УДК 517.917

© *Е. Л. Тонков*

ПРОСТРАНСТВО ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ И ЕГО КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВИТЕЛИ [1]

Для пространства линейных управляемых систем, параметризованных с помощью топологической динамической системы, построены для каждого инвариантного (относительно потока в фазовом пространстве динамической системы) пространства расширение и отвечающее ему перроновское преобразование, приводящее заданное семейство систем к так называемой канонической системе. Доказано также, что на минимальных инвариантных пространствах перроновское преобразование обладает свойством рекуррентности.

Ключевые слова: линейные управляемые системы, пространство управляемости, перроновское преобразование, динамические системы.

Введение

В 1930 году О. Перрон опубликовал [1] следующую теорему:
всякую линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{0.1}$$

с непрерывной вещественнозначной функцией $t \to A(t)$ *можно привести с помощью ортогонального ляпуновского преобразования* $x = P(t)y$ *(такое преобразование называется перроновским) к системе*

$$\dot{y} = F(t)y \tag{0.2}$$

с верхней треугольной матрицей $F(t)$.

Существенным дополнением к теореме Перрона служит доказанное в 1967 году В. М. Миллионщиковым [2] следующее утверждение:
линейная система (0.1) *с рекуррентной функцией* $t \to A(t)$ *приводима рекуррентным перроновским преобразованием* $x = P(t)y$ *к системе* (0.2) *с верхней треугольной рекуррентной функцией* $t \to F(t)$. *Более того, функции* $t \to A(t)$, $t \to P(t)$, $t \to F(t)$ *совместно рекуррентны.*

Аналог этой теоремы для семейства линейных управляемых систем

$$\dot{x} = A(f^t\sigma)x + B(f^t\sigma)u, \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{0.3}$$

был получен в 1997 году в нашей с С. Н. Поповой статье [3]:
пусть фазовое пространство Σ *топологической динамической системы* (Σ, f^t) *минимально и* r *— размерность пространства управляемости* $\mathcal{L}_\vartheta(\sigma)$ *системы* (0.3). *Тогда для каждого* $\sigma \in \Sigma$ *эта система приводима перроновским преобразованием* $x = P(t, \sigma)y$ *к системе*

$$\dot{y} = F(t, \sigma)y + G(t, \sigma)u, \tag{0.4}$$

причем матрица $F(t, \sigma)$ *верхняя треугольная, а последние* $n-r$ *строк* $(n \times m)$*-матрицы* $G(t, \sigma)$ *равны нулю.*

Такая система (0.4) была названа в статье [4] *каноническим представителем* системы (0.3). В этой работе, продолжающей исследования статьи [4], теорема о каноническом представителе распространена на достаточно общий класс линейных управляемых систем, кроме того, устранены замеченные в статье [4] пробелы в доказательствах двух теорем статьи [4] и эти теоремы дополнены новыми утверждениями.

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математическая теория управления», гранта Правительства РФ по государственной поддержке научных исследований (№11.G34.31.0039) и гранта РФФИ (12-01-00195-а).

§ 1. Вводный параграф

Пусть $\mathbb{R}^n$ — *стандартное* евклидово пространство [5] и, следовательно, в $\mathbb{R}^n$ фиксирован стандартный базис $e^1 \doteq \mathrm{col}(1,0\ldots 0)\ \ldots\ e^n \doteq \mathrm{col}(0\ldots 0,1)$, а запись $\mathbb{M}(n,m)$ означает пространство $(n\times m)$-матриц с нормой $|\cdot|$, согласованной с евклидовой нормой пространства $\mathbb{R}^n$, E — единичная матрица в $\mathbb{R}^n$.

Напомним [6, ч. II, гл. 1], что пара (Σ, f^t) называется *топологической динамической системой*, если Σ — полное метрическое пространство, называемое фазовым пространством динамической системы, а $\{f^t\}$ — поток на Σ, то есть однопараметрическая группа движений $f^t\colon \Sigma\to\Sigma$ ($f^{t+s}\sigma = f^t(f^s\sigma)$ при всех $t,s\in\mathbb{R}$) непрерывная по совокупности переменных (t,σ) и удовлетворяющая начальному условию $f^t\sigma|_{t=0}=\sigma$.

Множество $\mathrm{orb}(\sigma)\doteq\{f^t\sigma : t\in\mathbb{R}\}$ называется *траекторией* точки σ, $\overline{\mathrm{orb}}(\sigma)$ — *замыканием* траектории $\mathrm{orb}(\sigma)$, а множество $\mathcal{O}(\sigma)$, состоящее из всех частичных пределов *положительной полутраектории* $\mathrm{orb}_+(\sigma)\doteq\{f^t\sigma : t\in[0,\infty)\}$ при $t\to\infty$ — *омега-предельным* множеством точки σ. Аналогичные определения вводятся для *отрицательной* полутраектории $\mathrm{orb}_-(\sigma)$ и *альфа-предельного* множества $\mathcal{A}(\sigma)$ точки σ. Далее, заданное подмножество Σ_0 пространства Σ называется *инвариантным*, если для каждой точки σ множества Σ_0 вся траектория $\mathrm{orb}(\sigma)$ остается в пространстве Σ_0, и пространство Σ_0 называется *положительно инвариантным*, если для каждой точки σ пространства Σ_0 положительная полутраектория $\mathrm{orb}_+(\sigma)$ целиком содержится в Σ_0.

Напомним, кроме того, что фазовое пространство Σ динамической системы (Σ, f^t) называется *минимальным* (относительно потока f^t), если оно замкнуто и равенство $\overline{\mathrm{orb}}(\sigma)=\Sigma$ выполнено для любых $\sigma\in\Sigma$. Оказывается, что, как доказал Дж. Д. Биркгоф (см., например, [7, гл. V], [8]), *всякое инвариантное компактное множество содержит минимальное подмножество и любое движение в минимальном множестве рекуррентно.* Это означает, что для каждой точки $\sigma\in\Sigma$ и любых $\varepsilon>0$ и $\vartheta>0$ множество

$$\theta(\varepsilon,\vartheta,\sigma)\doteq\Big\{\tau\in\mathbb{R}\colon \max_{|t|\leqslant\vartheta}\rho(f^{t+\tau}\sigma, f^t\sigma)\leqslant\varepsilon\Big\} \tag{1.1}$$

(ε,ϑ)-почти периодов движения $t\to f^t\sigma$ относительно плотно на прямой $\mathbb{R}$ (для любых $\varepsilon>0$, $\vartheta>0$, найдется такое число $\ell=\ell(\varepsilon,\vartheta)$, что на любом отрезке $[t_0, t_0+\ell]$ длины ℓ найдется по крайней мере одна точка множества (1.1)).

Далее, если на фазовом пространстве Σ фиксированной топологической динамической системы (Σ, f^t) заданы две *непрерывные* функции $A\colon\Sigma\to\mathbb{M}(n,n)$ и $B\colon\Sigma\to\mathbb{M}(n,m)$, то будем говорить, что задано *семейство линейных управляемых систем*

$$\dot{x}=A(f^t\sigma)x+B(f^t\sigma)u,\quad (t,\sigma,x,u)\in\mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m. \tag{1.2}$$

Это семейство мы будем отождествлять с парой (S,Σ), где

$$S(\sigma)\doteq(A(\sigma),B(\sigma))\in\mathbb{M}(n,n+m)\,,\quad \sigma\in\Sigma\,, \tag{1.3}$$

а фиксированную систему семейств (S,Σ) — с парой (S,σ).

Замечание 1. В дальнейшем удобно считать, что семейство систем (S,Σ), заданных равенством (1.3), содержит, наряду с системой (1.2), все системы, полученные из системы (1.2) любым *ляпуновским* преобразованием $x=L(t,\sigma)y$. Напомним, что преобразование $x=L(t,\sigma)y$ называется ляпуновским, если функция $(t,\sigma)\to L(t,\sigma)$ непрерывна, функция $t\to L(t,\sigma)$ непрерывно дифференцируема и при каждом $\sigma\in\Sigma$ имеет место равенство

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\big(\,|L(t,\sigma)|+|dL(t,\sigma)/dt|+|L^{-1}(t,\sigma)|\,\big)<\infty.$$

Отметим также, что если при всех $(t,\sigma)\in\mathbb{R}\times\Sigma$ для ляпуновского преобразования $L(t,\sigma)$ выполнено равенство $L(t,\sigma)=L(0,f^t\sigma)$, то оно задаётся функцией одной переменной $L(\sigma)$ и называется *стационарным* ляпуновским преобразованием.

Пространство всех систем (S,σ) с непрерывными на Σ функциями $\sigma\to S(\sigma)$ обозначим $\mathfrak{S}$.

§ 2. Динамическая система сдвигов

Рассматриваемая здесь *динамическая система сдвигов* имеет право на самостоятельное существование не только потому, что в математической теории управления она играет совершенно особую роль, но и потому, что, как показал М.В. Бебутов [9], *всякая динамическая система, фазовое пространство которой локально компактно и имеет вторую аксиому счетности, гомеоморфна динамической системе сдвигов.*

Пусть фиксированы два целых числа n, m, где $n \geqslant m > 0$ и пространство $\mathfrak{X}$ непрерывных на числовой прямой $\mathbb{R}$ функций $t \to \varphi(t)$ со значениями в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{M}(n, n+m)$, где $\varphi(t) \doteq (A(t), B(t))$ задаёт управляемую систему (0.3), определенную функциями $t \to A(t) \in \mathbb{M}(n)$ и $t \to B(t) \in \mathbb{M}(n, m)$. Такое пространство мы снабдим метрикой Бебутова [7, с. 533]

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \min \Big\{ \, |\varphi(t) - \psi(t)|, \ |t|^{-1} \Big\}, \quad \varphi, \psi \in \mathfrak{X}. \tag{2.1}$$

Тогда имеют место следующие три леммы [9].

