УДК 517.977

© *И. Б. Чеблоков, А. Г. Ченцов*

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МАРШРУТИЗАЦИИ С ВНУТРЕННИМИ РАБОТАМИ[1]

Рассматривается маршрутная задача о посещении сечений мультифункций с ограничениями в виде условий предшествования. Кроме того, по постановке предусматривается выполнение некоторых «работ» на упомянутых сечениях. Каждое решение определяется в виде упорядоченной пары, компоненты которой имеют смысл маршрута (перестановки индексов) и трассы (траектории) перемещений по сечениям мультифункций. Согласование трассы и маршрута реализуется на основе процедур последовательного выбора упорядоченных пар (пунктов прибытия и отправления) из декартовых «квадратов» сечений мультифункций, занумерованных в соответствии с маршрутом. Агрегирование стоимостей предполагается аддитивным; совокупный критерий включает стоимости (внешних) перемещений между сечениями мультифункций, внутренних «работ» и финального состояния. При построении расширения основной задачи, порождающего используемую далее функцию Беллмана, применяется эквивалентное преобразование ограничений: допустимость маршрутов по предшествованию заменяется допустимостью по вычеркиванию (заданий из списка), что соответствует варианту ограничений на текущие перемещения с одного множества на другое. Получен аналог уравнения Беллмана в виде процедуры преобразования слоёв функции Беллмана. Операция, определяющая данное преобразование, используется далее для построения эвристических алгоритмов, реализованных на ПЭВМ.

Ключевые слова: маршрут, перестановка, трасса, функция Беллмана.

Введение

Задачи маршрутизации, возникающие в различных сферах человеческой деятельности, образуют важный класс задач дискретной оптимизации. В идейном отношении они восходят к известной задаче коммивояжера (ЗК); см. [1–3] в связи с точными и приближенными методами решения ЗК (см. также обширную библиографию [1–3]). Отметим, что ЗК является одной из классических NP-полных задач; см. [4]. Известная труднорешаемость ЗК и аналогов ЗК определила интерес к построению приближенных методов (см. [3]). В то же время ряд исследований был посвящен разработке метода динамического программирования (МДП); см. [5,6]. Широкое распространение получил метод ветвей и границ (см. в частности, [7]). Заметим, что в [1] рассмотрен целый ряд задач, в той или иной степени подобных ЗК, но включающих особенности, связанные с соображениями прикладного характера. Имея в виду последующие построения, отметим среди таких задач [1] ЗК с выбором и задачу курьера. В первом случае можно говорить о многозначной версии ЗК (см., в частности, [8–10]). Во втором случае возникают ограничения в виде условий предшествования (в связи с этим направлением см., в частности, [11, 12]). Отметим, что источником таких ограничений являются актуальные прикладные задачи (морские и авиационные перевозки, технологические процессы).

В настоящей статье развивается направление, последовательно исследуемое в большой серии журнальных статей (см., в частности, [13–19]) и в монографии [20]. Особо отметим два важных (для дальнейшего) момента, отмеченных в [20] и в ряде журнальных статей: 1) редукция ограничений в виде условий предшествования к более простому виду; 2) аналоги уравнения Беллмана, использующие упомянутую редукцию. Полезно учесть и то, что в [18, 20] и в ряде других работ упомянутые процедуры применялись для исследования и решения задач маршрутизации, обладающих своеобразной нестандартностью: имеются в виду задачи последовательного обхода сечений мультифункций. Эта особенность отражена и в задаче, исследуемой

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 09–01–00436, 10–01–96020, 10–08–00484) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математическая теория управления» (проект 09–П–1–1014).

в настоящей статье. В этой связи отметим серию работ [21–23], посвященную решению комплексной маршрутной задачи с ограничениями и «внутренними» работами, выполняемыми на фиксированных целевых множествах. В настоящей работе это направление развивается на случай, когда упомянутые целевые множества могут меняться в зависимости от состояния, из которого начинается перемещение на соответствующее множество. Итак, мы обращаемся здесь к нестационарной версии обобщенной задачи задачи курьера с внутренними работами. Для этой постановки в статье получен аналог уравнения Беллмана (имеется в виду случай нестационарной задачи с условиями предшествования и внутренними работами). В то же время распространение на данную постановку экономичной версии МДП из [21–23] представляется затруднительным; в этой связи построенный вариант МДП, реализующий алгоритм на функциональном уровне, приводит к серьезным осложнениям на уровне вычислительной реализации. В настоящей работе упомянутый аналог уравнения Беллмана используется для целей построения эвристических алгоритмов, подобных в некотором естественном смысле процедуре на основе МДП, но отличающихся от последнего применением тех или иных просто определяемых оценочных функций для целей характеризации перспективных затрат. Следует отметить, что решения, доставляемые этими алгоритмами, удовлетворяют ограничениям в виде условий предшествования.

§ 1. Основные обозначения и определения общего характера

В настоящем разделе приводится необходимая сводка обозначений и определений общематематического характера. Кванторы и пропозициональные связки используются в дальнейшем для сокращенной записи словесных высказываний; как обычно, $\varnothing$ обозначает пустое множество. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. В дальнейшем $\mathtt{def}$ заменяет фразу «по определению»; $\triangleq$ — равенство по определению.

Если x и y — объекты, то $\{x;y\}$ есть неупорядоченная пара (двоеточие) объектов x, y : $\{x;y\}$ — множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других объектов. Если z — объект, то $\{z\} = \{z;z\}$ — одноэлементное множество, содержащее z.

Множества являются объектами. Полагаем для произвольных объектов u и v, что $(u,v) \triangleq \{\{u\};\{u;v\}\}$. Если z — упорядоченная пара (каких-либо объектов), то через $\mathtt{pr}_1(z)$ и $\mathtt{pr}_2(z)$ условимся обозначать соответственно ее первую и вторую компоненты; эти компоненты определяются единственным образом и реализуют представление $z = (\mathtt{pr}_1(z), \mathtt{pr}_2(z))$. Элементы z декартова произведения $A \times B$ любых двух множеств A и B — суть упорядоченные пары со свойствами $\mathtt{pr}_1(z) \in A$ и $\mathtt{pr}_2(z) \in B$. Если H — множество, то через $Fin(H)$ обозначаем семейство всех непустых конечных подмножеств (п/м) H; $(\mathrm{FIN})[H] \triangleq Fin(H) \cup \{\varnothing\}$.

Далее мы используем традиционное правило экономии скобок при обозначении функций двух переменных: если A, B и C — непустые множества, D — есть п/м $A \times B$, $f : D \to C$, $a \in A$, $b \in B$ и при этом $z \triangleq (a,b) \in D$, то как обычно, полагаем $f(a,b) \triangleq f(z)$, получая элемент $C : f(a,b) \in C$.

Через $\mathbb{R}$ обозначим вещественную прямую; $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\}$ (натуральный ряд), $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $[0,\infty[\triangleq \{\xi \in \mathbb{R} | 0 \leqslant \xi\}$, $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0;1;2;\ldots\}$ (множество всех неотрицательных целых чисел); если $k \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}_0$, то $\overline{k,l} \triangleq \{i \in \mathbb{N}_0 | (k \leqslant i) \& (i \leqslant l)\}$; если $k \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{N}$, то $\overline{k,l} \subset \mathbb{N}$. В частности, при $m \in \mathbb{N}$ имеем $\overline{1,m} = \{i \in \mathbb{N} | i \leqslant m\}$.

§ 2. Специальные обозначения и определения

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество $\mathbf{X}$ и натуральное число $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$. Полагаем также заданным кортеж $(A_i)_{i \in \overline{1,N}}$ операторов

$$A_1 : \mathbf{X} \to Fin(\mathbf{X}), \ldots, A_N : \mathbf{X} \to Fin(\mathbf{X}) \tag{2.1}$$

($A_1, \ldots, A_N$ — суть конечнозначные мультифункции, действующие в $\mathbf{X}$). Будем также фиксировать точку $x^0 \in \mathbf{X}$ в качестве начального пункта (базы).

Мы рассматриваем задачу организации системы перемещений вида

$$x^0 \to (z_1 \in A_{\beta(1)}(x^0) \times A_{\beta(1)}(x^0)) \to (z_2 \in A_{\beta(2)}(\mathtt{pr}_2(z_1)) \times A_{\beta(2)}(\mathtt{pr}_2(z_1))) \to \\ \ldots \to (z_N \in A_{\beta(N)}(\mathtt{pr}_2(z_{N-1})) \times A_{\beta(N)}(\mathtt{pr}_2(z_{N-1}))). \qquad (2.2)$$

Здесь (то есть в (2.2)) β есть перестановка в $\overline{1,N}$ (биекция $\overline{1,N}$ на себя), $z_1,\ldots,z_N$ — упорядоченные пары. Каждая из этих пар z_j отвечает прибытию, выполнению каких-то внутренних работ и отправлению с множества $A_{\beta(j)}(\mathtt{pr}_2(z_{j-1}))$, если $j \geqslant 2$, и с множества $A_{\beta(j)}(x^0)$, если $j=1$. Для единой записи двух этих возможностей удобно дополнить кортеж

$$(z_i)_{i\in\overline{1,N}} : \overline{1,N} \to \mathbf{X}\times\mathbf{X}$$

«нулевой» упорядоченной парой $z_0 = (x^0, x^0)$.

В дальнейшем полагаем, что выбор перестановки β, именуемой ниже (полным) маршрутом, стеснен ограничениями в виде т.н. условий предшествования [20, ч. 2]. В этой связи фиксируем множество $\mathbf{K} \in (\mathrm{FIN})[\overline{1,N}\times\overline{1,N}]$ (случай $\mathbf{K}=\varnothing$ не исключается). Итак, $\mathbf{K}$ — множество, элементами которого являются некоторые пары индексов (i,j), где $i\in\overline{1,N}$ и $j\in\overline{1,N}$. Такие пары условимся называть адресными; первая компонента каждой адресной пары является по смыслу «отправителем» (сообщения, груза и т.д.), а вторая – «получателем». В терминах адресных пар будут определяться условия предшествования, которые, в свою очередь, формируют ограничения на выбор перестановки в $\overline{1,N}$, используемой в процедуре, подобной (2.2), то есть ограничения на выбор β.

Множество всех перестановок в $\overline{1,N}$ (то есть множество всех маршрутов) будем обозначать через $\mathbb{P}$. Разумеется, $\mathbb{P}$ — непустое конечное множество. Если $\alpha\in\mathbb{P}$, то через α^{-1} условимся обозначать перестановку, обратную по отношению к α; $\alpha^{-1}\in\mathbb{P}$ и при этом

$$\alpha(\alpha^{-1}(k)) = \alpha^{-1}(\alpha(k)) = k \quad \forall k\in\overline{1,N}. \qquad (2.3)$$

С учетом (2.3) ограничение в виде условий предшествования формируется следующим образом: маршрут α допустим, если $\alpha^{-1}(\mathtt{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathtt{pr}_2(z)) \quad \forall z\in\mathbf{K}$. Тогда [20, ч. 2] $\mathbb{A} \triangleq \{\alpha\in\mathbb{P} | \alpha^{-1}(\mathtt{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathtt{pr}_2(z)) \quad \forall z\in\mathbf{K}\}$ есть множество всех допустимых (в смысле условий предшествования) полных маршрутов. Всюду в дальнейшем полагаем выполненным следующее

Условие 1. $\forall K\in Fin(\mathbf{K}) \quad \exists h\in K : \mathtt{pr}_1(h) \neq \mathtt{pr}_2(z) \quad \forall z\in K.$

В связи с обсуждением этого условия см. [20, § 2.2]. Из условия 1 вытекает, что $\mathtt{pr}_1(h) \neq \mathtt{pr}_2(h) \quad \forall h\in\mathbf{K}$. Кроме того, в [20, ч. 2] установлено, что (при условии 1) $\mathbb{A}\neq\varnothing$, см. [20, (2.2.53)].

Как видно из (2.2), выбор маршрута $\beta\in\mathbb{P}$ еще не определяет, вообще говоря, конкретную реализацию рассматриваемой процедуры, хотя и задает множество возможных (и согласующихся с β) перемещений. В этой связи введем в рассмотрение (при всяком выборе маршрута) множество потенциально возможных трасс, имея в виду согласование в духе (2.2).

