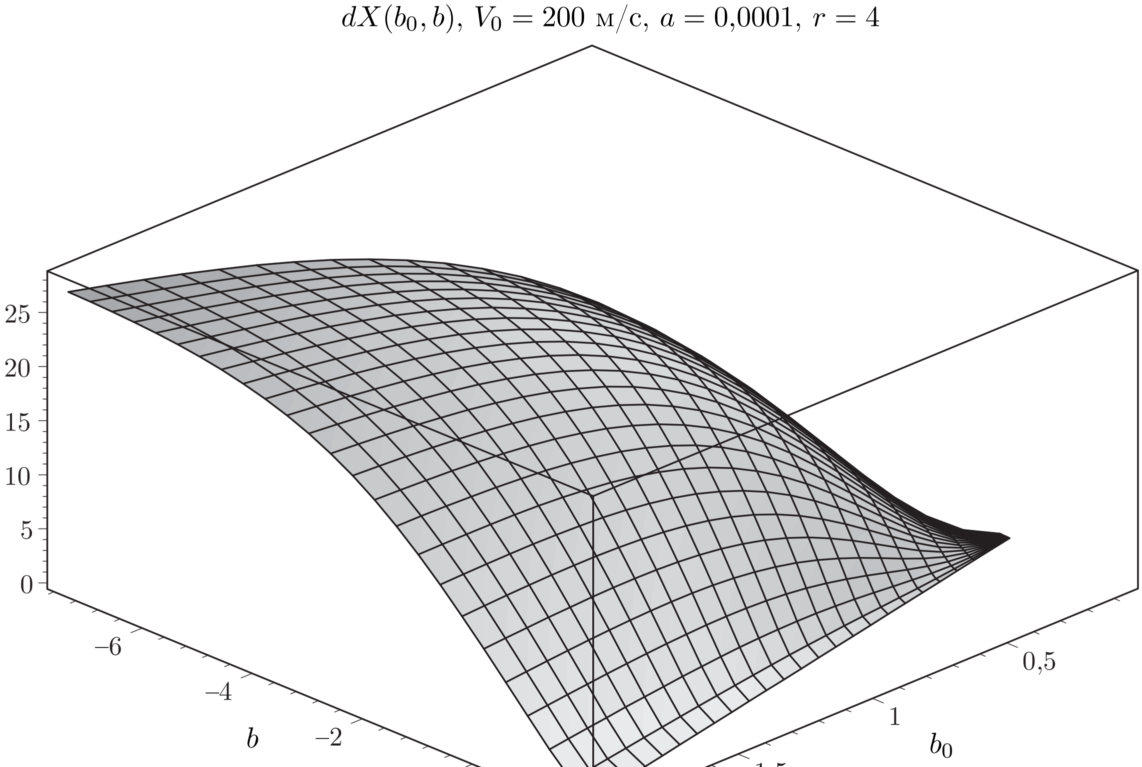


**Рис. 4.** Добавка $\delta x^{(I)}(b, b_0)$, $V_0 = 200$ м/с, $c = 0{,}0001$ м$^{-1}$, $\alpha = 0{,}00005$ с$^2$/м$^2$

Поправки первого порядка к характеристикам движения определятся как соответствующие интегралы от $ca_{bb}^{(0)''}(b)$. Для $x$-координаты это

$$\delta x^{(I)}(b) = c \cdot \int_{b_0}^{b} \left( f_2(b) y^{(0)}(b') + (f_2(b))^2 \cdot \frac{b'^2 - b_0^2}{2} \right) db' = -c \cdot \int_{b_0}^{b} y^{(0)}(b')\, dx^{(0)}(b') -$$
$$- \frac{c}{4\alpha g} \cdot \int_{b_0}^{b} \frac{f_2'(b) \left( b'^2 + 1 - \left(1 + b_0^2\right) \right)}{\sqrt{1 + b'^2}} db' = \tag{4.5}$$
$$= cS_{xy}^0(b) + \frac{c f_2(b)(b_0^2 - b^2)}{4\alpha g \left(1 + b^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{c y^{(0)}(b) \left(2 + b_0^2 + b^2\right)}{4\alpha g \left(1 + b^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{c}{4\alpha g} \int_{b_0}^{b} \frac{\left(4 + 3b_0^2 + b'^2\right) y^{(0)}(b') b'}{\left(1 + b'^2\right)^{\frac{5}{2}}} db'.$$