Лемма 1. *Пространство $\mathfrak{X}$ является полным сепарабельным метрическим пространством. Топология, порождаемая метрикой* (2.1), *эквивалентна топологии равномерной сходимости на отрезках* (*называемой еще локально компактной топологией*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственно из определения метрики (2.1) следует, что неравенство $\rho(\varphi, \psi) \leqslant \varepsilon$ влечет неравенство $|\varphi(t) - \psi(t)| \leqslant \varepsilon$, выполненное для всех t, удовлетворяющих неравенству $|t| \leqslant \varepsilon^{-1}$. Следовательно, из сходимости в метрике (2.1) последовательности $\{\varphi^k\}$ функций $\varphi^k \in \mathfrak{X}$ к функции $\varphi \in \mathfrak{X}$ следует сходимость $\varphi^k(t) \to \varphi(t)$, равномерная на каждом отрезке времени $I_\vartheta \doteq [-\vartheta, \vartheta]$.

Пусть теперь заданы последовательность $\{\varphi^k\}$, где $\varphi^k \in \mathfrak{X}$, и функция $t \to \varphi(t)$, определенная при всех $t \in \mathbb{R}$, принимающая значения в пространстве $\mathbb{M}(n, n+m)$. Предположим, что для любого отрезка I_ϑ сужение последовательности $\{\varphi^k\}$ на отрезок I_ϑ равномерно сходится к функции $t \to \varphi(t)$, $t \in I_\vartheta$. Следовательно, функция $t \to \varphi(t)$ непрерывна на числовой прямой $\mathbb{R}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется какой номер $k_0 = k_0(\varepsilon)$, что для каждого $k \geqslant k_0$ при всех t, удовлетворяющих неравенству $|t| \leqslant \varepsilon^{-1}$, выполнено неравенство $|\varphi^k(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon$. Из этих двух неравенств, как легко заметить, при каждом t следует неравенство

$$\min \Big\{ \, |\varphi^k(t) - \varphi(t)|, \ |t|^{-1} \Big\} \leqslant \varepsilon,$$

из которого ясно, что имеет место неравенство $\rho(\varphi^k, \varphi) \leqslant \varepsilon$. Мы показали, что сходимость последовательности $\{\varphi_k\}$ к φ в метрике ρ эквивалентна сходимости, равномерной на отрезках.

Отметим теперь, что пространство $\mathfrak{X}$ имеет счетную базу (например, счетную базу образует множество полиномов вида $a_0 t^k + \cdots + a_k$ с рациональными коэффициентами $a_0 \ldots a_k$ со значениями в пространстве $\mathbb{M}(n, n+m)$, $k = 0, 1 \ldots$). $\square$

Пусть $\varphi \in \mathfrak{X}$. Сдвиг функции φ на константу τ обозначим $\varphi_\tau : \varphi_\tau(t) \doteq \varphi(\tau + t)$, где t пробегает всю числовую прямую $\mathbb{R}$. Поток на $\mathfrak{X}$ определим равенством $h^\tau \varphi = \varphi_\tau$.

Лемма 2. *Пара* $(\mathfrak{X}, h^\tau)$ *образует топологическую динамическую систему* (*динамическую систему сдвигов*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $h^\tau \varphi$ принадлежит $\mathfrak{X}$ для любых $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathfrak{X}$. Кроме того, $h^\tau \varphi \big|_{\tau=0} = \varphi$ и $h^{\tau+s} = h^\tau h^s$. Далее, пусть $(\tau_k, \varphi^k) \to (\tau, \varphi)$, $k \to \infty$, тогда сходимость $h^{\tau_k} \varphi^k$ к $h^\tau \varphi$ следует из неравенства

$$|\varphi^k(t + \tau_k) - \varphi(t + \tau)| \leqslant |\varphi^k(t + \tau_k) - \varphi(t + \tau_k)| + |\varphi(t + \tau_k) - \varphi(t + \tau)|.$$

Лемма 3 (см. [9, теорема 1]). *Для любой ограниченной и равномерно непрерывной на* $\mathbb{R}$ *функции* $\varphi \in \mathfrak{X}$ *замыкание* $\overline{\mathrm{orb}}(\varphi)$ *траектории* $\mathrm{orb}(\varphi) \doteq \{h^t \varphi \colon \ t \in \mathbb{R}\}$ *компактно в метрике* (2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задано произвольное семейство функций $\{\psi\} \subset \overline{\mathrm{orb}}(\varphi)$. Покажем, что из этого семейства можно выделить сходящуюся в метрике Бебутова последовательность. В силу теоремы Арцела о компактности семейства $\{\psi(t) : |t| \leqslant \vartheta\}$ на любом отрезке $[-\vartheta, \vartheta]$ достаточно доказать, что семейство $\{\psi\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на числовой прямой $\mathbb{R}$. Действительно, для всякой функции ψ из этого семейства $\{\psi\}$ найдется последовательность $\{t_k(\psi)\}$ моментов времени $t_k = t_k(\psi)$, такая, что последовательность $\{h^{t_k}\varphi\}$ сходится к ψ в топологии равномерной сходимости на отрезках. Поэтому равномерная ограниченность семейства $\{\psi\}$ следует из неравенств $|\psi(t)| \leqslant |\psi(t) - \varphi_{t_k}(t)| + |\varphi_{t_k}(t)|$ и $\sup\limits_t |\psi(t)| \leqslant \sup\limits_t |\varphi(t)|$, а равностепенная непрерывность семейства $\{\psi\}$ функций — из свойств метрики Бебутова и неравенства

$$|\psi(t+\tau) - \psi(t)| \leqslant |\psi(t+\tau) - \varphi_{t_k}(t+\tau)| + |\psi(t) - \varphi_{t_k}(t)| + |\varphi_{t_k}(t+\tau) - \varphi_{t_k}(t)|, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

В силу сказанного каждой системе

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \tag{2.2}$$

с непрерывной функцией $t \to \varphi(t) = (A(t)B(t))$ мы можем теперь поставить в соответствие семейство линейных систем

$$\dot{x} = A_\tau(t)x + B_\tau(t)u, \tag{2.3}$$

где параметр τ пробегает числовую ось $\mathbb{R}$ и замыкание

$$\dot{x} = \widehat{A}(t)x + \widehat{B}(t)u \tag{2.4}$$

множества систем (2.3) в метрике (2.1).

Множество управляемых систем вида (2.3), где параметр τ пробегает числовую ось $\mathbb{R}$, будем называть *траекторией* системы (2.2), а множество систем вида (2.4) — *замыканием* траектории системы (2.2).

Замечание 2. Покажем, что с помощью простых переобозначений пространство линейных управляемых систем можно записать в компактном виде. Пространство систем вида (2.2) с метрикой Бебутова (2.1) обозначим Σ. В силу леммы 1 оно является полным, сепарабельным и каждая точка σ пространства Σ представляет систему вида (2.2), которую мы будем отождествлять с парой $\sigma = \big(A(\cdot), B(\cdot)\big)$. Далее, введем в рассмотрение две функции $F : \Sigma \to \mathbb{M}(n,n)$ и $G : \Sigma \to \mathbb{M}(n,m)$, определенные равенствами

$$F(\sigma) = A(0), \quad G(\sigma) = B(0), \quad \text{где} \quad \sigma = \big(A(\cdot), B(\cdot)\big) \in \Sigma.$$

Эти функции непрерывны. Действительно, если $\sigma_i = (A^i(\cdot), B^i(\cdot)),\ i = 1,2$, и $\rho(\sigma_1, \sigma_2) < \varepsilon$, то в силу определения метрики ρ выполнено неравенство $|A^1(0) - A^2(0)| + |B^1(0) - B^2(0)| < \varepsilon$ и, следовательно,

$$|F(\sigma_1) - F(\sigma_2)| = |A^1(0) - A^2(0)| < \varepsilon, \quad |G(\sigma_1) - G(\sigma_2)| = |B^1(0) - B^2(0)| < \varepsilon.$$

Введём теперь в рассмотрение динамическую систему сдвигов (Σ, f^t), где поток $f^t\sigma = \sigma_t$ на пространстве Σ определяется равенством $\sigma_t = \big(A(t+\cdot),\ B(t+\cdot)\big)$. В силу введенных в рассмотрение функций F и G пространство систем (2.2) записывается теперь в виде множества систем $\dot{x} = F(f^t\sigma)x + G(f^t\sigma)u$, снабженных параметром σ. Это множество можно записать в привычных обозначениях $\dot{x} = A(f^t\sigma)x + B(f^t\sigma)u$.

§ 3. Основные определения

Пусть (Σ, f^t) — произвольная топологическая динамическая система с полным сепарабельным фазовым пространством Σ. Оператор Коши системы

$$\dot{x} = A(f^t\sigma)x,$$

отождествляемой далее с парой (A, σ), обозначим $X(t, s, \sigma)$, а всякой управляемой системе (S, σ), где S определяется равенством

$$\dot{x} = A(f^t\sigma)x + B(f^t\sigma)u, \tag{3.1}$$

и каждому $\vartheta > 0$ поставим в соответствие линейное пространство

$$\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma) \doteq \int_0^\vartheta X(0, t, \sigma)B(f^t\sigma)\mathbb{R}^m\,dt \tag{3.2}$$

в $\mathbb{R}^n$, которое называется *пространством управляемости* системы (3.1) на отрезке времени $[0, \vartheta]$ и *множество управляемости*

$$\mathcal{D}_\vartheta(S, \sigma, U) \doteq \int_0^\vartheta X(0, t, \sigma)B(f^t\sigma)U\,dt$$

системы (3.1) с геометрическими ограничениями $U \subset \mathbb{R}^n$ на допустимые управления.