Если $k\in\overline{1,N}$, то через $\mathbb{X}_k$ будем обозначать множество всех кортежей

$$(z_i)_{i\in\overline{0,k}} : \overline{0,k} \to \mathbf{X}\times\mathbf{X}.$$

Если же $\alpha\in\mathbb{P}$, то через $\mathcal{X}[\alpha]$ будем обозначать множество всех кортежей $(z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathbb{X}_N$, для каждого из которых

$$\big(z_0 = (x^0,x^0)\big)\,\&\big(z_j\in A_{\alpha(j)}(\mathtt{pr}_2(z_{j-1}))\times A_{\alpha(j)}(\mathtt{pr}_2(z_{j-1})) \quad \forall j\in\overline{1,N}\big). \qquad (2.4)$$

Элементы множества (2.4) условимся называть трассами, согласованными с маршрутом α. Через $\mathbf{S}$ будем в дальнейшем обозначать множество всех упорядоченных пар

$$(\alpha,(z_i)_{i\in\overline{0,N}}) \in \mathbb{A}\times\mathbb{X}_N,$$

для каждой из которых $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{X}[\alpha]$. Тогда, как видно из (2.2) с учетом замечаний относительно условий предшествования, $\mathbf{S}$ определяет множество всех допустимых пар маршрут-трасса. Иными словами, $\mathbf{S}$ есть множество всех возможных реализаций нашей процедуры (2.2). Каждая такая реализация будет оцениваться некоторым значением критерия качества. В этой связи полагаем заданными функции

$$\mathbf{c} : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to [0, \infty[, \quad \mathbf{f} : \mathbf{X} \to [0, \infty[, \tag{2.5}$$

$$c_1 : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to [0, \infty[, \ldots, c_N : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to [0, \infty[. \tag{2.6}$$

В терминах (2.5), (2.6) систему перемещений в (2.2) будем оценивать суммой

$$\mathbf{c}(x^0, \mathtt{pr}_1(z_1)) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(z_i), \mathtt{pr}_1(z_{i+1})) + \sum_{i=1}^{N} c_{\alpha(i)}(z_i) + \mathbf{f}(\mathtt{pr}_2(z_N)) \in [0, \infty[. \tag{2.7}$$

Значение этой суммы мы будем минимизировать выбором упорядоченной пары

$$(\alpha, (z_i)_{i\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{S}. \tag{2.8}$$

Для более корректной постановки введем некоторые новые обозначения.

Если $\alpha \in \mathbb{P}$, то определяем отображение

$$\mathfrak{C}_\alpha : \mathbb{X}_N \to [0, \infty[\tag{2.9}$$

посредством следующего «расширенного» (в сравнении с (2.7)) условия

$$\mathfrak{C}_\alpha\left((z_i)_{i\in\overline{0,N}}\right) \triangleq \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(z_i), \mathtt{pr}_1(z_{i+1})) + \sum_{i=1}^{N} c_{\alpha(i)}(z_i) + \mathbf{f}(\mathtt{pr}_2(z_N)) \quad \forall (z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathbb{X}_N. \tag{2.10}$$

В (2.9), (2.10) определено очень общее правило оценки, которое, однако, применимо в случае, соответствующем (2.2), что отвечает ситуации (2.8).

В качестве основной рассматриваем следующую задачу:

$$\mathfrak{C}_\alpha((z_i)_{i\in\overline{0,N}}) \to \min, (\alpha, (z_i)_{i\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{S}. \tag{2.11}$$

Для ее решения будет привлекаться МДП, что связано с построением естественного расширения задачи (2.10): будет построена система подобных задач, именуемых далее укороченными и доставляющих в виде системы экстремумов соответствующую функцию Беллмана.

§ 3. Расширение основной задачи

Для целей построения укороченных задач маршрутизации мы подобно [19–21] будем использовать эквивалентные преобразования самой основной задачи (2.11). Для этой цели используем оператор $\mathbf{I}$ [20, (2.2.27), (2.2.28)]. Предварительно введем семейство $\mathfrak{N}$ всех непустых п/м $\overline{1, N}$; полагаем, что (см. [20, (2.2.26)])

$$\Sigma[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K} | (\mathtt{pr}_1(z) \in K) \& (\mathtt{pr}_2(z) \in K)\} \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{3.1}$$

Элементы $\mathfrak{N}$ играют роль списков заданий, правило (3.1) сопоставляет каждому списку множество всех адресных пар, полностью (по первой и по второй компонентам) укладывающихся в список. На основе (3.1) определяется [20, (2.2.28)] правило вычеркивания заданий из списка; это правило формализуется оператором $\mathbf{I} : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$. Именно, $\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{\mathtt{pr}_2(z) : z \in \Sigma[K]\} \quad \forall K \in \mathfrak{N}$; в данном определении учитывается условие 1 и предложение 2.2.3 монографии [20]. Полагаем, что

$$\mathbf{N} \triangleq \mathfrak{N} \cup \{\varnothing\}$$

(семейство всех п/м $\overline{1,N}$). Если $K \in \mathfrak{N}$, то через $|K|$ обозначаем мощность $K, |K| \in \overline{1,N}$. Полагаем также $|\varnothing| \triangleq 0$. Тогда $|K| \in \overline{0,N} \quad \forall K \in \mathbf{N}$.

Если $K \in \mathfrak{N}$, то через $(bi)[K]$ условимся обозначать множество всех биекций [24, с. 86] «отрезка» $\overline{1,|K|}$ на K. Тогда $\mathbb{P} = (bi)[\overline{1,N}]$. Если $K \in \mathfrak{N}$, то [20, с. 28] полагаем, что

$$(\mathbf{I} - bi)[K] \triangleq \left\{\alpha \in (bi)[K] | \alpha(k) \in \mathbf{I}\left(\left\{\alpha(l) : l \in \overline{k,|K|}\right\}\right) \quad \forall k \in \overline{1,|K|}\right\}. \tag{3.2}$$

Кроме того, в целях согласования с [20, ч. 1] введем

$$\mathbb{P}_0(\mathbf{I}) \triangleq (\mathbf{I} - bi)\left[\overline{1,N}\right] = \left\{\alpha \in \mathbb{P} | \alpha(k) \in \mathbf{I}\left(\left\{\alpha(l) : l \in \overline{k,N}\right\}\right) \quad \forall k \in \overline{1,N}\right\}. \tag{3.3}$$

Если $x \in \mathbf{X}$, $K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (bi)[K]$, то через $\mathcal{X}(x; K; \alpha)$ обозначаем множество всех кортежей

$$(z_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \mathbb{X}_{|K|}, \tag{3.4}$$

для каждого из которых

$$(z_0 = (x,x)) \& (z_j \in A_{\alpha(j)}(\mathtt{pr}_2(z_{j-1})) \times A_{\alpha(j)}(\mathtt{pr}_2(z_{j-1})) \quad \forall j \in \overline{1,|K|}). \tag{3.5}$$

Если $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$, то каждую пару $(\alpha, z_i)_{i \in \overline{0,|K|}})$, где $\alpha \in (\mathbf{I} - bi)[K]$ (см.(3.2)) и $(z_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \mathcal{X}(x, K, \alpha)$, рассматриваем в качестве решения укороченной (вообще говоря) задачи, соответствующей паре (x, K). Итак, при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}, |K| \geqslant 2$, мы рассматриваем задачу

$$\mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(z_1)) + \sum_{i=1}^{|K|-1} \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(z_i), \mathtt{pr}_1(z_{i+1})) + \sum_{i=1}^{|K|} c_{\alpha(i)}(z_i) + \mathbf{f}(\mathtt{pr}_2(z_{|K|})) \to \min,$$
$$\alpha \in (\mathbf{I} - bi)[K], (z_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \mathcal{X}[x; K; \alpha]. \tag{3.6}$$

Для большего удобства введем некоторые новые обозначения, которые позволят переформулировать задачу (3.6).

Прежде всего при $K \in \mathfrak{N}$ будем полагать, что

$$\mathfrak{X}_K \triangleq \mathbb{X}_{|K|}. \tag{3.7}$$

Далее, при $K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (bi)[K]$ введем функцию

$$\mathfrak{C}_K^{(\alpha)} : \mathfrak{X}_K \to [0, \infty[\tag{3.8}$$

по следующему правилу (использующему (3.7)): если $(z_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \mathfrak{X}_K$, то

$$\mathfrak{C}_K^{(\alpha)}\left((z_i)_{i \in \overline{0,|K|}}\right) \triangleq \sum_{i=0}^{|K|-1} \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(z_i), \mathtt{pr}_1(z_{i+1})) + \sum_{i=1}^{|K|} c_{\alpha(i)}(z_i) + \mathbf{f}(\mathtt{pr}_2(z_{|K|})). \tag{3.9}$$

Теперь при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ в качестве укороченной (при $K \neq \overline{1,N}$) рассматриваем задачу

$$\mathfrak{C}_K^{(\alpha)}\left((z_i)_{i \in \overline{0,|K|}}\right) \to \min, \quad \alpha \in (\mathbf{I} - bi)[K], \quad (z_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \mathcal{X}(x, K, \alpha). \tag{3.10}$$

Задача (3.6) является (см.(3.4),(3.5)) экземпляром (3.10) при $|K| \geqslant 2$. Совокупность всех задач (3.10) при переборе $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ называем расширением задачи (2.11).

Заметим, что, поскольку $\mathbb{P} = (bi)\left[\overline{1,N}\right]$, $\left|\overline{1,N}\right| = N$, имеем согласно (3.4), (3.5)

$$\mathcal{X}[\alpha] = \mathcal{X}\left(x^0, \overline{1,N}, \alpha\right) \quad \forall \alpha \in \mathbb{P}. \tag{3.11}$$

С учетом (3.11) получаем, что задача (2.11) есть вариант задачи (3.10) при $x = x^0$ и $K = \overline{1,N}$; следует учитывать, что [20, ч. 2]

$$\mathbb{A} = \mathbb{P}_0(\mathbf{I}) = (\mathbf{I} - bi)\left[\,\overline{1,N}\,\right]. \tag{3.12}$$

Итак, основная задача (2.11) есть вариант укороченной. Для проверки совместности ограничений задач (3.10) будем использовать положения [20, ч. 2]. Прежде всего напомним, что (с учетом условия 1) из [20, (2.2.54)] вытекает свойство:

$$(\mathbf{I} - bi)[K] \neq \varnothing \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{3.13}$$

Кроме того, будем использовать предложение 2.3.1 монографии [20]. Пусть

$$X \triangleq \mathbf{X} \times \mathbf{X}, \tag{3.14}$$

тогда $X \neq \varnothing$ (см. § 2). С учетом (2.1) получаем, что при всяких $j \in \overline{1,N}$ и $x \in X$

$$A_j(\mathtt{pr}_2(x)) \times A_j(\mathtt{pr}_2(x)) \in Fin(X). \tag{3.15}$$

С учетом (3.15) введем в рассмотрение при каждом $j \in \overline{1,N}$ оператор

$$\mathcal{A}_j : X \to Fin(X), \tag{3.16}$$

определенный по следующему правилу:

$$\mathcal{A}_j(\mathbf{x}) \triangleq A_j(\mathtt{pr}_2(\mathbf{x})) \times A_j(\mathtt{pr}_2(\mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in X. \tag{3.17}$$

Тогда, в частности, имеем, что каждый из операторов $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_N$ удовлетворяет условию, подобному [20, (2.1.1)]. Если $j \in \overline{1,N}$, то $\mathcal{A}_j$ переводит X в семейство всех непустых п/м X. Тогда в соответствии с [20, с. 37] можно ввести при $\mathbf{x} \in X, K \in \mathfrak{N}$ и $\beta \in (bi)[K]$ множество $\mathfrak{X}[\mathbf{x}; K; \beta]$ всех кортежей $(\mathbf{x}_i)_{i \in \overline{1,|K|}} : \overline{1,|K|} \to X$ таких, что $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}_{\beta(1)}(\mathbf{x})$ и, кроме того, $\mathbf{x}_{i+1} \in \mathcal{A}_{\beta(i+1)}(\mathbf{x}_i) \quad \forall i \in \overline{1,|K|-1}$.

Тогда согласно предложению 2.3.1 монографии [20]

$$\mathfrak{X}[\mathbf{x}; K; \beta] \neq \varnothing \quad \forall \mathbf{x} \in X \quad \forall K \in \mathfrak{N} \quad \forall \beta \in (bi)[K]. \tag{3.18}$$

Предложение 1. *Если* $x \in \mathbf{X}$, $K \in \mathfrak{N}$, $\alpha \in (bi)[K]$, $\mathbf{x} \triangleq (x,x)$, $(\mathbf{x}_i)_{i \in \overline{1,|K|}} \in \mathfrak{X}[\mathbf{x}; K; \alpha]$, *а кортеж* $(y_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \mathfrak{X}_K$ *определяется условиями* $y_0 \triangleq (x,x)$ *и* $y_j \triangleq \mathbf{x}_j \quad \forall j \in \overline{1,|K|}$, *то*

$$(y_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \mathcal{X}(x, K, \alpha).$$

Доказательство легко следует из определений; см., в частности, (3.17).

Из (3.18) и предложения 1 вытекает, что

$$\mathcal{X}(x, K, \alpha) \neq \varnothing \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N} \quad \forall \alpha \in (bi)[K]. \tag{3.19}$$

В частности, из (3.11) и (3.19) вытекает, что $\mathcal{X}[\alpha] \neq \varnothing \quad \forall \alpha \in \mathbb{P}$. Поскольку $\mathbb{A} = (\mathbf{I} - bi)\left[\,\overline{1,N}\,\right]$, имеем из (3.13) важное свойство

$$\mathbb{A} \neq \varnothing. \tag{3.20}$$

Следовательно, из (3.20) вытекает, в частности, что

$$\mathbf{S} \neq \varnothing. \tag{3.21}$$

Из (3.21) следует, что ограничения задачи (2.11) совместны (то есть сама задача (2.11) имеет смысл). Из (3.13) и (3.19) следует также, что при всяком выборе $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$

ограничения (укороченной) задачи (3.10) совместны, то есть она также имеет смысл. С учетом вышеупомянутых положений корректно определяются экстремумы основной и укороченных задач. Именно (см.(2.11))

$$V \triangleq \inf_{\left(\alpha,(z_i)_{i\in\overline{0,N}}\right)\in\mathbf{S}} \mathcal{C}_\alpha\left((z_i)_{i\in\overline{0,N}}\right)\in[0,\infty[. \tag{3.22}$$

С учетом совместности задач (3.10) корректно определяются значения: $\forall x\in\mathbf{X}\quad\forall K\in\mathfrak{N}$

$$v(x,K)\triangleq\min_{\alpha\in(\mathbf{I}-bi)[K]}\ \inf_{(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}\in\mathcal{X}(x,K,\alpha)}\mathfrak{C}_K^{(\alpha)}\left((z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}\right)\in[0,\infty[. \tag{3.23}$$

Предложение 2. *Справедливо равенство* $V=v\left(x^0,\overline{1,N}\right)$.