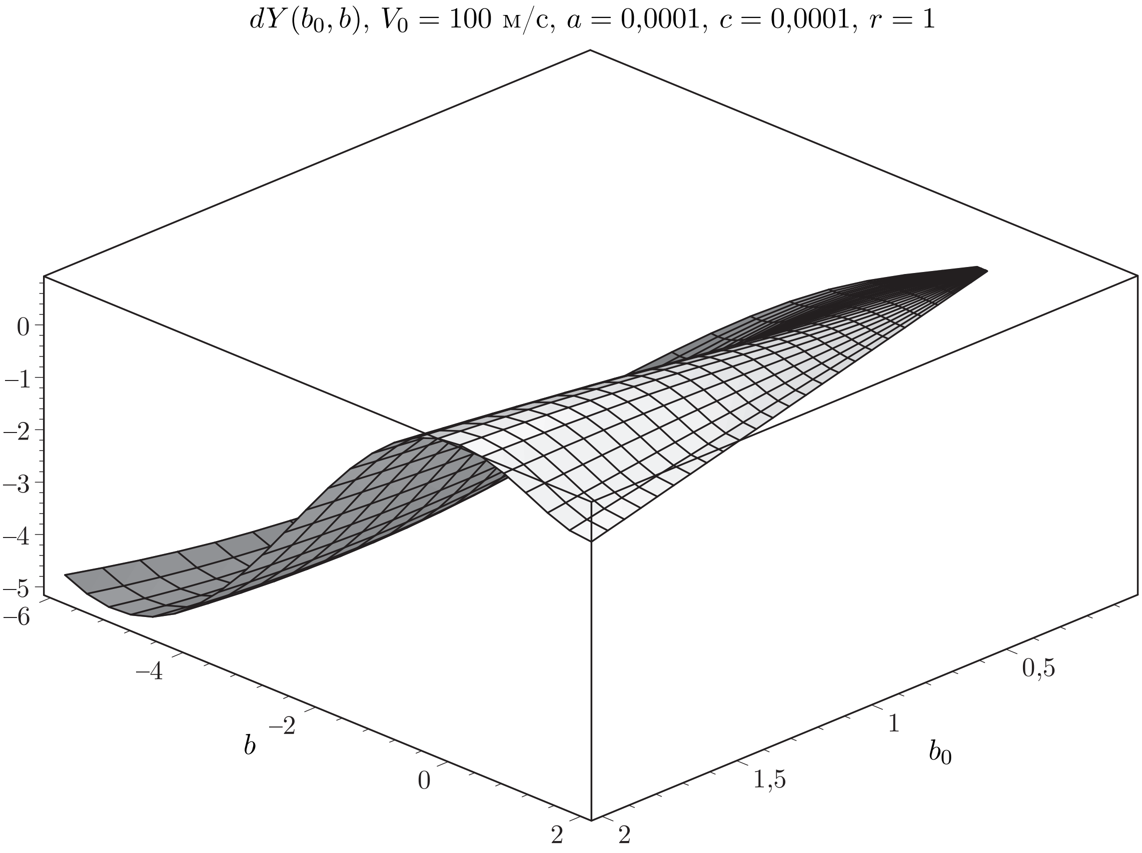


**Рис. 5.** Добавка $\delta y^{(I)}(b, b_0)$, $V_0 = 100$ м/с, $c = 0{,}0001$ м$^{-1}$, $\alpha = 0{,}0001$ с$^2$/м$^2$

При $b = b_1$ подынтегральная функция в последнем члене (4.5) обращается в нуль в трех точках, меняя при этом знак при переходе через вершину $b = 0$. Это дает основание ожидать, что в силу ее медленного изменения в области малых $b_0$ вклад последнего слагаемого мал по сравнению с главным первым членом, пропорциональным всей площади под траекторией. Тогда при оценке вклада в дальность им можно пренебречь.