Несложно доказать [10, с. 46], что имеет место равенство

$$\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma) = \operatorname{Im} W_\vartheta(S, \sigma), \quad \text{где} \tag{3.3}$$

$$W_\vartheta(S, \sigma) \doteq \int_0^\vartheta X(0, t, \sigma)B(f^t\sigma)B^*(f^t\sigma)X^*(0, t, \sigma)dt,$$

а $\operatorname{Im} W_\vartheta(S, \sigma) \doteq W_\vartheta(S, \sigma)\mathbb{R}^n$ — подпространство в $\mathbb{R}^n$.

Далее, пусть $x = L(t, \sigma)y$ — невырожденное при всех t (но не обязательно ляпуновское) преобразование системы (3.1). Тогда система (C, σ) записывается в виде:

$$\dot{y} = F(t, \sigma)y + G(t, \sigma)u, \tag{3.4}$$

где $F(t, \sigma) = L^{-1}(t, \sigma)\big(A(f^t\sigma)L(t, \sigma) - \dot{L}(t, \sigma)\big)$, $G(t, \sigma) = L^{-1}(t, \sigma)B(f^t\sigma)$. Поэтому

$$X(t, s, \sigma) = L(t, \sigma)Y(t, s, \sigma)L^{-1}(s, \sigma).$$

Из всех этих соотношений получаем следующие утверждения.

Лемма 4. *Имеют место следующие равенства:*

$$\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma) = L(0, \sigma)\mathcal{L}_\vartheta(C, \sigma), \quad \mathcal{D}_\vartheta(S, \sigma, U) = L(0, \sigma)\mathcal{D}_\vartheta(C, \sigma, U),$$
$$W_\vartheta(S, \sigma) = L(0, \sigma)W_\vartheta(C, \sigma)L^*(0, \sigma), \quad \dim \mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma) = \operatorname{rank} W_\vartheta(S, \sigma).$$

Отметим кроме того, что если невырожденное преобразование $x = L(t, \sigma)y$ удовлетворяет при всех $\sigma \in \Sigma$ равенству $L(0, \sigma) = E$, то оно называется *нормированным* невырожденным преобразованием. Полезно отметить, что пространство управляемости $\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$, множество управляемости $\mathcal{D}_\vartheta(S, \sigma, U)$ и матрица Калмана $W_\vartheta(S, \sigma)$ инвариантны относительно невырожденных нормированных преобразований системы (S, σ). То есть имеют место равенства

$$\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma) = \mathcal{L}_\vartheta(C, \sigma), \quad \mathcal{D}_\vartheta(S, \sigma, U) = \mathcal{D}_\vartheta(C, \sigma, U), \quad W_\vartheta(S, \sigma) = W_\vartheta(C, \sigma).$$

Определение 1. Пусть задано инвариантное подмножество Σ_0 пространства Σ. Семейство (S, Σ_0) систем вида (3.1) назовем *регулярным*, если найдется такое число $\vartheta_0 > 0$, что для любых $\vartheta \geqslant \vartheta_0$ и всех $\sigma \in \Sigma_0$ размерность $\dim \mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$ пространства управляемости $\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$ системы (S, σ) постоянна.

Пример 1. В качестве важного примера *регулярного* семейства (S, Σ_0) систем может выступать инвариантное (относительно сдвигов по времени t) подмножество Σ_0 в пространстве Σ линейных управляемых систем (2.4), состоящее из замыкания множества сдвигов заданной почти периодической системы (2.2).

Определение 2. Пусть задано инвариантное подмножество Σ_0 пространства Σ. Регулярное семейство (S, Σ_0) систем вида (3.1) назовем *каноническим*, если:

1) для каждого целого $k \in \{1 \dots n\}$ и любой точки σ множества Σ_0 линейное пространство $L^k \doteq \text{lin}\{e^1 \dots e^k\}$ в $\mathbb{R}^n$ инвариантно относительно линейной системы

$$\dot{x} = A(f^t\sigma)x \tag{3.5}$$

(то есть если $x(t)$ — решение системы (3.5) и $x(0) \in L^k$, то $x(t) \in L^k$ для всех $t \in \mathbb{R}$);

2) найдутся целое $r \in \{1 \dots n\}$ и такое число $\vartheta_0 > 0$, что для каждой точки σ множества Σ_0 и всех $\vartheta \geqslant \vartheta_0$ имеет место равенство $\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma) = L^r$, где $r \doteq \dim \mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$, а пространство управляемости $\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$ определяется равенством (3.2).

Замечание 3. Из этого определения несложно вывести следующее утверждение: *семейство (S, Σ_0) является каноническим в том и только том случае, если для каждой точки σ множества Σ_0 матрица $A(\sigma)$ верхняя треугольная, а последние $n - r$ строк матрицы $B(\sigma)$ равны нулю.*

Напомним, что вещественное преобразование Ляпунова $x = P(t, \sigma)y$ системы (3.5) называется *преобразованием Перрона*, если в дополнение к свойствам, определяющим преобразование Ляпунова, $P(t, \sigma)$ является ортогональной матрицей (то есть $P(t, \sigma)P^*(t, \sigma) = E$) при всех t. Если, кроме уже сказанного, преобразование Перрона определяется равенством $x = P(f^t\sigma)y$, то оно называется *стационарным перроновским преобразованием* системы (A, σ). В отличие от нестационарного перроновского преобразования $x = P(t, \sigma)y$, стационарное задается независящей от времени t функцией $P : \Sigma \to \mathbb{M}(n)$.

Определение 3. Пусть заданы инвариантное подмножество Σ_0 пространства Σ и регулярное семейство (S, Σ_0). Подмножество (C, Σ_0), где $C(\sigma) = (F(\sigma), G(\sigma)) \in \mathbb{M}(n, n + m)$, $\sigma \in \Sigma_0$, семейства (S, Σ_0) будем называть *каноническим представителем*, если найдется стационарное перроновское преобразованием $x = P(f^t\sigma)y$, приводящее при каждом $\sigma \in \Sigma_0$ систему (S, σ) к канонической системе (C, σ). В этом случае

$$F(\sigma) = -P^{-1}(\sigma)\dot{P}(\sigma) + P^{-1}(\sigma)A(\sigma)P(\sigma), \quad G(\sigma) = P^{-1}(\sigma)B(\sigma).$$

Для формулировки основных утверждений статьи напомним определение расширения динамической системы. Пусть фиксированы две топологические динамические системы (Ω, g^t) и (Σ, f^t). Тогда [6, с. 164] система (Ω, g^t) называется *расширением* системы (Σ, f^t), а система (Σ, f^t) — *фактором* системы (Ω, g^t), если существует непрерывное отображение p пространства Ω на Σ, сопрягающее потоки (то есть $p(\Omega) = \Sigma$ и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \xrightarrow{\;p\;} & \Sigma \\ \big\downarrow{\scriptstyle g^t} & & \big\downarrow{\scriptstyle f^t} \\ \Phi & \xrightarrow{\;p\;} & \Sigma \end{array}$$

коммутативна: $pg^t = f^tp$). Такое отображение (сюръективный гомоморфизм [6, с. 164]) называется *проекцией.*

Простым примером расширения системы (Σ, f^t) служит следующая (используемая далее) конструкция. Пусть $(\mathfrak{X}, h^t)$ — еще одна топологическая динамическая система. Построим следующую топологическую динамическую систему: $\Omega = \Sigma \times \mathfrak{X}$, $\{g^t\}$ — поток на Ω, определенный равенством $g^t = (f^t, h^t)$, $p(\omega) = \sigma$ — проекция точки $\omega = (\sigma, x) \in \Omega$ на фазовое пространство Σ. Тогда система (Ω, g^t) является расширением системы (Σ, f^t).

Пусть заданы топологическая динамической система (Σ, f^t) и её расширение (Ω, g^t), где $\Omega = \Sigma \times \mathfrak{X}$, $g^t = (f^t, h^t)$, $(\mathfrak{X}, h^t)$ — топологическая динамическая система. Пусть, кроме того, задано семейство систем (S, Σ_0), где Σ_0 — инвариантное подмножество пространства Σ. Предполагается, что $S \subseteq \mathfrak{S}$. Таким образом, для каждой точки σ пространства Σ_0 и для любой точки $\omega = (\sigma, \mathfrak{x})$ множества $p^{-1}(\sigma)$ определена непрерывная на *инвариантном* (как легко заметить) подмножестве $\Omega_0 \doteq \rho^{-1}(\Sigma_0)$ пространства Ω функция

$$\omega \to \mathcal{S}(\omega) \doteq S(p(\omega)) = S(\sigma). \tag{3.6}$$

Построенная таким образом функция $\mathcal{S}(\omega) \doteq (\mathcal{A}(\omega), \mathcal{B}(\omega)) : \Omega_0 \to \mathbb{M}(n, n+m)$ порождает семейство $(\mathcal{S}, \Omega_0)$ систем $(\mathcal{S}, \omega)$ вида

$$\dot{x} = \mathcal{A}(g^t\omega)x + \mathcal{B}(g^t\omega)u, \quad (t, \omega, x, u) \in \mathbb{R} \times \Omega_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \tag{3.7}$$

Это новое семейство $(\mathcal{S}, \Omega_0)$ (назовем его *псевдорасширением* семейства (S, Σ_0)) фактически является другой записью семейства (S, Σ_0) (действительно, в силу равенства (3.6), для каждой точки σ множества Σ_0 все системы $(\mathcal{S}, \omega)$ на *слое*

$$\gamma(\sigma) \doteq \{\omega \in \Omega_0 \colon p(\omega) = \sigma\} \tag{3.8}$$

совпадают с системой (S, σ)). Поэтому для каждой системы $\sigma \in \Sigma_0$ и всех точек $\omega \in \gamma(\sigma)$ матрица Коши $\mathcal{X}(t, s, \omega)$ системы $(\mathcal{A}, \omega)$ совпадает с матрицей Коши $X(t, s, \sigma)$ системы (A, σ). Следовательно, *для каждой системы $\sigma \in \Sigma_0$ и всех точек ω на слое* (3.8) *имеет место равенство* $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \omega) = \mathcal{L}(S, \sigma)$.