Доказательство очевидно.

Тем самым основная задача (2.10) погружается в семейство укороченных. Последнее может рассматриваться как расширение основной задачи.

Заметим, что при $K\in\mathfrak{N}$, $|K|\geqslant 2$, и $j\in\mathbf{I}(K)$ непременно $K\backslash\{j\}\in\mathfrak{N}$, $|K\backslash\{j\}|=|K|-1$; определены множества $(\mathbf{I}-bi)[K]$ и $(\mathbf{I}-bi)[K\backslash\{j\}]$. Согласно (3.2) при $K\in\mathfrak{N}$ и $\alpha\in(\mathbf{I}-bi)[K]$ имеем, в силу биективности α, равенство $K=\left\{\alpha(i):i\in\overline{1,|K|}\right\}$ и поскольку $\alpha(1)\in\mathbf{I}\left(\left\{\alpha(l):l\in\overline{1,|K|}\right\}\right)$, то $\alpha(1)\in\mathbf{I}(K)$.

Предложение 3. *Если* $K\in\mathfrak{N}$, $|K|\geqslant 2$ *и* $\alpha\in(\mathbf{I}-bi)[K]$, *то*

$$(\alpha(i+1))_{i\in\overline{1,|K|-1}}\in(\mathbf{I}-bi)[K\backslash\{\alpha(1)\}].$$

Доказательство легко следует из определений.

Отметим, что при $K\in\mathfrak{N}$, $|K|\geqslant 2$ и $\alpha\in(\mathbf{I}-bi)[K]$ определены множества

$$\mathcal{X}(y,K\backslash\{\alpha(1)\},\beta),y\in\mathbf{X},\beta\in(\mathbf{I}-bi)[K\backslash\{\alpha(1)\}].$$

В частности, при $x\in\mathbf{X}$, $K\in\mathfrak{N}$, $|K|\geqslant 2,\alpha\in(\mathbf{I}-bi)[K]$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}\in\mathcal{X}(x,K,\alpha)$ имеем множество $\mathcal{X}\left(\mathtt{pr}_2(z_1),K\backslash\{\alpha(1)\},(\alpha(i+1))_{i\in\overline{1,|K|-1}}\right)$, элементами которого являются кортежи

$$(\widetilde{z}_i)_{i\in\overline{0,|K|-1}}\in\mathbb{X}_{|K|-1}.$$

Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$\mathfrak{N}_s\triangleq\{K\in\mathfrak{N}|s=|K|\}\quad\forall s\in\overline{1,N}. \tag{3.24}$$

Тогда, как легко видеть,

$$\mathfrak{N}=\bigcup_{s=1}^{N}\mathfrak{N}_s, \tag{3.25}$$

причем $\mathfrak{N}_{s_1}\cap\mathfrak{N}_{s_2}=\varnothing\quad\forall s_1\in\overline{1,N}\quad\forall s_2\in\overline{1,N}\backslash\{s_1\}$.

Предложение 4. *Если* $x\in\mathbf{X}$, $K\in\mathfrak{N}$, $|K|\geqslant 2,\alpha\in(\mathbf{I}-bi)[K]$ *и* $(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}\in\mathcal{X}(x,K,\alpha)$, *то кортеж* $(\widetilde{z}_i)_{i\in\overline{0,|K|-1}}:\overline{0,|K|-1}\to\mathbf{X}\times\mathbf{X}$, *определяемый условиями*

$$\left(\widetilde{z}_0\triangleq(\mathtt{pr}_2(z_1),\mathtt{pr}_2(z_1))\right)\&\left(\widetilde{z}_j\triangleq z_{j+1}\quad\forall j\in\overline{1,|K|-1}\right),$$

обладает свойством $(\widetilde{z}_i)_{i\in\overline{0,|K|-1}}\in\mathcal{X}\left(\mathtt{pr}_2(z_1),K\backslash\{\alpha(1)\},(\alpha(i+1))_{i\in\overline{1,|K|-1}}\right)$.

Доказательство является очевидным следствием определений и в данном изложении опущено.

Предложение 5. $\mathcal{X}(x,K,\alpha)\in Fin(\mathbb{X}_{|K|})\quad\forall x\in\mathbf{X}\quad\forall K\in\mathfrak{N}\quad\forall\alpha\in(\mathbf{I}-bi)[K]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае одноэлементного списка заданий (случай $K\in\mathfrak{N}_1$) доказательство очевидно. Имеем следующее свойство:

$$\mathcal{X}(x,K,\alpha)\in Fin(\mathbb{X}_1)\quad\forall x\in\mathbf{X}\quad\forall K\in\mathfrak{N}_1\quad\forall\alpha\in(\mathbf{I}-bi)[K].\tag{3.26}$$

Далее рассуждаем по индукции, полагая, что $n\in\overline{1,N-1}$ таково, что

$$\mathcal{X}(x,K,\alpha)\in Fin(\mathbb{X}_n)\quad\forall x\in\mathbf{X}\quad\forall K\in\mathfrak{N}_n\quad\forall\alpha\in(\mathbf{I}-bi)[K].\tag{3.27}$$

Тогда $n+1\in\overline{2,N}$. Пусть $x^*\in\mathbf{X}$, $K^*\in\mathfrak{N}_{n+1}$ и $\beta\in(\mathbf{I}-bi)[K^*]$. Ясно, что $|K^*|=n+1$ и $\beta(i+1)\in K^*\quad\forall i\in\overline{1,n}$. Для множества $K_*\triangleq K^*\backslash\{\beta(1)\}\in\mathfrak{N}_n$ имеем (см. предложение 3)

$$\widetilde{\beta}\triangleq(\beta(i+1))_{i\in\overline{1,n}}\in(\mathbf{I}-bi)[K_*].$$

По предположению (см. (3.27)) имеем, в частности, что

$$\mathcal{X}\left(\mathtt{pr}_2(z),K_*,\widetilde{\beta}\right)\in Fin(\mathbb{X}_n)\quad\forall z\in A_{\beta(1)}(x^*)\times A_{\beta(1)}(x^*).\tag{3.28}$$

Кроме того, имеем следующее свойство:

$$A_{\beta(1)}(x^*)\times A_{\beta(1)}(x^*)\in Fin(\mathbf{X}\times\mathbf{X}.)\tag{3.29}$$

В этой связи введем следующие вспомогательные множества:

$$\mathcal{X}(x^*,K^*,\beta\mid z)\triangleq\left\{(z_i)_{i\in\overline{0,n+1}}\in\mathcal{X}(x^*,K^*,\beta)\mid z_1=z\right\}\quad\forall z\in A_{\beta(1)}(x^*)\times A_{\beta(1)}(x^*).\tag{3.30}$$

Тогда с очевидностью получаем равенство

$$\mathcal{X}\left(x^*,K^*,\beta\right)=\bigcup_{z\in A_{\beta(1)}(x^*)\times A_{\beta(1)}(x^*)}\mathcal{X}\left(x^*,K^*,\beta|z\right).\tag{3.31}$$

Пусть $z^*\in A_{\beta(1)}(x^*)\times A_{\beta(1)}(x^*)$. Тогда согласно (3.28) $\mathcal{X}\left(\mathtt{pr}_2(z^*),K_*,\widetilde{\beta}\right)\in Fin(\mathbb{X}_n)$ и, кроме того (см. (3.30)),

$$\mathcal{X}\left(x^*,K^*,\beta|z^*\right)=\left\{(z_i)_{i\in\overline{0,n+1}}\in\mathcal{X}(x^*,K^*,\beta)|z_1=z^*\right\}.\tag{3.32}$$

Пусть отображение $T:\mathcal{X}\left(\mathtt{pr}_2(z^*),K_*,\widetilde{\beta}\right)\to\mathbb{X}_{n+1}$ определяется правилом: если $(h_i)_{i\in\overline{0,n}}\in\mathcal{X}\left(\mathtt{pr}_2(z^*),K_*,\widetilde{\beta}\right)$, то $\left(\widetilde{h}_i\right)_{i\in\overline{0,n+1}}\triangleq T\left((h_i)_{i\in\overline{0,n}}\right)$ есть `def` кортеж, для которого

$$\left(\widetilde{h}_0\triangleq(x^*,x^*)\right)\&\left(\widetilde{h}_1\triangleq z^*\right)\&\left(\widetilde{h}_j\triangleq h_{j-1}\quad\forall j\in\overline{2,n+1}\right).\tag{3.33}$$

Можно проверить, что $T((h_i)_{i\in\overline{0,n}})\in\mathcal{X}\left(x^*,K^*,\beta|z^*\right)\quad\forall(h_i)_{i\in\overline{0,n}}\in\mathcal{X}\left(\mathtt{pr}_2(z^*),K_*,\widetilde{\beta}\right)$. Это означает, что на самом деле

$$T:\mathcal{X}\left(\mathtt{pr}_2(z^*),K_*,\widetilde{\beta}\right)\to\mathcal{X}\left(x^*,K^*,\beta|z^*\right).$$

Через Ω обозначаем образ множества $\mathcal{X}\left(\mathtt{pr}_2(z^*),K_*,\widetilde{\beta}\right)$, то есть

$$\Omega\triangleq\left\{T\left((h_i)_{i\in\overline{0,n}}\right):(h_i)_{i\in\overline{0,n}}\in\mathcal{X}\left(\mathtt{pr}_2(z^*),K_*,\widetilde{\beta}\right)\right\};$$

$\Omega \subset \mathcal{X}(x^*, K^*, \beta|z^*)$. Более того, в последнем выражении справедливо равенство. Действительно, пусть $(v_i)_{i\in\overline{0,n+1}} \in \mathcal{X}(x^*, K^*, \beta|z^*)$. В частности, $(v_i)_{i\in\overline{0,n+1}} \in \mathcal{X}(x^*, K^*, \beta)$ и при этом $v_1 = z^*$. Тогда

$$w_j \triangleq v_{j+1} \in A_{\beta(j+1)}(\mathtt{pr}_2(v_j)) \times A_{\beta(j+1)}(\mathtt{pr}_2(v_j)) \quad \forall j \in \overline{0,n}, \tag{3.34}$$

причем $w_0 = z^*$. Введем, кроме того, $(\widetilde{w}_i)_{i\in\overline{0,n}} \in \mathbb{X}_n$ по правилу $\Big(\widetilde{w}_0 \triangleq (\mathtt{pr}_2(z^*), \mathtt{pr}_2(z^*))\Big)\,\&$ $\Big(\widetilde{w}_j \triangleq w_j \quad \forall j \in \overline{1,n}\Big)$. С учетом (3.34) нетрудно показать, что $(\widetilde{w}_i)_{i\in\overline{0,n}} \in \mathcal{X}\Big(\mathtt{pr}_2(z^*), K_*, \widetilde{\beta}\Big)$ (учитываем здесь, что $\mathtt{pr}_2(v_1) = \mathtt{pr}_2(\widetilde{w}_0)$). Тогда $(\widehat{v}_i)_{i\in\overline{0,n+1}} \triangleq T\Big((\widetilde{w}_i)_{i\in\overline{0,n}}\Big) \in \Omega$ (см. определение Ω) и, в частности, $\widehat{v}_j \in \mathbf{X}\times\mathbf{X} \quad \forall j \in \overline{0,n+1}$. Согласно (3.33) $\widehat{v}_0 = (x^*, x^*), \widehat{v}_1 = z^*$ и $\widehat{v}_j = \widetilde{w}_{j-1} \quad \forall j \in \overline{2,n+1}$.

Легко видеть, что $(\widehat{v}_i)_{i\in\overline{0,n+1}} = (v_i)_{i\in\overline{0,n+1}}$, а потому $(v_i)_{i\in\overline{0,n+1}} \in \Omega$, чем и завершается обоснование вложения

$$\mathcal{X}(x^*, K^*, \beta|z^*) \subset \Omega,$$

а, следовательно, и равенства

$$\mathcal{X}(x^*, K^*, \beta|z^*) = \Omega. \tag{3.35}$$

С учетом (3.27), (3.28) и (3.35) получаем (см. определение Ω), что $\mathcal{X}(x^*, K^*, \beta|z^*) \in Fin(\mathbf{X}_{n+1})$.