Для вертикальной координаты линейная добавка определится как

$$\delta y^{(I)}(b) = -c \cdot \int_{b_0}^{b} \left( f_2(b')b'y^{(0)}(b') + \left(f_2(b')\right)^2 b' \cdot \frac{b'^2 - b_0^2}{2} \right) db', \tag{4.6}$$

что дает после интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \delta y^{(I)}(b) = \frac{c y_0^2(b)}{2} + \frac{c}{4\alpha g} \cdot \frac{f_2(b) b (b_0^2 - b^2)}{(1+b^2)^{\frac{1}{2}}} + \\ + \frac{c}{4\alpha g} \cdot \frac{x^{(0)}(b)\left(b_0^2 - 3b^2 - 2b^4\right)}{(1+b^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{c}{4\alpha g} \int_{b_0}^{b} \frac{\left(2b'^4 + 5b'^2 + 6 + 3b_0^2\right) x^{(0)}(b') b'}{(1+b'^2)^{\frac{5}{2}}}\, db'. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Такое же интегрирование во всех вышеприведенных формулах помимо придания некоторой наглядности выражениям преследовало также цель контроля точности, с которой в Maple вычисляются повторные интегралы. В идеале результаты, рассчитанные, например, по (4.6) и (4.7), должны совпадать. Именно это и наблюдалось: кривые, рассчитанные по исходной и преобразованной формулам сливались ($\delta y^{(I)}(b)$ — линии 1 (4.6) и 4 (4.7) рис. 2).

Характерный вид кривой ($V_0 = 150$ м/с, $\alpha = 0{,}0006$, $c = 0{,}0001$ м$^{-1}$, $b_0 = 0{,}8$) свидетельствует, что добавка положительна вплоть до значений $b_2 = k(b_0)b_1$, со слабо зависящим от начальных наклона и сопротивления коэффициентом $k(b_0) \approx 1{,}87 \ldots 2$.

Это можно сформулировать как своеобразный «закон удвоения наклона»: при запуске точечной массы (сферического тела) с достаточно большой высоты в среде с постоянным градиентом плотности и квадратичным по скорости законом сопротивления преимущество в горизонтальной координате за счет падения плотности достигает максимума ниже уровня запуска на примерно удвоенном наклоне его пересечения.

То же подтверждает вид зависимостей $Z(b, b_0) = c\dfrac{d^2 a^{(I)}(b, b_0)}{db^2}$ (рис. 3) для не слишком больших начальных сопротивлений $r = R(V_0)/mg < 2\ldots 3$, когда линия нулевого уровня в плоскости $(O, b, b_0)$ двумя фрагментами сливается с кривой $b = 2b_1^{(0)}(b_0)$.

Что касается самой резольвентной добавки, то ее поведение при изменении $b_0$ при $b = \mathrm{const}$ не является монотонно растущим, но имеет максимум. В том числе и для $b = 0$, что свидетельствует о немонотонности прироста разворотного радиуса $\delta R_{\mathrm{a}}(b_0)$. Однако относительное его увеличение монотонно растет с $b_0$, выходя на насыщение при больших углах вылета.