§ 4. Основные утверждения статьи

Определение 4. Пусть (Σ, f^t) — топологическая динамическая система с *компактным* фазовым пространством Σ и (S, Σ) — *регулярное* семейство систем

$$\dot{x} = A(f^t\sigma)x + B(f^t\sigma)u \tag{4.1}$$

с непрерывными матрицами $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$. Каждой системе (S, σ) семейства (S, Σ) поставим в соответствие функцию, заданную равенством

$$t \to \Theta(t, \sigma) \doteq \big(S(f^t\sigma), P(t, \sigma), C(t, \sigma)\big) \in \mathbb{M}(n, 3n+2m), \tag{4.2}$$

где $S(\sigma) \doteq (A(\sigma), B(\sigma))$, $C(t, \sigma) \doteq (F(t, \sigma), G(t, \sigma))$ — управляемая система

$$\dot{y} = F(t, \sigma)y + G(t, \sigma)u, \tag{4.3}$$

а матрицы $P(t, \sigma)$, $F(t, \sigma)$ и $G(t, \sigma)$ удовлетворяют следующим условиям:
а) функция $(t, \sigma) \to P(t, \sigma)$ непрерывна на множестве $\mathbb{R} \times \Sigma$ и при каждом σ является перроновским преобразованием, приводящем систему (4.1) к системе (4.3);
б) $F(t, \sigma)$ — верхняя треугольная матрица, непрерывная по переменным t, σ и ограниченная на оси $\mathbb{R}$ для каждой точки $\sigma \in \Sigma$;
с) последние $n-r$ строк матрицы $G(t, \sigma) \doteq P^{-1}(t, \sigma)B(f^t\sigma)$, где $r \doteq \dim \mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$, тождественно равны нулю при всех $(t, \sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma$.

Построенную так функцию $t \to \Theta(t, \sigma)$ будем называть *правильной*.

Ниже будет показано, что правильные функции существуют (см. лемму 8).

Замечание 4. Отметим, что систему (C, σ) мы не можем назвать канонической потому, что функция $t \to C(t, \sigma)$ не обязана быть стационарной относительно потока f^t (напомним, что *функция $t \to C(t, \sigma)$ называется стационарной относительно потока f^t в том и только том случае, если $C(t, \sigma) = C(0, f^t \sigma)$ для всех t*). Простой пример, подтверждающий сказанное, это система (S, σ) с матрицей $S(\sigma) = (A, B)$, не зависящей от σ (если A не является верхней треугольной матрицей, то не найдется стационарного (в данном случае не зависящего от t) перроновского преобразования $x = Py$, приводящего S к канонической системе C с постоянной матрицей C).

Напомним ещё раз, что сдвиг функции $t \to \Theta(t)$ на константу τ мы обозначаем так: Θ_τ (таким образом, $\Theta_\tau(t) = \Theta(\tau + t)$ при всех t) и отметим, что *если функция $t \to \Theta(t, \sigma)$ правильная, то любой сдвиг такой функции — тоже правильная функция.*

Определение 5. Для каждой точки $\sigma \in \Sigma$ введем в рассмотрение пространство непрерывных функций $\mathfrak{X}(\sigma)$ (см. (4.2)), полученное из правильной функции $t \to \Theta(t, \sigma)$ замыканием (в топологии равномерной сходимости на отрезках) множества её сдвигов $\Theta_\tau(t, \sigma)$. Такое пространство можно рассматривать как *замыкание траектории движения точки* Θ, определенной равенством (4.2): $\mathfrak{X}(\sigma) = \overline{\operatorname{orb}}(\Theta(\cdot, \sigma))$.

Далее, для каждой точки $\sigma \in \Sigma$ введем в рассмотрение динамическую систему (Ω, g^t), по которой построим расширение динамической системы (Σ, f^t). Такая динамическая система определяется равенствами (см. равенство (4.2) и определение 5)

$$\Omega \doteq \{\omega = (\sigma, \Theta(\cdot, \sigma)) : \sigma \in \Sigma,\ \Theta(\cdot, \sigma) \in \mathfrak{X}(\sigma)\}, \quad g^t = (f^t, h^t). \tag{4.4}$$

Здесь Ω — фазовое пространство системы, снабженное метрикой $\rho_\Sigma(\sigma_1, \sigma_2) + \rho_{\mathfrak{X}}(\Theta_1, \Theta_2)$, где $\rho_{\mathfrak{X}}$ — метрика Бебутова, заданная равенством (2.1), $h^\tau \Theta(\cdot, \sigma) = \Theta(\cdot + \tau, \sigma)$.

Построим теперь функцию $\omega \to p(\omega)$, определенную равенством $p(\omega) = \sigma$. Тогда $p(\Omega) = \Sigma$ и, как легко понять, p сопрягает потоки f^t и h^t: $pg^t = f^t p$. Поэтому p — проекция расширения системы (Ω, g^t) на фактор (Σ, f^t).

Определим далее функцию $\Xi\colon \Omega \to \mathbb{M}(n, 3n + 2m)$ равенством

$$\Xi(\omega) = \Theta(0, p(\omega)) = (\mathcal{S}(\omega), \mathcal{P}(\omega), \mathcal{C}(\omega)),$$

где

$$p(\omega) = \sigma, \quad \mathcal{S}(\omega) = S(\sigma), \quad \mathcal{P}(\omega) = P(0, \sigma), \quad \mathcal{C}(\omega) = C(0, \sigma).$$

Тогда из равенства $pg^t = f^t p$ следует равенство $\Xi(g^t \omega) = \Theta(t, \sigma)$ (для всех $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$ и $\sigma = p(\omega)$). Поэтому семейство $(\mathcal{S}, \Omega)$ является псевдорасширением семейства (S, Σ) (см. равенства (3.6) и (3.7)), а функция $t \to \mathcal{P}(g^t \omega)$ — стационарным перроновским преобразованием, приводящим (для каждого $\omega \in \Omega$) систему $(\mathcal{S}, \omega)$ к канонической системе $(\mathcal{C}, \omega)$. Следовательно, семейство $(\mathcal{C}, \Omega)$ служит каноническим представителем семейства $(\mathcal{S}, \Omega)$.

Теорема 1. *Для всякой топологической динамической системы (Σ, f^t) с компактным фазовым пространством Σ и любого регулярного семейства (S, Σ) систем*

$$\dot{x} = A(f^t \sigma)x + B(f^t \sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \tag{4.5}$$

с непрерывными матрицами $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$ существует расширение (Ω, g^t) системы (Σ, f^t), построенное равенствами (4.4). Это расширение имеет компактное фазовое пространство и, в силу построения системы (Ω, g^t), псевдорасширение $(\mathcal{S}, \Omega)$ семейства систем (S, Σ) обладает каноническим представителем $(\mathcal{C}, \Omega)$.

В силу теоремы 1 псевдорасширение $(\mathcal{S}, \Omega)$ семейства (S, Σ), удовлетворяющего условиям теоремы 1, приводимо стационарным перроновским преобразованием $x = \mathcal{P}(g^t \omega)y$ к каноническому семейству $(\mathcal{C}, \Omega)$.

Теорема 2. *Для всякой топологической динамической системы (Σ, f^t) с минимальным фазовым пространством Σ и любого регулярного семейства (S, Σ) систем (4.5) с непрерывными матрицами $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$, существует расширение (Ω, g^t) системы (Σ, f^t), построенное равенствами (4.4). Оно имеет минимальное (относительно потока g^t) фазовое пространство Ω и в силу построения системы (Ω, g^t), отвечающее системе (Ω, g^t), псевдорасширение $(\mathcal{S}, \Omega)$ семейства (S, Σ) обладает каноническим представителем $(\mathcal{C}, \Omega)$.*

Из теоремы 2 следует, в частности, что если размерность пространства управляемости системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.6}$$

равна r и функции матрицы $t \to A(t)$ и $t \to B(t)$ *совместно рекуррентны*, то система (4.6) приводима рекуррентным перроновским преобразованием $x = P(t)y$ к системе

$$\dot{y} = F(t)y + G(t)u$$

с совместно рекуррентными функциями $t \to F(t)$ и $t \to G(t)$, причем $F(t)$ — верхняя треугольная, а последние $n - r$ строк матрицы $G(t)$ равны нулю. Более того, функция

$$t \to \big(A(t), B(t), P(t), F(t), G(t)\big)$$

тоже рекуррентна.

§ 5. Доказательства

Для доказательства теорем 1 и 2 нам понадобятся сформулированные ниже леммы.