Поскольку выбор z^* был произвольным, установлено, что $\mathcal{X}(x^*, K^*, \beta|z) \in Fin(\mathbf{X}_{n+1}) \quad \forall z \in A_{\beta(1)}(x^*)\times A_{\beta(1)}(x^*)$. С учетом (3.29), (3.31) получаем теперь с очевидностью, что $\mathcal{X}(x^*, K^*, \beta) \in Fin(\mathbf{X}_{n+1})$. Поскольку выбор x^*, K^* и β был произвольным, установлено, что

$$\mathcal{X}(x, K, \alpha) \in Fin(\mathbf{X}_{n+1}) \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N}_{n+1} \quad \forall \alpha \in (\mathbf{I}-bi)[K]. \tag{3.36}$$

Итак установлено, что (3.27) $\Rightarrow$ (3.36). Поскольку выбор n был произвольным, установлено (см. (3.26)), что

$$\mathcal{X}(x, K, \alpha) \in Fin(\mathbb{X}_s) \quad \forall s \in \overline{1,N} \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N}_s \quad \forall \alpha \in (\mathbf{I}-bi)[K]. \tag{3.37}$$

С учетом (3.19) и того, что $|K| = s \quad \forall K \in \mathfrak{N}_s$, получаем из (3.37) требуемое утверждение. $\square$

Из предложения 5 и (3.11), в частности, следует, что

$$\mathcal{X}[\alpha] \in Fin(\mathbb{X}_N) \quad \forall \alpha \in \mathbb{P} \tag{3.38}$$

(учитываем, что $\mathbb{P} = (bi)\left[\,\overline{1,N}\,\right]$ и $\left|\overline{1,N}\right| = N$). Поскольку $\mathbb{A}$ — непустое конечное множество, имеем из (3.38), что множество $\mathbf{S}$ также является конечным (и непустым). Возвращаясь к основной задаче (2.11), получаем с учетом этого, что

$$V = \min_{(\alpha,(z_i)_{i\in\overline{0,N}})\in\mathbf{S}} \mathfrak{C}_\alpha\Big((z_i)_{i\in\overline{0,N}}\Big) = \min_{\alpha\in\mathbb{A}}\ \min_{(z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathcal{X}[\alpha]} \mathfrak{C}_\alpha((z_i)_{i\in\overline{0,N}}) \in [0,\infty[\tag{3.39}$$

(значение задачи (2.11)). Как обычно, решение $\Big(\alpha^0, (z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}\Big) \in \mathbf{S}$ оптимально в задаче (2.11), если $\mathfrak{C}_{\alpha^0}\Big((z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}\Big) = V$.

Для решения основной задачи по МДП вводится расширение последней, подобное в идейном отношении [21–23] и являющееся системой всевозможных задач (3.10). С учетом (3.23) и предложения 5 получаем теперь, что

$$v(x, K) = \min_{\alpha\in(\mathbf{I}-bi)[K]}\ \min_{(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}\in\mathcal{X}(x,K,\alpha)} \mathfrak{C}_K^{(\alpha)}\Big((z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}\Big) \in [0,\infty[\quad \forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{3.40}$$

§ 4. Уравнение Беллмана

В настоящем разделе рассматривается модификация процедуры МДП [20, ч. 2], учитывающая также особенности, отраженные в [21–23]. Вместе с тем, конструкция настоящей работы, учитывающая (2.1), связана с преодолением некоторых дополнительных (в сравнении с [21–23]) затруднений.

Полагаем далее, что $\mathbb{V} : \mathbf{X} \times \mathbf{N} \to [0, \infty[$ есть функция, для которой (см. (3.40))

$$\Big(\mathbb{V}(x, K) \triangleq v(x, K) \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N}\Big) \,\&\, \Big(\mathbb{V}(x, \varnothing) \triangleq \mathbf{f}(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}\Big). \tag{4.1}$$

Тем самым введена функция Беллмана, отвечающая естественному расширению задачи (2.11).

Теорема 1. *Если* $x \in \mathbf{X}$ *и* $K \in \mathfrak{N}$, *то*

$$\mathbb{V}(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in A_j(x) \times A_j(x)} [\mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(z)) + c_j(z) + \mathbb{V}(\mathtt{pr}_2(z), K \setminus \{j\})]. \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$. Пусть $n \triangleq |K|$; тогда $n \in \overline{1, N}$.

Случай $n = 1$ является очевидным, и его рассмотрение мы опустим, полагая далее, что $n \in \overline{2, N}$. Тогда $n - 1 \in \overline{1, N-1}$, и потому $K \setminus \{j\} \in \mathfrak{N}_{n-1} \quad \forall j \in K$. С учетом (3.40) выберем и зафиксируем (частичный) маршрут $\beta \in (\mathbf{I} - bi)[K]$ и трассу $(u_i)_{i \in \overline{0, n}} \in \mathcal{X}(x, K, \beta)$, для которых (см. (3.9), (4.1))

$$\begin{gathered}\mathbb{V}(x, K) = v(x, K) = \mathfrak{C}_K^{(\beta)}\Big((u_i)_{i \in \overline{0, n}}\Big) = \\ = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(u_i), \mathtt{pr}_1(u_{i+1})) + \sum_{i=1}^{n} c_{\beta(i)}(u_i) + \mathbf{f}(\mathtt{pr}_2(u_n)).\end{gathered} \tag{4.3}$$

При этом $\beta : \overline{1, n} \to K$ и, кроме того, справедлива система включений

$$\beta(s) \in \mathbf{I}(\{\beta(l) : l \in \overline{s, n}\}) \quad \forall s \in \overline{1, n}. \tag{4.4}$$

Поскольку β — биекция $\overline{1, n}$ на K, то $\beta(1) \in \mathbf{I}(K)$ согласно (4.4) и

$$u_1 \in A_{\beta(1)}(\mathtt{pr}_2(u_0)) \times A_{\beta(1)}(\mathtt{pr}_2(u_0)),$$

а тогда в терминах $\mathbb{K} \triangleq K \setminus \{\beta(1)\} \in \mathfrak{N}$ мы получаем неравенство

$$\begin{gathered}\min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in A_j(x) \times A_j(x)} [\mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(z)) + c_j(z) + \mathbb{V}(\mathtt{pr}_2(z), K \setminus \{j\})] \leqslant \\ \leqslant \mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(u_1)) + c_{\beta(1)}(u_1) + \mathbb{V}(\mathtt{pr}_2(u_1), \mathbb{K}).\end{gathered} \tag{4.5}$$

Напомним, что $K \in \mathfrak{N}$, $n = |K| \geqslant 2$ и $\beta \in (\mathbf{I} - bi)[K]$, а тогда, согласно предложению 3,

$$\widetilde{\beta} \triangleq (\beta(i+1))_{i \in \overline{1, n-1}} \in (\mathbf{I} - bi)[\mathbb{K}], \tag{4.6}$$

где $|\mathbb{K}| = n - 1$. Имеем $\widetilde{u}_0 \triangleq (\mathtt{pr}_2(u_1), \mathtt{pr}_2(u_1)) \in \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ и, кроме того,

$$\widetilde{u}_j \triangleq u_{j+1} \in A_{\widetilde{\beta}(j)}(\mathtt{pr}_2(u_j)) \times A_{\widetilde{\beta}(j)}(\mathtt{pr}_2(u_j)) \quad \forall j \in \overline{1, n-1}. \tag{4.7}$$

Получили кортеж $(\widetilde{u}_i)_{i \in \overline{0, n-1}} \in \mathbb{X}_{n-1}$. Более того, имеем свойство

$$(\widetilde{u}_i)_{i \in \overline{0, n-1}} \in \mathcal{X}\left(\mathtt{pr}_2(u_1), \mathbb{K}, \widetilde{\beta}\right); \tag{4.8}$$

(4.8) легко следует из (4.7) (см. также (3.4), (3.5)). Из (4.6) и (4.8) вытекает неравенство

$$\begin{gathered}\mathbb{V}(\mathtt{pr}_2(u_1), \mathbb{K}) = v(\mathtt{pr}_2(u_1), \mathbb{K}) \leqslant \mathfrak{C}_{\mathbb{K}}^{(\widetilde{\beta})}\Big((\widetilde{u}_i)_{i \in \overline{0, n-1}}\Big) = \\ = \sum_{i=0}^{n-2} \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\widetilde{u}_i), \mathtt{pr}_1(\widetilde{u}_{i+1})) + \sum_{i=1}^{n-1} c_{\widetilde{\beta}(i)}(\widetilde{u}_i) + \mathbf{f}(\mathtt{pr}_2(\widetilde{u}_{n-1})).\end{gathered} \tag{4.9}$$

После простых преобразований выражения в правой части (4.3) получаем, однако, равенство

$$\mathbb{V}(x,K)=\mathbf{c}(x,\mathtt{pr}_1(u_1))+c_{\beta(1)}(u_1)+\sum_{i=0}^{n-2}\mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\widetilde{u}_i),\mathtt{pr}_1(\widetilde{u}_{i+1}))+\sum_{i=1}^{n-1}c_{\widetilde{\beta}(i)}(\widetilde{u}_i)+\mathbf{f}(\mathtt{pr}_2(\widetilde{u}_{n-1})),$$

откуда с учетом (4.9) извлекается неравенство $\mathbf{c}(x,\mathtt{pr}_1(u_1))+c_{\beta(1)}(u_1)+\mathbb{V}(\mathtt{pr}_2(u_1),\mathbb{K})\leqslant\mathbb{V}(x,K)$. Наконец, используя (4.5), мы получаем следующую оценку:

$$\min_{j\in\mathbf{I}(K)}\ \min_{z\in A_j(x)\times A_j(x)}[\mathbf{c}(x,\mathtt{pr}_1(z))+c_j(z)+\mathbb{V}(\mathtt{pr}_2(z),K\backslash\{j\})]\leqslant\mathbb{V}(x,K). \tag{4.10}$$

С учетом конечности множеств $\mathbf{I}(K)$ и $A_j(x)$, $j\in\mathbf{I}(K)$, выберем и зафиксируем $q\in\mathbf{I}(K)$, а также упорядоченную пару $\mathbf{h}\in A_q(x)\times A_q(x)$, для которых

$$\begin{gathered}\mathbf{c}(x,\mathtt{pr}_1(\mathbf{h}))+c_q(\mathbf{h})+\mathbb{V}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{h}),Q)=\\=\min_{j\in\mathbf{I}(K)}\ \min_{z\in A_j(x)\times A_j(x)}[\mathbf{c}(x,\mathtt{pr}_1(z))+c_j(z)+\mathbb{V}(\mathtt{pr}_2(z),K\backslash\{j\})],\end{gathered} \tag{4.11}$$

где $Q\triangleq K\backslash\{q\}\in\mathfrak{N}_{n-1}$. Кроме того, с учетом (3.40) подберем $\gamma\in(\mathbf{I}-bi)[Q]$ и

$$(\omega_i)_{i\in\overline{0,n-1}}\in\mathcal{X}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{h}),Q,\gamma), \tag{4.12}$$

для которых справедливо (см. (4.1)) следующее равенство:

$$\mathbb{V}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{h}),Q)=\mathfrak{C}_Q^{(\gamma)}\left((\omega_i)_{i\in\overline{0,n-1}}\right). \tag{4.13}$$

Тогда, в частности, $\gamma(j)\in Q\quad\forall j\in\overline{1,n-1}$. С учетом этого введем кортеж $\widetilde{\gamma}:\overline{1,n}\to K$ посредством следующего (использующего определение Q) правила:

$$\left(\widetilde{\gamma}(1)\triangleq q\right)\&\left(\widetilde{\gamma}(j)\triangleq\gamma(j-\ 1)\quad\forall j\in\overline{2,n}\right).$$

По выбору γ имеем после простых преобразований свойство допустимости

$$\widetilde{\gamma}\in(\mathbf{I}-bi)[K]. \tag{4.14}$$

Из (3.10), (4.1) и (4.14) вытекает неравенство

$$\mathbb{V}(x,K)\leqslant\min_{(z_i)_{i\in\overline{0,n}}\in\mathcal{X}(x,K,\widetilde{\gamma})}\mathfrak{C}_K^{(\widetilde{\gamma})}\left((z_i)_{i\in\overline{0,n}}\right). \tag{4.15}$$

Кроме того, пусть кортеж $(\widehat{\omega}_i)_{i\in\overline{1,n}}:\overline{1,n}\to\mathbf{X}\times\mathbf{X}$ определяется условиями

$$\left(\widehat{\omega}_1\triangleq\mathbf{h}\right)\&\left(\widehat{\omega}_k\triangleq\omega_{k-1}\quad\forall k\in\overline{2,n}\right). \tag{4.16}$$

Легко видеть, что справедливы следующие свойства:

$$\left(\widehat{\omega}_1\in A_{\widetilde{\gamma}(1)}(x)\times A_{\widetilde{\gamma}(1)}(x)\right)\&\left(\widehat{\omega}_k\in A_{\widetilde{\gamma}(k)}(\mathtt{pr}_2(\omega_{k-2}))\times A_{\widetilde{\gamma}(k)}(\mathtt{pr}_2(\omega_{k-2}))\quad\forall k\in\overline{2,n}\right). \tag{4.17}$$

Отметим, что согласно (4.12) и (4.17) $\widehat{\omega}_2=\omega_1\in A_{\widetilde{\gamma}(2)}(\mathtt{pr}_2(\omega_0))\times A_{\widetilde{\gamma}(2)}(\mathtt{pr}_2(\omega_0))$, где $\mathtt{pr}_2(\omega_0)=\mathtt{pr}_2(\mathbf{h})=\mathtt{pr}_2(\widehat{\omega}_1)$ в силу (4.16), а тогда

$$\widehat{\omega}_2\in A_{\widetilde{\gamma}(2)}(\mathtt{pr}_2(\widehat{\omega}_1))\times A_{\widetilde{\gamma}(2)}(\mathtt{pr}_2(\widehat{\omega}_1)). \tag{4.18}$$

Если же $k\in\overline{3,n}$, то согласно (4.16) $\widehat{\omega}_{k-1}=\omega_{k-2}$, где $k-1\in\overline{2,n-1}$ и $k-2\in\overline{1,n-2}$; тогда $\widehat{\omega}_k=\omega_{k-1}$ и с учетом (4.17) $\widehat{\omega}_k\in A_{\widetilde{\gamma}(k)}(\mathtt{pr}_2(\widehat{\omega}_{k-1}))\times A_{\widetilde{\gamma}(k)}(\mathtt{pr}_2(\widehat{\omega}_{k-1}))$.