Соответствующие поверхности над плоскостью $(b, b_0)$ для координатных добавок $\delta x^{(I)}(b, b_0)$ и $\delta y^{(I)}(b, b_0)$ (рис. 4, 5) сохраняют свой вид в широкой области начальных скоростей и безразмерных коэффициентов сопротивления. При этом конечные величины поправок могут достигать десятков метров.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. URL: `http://www.snipercountry.com/ballistics/tables/`
2. Paul Weinacht, Gene R. Cooper, James F. Newill. Analytical Prediction of Trajectories for High-Velocity Direct-Fire Munitions // Army Research Laboratory Report. URL: `http://www.arl.army.mil/arlreports/2005/ARL-TR-3567.pdf`
3. Thomas R.N. Some Comments on the Form of Drag Coefficient at Supersonic Velocity: report no. 542 // U.S. Army Ballistic Research Laboratory: Aberdeen Proving Ground, MD, April, 1945.
4. Robert F. Lieske. Determination of aerodynamic drag and exterior ballistic trajectory simulation for the 155MM, DPICM, M864 base-burn projectile // Memorandum report BRL-MR-3768, Aberdeen, Maryland, June, 1989.
5. N. de Mestre. The Mathematics of Projectiles in Sport. New York: Cambridge University Press, 1990. 175 p.
6. Edward John Routh, A Treatise on Dynamics of a Particle with Numerous Examples. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1898. 418 p.
7. Чудинов П.С. Численно-аналитический алгоритм построения огибающей траекторий снарядов в воздухе // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. 2009. Вып. 7 (33). С. 90–94.
8. Чистяков В.В. Об одном резольвентном методе интегрирования уравнений свободного движения в среде с квадратичным сопротивлением // Компьютерные исследования и моделирование. 2011. Т. 3. № 3. С. 265–277.


Поступила в редакцию 12.12.2011

Чистяков Виктор Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра физики и электротехники, кафедра математики и ИКТ, Ярославская государственная сельхозакадемия, 150042, Россия, г. Ярославль, Тутаевское ш., 58.
E-mail: chistiakov_v_v@rambler.ru, v.chistyakov@yarcx.ru

***V. V. Chistyakov***

**On integrating the projectile motion equations of a heavy point in medium with height decreasing density**

*Keywords*: Legendre transformation, resolvent function, power law air drag, linear density inhomogenity.

Mathematical Subject Classifications: 70E15, 34A26, 34A34

The resolvent method based on Legendre transformation was applied to integrate ballistic equations of a heavy point mass in inhomogeneous medium with the drag force being power-law with respect to speed, at that the coefficient of the drag force decreases linearly with height $y$. General expressions were obtained for resolvent function $a''_{bb}(b)$ with $a(b)$ being an intercept and $b = \operatorname{tg}\theta$, where $\theta$ is inclination angle. In the second order by gradient $c/m^{-1}$ of perturbative approach, the universal formulas for $\delta a''_{bb}(b)$-, $\delta x(b)$-, $\delta y(b)$-additions were derived. The case of Releigh resistance was considered particularly in frames of the method above and inhomogeneity influence on the motion was investigated. The falling of gravity $g(y)$ is taken into consideration too.

## REFERENCES

1. http://www.snipercountry.com/ballistics/tables/

2. Paul Weinacht, Gene R. Cooper, James F. Newill. *Analytical Prediction of Trajectories for High-Velocity Direct-Fire Munitions*, Army Research Laboratory Report. http://www.arl.army.mil/arlreports/2005/ARL-TR-3567.pdf

3. Thomas R.N. *Some Comments on the Form of Drag Coefficient at Supersonic Velocity: report no. 542*, U.S. Army Ballistic Research Laboratory: Aberdeen Proving Ground, MD, April, 1945.

4. Robert F. Lieske. *Determination of aerodynamic drag and exterior ballistic trajectory simulation for the 155MM, DPICM, M864 base-burn projectile*, Memorandum report BRL-MR-3768, Aberdeen, Maryland, June, 1989.

5. N. de Mestre. *The Mathematics of Projectiles in Sport*, Cambridge University Press, New York, 1990, 175 p.

6. Edward J. R. *A Treatise on Dynamics of a Particle with Numerous Examples*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1898, 418 p.

7. Chudinov P.S. Numerical-analytical algorithm for constructing the envelope of the projectile trajectories in the air, *Vest. Perm. Univ. Mat. Mekh.*, 2009, no. 7 (33), pp. 90–94.

8. Chistyakov V.V. On one resolvent method for integrating the low angle trajectories of a heavy point projectile motion under quadratic air resistance, *Komp. Issled. Model.*, 2011, vol. 3, no. 3, pp. 265–277.

Received 12.12.2011

Chistyakov Viktor Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Yaroslavl State Academy of Agriculture, Tutaevskoe sh., 58, Yaroslavl, 150042, Russia.
E-mail: chistiakov_v_v@rambler.ru, v.chistyakov@yarcx.ru