Лемма 5. *Пусть $X(t, s, \sigma)$ — матрица Коши системы (A, σ) с непрерывной функцией $\sigma \to A(\sigma)$. Тогда функция $\sigma \to X(t, s, \sigma)$ непрерывна в каждой точке $\sigma_0 \in \Sigma$ равномерно относительно (t, s) на любом компакте в $\mathbb{R}^2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства

$$X(t, s, \sigma) = I + \int_s^t A(f^\tau \sigma) X(\tau, s, \sigma) d\tau, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

и леммы Гронуолла и Беллмана следует неравенство

$$|X(t, s, \sigma)| \leqslant \exp\big(a|t - s|\big), \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2,$$

где $a \doteq \sup_\sigma |A(\sigma)|$, $\sigma \in \Sigma$. Пусть $\sigma_0 \in \Sigma$, K — произвольный компакт в $\mathbb{R}^2$. Найдутся вещественные числа α и $\beta > 0$, что $K \subset G$, где $G = [\alpha, \alpha + \beta]^2$. Положим $v(t, s, \sigma) = |X(t, s, \sigma) - X(t, s, \sigma_0)|$. Из цепочки равенств

$$X(t, s, \sigma) - X(t, s, \sigma_0) = \int_s^t \big[A(f^\tau \sigma) X(\tau, s, \sigma) - A(f^\tau \sigma_0) X(\tau, s, \sigma_0))\big] d\tau =$$

$$= \int_s^t \big[A(f^\tau \sigma) X(\tau, s, \sigma) - A(f^\tau \sigma_0) X(\tau, s, \sigma))\big] d\tau + \int_s^t \big[A(f^\tau \sigma_0) X(\tau, s, \sigma) - A(f^\tau \sigma_0) X(\tau, s, \sigma_0))\big] d\tau$$

следует (при $\alpha \leqslant s \leqslant t \leqslant \alpha + \beta$) неравенство

$$v(t, s, \sigma) \leqslant c(\sigma) + a \int_s^t v(\tau, s, \sigma) d\tau, \tag{5.1}$$

$$\text{где} \quad c(\sigma) = \exp(a\beta) \int_\alpha^{\alpha+\beta} |A(f^\tau \sigma) - A(f^\tau \sigma_0)| d\tau.$$

Поэтому, в силу леммы Гронуолла и Беллмана, из (5.1) следует неравенство

$$v(t,s,\sigma) \leqslant c(\sigma)\exp(a\beta).$$

Так как $c(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to \sigma_0$, то $v(t,s,\sigma) \to 0$ при $\sigma \to \sigma_0$ равномерно относительно t, s, удовлетворяющих неравенствам $\alpha \leqslant s \leqslant t \leqslant \alpha+\beta$. Аналогично доказывается неравенство (5.1) и при $\alpha \leqslant t \leqslant s \leqslant \alpha+\beta$. □

Лемма 6 (см. [11, с. 141]). *Пусть* Σ *— полное метрическое пространство и при всех*

$$(t,s,\sigma) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\Sigma$$

задана симметрическая матрица $Q(t,s,\sigma) \in \mathbb{M}(n)$. *Если она определенно положительна, а функция* $(t,s,\sigma) \to Q(t,s,\sigma)$ *непрерывна и непрерывно дифференцируема по* t *и* s *при каждом* σ, *то существует единственная верхняя треугольная матрица* $Z(t,s,\sigma)$ *с положительными при всех* t,s,σ *диагональными элементами* $z_1(t,s,\sigma)\ldots z_n(t,s,\sigma)$, *являющаяся решением матричного уравнения*

$$Z^*Z = Q(t,s,\sigma). \tag{5.2}$$

Это решение непрерывно по (t,s,σ) *и непрерывно дифференцируемо по* t *и* s *при каждом* σ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если найдется верхняя треугольная матрица $Z(t,s,\sigma)$, удовлетворяющая уравнению (5.2), то

$$|\det Z(t,s,\sigma)| = |z_1(t,s,\sigma)|\cdots|z_n(t,s,\sigma)| = \sqrt{\det Q(t,s,\sigma)} > 0. \tag{5.3}$$

Поэтому $z_i(t,s,\sigma) \neq 0$ для всех t,s,σ.

При $n=1$ лемма очевидна ($z_1(t,s,\sigma) = \sqrt{Q(t,s,\sigma)}$). Допустим, что лемма доказана для каждого $k = 2\ldots n-1$. Запишем матрицы Z и $Q(t,s,\sigma)$ в блочном виде

$$Z = \begin{array}{|c|c|}\hline Z_{n-1} & z \\ \hline 0 & z_n \\ \hline\end{array}\,, \qquad Q(t,s,\sigma) = \begin{array}{|c|c|}\hline Q_{n-1} & q \\ \hline q^* & q_n \\ \hline\end{array}\,,$$

где Z_{n-1} — диагональный блок матрицы Z порядка $n-1$, z — вектор-столбец, занимающий вместе с z_n последний столбец матрицы Z, аналогично $Q_{n-1} = Q_{n-1}(t,s,\sigma)$, $q = q(t,s,\sigma)$ и $q_n = q_n(t,s,\sigma)$ для матрицы $Q(t,s,\sigma)$, причем матрица $Q_{n-1}(t,s,\sigma)$ определенно положительна. Тогда матричное уравнение (5.2) перепишется в виде системы уравнений

$$\begin{cases} Z^*_{n-1}Z_{n-1} = Q_{n-1}(t,s,\sigma), \\ Z^*_{n-1}z = q(t,s,\sigma), \\ |z|^2 + (z_n)^2 = q_n(t,s,\sigma). \end{cases} \tag{5.4}$$

В силу предположения индукции первое уравнение системы (5.4) имеет решение $Z_{n-1}(t,s,\sigma)$ с требуемыми свойствами. Поэтому из второго уравнения получаем равенство

$$z(t,s,\sigma) = Z^{*^{-1}}_{n-1}(t,s,\sigma)q(t,s,\sigma)$$

и, с учетом (5.3), находим

$$z_n(t,s,\sigma) = \frac{\sqrt{\det Q(t,s,\sigma)}}{z_1(t,s,\sigma)\cdots z_{n-1}(t,s,\sigma)} > 0.$$

Непрерывность по (t,s,σ) и непрерывная дифференцируемость по переменным t и s функций $z(t,s,\sigma)$ и $z_n(t,s,\sigma)$ следует из равенств (5.4). □

Лемма 7. *Пусть Z и $\widehat{Z}$ — верхние треугольные матрицы размерности n с положительными диагональными элементами и имеет место равенство $Z^*Z = \widehat{Z}^*\widehat{Z}$, тогда $Z = \widehat{Z}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 1$ утверждение очевидно. Допустим, что лемма доказана для каждого $k = 2 \ldots n-1$. Запишем матрицы Z и $\widehat{Z}$ в блочном виде

$$Z = \begin{array}{|c|c|} \hline \quad Z_{n-1} \quad & p \\ \hline 0 & z_n \\ \hline \end{array}\,, \qquad \widehat{Z} = \begin{array}{|c|c|} \hline \quad \widehat{Z}_{n-1} \quad & q \\ \hline 0 & \widehat{z}_n \\ \hline \end{array}\,,$$

где Z_{n-1} — диагональный блок матрицы Z порядка $n-1$, p — вектор-столбец, занимающий вместе с z_n последний столбец матрицы Z, аналогично $\widehat{Z}_{n-1}$, q и $\widehat{z}_n$ для матрицы $\widehat{Z}$. Тогда уравнение $Z^*Z = \widehat{Z}^*\widehat{Z}$ перепишется в виде системы

$$\begin{cases} Z_{n-1}^* Z_{n-1} = \widehat{Z}_{n-1}^* \widehat{Z}_{n-1}, \\ Z_{n-1}^* p = \widehat{Z}_{n-1}^* q, \\ |p\,|^2 + (z_n)^2 = |q\,|^2 + (\widehat{z}_n)^2. \end{cases} \tag{5.5}$$

Равенство $Z_{n-1} = \widehat{Z}_{n-1}$ уже доказано, поэтому, в силу невырожденности матрицы Z_{n-1} и второго уравнения системы (5.5), получаем равенство $p = q$. Обращаясь теперь к последнему уравнению системы (5.5) и учитывая положительность диагональных элементов матриц Z и $\widehat{Z}$, получаем равенство $z_n = \widehat{z}_n$. □

Лемма 8. *Пусть $\Phi(t,\sigma)$ — произвольная фундаментальная матрица системы (A,σ) с непрерывной и ограниченной на Σ функцией $\sigma \to A(\sigma)$, $Z(t,\sigma)$ — решение уравнения* (5.2) *с матрицей $Q(t,\sigma) \doteq \Phi^*(t,\sigma)\Phi(t,\sigma)$. Тогда:*

1) *найдется непрерывная по совокупности переменных t,σ верхняя треугольная матрица $F(t,\sigma)$ такая, что матрица*

$$Y(t,s,\sigma) \doteq Z(t,\sigma)Z^{-1}(s,\sigma) \tag{5.6}$$

является матрицей Коши системы

$$\dot{y} = F(t,\sigma)y; \tag{5.7}$$

2) *функция $(t,\sigma) \to F(t,\sigma)$ ограничена на $\mathbb{R} \times \Sigma$, а при каждом $\sigma \in \Sigma$ функция $t \to F(t,\sigma)$ равномерно непрерывна в топологии равномерной сходимости на отрезках (это означает, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $(t,\tau,\sigma) \in [-\vartheta,\vartheta] \times [-\delta,\delta] \times \Sigma$ выполнено неравенство $|F(t+\tau,\sigma) - F(t,\sigma)| \leqslant \varepsilon$);*

3) *для любой фиксированной точки $(t,\sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ матрица*

$$P(t,\sigma) \doteq \Phi(t,\sigma)Z^{-1}(t,\sigma) \tag{5.8}$$

ортогональна, имеет место неравенство $\sup\limits_{t,\sigma} |\dot{P}(t,\sigma)| < \infty$ и при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ преобразование $x = P(t,\sigma)y$ приводит систему (A,σ) к системе (F,σ). Следовательно, преобразование $x = P(t,\sigma)y$ является (не обязательно стационарным) перроновским преобразованием системы (A,σ).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F(t,\sigma) \doteq \dot{Z}(t,\sigma)Z^{-1}(t,\sigma)$. Покажем, что F обладает перечисленными свойствами. Так как произведение верхних треугольных матриц есть матрица верхняя треугольная, то $F(t,\sigma)$ — верхняя треугольная матрица. Далее, функция $t \to Z(t,\sigma)$ является решением матричного уравнения $\dot{Z} = F(t,\sigma)Z$. Следовательно, умножив тождество $\dot{Z}(t,\sigma) = F(t,\sigma)Z(t,\sigma)$ справа на $Z^{-1}(s,\sigma)$, получим тождество $\dot{Y}(t,s,\sigma) = F(t,\sigma)Y(t,s,\sigma)$. Так как выполнено равенство $Y(t,s,\sigma)|_{t=s} = I$, то $Y(t,s,\sigma)$ — матрица Коши системы (5.7). Тем самым свойство 1 доказано.