Учитывая (4.18), получаем очевидную теперь систему включений

$$\widehat{\omega}_k \in A_{\widetilde{\gamma}(k)}(\mathtt{pr}_2(\widehat{\omega}_{k-1})) \times A_{\widetilde{\gamma}(k)}(\mathtt{pr}_2(\widehat{\omega}_{k-1})) \quad \forall k \in \overline{2,n}. \tag{4.19}$$

Введем в рассмотрение кортеж $(\widetilde{\omega}_i)_{i\in\overline{0,n}} \in \mathbb{X}_n$ посредством правила

$$\Big(\widetilde{\omega}_0 \triangleq (x,x)\Big) \,\&\, \Big(\widetilde{\omega}_k \triangleq \widehat{\omega}_k \quad \forall k \in \overline{1,n}\Big). \tag{4.20}$$

Из (4.17) и (4.20) вытекает, в частности, что

$$\widetilde{\omega}_1 = \widehat{\omega}_1 \in A_{\widetilde{\gamma}(1)}(\mathtt{pr}_2(\widetilde{\omega}_0)) \times A_{\widetilde{\gamma}(1)}(\mathtt{pr}_2(\widetilde{\omega}_0)). \tag{4.21}$$

Далее, из (4.16) и (4.20) имеем равенство $\widetilde{\omega}_2 = \widehat{\omega}_2 = \omega_1$. Поэтому из (4.12), (4.18) и (4.21) следует, что

$$\widetilde{\omega}_2 \in A_{\widetilde{\gamma}(2)}\left(\mathtt{pr}_2(\widetilde{\omega}_1)\right) \times A_{\widetilde{\gamma}(2)}\left(\mathtt{pr}_2(\widetilde{\omega}_1)\right). \tag{4.22}$$

При $k \in \overline{3,n}$ имеем (поскольку $k-1 \in \overline{2,n-1}$) из (4.20) следующие два равенства:

$$(\widetilde{\omega}_k = \widehat{\omega}_k) \& (\widetilde{\omega}_{k-1} = \widehat{\omega}_{k-1});$$

тогда согласно (4.19) реализуется включение $\widetilde{\omega}_k \in A_{\widetilde{\gamma}(k)}\left(\mathtt{pr}_2(\widetilde{\omega}_{k-1})\right) \times A_{\widetilde{\gamma}(k)}\left(\mathtt{pr}_2(\widetilde{\omega}_{k-1})\right)$. Тем самым (см. также (4.21) и (4.22)) установлена справедливость системы включений

$$\widetilde{\omega}_s \in A_{\widetilde{\gamma}(s)}\left(\mathtt{pr}_2(\widetilde{\omega}_{s-1})\right) \times A_{\widetilde{\gamma}(s)}\left(\mathtt{pr}_2(\widetilde{\omega}_{s-1})\right) \quad \forall s \in \overline{1,n}.$$

С учетом (4.20) имеем теперь (см. (3.4), (3.5)) очевидное включение

$$(\widetilde{\omega}_i)_{i\in\overline{0,n}} \in \mathcal{X}(x, K, \widetilde{\gamma}),$$

из которого согласно (4.15) следует неравенство

$$\mathbb{V}(x,K) \leqslant \mathfrak{C}_K^{(\widetilde{\gamma})}\left((\widetilde{\omega}_i)_{i\in\overline{0,n}}\right). \tag{4.23}$$

Используя (3.9), (4.16) и (4.20), преобразуем выражение в правой части (4.23)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}_K^{(\widetilde{\gamma})}\left((\widetilde{\omega}_i)_{i\in\overline{0,n}}\right) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\widetilde{\omega}_i), \mathtt{pr}_1(\widetilde{\omega}_{i+1})) + \sum_{i=1}^{n} c_{\widetilde{\gamma}(i)}(\widetilde{\omega}_i) + \mathbf{f}(\mathtt{pr}_2(\widetilde{\omega}_n)) = \\
&= \mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(\mathbf{h})) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\widehat{\omega}_i), \mathtt{pr}_1(\widehat{\omega}_{i+1})) + \sum_{i=1}^{n} c_{\widetilde{\gamma}(i)}(\widehat{\omega}_i) + \mathbf{f}(\mathtt{pr}_2(\widehat{\omega}_n)) = \\
&= \mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(\mathbf{h})) + c_{\widetilde{\gamma}(1)}(\mathbf{h}) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\widehat{\omega}_i), \mathtt{pr}_1(\widehat{\omega}_{i+1})) + \sum_{i=2}^{n} c_{\widetilde{\gamma}(i)}(\omega_{i-1}) + \mathbf{f}(\mathtt{pr}_2(\omega_{n-1})).
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Вместе с тем $c_{\widetilde{\gamma}(1)}(\mathbf{h}) = c_q(\mathbf{h})$ по определению $\widetilde{\gamma}$. Тогда из (4.24) получаем равенство

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}_K^{(\widetilde{\gamma})}\left((\widetilde{\omega}_i)_{i\in\overline{0,n}}\right) = \mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(\mathbf{h})) + c_q(\mathbf{h}) + \\
+ \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{c}\left(\mathtt{pr}_2(\widehat{\omega}_i), \mathtt{pr}_1(\widehat{\omega}_{i+1})\right) + \sum_{i=2}^{n} c_{\widetilde{\gamma}(i)}(\omega_{i-1}) + \mathbf{f}(\mathtt{pr}_2(\omega_{n-1})).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Заметим теперь, что согласно (4.12) и (4.16) $\mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\widehat{\omega}_1), \mathtt{pr}_1(\widehat{\omega}_2)) = \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{h}), \mathtt{pr}_1(\omega_1)) = \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\omega_0), \mathtt{pr}_1(\omega_1))$. Итак, при $i = 1$ имеем равенство $\mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\widehat{\omega}_i), \mathtt{pr}_1(\widehat{\omega}_{i+1})) = \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\omega_{i-1}), \mathtt{pr}_1(\omega_i))$. Если же $i \in \overline{2,n-1}$, то $i+1 \in \overline{3,n}$ и согласно (4.16)

$$\mathbf{c}\left(\mathtt{pr}_2(\widehat{\omega}_i), \mathtt{pr}_1(\widehat{\omega}_{i+1})\right) = \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\omega_{i-1}), \mathtt{pr}_1(\omega_i)). \tag{4.26}$$

Итак, (4.26) справедливо для всех $i \in \overline{1, n-1}$, а тогда в силу (4.25)

$$\mathfrak{C}_K^{(\widetilde{\gamma})}\left((\widetilde{\omega}_i)_{i\in\overline{0,n}}\right) = \mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(\mathbf{h})) + c_q(\mathbf{h}) + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\omega_{i-1}), \mathtt{pr}_1(\omega_i)) + \sum_{i=2}^{n} c_{\widetilde{\gamma}(i)}(\omega_{i-1}) + \mathbf{f}(\mathtt{pr}_2(\omega_{n-1})). \tag{4.27}$$

Отметим, что согласно (4.27) и определению $\widetilde{\gamma}$

$$\mathfrak{C}_K^{(\widetilde{\gamma})}\left((\widetilde{\omega}_i)_{i\in\overline{0,n}}\right) = \mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(\mathbf{h})) + c_q(\mathbf{h}) + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\omega_{i-1}), \mathtt{pr}_1(\omega_i)) + \sum_{i=2}^{n} c_{\gamma(i-1)}(\omega_{i-1}) + \mathbf{f}(\mathtt{pr}_2(\omega_{n-1})) \tag{4.28}$$

$$= \mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(\mathbf{h})) + c_q(\mathbf{h}) + \sum_{i=0}^{n-2} \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\omega_i), \mathtt{pr}_1(\omega_{i+1})) + \sum_{i=1}^{n-1} c_{\gamma(i)}(\omega_i) + \mathbf{f}(\mathtt{pr}_2(\omega_{n-1})).$$

Из (3.9) имеем, однако, по выбору γ и $(\omega_i)_{i\in\overline{0,n}}$ (4.12), что

$$\mathfrak{C}_Q^{(\gamma)}\left((\omega_i)_{i\in\overline{0,n-1}}\right) = \sum_{i=0}^{n-2} \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\omega_i), \mathtt{pr}_1(\omega_{i+1})) + \sum_{i=1}^{n-1} c_{\gamma(i)}(\omega_i) + \mathbf{f}(\mathtt{pr}_2(\omega_{n-1}))$$

(мы учитываем то, что $|Q| = n-1$), а тогда из (4.13) и (4.28) следует цепочка равенств

$$\mathfrak{C}_K^{(\widetilde{\gamma})}\left((\widetilde{\omega}_i)_{i\in\overline{0,n}}\right) = \mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(\mathbf{h})) + c_q(\mathbf{h}) + \mathfrak{C}_Q^{(\gamma)}\left((\omega_i)_{i\in\overline{0,n-1}}\right) = \\ = \mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(\mathbf{h})) + c_q(\mathbf{h}) + \mathbb{V}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{h}), Q). \tag{4.29}$$

Из (4.11) и (4.29) следует, в свою очередь, равенство

$$\mathfrak{C}_K^{(\widetilde{\gamma})}\left((\widetilde{\omega}_i)_{i\in\overline{0,n}}\right) = \min_{j\in\mathbf{I}(K)} \min_{z\in A_j(x)\times A_j(x)} [\mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(z)) + c_j(z) + \mathbb{V}(\mathtt{pr}_2(z), K\backslash\{j\})],$$

откуда с учетом (4.23) имеем очевидную оценку:

$$\mathbb{V}(x, K) \leqslant \min_{j\in\mathbf{I}(K)} \min_{z\in A_j(x)\times A_j(x)} [\mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(z)) + c_j(z) + \mathbb{V}(\mathtt{pr}_2(z), K\backslash\{j\})].$$

С учетом (4.10) получаем равенство (4.2) и в случае $n \in \overline{2, N}$. □

§ 5. Построение оптимальных маршрутов и трасс (алгоритм на функциональном уровне)

Совсем кратко рассмотрим логику построения оптимального решения задачи (2.11) на основе теоремы 1 (практическая реализация данной оптимальной процедуры возможна в случае конечного и «небольшого» множества $\mathbf{X}$). Полагаем, что $\mathbf{N}_k \triangleq \{K \in \mathbf{N} \mid k = |K|\} \quad \forall k \in \overline{0, N}$. С учетом (3.24) имеем, конечно, систему равенств $\mathfrak{N}_s = \mathbf{N}_s \quad \forall s \in \overline{1, N}$; множество $\mathbf{N}$ совпадает с объединением всех множеств $\mathbf{N}_k, k \in \overline{0, N}$. Полагаем, что

$$\left(\mathcal{D}_s \triangleq \mathbf{X} \times \mathbf{N}_s \quad \forall s \in \overline{0, N-1}\right) \,\&\, \left(\mathcal{D}_N \triangleq \left\{\left(x^0, \overline{1, N}\right)\right\}\right); \tag{5.1}$$

заметим, что $\mathbf{N}_0 = \{\varnothing\}$, а потому $\mathcal{D}_0 = \{(x, \varnothing) : x \in \mathbf{X}\}$. Разумеется, в (5.1) мы имеем разбиение пространства позиций $\mathbf{X} \times \mathbf{N}$. Для наших целей удобно ввести сужения основной функции Беллмана, полагая

$$\mathbb{V}_s \triangleq (\mathbb{V}(x, K))_{(x,K)\in\mathcal{D}_s} \quad \forall s \in \overline{0, N}$$

(заметим, что каждое из множеств $\mathcal{D}_s, s \in \overline{0, N}$, непусто). Отметим, что согласно (4.1) функция $\mathbb{V}_0 : \mathcal{D}_0 \to [0, \infty[$ определяется условиями

$$\mathbb{V}_0(x, \varnothing) = \mathbf{f}(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}. \tag{5.2}$$

Пусть $m \in \overline{0, N-1}$ и уже построены все функции

$$\mathbb{V}_0 : \mathbf{X} \times \mathbf{N}_0 \to [0, \infty[, \ldots, \mathbb{V}_m : \mathbf{X} \times \mathbf{N}_m \to [0, \infty[.$$

Для определения $\mathbb{V}_{m+1}$ используем теорему 1, учитывая, что при $(x, K) \in \mathcal{D}_{m+1}$, $j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in A_j(x) \times A_j(x)$ непременно $(\mathtt{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in \mathcal{D}_m$. Итак, согласно теореме 1 получаем с учетом определения

$$\mathbb{V}_m : \mathcal{D}_m \to [0, \infty[,$$

что при $(x, K) \in \mathcal{D}_{m+1}$ справедливо равенство

$$\mathbb{V}_{m+1}(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in A_j(x) \times A_j(x)} [\mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(z)) + c_j(z) + \mathbb{V}_m(\mathtt{pr}_2(z), K \setminus \{j\})].$$