Покажем, что матрица $P(t,\sigma)$, определенная равенством (5.8), является ортогональной матрицей. Действительно,

$$P^*(t,\sigma)P(t,\sigma) = Z^{*^{-1}}(t,\sigma)\Phi^*(t,\sigma)\Phi(t,\sigma)Z^{-1}(t,\sigma) = Z^{*^{-1}}(t,\sigma)Z^*(t,\sigma)Z(t,\sigma)Z^{-1}(t,\sigma) = I.$$

Следовательно, $|P(t,\sigma)| = |P^{-1}(t,\sigma)| = 1$ для всех (t,σ). Далее, дифференцируя тождество

$$Z^*(t,\sigma)Z(t,\sigma) = \Phi^*(t,\sigma)\Phi(t,\sigma)$$

по переменной t и умножая его справа на $Z^{-1}(t,\sigma)$, а слева на $Z^{*^{-1}}(t,\sigma)$, приходим к следующим равенствам:

$$F^* + F = Z^{*^{-1}}\dot{Z}^* + \dot{Z}Z^{-1} = Z^{*^{-1}}(\dot{Z}^*Z + Z^*\dot{Z})Z^{-1} = Z^{*^{-1}}(\dot{\Phi}^*\Phi + \Phi^*\dot{\Phi})Z^{-1} =$$
$$= Z^{*^{-1}}\dot{\Phi}^*\Phi Z^{-1} + Z^{*^{-1}}\Phi^*\dot{\Phi}Z^{-1} = Z^{*^{-1}}\dot{\Phi}^*P + P^*\dot{\Phi}Z^{-1} = P^*A\Phi Z^{-1} + Z^{*^{-1}}\Phi^*A^*P,$$

из которых следует равенство

$$F^*(t,\sigma) + F(t,\sigma) = P^*(t,\sigma)\Big(A^*(f^t\sigma) + A(f^t\sigma)\Big)P(t,\sigma). \tag{5.9}$$

Поэтому из ограниченности функции $\sigma \to |A(\sigma)|$ на пространстве Σ, ортогональности $P(t,\sigma)$ и равенства (5.9) следует ограниченность функции $(t,\sigma) \to |F(t,\sigma)|$ на пространстве $\mathbb{R}\times\Sigma$.

Покажем теперь, что функция $t \to P(t,\sigma)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. Действительно,

$$\dot{P}(t,\sigma) = A(f^t\sigma)P(t,\sigma) - P(t,\sigma)F(t,\sigma),$$

поэтому, в силу ограниченности A, F, P, найдется $\ell < \infty$, что $|\dot{P}(t,\sigma)| \leqslant \ell$ для всех (t,σ). Из ограниченности $|\dot{P}(t,\sigma)|$ следует неравенство $|P(t+\tau,\sigma) - P(t,\sigma)| \leqslant \ell\,|\tau|$, обеспечивающее равномерную непрерывность $P(t,\sigma)$ по переменной t.

Обозначим $H = F^* + F$, $D = A^* + A$. Тогда, в силу (5.9), выполнено равенство

$$H(t+\tau,\sigma) - H(t,\sigma) = P^*(t+\tau,\sigma)D(f^{t+\tau}\sigma)\big[P(t+\tau,\sigma) - P(t,\sigma)\big] +$$
$$+ P^*(t+\tau,\sigma)\big[D(f^{t+\tau}\sigma) - D(f^t\sigma)\big]P(t,\sigma) + \big[P^*(t+\tau,\sigma) - P^*(t,\sigma)\big]D(f^t\sigma)P(t,\sigma).$$

Поэтому найдется такая константа $\beta < \infty$, что выполнено неравенство

$$|H(t+\tau,\sigma) - H(t,\sigma)| \leqslant \beta|P(t+\tau,\sigma) - P(t,\sigma)| + |D(f^{t+\tau}\sigma) - D(f^t\sigma)|.$$

Это доказывает (с учетом равномерной непрерывности потока $t \to f^t\sigma$ на отрезках и непрерывности $D(\sigma)$ на пространстве Σ) равномерную непрерывность функции $t \to H(t,\sigma)$, а следовательно, и функции $t \to F(t,\sigma)$.

Осталось доказать, что преобразование $x = P(t,\sigma)y$ приводит систему (A,σ) к системе (F,σ). Пусть $X(t,s,\sigma)$ — матрица Коши системы (A,σ). Тогда из (5.6) и (5.8) имеем

$$X(t,s,\sigma) = \Phi(t,\sigma)\Phi^{-1}(s,\sigma) = P(t,\sigma)Z(t,\sigma)Z^{-1}(s,\sigma)P^*(s,\sigma) = P(t,\sigma)Y(t,s,\sigma)P^*(s,\sigma).$$

Поэтому если $x(t,x_0,\sigma) = X(t,0,\sigma)x_0$ — решение системы (A,σ) дифференциальных уравнений и $y_0 = P^*(0,\sigma)x_0$, то $x(t,x_0,\sigma) = P(t,\sigma)y(t,y_0,\sigma)$, где $y(t,y_0,\sigma) = Y(t,0,\sigma)y_0$ — решение системы (F,σ). □

Лемма 9 (см. [12, § 20]). *Пусть система (S,σ) регулярна. Если имеет место неравенство $r < n$ (при достаточно больших ϑ и всех $\sigma \in \Sigma$), где $r \doteq \dim\mathcal{L}_\vartheta(S,\sigma)$, то найдется $n-r$ линейно независимых на отрезке $[0,\vartheta]$ решений $\psi_{r+1}(t,\sigma)\ldots\psi_n(t,\sigma)$ сопряженной системы*

$$\dot{\psi} = -\psi A(f^t\sigma) \tag{5.10}$$

таких, что

$$\psi_{r+1}(t,\sigma)B(f^t\sigma) \equiv 0, \ldots, \psi_n(t,\sigma)B(f^t\sigma) \equiv 0. \tag{5.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу отмеченного ранее равенства (3.3) найдется $n-r$ линейно независимых векторов $\xi_{r+1}\dots\xi_n$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ таких, что $\xi_k W_\vartheta(S,\sigma)=0,\ k=r+1\dots n$. Так как $\psi_k(t,\sigma)\doteq\xi_k X(0,t,\sigma)$ — решение сопряженной системы, то

$$\xi_k W_\vartheta(S,\sigma)\xi_k^*=\int_0^\vartheta|\psi_k(t,\sigma)B(f^t\sigma)|^2dt=0$$

и равенства (5.11) доказаны. □

Лемма 10. *Пусть нормированное (то есть $P(0,\sigma)=E$ при каждом $\sigma\in\Sigma$) перроновское преобразование $x=P(t,\sigma)y$ приводит систему (S,σ) к системе (C,σ). Тогда имеет место равенство $\mathcal{L}_\vartheta(S,\sigma)=\mathcal{L}_\vartheta(C,\sigma)$.*

Эта лемма содержится в лемме 4.

Лемма 11. *Пусть система (S,σ) регулярна и выполнено неравенство $r\doteq\dim\mathcal{L}_\vartheta(S,\sigma)<n$. Тогда для каждой точки $\sigma\in\Sigma$ найдется такая фундаментальная матрица $\Phi(t,\sigma)$ системы (A,σ), что последние $n-r$ строк матрицы $G(t,\sigma)\doteq P^*(t,\sigma)B(f^t\sigma)$, построенной с помощью перроновского преобразования $t\to P(t,\sigma)$, определенного равенством (5.8), тождественно равны нулю при всех t.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу равенства (5.8) и ортогональности матрицы P имеют место равенства $P^*(t,\sigma)=P^{-1}(t,\sigma)=Z(t,\sigma)\Phi^{-1}(t,\sigma)$. С другой стороны, если $\Psi(t,\sigma)$ — фундаментальная матрица сопряженной системы (5.10) и $\Psi(0,\sigma)\Phi(0,\sigma)=I$, то $\Psi(t,\sigma)\Phi(t,\sigma)\equiv I$. Следовательно, $\Psi(t,\sigma)=\Phi^{-1}(t,\sigma)$ и $P^*(t,\sigma)=Z(t,\sigma)\Psi(t,\sigma)$.

Пусть последние $n-r$ строк $\psi_{r+1}(t,\sigma)\dots\psi_n(t,\sigma)$ фундаментальной матрицы $\Psi(t,\sigma)$ системы (5.10) таковы, что (лемма 9) выполнены равенства (5.11), тогда последние $n-r$ строк матрицы $\Psi(t,\sigma)B(f^t\sigma)$ тождественно равны нулю на $[0,\sigma]$. Далее, поскольку матрица $Z(t,\sigma)$ — верхняя треугольная (лемма 6), то последние $n-r$ строк матрицы $G(t,\sigma)=Z(t,\sigma)\Psi(t,\sigma)B(f^t\sigma)$ тоже тождественно равны нулю. □

Прежде, чем сформулировать следующую лемму, отметим, что *включение $\widehat{\Theta}\in\mathfrak{X}(\Theta,\sigma)$, где $\Theta(t,\sigma)=\big(S(f^t\sigma),P(t,\sigma),C(t,\sigma)\big)$, выполнено в том и только том случае, если найдется такая последовательность $\{\tau_k\}$, что для любых $\varepsilon>0$ и $\vartheta>0$ существует индекс $k=k(\varepsilon,\vartheta)$, начиная с которого выполнено неравенство*

$$\max_{|t|\leqslant\vartheta}|\widehat{\Theta}(t,\sigma)-\Theta_{\tau_k}(t,\sigma)|\leqslant\varepsilon.$$

Лемма 12. *Пусть пространство Σ компактно. Тогда для каждой точки σ пространство $\mathfrak{X}(\Theta,\sigma)$ компактно (в топологии равномерной сходимости на отрезках) и состоит только из правильных функций. Кроме того, при всех t, τ и $\sigma\in\Sigma$ имеет место равенство*

$$Q(t+\tau,\sigma)=Q(t,f^\tau\sigma). \tag{5.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (5.12) просто следует из равенства

$$X(t+\tau,s+\tau,\sigma)=X(t,s,f^\tau\sigma)$$

(см. [13, теорема 8]) и равенства (5.8).

Докажем компактность пространства $\mathfrak{X}(\sigma)$. Покажем, что семейство функций, наполняющих $\mathfrak{X}(\sigma)$, равномерно ограничено и равностепенно непрерывно (на числовой прямой $\mathbb{R}$). Тогда, в силу теоремы 1 работы Бебутова [9], компактность множества $\mathfrak{X}(\sigma)$ будет доказана.

Для всякой функции $t\to\widehat{\Theta}(t,\sigma)$ из этого семейства найдется последовательность $\{\Theta_{\tau_k}(t,\sigma)\}$, сходящаяся к $\widehat{\Theta}(t,\sigma)$ в топологии равномерной сходимости на отрезках. Поэтому из неравенства

$$|\widehat{\Theta}(t,\sigma)|\leqslant|\widehat{\Theta}(t,\sigma)-\Theta_{\tau_k}(t,\sigma)|+|\Theta_{\tau_k}(t,\sigma)|,\quad t\in\mathbb{R}$$

имеем: для любого целого $k \geqslant 1$ и всех $t \in [-k,k]$ найдется τ_k (при необходимости перейдем к подпоследовательности $\{\tau_{j_k}\}$) такая, что $|\widehat{\Theta}(t,\sigma) - \Theta_{\tau_k}(t,\sigma)| \leqslant k^{-1}$. Поэтому из неравенств

$$|\widehat{\Theta}(t,\sigma)| \leqslant \max_{|t|\leqslant k} |\widehat{\Theta}(t,\sigma) - \Theta_{\tau_k}(t,\sigma)| + \max_{|t|\leqslant k} |\Theta_{\tau_k}(t,\sigma)| \leqslant k^{-1} + \sup_{t\in\mathbb{R}} |\Theta_{\tau_k}(t,\sigma)| \leqslant k^{-1} + \sup_{t\in\mathbb{R}} |\Theta(t,\sigma)|$$

следует неравенство $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\widehat{\Theta}(t,\sigma)| \leqslant \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\Theta(t,\sigma)|$.

Для доказательства равностепенной непрерывности отметим, что имеет место неравенство

$$|\widehat{\Theta}(t+s,\sigma) - \widehat{\Theta}(t,\sigma)| \leqslant |\widehat{\Theta}(t+s,\sigma) - \Theta_{\tau_k}(t+s,\sigma)| + \\ + |\widehat{\Theta}(t,\sigma) - \Theta_{\tau_k}(t,\sigma)| + |\Theta_{\tau_k}(t+s,\sigma) - \Theta_{\tau_k}(t,\sigma)|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Поэтому, если $|\Theta(t+s,\sigma) - \Theta(t,\sigma)| \leqslant \varepsilon$ при $|s| \leqslant \delta$ и всех $t \in \mathbb{R}$, то, начиная с некоторого τ_k (при необходимости перейдем к подпоследовательности $\{\tau_{j_k}\}$) выполнено неравенство

$$|\widehat{\Theta}(t+s,\sigma) - \widehat{\Theta}(t,\sigma)| \leqslant \max_{|t|\leqslant k+\varepsilon} |\widehat{\Theta}(t+s,\sigma) - \Theta_{\tau_k}(t+s,\sigma)| + \\ + \max_{|t|\leqslant k} |\widehat{\Theta}(t,\sigma) - \Theta_{\tau_k}(t,\sigma)| + \varepsilon \leqslant k^{-1} + k^{-1} + \varepsilon, \quad |t| \leqslant k.$$

Устремляя k к бесконечности, получим требуемое.

Докажем теперь, что каждая функция из $\mathfrak{X}(\sigma)$ правильная. Если

$$\widehat{\Theta}(t,\sigma) \doteq \big(\widehat{S}(f^t\sigma), \widehat{P}(t,\sigma), \widehat{C}(t,\sigma)\big) \in \mathfrak{X}(\sigma),$$

то найдется такая последовательность $\{\tau_k\}$, что имеет место сходимость $\Theta_{\tau_k} \to \widehat{\Theta}$ в топологии равномерной сходимости на отрезках. Так как $S(f^{t+\tau_k}\sigma) = S(f^t\sigma_k)$, где $\sigma_k = f^{\tau_k}\sigma$ и пространство Σ компактно, то, выделив из последовательности $\{\sigma_k\}$ сходящуюся к некоторой точке $\widehat{\sigma} \in \Sigma$ подпоследовательность (обозначим ее снова $\{\sigma_k\}$), получим сходимость $S(f^{t+\tau_k}\sigma) \to S(f^t\widehat{\sigma})$, из которой следует равенство $\widehat{S}(t,\sigma) = S(f^t\widehat{\sigma})$.

Далее, если $\Phi(t,\sigma)$ — фундаментальная матрица системы (A,σ), построенная в доказательстве леммы 11, то $\Phi(t+\tau_k,\sigma)$ — аналогичная матрица для системы (A_{τ_k},σ). Так как $(A_{\tau_k},\sigma) = (A,\sigma_k)$, то имеет место равенство $\Phi(t+\tau_k,\sigma) = \Phi(t,\sigma_{\tau_k})$. Следовательно,

$$Z^*(t+\tau_k,\sigma)Z(t+\tau_k,\sigma) = \Phi^*(t,\sigma_{\tau_k})\Phi(t,\sigma_{\tau_k}) = Z^*(t,\sigma_{\tau_k})Z(t,\sigma_{\tau_k}).$$

Поэтому, в силу лемм 5, 6 и 7, имеем:

$$Z(t+\tau_k,\sigma) = Z(t,\sigma_{\tau_k}) \to Z(t,\widehat{\sigma}) \quad \text{и} \quad Z^*(t,\widehat{\sigma})Z(t,\widehat{\sigma}) = \Phi^*(t,\widehat{\sigma})\Phi(t,\widehat{\sigma}).$$

Далее, из равенства (5.8) следует сходимость

$$P(t+\tau_k,\sigma) = \Phi(t,\sigma_{\tau_k})Z^{-1}(t,\sigma_{\tau_k}) = P(t,\sigma_{\tau_k}) \to P(t,\widehat{\sigma}) = \Phi(t,\widehat{\sigma})Z^{-1}(t,\widehat{\sigma}).$$

Следовательно, выполнено равенство $\widehat{P}(t,\sigma) = P(t,\widehat{\sigma})$, функция $(t,\widehat{\sigma}) \to \widehat{P}(t,\widehat{\sigma})$ непрерывна, функция $t \to \widehat{P}(t,\sigma)$ непрерывно дифференцируема при каждом σ и, кроме того, матрица $\widehat{P}(t,\widehat{\sigma})$ ортогональна при всех $(t,\widehat{\sigma})$.

Аналогично доказывается, что имеет место сходимость (в топологии равномерной сходимости на отрезках)

$$F(t+\tau_k,\sigma) \doteq \dot{Z}(t+\tau_k,\sigma)Z^{-1}(t+\tau_k,\sigma) \to \dot{Z}(t,\widehat{\sigma})Z^{-1}(t,\widehat{\sigma}) = F(t,\widehat{\sigma})$$

и $G(t+\tau_k,\sigma) \to G(t,\widehat{\sigma})$. Тем самым доказано, что $\widehat{C}(t,\sigma) = C(t,\widehat{\sigma})$ и нестационарное перроновское преобразование $x = \widehat{P}(t,\sigma)y$ приводит систему (S,σ) к системе $\widehat{C}(t,\sigma)$. Поэтому $\widehat{\Theta}(t,\sigma) = \Theta(t,\widehat{\sigma})$ и, следовательно, $\widehat{\Theta}(t,\sigma)$ — правильная матрица. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть заданы топологическая динамическая система (Σ, f^t) с компактным фазовым пространством Σ и регулярное семейство (S, Σ) управляемых систем вида (4.1). По этой системе построим правильную функцию (см. (4.2))

$$t \to \Theta(t,\sigma) \doteq \big(S(f^t\sigma), P(t,\sigma), C(t,\sigma)\big), \tag{5.13}$$

где $S\big(\sigma\big) \doteq (A(\sigma), B(\sigma)\big)$ — исходная система (4.1), $x = P(t,\sigma)y$ — перроновское преобразование системы (4.1), $C(t,\sigma) \doteq (F(t,\sigma), G(t,\sigma))$ — управляемая система, заданная равенством (4.3). В силу леммы 8 такая функция существует.