Тем самым определяется функция $\mathbb{V}_{m+1} : \mathcal{D}_{m+1} \to [0, \infty[$. После конечного числа шагов, подобных преобразованию

$$\mathbb{V}_m \to \mathbb{V}_{m+1},$$

все функции $\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1, \ldots, \mathbb{V}_N$ будут построены и, в частности, будет определено значение

$$V = v\left(x^0, \overline{1, N}\right) = \mathbb{V}_N\left(x^0, \overline{1, N}\right). \tag{5.3}$$

При этом, конечно, из (5.3) и теоремы 1 следует равенство

$$V = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \min_{z \in A_j(x^0) \times A_j(x^0)} \left[\mathbf{c}(x^0, \mathtt{pr}_1(z)) + c_j(z) + \mathbb{V}_{N-1}(\mathtt{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\})\right]. \tag{5.4}$$

Для построения оптимального решения полагаем $\mathbf{z}_0 \triangleq \left(x^0, x^0\right)$ и выбираем с учетом (5.4) индекс

$$\mathbf{i}_1 \in \mathbf{I}\left(\overline{1, N}\right), \tag{5.5}$$

а также упорядоченную пару

$$\mathbf{z}_1 \in A_{\mathbf{i}_1}\left(x^0\right) \times A_{\mathbf{i}_1}\left(x^0\right) \tag{5.6}$$

так, что при этом справедливо равенство

$$V = \mathbf{c}\left(x^0, \mathtt{pr}_1(\mathbf{z}_1)\right) + c_{\mathbf{i}_1}(\mathbf{z}_1) + \mathbb{V}_{N-1}\left(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_1), \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}\right). \tag{5.7}$$

Из (5.6) имеем, в частности, что

$$\mathbf{z}_1 \in A_{\mathbf{i}_1}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_0)) \times A_{\mathbf{i}_1}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_0)).$$

При этом согласно (5.7) имеем следующее равенство:

$$V = \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_0), \mathtt{pr}_1(\mathbf{z}_1)) + c_{\mathbf{i}_1}(\mathbf{z}_1) + \mathbb{V}_{N-1}\left(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_1), \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}\right). \tag{5.8}$$

Пусть теперь $r \in \overline{1, N}$ и уже построены два кортежа

$$(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, r}} : \overline{1, r} \to \overline{1, N}, \tag{5.9}$$

$$(\mathbf{z}_j)_{j \in \overline{0, r}} : \overline{0, r} \to \mathbf{X} \times \mathbf{X}, \tag{5.10}$$

$\mathbf{z}_0 = \left(x^0, x^0\right)$, для которых справедливы следующие свойства:

$$1')\ \mathbf{i}_s \neq \mathbf{i}_t \quad \forall s \in \overline{1,r} \quad \forall t \in \overline{1,r}\setminus\{s\};$$
$$2')\ \mathbf{z}_j \in A_{\mathbf{i}_j}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_{j-1})) \times A_{\mathbf{i}_j}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_{j-1})) \quad \forall j \in \overline{1,r};$$
$$3')\ V = \sum_{j=1}^{r} \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_{j-1}), \mathtt{pr}_1(\mathbf{z}_j)) + \sum_{j=1}^{r} c_{\mathbf{i}_j}(\mathbf{z}_j) + \mathbb{V}_{N-r}\left(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_r), \overline{1,N}\setminus\left\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,r}\right\}\right);$$
$$4')\ \mathbf{i}_j \in \mathbf{I}\left(\overline{1,N}\setminus\left\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\right\}\right) \quad \forall j \in \overline{1,r}.$$

Замечание 1. При $r = 1$ свойства $1')-4')$ выполнены по самому способу построения $\mathbf{i}_1$ и $\mathbf{z}_1$. Действительно, свойство $1')$ очевидно, так как в этом случае $\overline{1,r} = \{1\}$. Свойство $2')$ вытекает из (5.6) с учетом определения $\mathbf{z}_0$. Свойство $3')$ вытекает из (5.8), а свойство $4')$— следствие (5.5), где следует учесть, что $\overline{1,0} = \varnothing$.

Возвращаясь к общему случаю $r \in \overline{1,N}$, отметим, что возможен один из следующих двух случаев: *a*) $r = N$, *b*) $r \in \overline{1,N-1}$. Эти два случая рассмотрим отдельно.

a) Пусть $r = N$, а тогда из (5.9), (5.10) имеем следующие два «полных» кортежа:

$$(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}} : \overline{1,N} \to \overline{1,N}, \quad (\mathbf{z}_j)_{j\in\overline{0,N}} : \overline{0,N} \to \mathbf{X} \times \mathbf{X}. \tag{5.11}$$

С учетом $1')$ имеем из (5.11), что $(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}} \in \mathbb{P}$, а тогда, в частности,

$$\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{l,N}\} = \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,l-1}\} \quad \forall l \in \overline{1,N}. \tag{5.12}$$

Используя $4')$, получаем из (5.12), что (в рассматриваемом случае $r = N$)

$$\mathbf{i}_l \in \mathbf{I}\left(\left\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{l,N}\right\}\right) \quad \forall l \in \overline{1,N}.$$

Это означает, что (см. (3.3), (3.12)) $\eta \triangleq (\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}} \in \mathbb{A}$ (построен допустимый маршрут). Из $2')$ и (5.11) вытекает (см. § 2), что $(\mathbf{z}_j)_{j\in\overline{0,N}} \in \mathcal{X}[\eta]$, а тогда $(\eta, (\mathbf{z}_j)_{j\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{S}$, причем согласно (2.10), $3')$ и (4.1)

$$V = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_{j-1}), \mathtt{pr}_1(\mathbf{z}_j)) + \sum_{j=1}^{N} c_{\eta(j)}(\mathbf{z}_j) + \mathbb{V}_0(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_N), \varnothing) =$$
$$= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_j), \mathtt{pr}_1(\mathbf{z}_{j+1})) + \sum_{j=1}^{N} c_{\eta(j)}(\mathbf{z}_j) + \mathbf{f}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_N)) = \mathfrak{C}_\eta\left((\mathbf{z}_j)_{j\in\overline{0,N}}\right).$$

Таким образом, построено оптимальное решение задачи (2.11); таковым является упорядоченная пара

$$\left(\eta, (\mathbf{z}_j)_{j\in\overline{0,N}}\right) = \left((\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}}, (\mathbf{z}_j)_{j\in\overline{0,N}}\right) \in \mathbf{S}.$$

b) Пусть $r \in \overline{1,N-1}$; тогда $r+1 \in \overline{2,N}$ и, кроме того, $\mathbb{Q} \triangleq \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,r}\} \in \mathfrak{N}$. Согласно теореме 1, справедливо следующее равенство:

$$\begin{gathered}\mathbb{V}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_r), \mathbb{Q}) = \\ = \min_{j\in\mathbf{I}(\mathbb{Q})} \min_{z\in A_j(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_r))\times A_j(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_r))} [\mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_r), \mathtt{pr}_1(z)) + c_j(z) + \mathbb{V}(\mathtt{pr}_2(z), \mathbb{Q}\setminus\{j\})],\end{gathered} \tag{5.13}$$

где $|\mathbb{Q}| = N - r$ и $|\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,r}\}| = r$. С учетом (5.13) и того, что $(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_r), \mathbb{Q}) \in \mathcal{D}_{N-r}$, получаем совпадение (5.13) и $\mathbb{V}_{N-r}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_r), \mathbb{Q})$; выбираем (см. (5.13)) индекс

$$\mathbf{i}_{r+1} \in \mathbf{I}(\mathbb{Q}), \tag{5.14}$$

и упорядоченную пару

$$\mathbf{z}_{r+1} \in A_{\mathbf{i}_{r+1}}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_r)) \times A_{\mathbf{i}_{r+1}}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_r)), \tag{5.15}$$

для которых

$$\begin{gathered}\mathbb{V}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_r), \mathbb{Q}) = \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_r), \mathtt{pr}_1(\mathbf{z}_{r+1})) + c_{\mathbf{i}_{r+1}}(\mathbf{z}_{r+1}) + \\ \mathbb{V}\left(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_{r+1}), \overline{1,N} \setminus \left\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,r+1}\right\}\right).\end{gathered} \tag{5.16}$$

Теперь мы имеем следующие два кортежа:

$$(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1,r+1}} : \overline{1,r+1} \to \overline{1,N}, \quad (\mathbf{z}_j)_{j \in \overline{0,r+1}} : \overline{0,r+1} \to \mathbf{X} \times \mathbf{X}. \tag{5.17}$$

Из (5.14), в частности, следует, что $\mathbf{i}_{r+1} \in \mathbb{Q}$, а тогда из $1'$) и определения $\mathbb{Q}$ имеем свойство

$$1'')\ \mathbf{i}_s \neq \mathbf{i}_t \quad \forall s \in \overline{1,r+1} \quad \forall t \in \overline{1,r+1} \setminus \{s\}.$$

Далее, из $2'$) и (5.15) вытекает следующее свойство:

$$2'')\ \mathbf{z}_j \in A_{\mathbf{i}_j}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_{j-1})) \times A_{\mathbf{i}_j}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_{j-1})) \quad \forall j \in \overline{1,r+1}.$$

Из $3'$), (5.16) и определения $\mathbb{Q}$ вытекает, поскольку

$$\left(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_{r+1}), \overline{1,N} \setminus \left\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,r+1}\right\}\right) \in \mathcal{D}_{N-(r+1)}$$

(согласно $1''$) имеем $|\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,r+1}\}| = r+1$), что

$$3'')\ V = \sum_{j=1}^{r+1} \mathbf{c}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_{j-1}), \mathtt{pr}_1(\mathbf{z}_j)) + \sum_{j=1}^{r+1} c_{\mathbf{i}_j}(\mathbf{z}_j) + \mathbb{V}\left(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}_{r+1}), \overline{1,N} \setminus \left\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,r+1}\right\}\right).$$

Наконец, из $4'$) и (5.14) вытекает, что справедливо свойство

$$4'')\ \mathbf{i}_j \in \mathbf{I}\left(\overline{1,N} \setminus \left\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\right\}\right) \quad \forall j \in \overline{1,r+1}.$$

Итак, в случае б) нам удалось продолжить каждый из кортежей (5.9), (5.10) еще на один шаг (получая при этом кортежи (5.17)) с сохранением всех основных свойств: система $1'$) – $4'$) преобразуется в $1''$) – $4''$). После выполнения конечного числа шагов типа б) будет достигнута ситуация а), отвечающая построению оптимальной пары маршрут-трасса.

Итак, на основе МДП конструируется оптимальное решение задачи (2.11). В основе этой процедуры лежит уравнение Беллмана. Схема наших действий заключается в следующем: находясь в состоянии $x \in \mathbf{X}$ и располагая «списком» индексов в виде множества $K \in \mathfrak{N}$, характеризующим невыполненные на текущий момент задания, мы выбираем индекс

$$\mathbf{j} \in \mathbf{I}(K) \tag{5.18}$$

и упорядоченную пару

$$\mathbf{z} \in A_{\mathbf{j}}(x) \times A_{\mathbf{j}}(x), \tag{5.19}$$

являющиеся решением задачи

$$\mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(z)) + c_j(z) + \mathbb{V}(\mathtt{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \to \min, \quad j \in \mathbf{I}(K), \quad z \in A_j(x) \times A_j(x), \tag{5.20}$$

что выражается (см. теорему 1) равенством

$$\mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(\mathbf{z})) + c_{\mathbf{j}}(\mathbf{z}) + \mathbb{V}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{z}), K \setminus \{\mathbf{j}\}) = \mathbb{V}(x, K).$$

Итак, (5.18), (5.19) следует выбрать среди решений задачи (5.20). Данную процедуру следует повторять вплоть до исчерпывания полного «списка» $\overline{1,N}$. В рамках этой схемы мы должны располагать функцией Беллмана $\mathbb{V}$; построение массива значений этой функции связано с трудностями вычислений и практически может быть реализовано лишь для задач малой размерности. В то же время задачу (5.20) можно рассматривать как некоторую логическую основу при построении эвристик. Этот вопрос рассматривается в следующем разделе.

§ 6. Некоторые эвристики, использующие структуру уравнения Беллмана

Предположим, что вместо функции Беллмана $\mathbb{V}$ мы располагаем зависимостью

$$\mathcal{V} : \mathbf{X} \times \mathbf{N} \to [0, \infty[, \tag{6.1}$$

реализующей при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathbf{N}$ некоторую оценку перспективных затрат по посещению сечений мультифункций A_k, $k \in K$, из состояния x. Задача (5.20) трансформируется в этом случае (при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$) в задачу

$$\mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(z)) + c_j(z) + \mathcal{V}(\mathtt{pr}_2(z), K \backslash \{j\}) \to \min, \quad j \in \mathbf{I}(K), \quad z \in A_j(x) \times A_j(x). \tag{6.2}$$

Рассмотрим краткую схему построения решения на основе правил (6.1), (6.2).

Итак, полагаем $\mathbf{u}^{(0)} \triangleq \left(x^0, x^0\right)$; $\mathbf{u}^{(0)} \in \mathbf{X} \times \mathbf{X}$. Решаем задачу (6.2) при $x = x^0 = \mathtt{pr}_2\left(\mathbf{u}^{(0)}\right)$ и $K = \overline{1, N}$: выбираем $\mathbf{k}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$ и $\mathbf{u}^{(1)} \in A_{\mathbf{k}_1}\left(x^0\right) \times A_{\mathbf{k}_1}\left(x^0\right)$ такими, что

$$\mathbf{c}\left(x^0, \mathtt{pr}_1\left(\mathbf{u}^{(1)}\right)\right) + c_{\mathbf{k}_1}\left(\mathbf{u}^{(1)}\right) + \mathcal{V}\left(\mathtt{pr}_2\left(\mathbf{u}^{(1)}\right), \overline{1, N} \backslash \{\mathbf{k}_1\}\right) =$$
$$= \min_{j \in \mathbf{I}\left(\overline{1, N}\right)} \min_{z \in A_j(x^0) \times A_j(x^0)} \left[\mathbf{c}\left(x^0, \mathtt{pr}_1(z)\right) + c_j(z) + \mathcal{V}\left(\mathtt{pr}_2(z), \overline{1, N} \backslash \{j\}\right)\right]. \tag{6.3}$$

Перемещение на множество $A_{\mathbf{k}_1}\left(x^0\right) = A_{\mathbf{k}_1}\left(\mathtt{pr}_2(\mathbf{u}^{(0)})\right)$ осуществляется в пункт прибытия $\mathtt{pr}_1(\mathbf{u}^{(1)})$, после чего выполняются внутренние работы с затратами $c_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{u}^{(1)})$, завершающиеся в пункте отправления $\mathtt{pr}_2(\mathbf{u}^{(1)})$. Получаем новую позицию $\left(\mathtt{pr}_2\left(\mathbf{u}^{(1)}\right), \overline{1, N} \backslash \{\mathbf{k}_1\}\right) \in \mathbf{X} \times \mathfrak{N}$. Теперь мы решаем задачу (6.2) при $K = \overline{1, N} \backslash \{\mathbf{k}_1\}$ и $x = \mathtt{pr}_2\left(\mathbf{u}^{(1)}\right)$, определяя $\mathbf{k}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \backslash \{\mathbf{k}_1\})$ и $\mathbf{u}^{(2)} \in A_{\mathbf{k}_2}\left(\mathtt{pr}_2\left(\mathbf{u}^{(1)}\right)\right) \times A_{\mathbf{k}_2}\left(\mathtt{pr}_2\left(\mathbf{u}^{(1)}\right)\right)$ из условия

$$\mathbf{c}\left(\mathtt{pr}_2\left(\mathbf{u}^{(1)}\right), \mathtt{pr}_1\left(\mathbf{u}^{(2)}\right)\right) + c_{\mathbf{k}_2}\left(\mathbf{u}^{(2)}\right) + \mathcal{V}\left(\mathtt{pr}_2\left(\mathbf{u}^{(2)}\right), \overline{1, N} \backslash \{\mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2\}\right) =$$
$$= \min_{j \in \mathbf{I}\left(\overline{1, N} \backslash \{\mathbf{k}_1\}\right)} \min_{z \in A_j\left(\mathtt{pr}_2\left(\mathbf{u}^{(1)}\right)\right) \times A_j\left(\mathtt{pr}_2\left(\mathbf{u}^{(1)}\right)\right)} \Bigg[\mathbf{c}\left(\mathtt{pr}_2\left(\mathbf{u}^{(1)}\right), \mathtt{pr}_1(z)\right) +$$
$$+ c_j(z) + \mathcal{V}\left(\mathtt{pr}_2(z), \overline{1, N} \backslash \{\mathbf{k}_1; j\}\right)\Bigg], \tag{6.4}$$

после чего перемещаемся на множество $A_{\mathbf{k}_2}\left(\mathtt{pr}_2\left(\mathbf{u}^{(1)}\right)\right)$: $\mathtt{pr}_1\left(\mathbf{u}^{(2)}\right)$ — пункт прибытия, $\mathtt{pr}_2\left(\mathbf{u}^{(2)}\right)$ — пункт последующего отправления, $c_{\mathbf{k}_2}\left(\mathbf{u}^{(2)}\right)$ — затраты на выполнение (внутренних) работ на множестве $A_{\mathbf{k}_2}\left(\mathtt{pr}_2\left(\mathbf{u}^{(1)}\right)\right)$.

Дальнейшие построения аналогичны и, в конечном итоге, приводят к реализации кортежей

$$(\mathbf{k}_i)_{i \in \overline{1, N}} : \overline{1, N} \to \overline{1, N}, (\mathbf{u}_i)_{i \in \overline{0, N}} : \overline{0, N} \to \mathbf{X} \times \mathbf{X}, \tag{6.5}$$

для которых справедливы следующие свойства:

$$\mathbf{u}^{(0)} = \left(x^0, x^0\right);$$
$$\mathbf{k}_j \in \mathbf{I}\left(\overline{1, N} \backslash \{\mathbf{k}_l : l \in \overline{1, j-1}\}\right) \quad \forall j \in \overline{1, N}; \tag{6.6}$$
$$\mathbf{u}_j \in A_{\mathbf{k}_j}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{u}_{j-1})) \times A_{\mathbf{k}_j}(\mathtt{pr}_2(\mathbf{u}_{j-1})) \quad \forall j \in \overline{1, N}; \tag{6.7}$$
$$\mathbf{c}\left(\mathtt{pr}_2\left(\mathbf{u}^{(j-1)}\right), \mathtt{pr}_1\left(\mathbf{u}^{(j)}\right)\right) + c_{\mathbf{k}_j}\left(\mathbf{u}^{(j)}\right) + \mathcal{V}\left(\mathtt{pr}_2\left(\mathbf{u}^{(j)}\right), \overline{1, N} \backslash \{\mathbf{k}_s : s \in \overline{1, j}\}\right) =$$
$$= \min_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}\left(\overline{1, N} \backslash \{\mathbf{k}_s : s \in \overline{1, j-1}\}\right)} \min_{z \in A_{\mathbf{i}}\left(\mathtt{pr}_2\left(\mathbf{u}^{(j-1)}\right)\right) \times A_{\mathbf{i}}\left(\mathtt{pr}_2\left(\mathbf{u}^{(j-1)}\right)\right)} \left[\mathbf{c}\left(\mathtt{pr}_2\left(\mathbf{u}^{(j-1)}\right), \mathtt{pr}_1(z)\right) +\right.$$
$$\left. + c_{\mathbf{i}}(z) + \mathcal{V}\left(\mathtt{pr}_2(z), (\overline{1, N} \backslash \left\{\mathbf{k}_s : s \in \overline{1, j-1}\right\}) \backslash \{\mathbf{i}\}\right)\right] \quad \forall j \in \overline{1, N}.$$

Заметим, что из (6.6) вытекает, в частности, что

$$\mathbf{k}_j \in \overline{1, N} \backslash \left\{\mathbf{k}_l : l \in \overline{1, j-1}\right\} \quad \forall j \in \overline{1, N}. \tag{6.8}$$

В свою очередь, из (6.8) следует инъективность первого отображения в (6.5). В самом деле, пусть $s_1 \in \overline{1,N}$ и $s_2 \in \overline{1,N} \setminus \{s_1\}$. Тогда

$$\big(s_1 \in \overline{1, s_2 - 1}\big) \vee \big(s_2 \in \overline{1, s_1 - 1}\big)\,. \tag{6.9}$$

Если $s_1 \in \overline{1, s_2 - 1}$, то, поскольку согласно (6.8) имеем включение

$$\mathbf{k}_{s_2} \in \overline{1,N} \setminus \big\{\mathbf{k}_l : l \in \overline{1, s_2 - 1}\big\}\,,$$

справедливо свойство $\mathbf{k}_{s_1} \neq \mathbf{k}_{s_2}$. Если же $s_2 \in \overline{1, s_1 - 1}$, то используем следующий вариант (6.8):

$$\mathbf{k}_{s_1} \in \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_l : l \in \overline{1, s_1 - 1}\};$$

как следствие, снова имеем $\mathbf{k}_{s_1} \neq \mathbf{k}_{s_2}$. Итак, во всех возможных случаях $\mathbf{k}_{s_1} \neq \mathbf{k}_{s_2}$. Поскольку выбор s_1 и s_2 был произвольным, свойство инъективности первого отображения в (6.5) установлено, а тогда

$$(\mathbf{k}_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathbb{P}. \tag{6.10}$$

Из (6.10) следует, в частности, что справедлива система равенств

$$\{\mathbf{k}_i : i \in \overline{s,N}\} = \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_i : i \in \overline{1, s-1}\} \quad \forall s \in \overline{1,N}.$$

Поэтому с учетом (6.6) получаем, как следствие, что

$$\mathbf{k}_s \in \mathbf{I}(\{\mathbf{k}_i : i \in \overline{s,N}\}) \quad \forall s \in \overline{1,N}.$$

Теперь из (3.3) и (3.12) получаем (см. (6.10)), что

$$(\mathbf{k}_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathbb{A}. \tag{6.11}$$

Итак, алгоритм, основанный на последовательном решении вариантов задачи (6.2) (складывающихся по мере развития процесса), непременно приводит к допустимым маршрутам. В свою очередь, из (6.7) вытекает (см. (2.4)), что

$$(\mathbf{u}_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{X}\left[(\mathbf{k}_i)_{i \in \overline{1,N}}\right]. \tag{6.12}$$

Итак, эвристика на основе задачи (6.2) непременно реализует (см. (6.11), (6.12)) пару маршрут-трасса из $\mathbf{S}$:

$$\Big((\mathbf{k}_i)_{i \in \overline{1,N}}, (\mathbf{u}_i)_{i \in \overline{0,N}}\Big) \in \mathbf{S} \tag{6.13}$$

(допустимое решение основной задачи).

В заключении раздела приведем три простейших варианта функции $\mathcal{V}$ (6.1), применение которых приводит к быстрым алгоритмам, реализующим свойство (6.13).

1. Жадный алгоритм. Полагаем, что функция $\mathcal{V}$ тождественно равна нулю. В этом случае задача (6.2) имеет (при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$) следующий вид:

$$\mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(z)) + c_j(z) \to \min, \quad j \in \mathbf{I}(K), \quad z \in A_j(x) \times A_j(x). \tag{6.14}$$

Задача (6.14) представляет собой развитие очевидного правила «иди в ближайший город» (терминология ЗК). В связи с данным вариантом напомним о жадном алгоритме в работе [21].

2. Жадный алгоритм с прогнозом на один шаг. Полагаем, что $\mathcal{V}$ (6.1) определяется следующим правилом: если $x \in \mathbf{X}$, то $\mathcal{V}(x, \varnothing) \triangleq \mathbf{f}(x)$; если при этом $K \in \mathfrak{N}$, то

$$\mathcal{V}(x, K) \triangleq \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in A_j(x) \times A_j(x)} [\mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(z)) + c_j(z)]. \tag{6.15}$$

Эту функцию (см. (6.15)) следует применять в задаче (6.2): при $x \in \mathbf{X}$, $K \in \mathfrak{N}$, $j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in A_j(x) \times A_j(x)$ следует использовать $\mathcal{V}(\mathtt{pr}_2(z), K \backslash \{j\}) \in [0, \infty[$.

3. Комбинированный алгоритм с управляющим параметром. Фиксируем $\alpha \in [0, \infty[$ и полагаем, что функция $\mathcal{V}$ (6.1) имеет вид: если $x \in \mathbf{X}$, то $\mathcal{V}(x, \varnothing) \triangleq \mathbf{f}(x)$ и

$$\mathcal{V}(x, K) \triangleq \alpha \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in A_j(x) \times A_j(x)} [\mathbf{c}(x, \mathtt{pr}_1(z)) + c_j(z)] \quad \forall K \in \mathfrak{N}$$

(параметр α можно изменять в интересах достижения лучшего качества посредством варьирования «жадной компоненты» в составе совокупного алгоритма).

§ 7. Вычислительный эксперимент

В настоящем разделе приведены конкурентные примеры использования алгоритмов § 6. Рассматриваем далее задачи на плоскости: $\mathbf{X} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; $x^0 = (0, 0)$ (база — в «нуле»). Операторы (2.6) определяются следующим образом: если $i \in \overline{1, N}$ и $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{X}$, то $A_i(x)$ предполагается четырехэлементным множеством, элементами которого являются $(x_1 + r_i, x_2)$, $(x_1, x_2 + r_i)$, $(x_1 - r_i, x_2)$, $(x_1, x_2 - r_i)$; здесь $r_i \in]0, \infty[$ — заданное число.

Внутренние работы состоят в следующем: при $i \in \overline{1, N}$ предполагается заданным вектор $a_i \in \mathbf{X}$; если $x_1 \in \mathbf{X}$ и $x_2 \in \mathbf{X}$, то при $\mathbf{x} \triangleq (x_1, x_2)$

$$c_i(\mathbf{x}) \triangleq ||x_1 - a_i|| + ||a_i - x_2||,$$

где $|| \cdot ||$ есть (здесь и ниже) евклидова норма на плоскости $\mathbf{X}$. Итак, с каждым оператором (2.1) связывается точка посещения, попадать в которую можно только через «порт прибытия» в виде точки $A_i(\mathbf{x})$ и покидать которую следует через «порт отправления» в виде точки $A_i(\mathbf{x})$; «порт отправления» при этом может совпадать с «портом прибытия».

Мы полагаем, что $\mathbf{c}$ в (2.5) определяется евклидовым расстоянием между точками $\mathbf{X}$ (расстояния на плоскости). Функцию $\mathbf{f}$ в (2.5) полагаем тождественно равной нулю.

1. Задача без условий предшествования.

В этом пункте полагаем, что $\mathbf{K} = \varnothing$. Сначала приведем варианты решения задач малой размерности с целью «визуального» сравнения алгоритмов § 6.

Рассмотрим случай, в котором лучший (в сравнении с жадным алгоритмом) результат показывает алгоритм с прогнозом.

Таблица 1

Исходные данные

i	r_i	a_i
1	3	(4;1)
2	1	(-4;2)
3	2	(-5;-4)
4	4	(7;-2)
5	5	(10;4)

Таблица 2

Результаты работы алгоритмов

Алгоритм	α	**Результат**
Жадный	0	74,48944
С прогнозом	1	54,80126
С управлением	[0.6, 0.9]	53,95233

Здесь и ниже, указывая промежуток (замкнутый) значений параметра α, мы имеем в виду, что результат счета обнаруживает постоянство на данном промежутке.

Рассмотрим случай, в котором «жадный» алгоритм работает лучше, чем алгоритм с прогнозом.

Таблица 3

Исходные данные

i	r_i	a_i
1	3	(-6;-7)
2	1	(-10;-10)
3	2	(7;2)
4	4	(2;-4)
5	5	(1;-8)

Таблица 4

Результаты работы алгоритмов

Алгоритм	α	**Результат**
Жадный	0	88,18848
С прогнозом	1	90,51008
С управлением	[0.41, 0.51]	85,66595

Отметим совсем кратко результаты применения алгоритмов § 6 в задаче большей размерности, а именно: при $N = 70$. По соображениям объема опускаем указание конкретных значений a_i и r_i при $i \in \overline{1,70}$. Приводим только достигаемые результаты, времена счета в секундах и, в случае третьего алгоритма в § 6, оптимальное (с точностью до дискретизации) значение управляющего параметра.

Таблица 5

Результаты работы алгоритмов

Алгоритм	α	**Результат**	**Время работы, с**
Жадный	0	4748,692	0,277344
С прогнозом	1	4713,961	171,207
С управлением	[0.75, 0.8]	4422,998	170,1836

2. Задача с условиями предшествования.

В этом пункте полагаем, что $\mathbf{K} \neq \varnothing$. Снова рассмотрим сначала задачи малой размерности, считая здесь множество $\mathbf{K}$ одноэлементным; на этих примерах осуществляется «визуальное» сравнение алгоритмов § 6.

Рассмотрим случай, в котором лучший (в сравнении с «жадным» алгоритмом) результат показывает алгоритм с прогнозом и $\mathbf{K} = \{(2,4)\}$.

Таблица 6

Исходные данные

i	r_i	a_i
1	3	(4;1)
2	1	(-4;2)
3	2	(-5;-4)
4	4	(7;-2)
5	5	(10;4)

Т а б л и ц а 7

Результаты работы алгоритмов

Алгоритм	α	**Результат**
Жадный	0	72,31632
С прогнозом	1	54,80126
С управлением	[0.58, 1.3]	54,80126

Рассмотрим случай, в котором «жадный» алгоритм доставляет результат лучший, чем алгоритм с прогнозом и $\mathbf{K} = \{(1, 3)\}$.

Т а б л и ц а 8

Исходные данные

i	r_i	a_i
1	3	(-6;-7)
2	1	(-10;-10)
3	2	(7;2)
4	4	(2;-4)
5	5	(1;-8)

Т а б л и ц а 9

Результаты работы алгоритмов

Алгоритм	α	**Результат**
Жадный	0	87,79597
С прогнозом	1	90,40372
С управлением	[0.8, 0.9]	54,80126

В заключение приведем результаты, полученные при использовании алгоритмов § 6 в случае $N = 70$ и при условии, что множество $\mathbf{K}$ десятиэлементно.

Т а б л и ц а 10

Результаты работы алгоритмов

Алгоритм	α	**Результат**	**Время работы, с**
Жадный	0	5004,756	0,617188
С прогнозом	1	4498,926	288,7227
С управлением	[0.75, 0.8]	4383,077	294,3984

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.
2. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3–29.
3. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3–26.
4. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
5. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
6. Хелд М., Карп Р.М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.
7. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. М.: Наука, 2007. 304 с.

8. Henry-Labordere A.L. The record-balancing problem: a dynamic programming solution of a generalized traveling salesman problem // R. I. R. O. 1969. Vol. 3. № 2. P. 43–49.
9. Laporte G., Nobert Y. Generalized traveling salesman problem through n-sets of nodes: an integer programming approach // INFOR. 1983. Vol. 21. № 1. P. 61–75.
10. Лейтен А.К. Некоторые модификации задачи коммивояжера // Труды Вычисл. центра Тарт. ун-та. 1973. Вып. 28. С. 44–58.
11. Меламед И.И., Плотинский Ю.М. Эвристический алгоритм решения обобщенной задачи развозки // Автоматика и телемеханика. 1979. № 29. С. 167–172.
12. Плотинский Ю.М. Общая задача развозки // Автоматика и телемеханика. 1973. № 6. С. 100–104.
13. Коротаева Л.Н., Сесекин А.Н., Ченцов А.Г. Об одной модификации метода динамического программирования в задаче последовательного сближения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 8. С. 1107–1113.
14. Коротаева Л.Н., Трухин М.П., Ченцов А.Г. К вопросу о маршрутизации соединений // Автоматика и телемеханика. 1997. № 12. С. 175–192.
15. Зобнин Б.Б., Коротаева Л.Н., Ченцов А.Г. Об одной задаче маршрутной оптимизации и ее приложениях // Проблемы передачи информации. 1997. Т. 33. Вып. 4. С. 70–87.
16. Ченцов А.А., Ченцов А.Г. О решении задачи маршрутной оптимизации методом динамического программирования // Автоматика и телемеханика. 1998. № 9. С. 117–129.
17. Ченцов А.А., Ченцов А.Г. О решении задачи маршрутной оптимизации методом динамического программирования // Известия РАН. Теория и системы управления. 1999. № 3. С. 76–87.
18. Ченцов А.Г. О структуре одной экстремальной задачи маршрутизации с ограничениями в виде условий предшествования // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2006. № 1. С. 127–148.
19. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Маршрутизация с условиями предшествования (задача курьера): метод динамического программирования // Вестник УГТУ–УПИ. На передовых рубежах науки и инженерного творчества. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2004. Ч. 1. № 15 (45). С. 148–152.
20. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований. 2008. 240 с.
21. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Экстремальная задача маршрутизации с внутренними потерями // Труды ИММ УрО РАН. 2008. Т. 14. № 3. С. 183–201.
22. Ченцов А.Г. Метод динамического программирования в экстремальных задачах маршрутизации с ограничениями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 3. С. 52–66.
23. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Экстремальная задача маршрутизации перемещений с ограничениями и внутренними потерями // Известия высших учебных заведений. Математика. 2010. № 6. С. 64–81.
24. Кормен А., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы. Построения и анализ. М.: МЦНМО, 2007. 1296 с.

Поступила в редакцию 09.02.2011

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., профессор, член-корреспондент РАН, зав. отделом управляемых систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Чеблоков Илья Борисович, аспирант, кафедра вычислительных методов и уравнений математической физики, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: bald66@inbox.ru

I. B. Cheblokov, A. G. Chentsov
About one route problem with interior works

Keywords: route, permutation, trace, Bellman function.

Mathematical Subject Classifications: 76D55, 90C27

The route problem about visiting of multifunction sections with constraints of type of preceding conditions is considered. By setting of this problem the fulfilment of works on the above-mentioned sections is provided. Any solution is defined in the form of the ordered pair for which components have the sense of the route (the index permutation) and the trace (trajectory) of the movements with respect to sections of multifunctions. The agreement of the trace and route is realized by procedures of the sequential choice of ordered pairs (the point of arrival and the starting point) of Descartes «squares» of the multifunction sections numbered in correspondence with a route. The cost aggregation is presupposed additive; the total criterion includes the costs of (exterior) movements between sections of multifunctions, interior works, and the final state. Under constructing of extension of the basic problem that realizes the used Bellman function, the equivalent transformation of constraints is applied: admissibility of routes by preceding is replaced onto admissibility by deletion of tasks (of the list) that corresponds to the constraints variant with respect to the current movements from one set onto another. An analog of the Bellman equation realized by procedure of the transformation of layers of Bellman function is obtained. The operation defining this transformation is further used for constructing of heuristic algorithms realized on PC.

REFERENCES

1. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. Traveling salesman problem. Questions of theory, *Avtomatika i Telemekhanika*, 1989, no. 9, pp. 3–34.

2. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. Traveling salesman problem. Precise algorithms, *Avtomatika i Telemekhanika*, 1989, no. 10, pp. 3–29.

3. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. Traveling salesman problem. Approximate algorithms, *Avtomatika i Telemekhanika*, 1989, no. 11, pp. 3–26.

4. Garey M., Johnson D. *Computers and Intractability*, 1979, 340 p. Translated under the title *Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi*, Moscow: Mir, 1982, 416 p.

5. Bellmann R. Application of dynamic programming to traveling salesman problem, *Kibernet. Sb.*, Moscow: Mir, 1964, vol. 9, pp. 219–228.

6. Kheld M., Karp R.M. Application of dynamic programming to the problem of ordering, *Kibernet. Sb.*, Moscow: Mir, 1964, vol. 9, pp. 202–218.

7. Sigal I.Kh., Ivanova A.P. *Vvedenie v prikladnoe diskretnoe programmirovanie: modeli i vychislitel'nye algoritmy* (Introduction in applied discrete programming: the models and computing algorithms), Moscow: Nauka, 2007, 304 p.

8. Henry-Labordere A.L. The record-balancing problem: a dynamic programming solution of a generalized traveling salesman problem, *R. I. R. O.*, 1969, vol. 3, no 2, pp. 43–49.

9. Laporte G., Nobert Y. Generalized traveling salesman problem through n-sets of nodes: an integer programming approach, *INFOR*, 1983, vol. 21, no 1, pp. 61–75.

10. Leiten A.K. Some modifications of traveling salesman problem, *Trudy Vychisl. Tsentra Tart. Univ.*, 1973, no. 28, pp. 44–58.

11. Melamed I.I., Plotinskii Yu.M. Heuristic algorithm for solving the generalized problem of delivery, *Avtomatika i Telemekhanika*, 1979, no. 29, pp. 167–172.

12. Plotinskii Yu.M. General problem of delivery, *Avtomatika i Telemekhanika*, 1973, no. 6, pp. 100–104.

13. Korotaeva L.N., Sesekin A.N., Chentsov A.G. About a modification of the dynamic programming method to the problem of sequential approach, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1989, vol. 29, no. 8, pp. 1107–1113.

14. Korotaeva L.N., Trukhin M.P., Chentsov A.G. To the issue of routing connections, *Avtomatika i Telemekhanika*, 1997, no. 12, pp. 175–192.

15. Zobnin B.B., Korotaeva L.N., Chentsov A.G. On a problem of routing optimization and its applications, *Problemy Peredachi Informatsii*, 1997, vol. 33, no. 4, pp. 70–87.

16. Chentsov A.A., Chentsov A.G. About solving the problem of routing optimization by method of dynamic programming, *Avtomatika i Telemekhanika*, 1998, no. 9, pp. 117–129.

17. Chentsov A.A., Chentsov A.G. About solving the problem of routing optimization by method of dynamic programming, *Izv. Akad. Nauk Teor. Sist. Upr.*, 1999, no. 3, pp. 76–87.

18. Chentsov A.G. About the structure of an extremal problem in routing restrictions as conditions of precedence, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat.*, 2006, no. 1, pp. 127–148.

19. Chentsov A.G., Chentsov P.A. Routing with the terms of precedence (task courier): a method of dynamic programming, *Vestn. Ural. Gos. Tekh. Univ. – Ural. Politekh. Inst.*, Yekaterinburg, USTU–UPI, 2004, vol. 1, no. 15 (45), pp. 148–152.

МАТЕМАТИКА 2012. Вып. 1

20. Chentsov A.G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadanii: voprosy teorii* (Extremal problems of routing and assignment of tasks: questions of theory), Izhevsk: Institute of Computer Science, 2008, 240 p.

21. Chentsov A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. Extreme routing problem with internal losses, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, Yekaterinburg, 2008, vol. 14, no. 3, pp. 183–201.

22. Chentsov A.G. Dynamic programming method in extremal problems with constraints routing, *Izv. Akad. Nauk Teor. Sist. Upr.*, 2010, no. 3, pp. 52–66.

23. Chentsov A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. Extreme movements of routing problem with constraints and internal losses, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, Kazan, 2010, no. 6, pp. 64–81.

24. Kormen A., Leizerson Ch., Rivest R. *Algoritmy. Postroenie i analiz* (The algorithms. Construction and analysis), Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2007, 1296 p.

Received 09.02.2011

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Cheblokov Il'ya Borisovich, post-graduate student, Department of Computational Methods and Mathematical Physics, Ural Federal University named after the First President of Russia B. N. Yeltsin, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: bald66@inbox.ru