Построим теперь по функции (5.13) пространство $\mathfrak{X}(\sigma)$, имеющее структуру, как в определении 5, то есть пространство, полученное из правильной функции $t \to \Theta(t,\sigma)$ замыканием множества её сдвигов $\Theta_\tau(t,\sigma)$. Такое пространство является замыканием траектории движения точки Θ, определенной равенством (5.13): $\mathfrak{X}(\sigma) = \overline{\mathrm{orb}}(\Theta(\cdot,\sigma))$. На пространстве $\mathfrak{X}(\sigma)$ определим поток h^t равенством $h^t\Theta(\cdot,\sigma) = \Theta_t(\cdot,\sigma)$. Тогда пара $(\mathfrak{X}(\sigma), h^t)$ образует топологическую динамическую систему с топологией равномерной сходимости на отрезках на фазовом пространстве $\mathfrak{X}(\sigma)$. В силу только что доказанной леммы 12, фазовое пространство $\mathfrak{X}(\Theta)$ компактно, а следовательно, фазовое пространство динамической системы (Ω, g^t), построенной в соответствии с равенствами (4.4), тоже компактно. Остается напомнить, что построенное расширение $(\mathcal{S}, \Omega)$ семейства (S, Σ) систем не содержит новых управляемых систем и каждой управляемой системе (S, σ) семейства (S, Σ) отвечает канонический представитель $(\mathcal{C}, \omega)$ семейства $(\mathcal{C}, \Omega)$.

Лемма 13. *Если пространство Σ минимально относительно потока f^t, то семейство (S, Σ) регулярно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если пространство Σ минимально, то всякое движение $t \to f^t\sigma$ в Σ *рекуррентно* [7, с. 400]. Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ множество

$$\Delta(\varepsilon,\sigma) \doteq \{t \in \mathbb{R}\colon\ \varrho(f^t\sigma,\sigma) \leqslant \varepsilon\},$$

где ϱ — метрика в Σ, относительно плотно на числовой прямой $\mathbb{R}$. Следовательно, движение $t \to f^t\sigma$ рекуррентно в том и только том случае, если для любых $\varepsilon > 0$, $\varkappa > 0$ множество

$$\theta(\varepsilon,\varkappa,\sigma) \doteq \Big\{\tau \in \mathbb{R}\colon \max_{|t|\leqslant\varkappa} \varrho(f^{t+\tau}\sigma, f^t\sigma) \leqslant \varepsilon\Big\}$$

$(\varepsilon,\varkappa)$-почти периодов относительно плотно на прямой $\mathbb{R}$.

Так как функция $t \to W_\vartheta(S, f^t\sigma)$, где матрица $W_\vartheta(S,\sigma)$ определена равенством (3.1), тоже рекуррентна (то есть для любых $\varepsilon > 0$ и $\varkappa > 0$ множество

$$\Big\{\tau \in \mathbb{R}\colon \max_{|t|\leqslant\varkappa} |W_\vartheta(S, f^{t+\tau}\sigma) - W_\vartheta(S, f^t\sigma)| \leqslant \varepsilon\Big\}$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$), то функции $t \to \lambda_i(\vartheta, f^t\sigma)$, где через $\lambda_i(\vartheta,\sigma)$ обозначены собственные значения матрицы $W_\vartheta(S,\sigma)$, тоже рекуррентны при любом $\sigma \in \Sigma$. Но размерность пространства управляемости $\mathcal{L}_\vartheta(S,\sigma)$ системы (S,σ) совпадает с количеством строго положительных собственных значений матрицы $W_\vartheta(S,\sigma)$. С учетом рекуррентности собственных значений λ_i матрицы $W_\vartheta(S,\sigma)$ и того факта, что функции $\vartheta \to \lambda_i(\vartheta,\sigma)$ не убывают с возрастанием времени ϑ, следует регулярность системы (S,σ) при любом σ. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Достаточно доказать, что если пространство Σ минимально относительно потока f^t, то построенное в лемме 12 и доказательстве теоремы 1 пространство Ω минимально относительно потока g^t.

Отметим [7, с. 400], что если движение $t \to g^t\omega$ рекуррентно для каждой точки $\omega \in \Omega$, то замыкание $\overline{\mathrm{orb}}(\omega)$ траектории $\mathrm{orb}(\omega)$ движения $t \to g^t\omega$ является минимальным множеством и имеют место равенства $\overline{\mathrm{orb}}(\omega) = \overline{\mathrm{orb}}_+(\omega) = \Omega$. Поэтому достаточно показать, что движение $t \to g^t\omega$ рекуррентно для каждой точки $\omega \in \Omega$.

Пусть $\Theta(t,\sigma)$ — функция, построенная согласно равенству (4.2), тогда, как было показано в лемме 12, выполнено равенство $\Theta(t+\tau,\sigma) = \Theta(t, f^\tau\sigma)$. Поэтому из рекуррентности движения $t \to f^t\sigma$, как несложно убедиться, следует рекуррентность (при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$) функции $t \to \Theta(t,\sigma)$. Это означает, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\varkappa > 0$ множество

$$\Bigl\{\tau \in \mathbb{R} \colon \max_{|t| \leqslant \varkappa} |\Theta(t+\tau,\sigma) - \Theta(t,\sigma)| \leqslant \varepsilon\Bigr\}$$

относительно плотно на прямой $\mathbb{R}$. Действительно, пусть заданы $\varepsilon > 0$ и $\varkappa > 0$. Тогда из непрерывности (равномерной по t на отрезках) движения $t \to f^t\sigma$ по начальным данным следует, что найдется положительная константа δ, обеспечивающая неравенство

$$\max_{|t| \leqslant \varkappa} |\Theta(t,\widehat{\sigma}) - \Theta(t,\sigma)| \leqslant \varepsilon$$

для всех точек $\widehat{\sigma}$, удовлетворяющих неравенству $\varrho(\widehat{\sigma},\sigma) \leqslant \delta$.

Далее, в силу рекуррентности движения $t \to f^t\sigma$ найдется относительно плотная последовательность $\{\tau_k\}$ такая, что неравенство $\varrho(\sigma_k,\sigma) \leqslant \delta$, где $\sigma_k = f^{\tau_k}\sigma$, выполнено для любого целого k. Следовательно, имеет место неравенство $\max\limits_{|t| \leqslant \varkappa} |\Theta(t+\tau_k,\sigma) - \Theta(t,\sigma)| \leqslant \varepsilon$, что и доказывает рекуррентность функции $t \to \Theta(t,\sigma)$ для каждой точки σ.

Этим же свойством рекуррентности обладает любая функция $\widehat{\Theta}(\cdot,\sigma)$ пространства $\mathfrak{X}(\sigma)$. Следовательно, при каждом σ пространство $\mathfrak{X}(\sigma)$ минимально относительно потока h^t.

Далее, так как имеют место равенства

$$\Xi(g^t\omega) = \Theta(0, p(g^t\omega)) = \Theta(0, f^t\sigma) = \Theta(t,\sigma),$$

где $\sigma = p(\omega)$, то, как легко проверить, для любой точки $\omega \in \Omega$ функция $t \to \Xi(g^t\omega)$ тоже рекуррентна. Более того, функция $t \to g^t\omega \doteq (f^t\sigma, \Theta(\cdot, f^t\sigma))$, где $\sigma = p(\omega)$, тоже рекуррентна (для всякой точки $\omega \in \Omega$). Следовательно, пространство Ω минимально. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Perron O. Uber line Matrixtransformation // Mathematische Zeitschrift. 1930. № 32. P. 465–473.
2. Миллионщиков В.М. О связи между устойчивостью характеристических показателей и почти приводимостью линейных систем дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. № 12. С. 2127–2134.
3. Попова С.Н., Тонков Е.Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 226–235.
4. Тонков Е.Л. Канонический представитель линейной управляемой системы // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2003. С. 113–123.
5. Аносов Д.В. Лекции по линейной алгебре. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 1999. 105 с.
6. Аносов Д.В., Арансон С.Х., Арнольд В.И., Бронштейн И.У., Гринес В.З., Ильяшенко Ю.С. Динамические системы–1 // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 1. М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1985. 244 с.
7. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1949. 550 с.
8. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. Ижевск: Удмуртский университет, 1999. 408 с.
9. Бебутов М.В. О динамических системах в пространстве непрерывных функций // Бюлл. ин-та матем. при МГУ. 1940. Т. 2. № 5. С. 1–52.
10. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
11. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
12. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
13. Тонков Е.Л. Глобально управляемые линейные системы // Современная математика и её приложения. 2005. Т. 23. С. 145–165.

МАТЕМАТИКА 2012. Вып. 1

Поступила в редакцию 01.02.2012

Тонков Евгений Леонидович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: eltonkov@udm.ru

E. L. Tonkov
The space of linear control systems and its canonical representatives

Keywords: linear control systems, controllability space, the Perron transformation, dynamical systems.

Mathematical Subject Classifications: 34D08, 93C15

The space of linear control systems that are parameterized with the help of a topological dynamical system is considered. For each invariant space (with respect to a flow in the dynamical system phase space) there are constructed its extension and the corresponding Perron transformation that reduces a given family of systems to the so-called canonical system. It is also proved that for minimal invariant spaces the Perron transformation possesses the recurrence property.

REFERENCES

1. Perron O. Uber line Matrixtransformation, *Math. Z.*, 1930, no. 32, pp. 465–473.
2. Millionshchikov V.M. The connection between the stability of characterisitic exponents and almost reducibility of linear systems of differential equations with almost periodic coefficients, *Differ. Uravn.*, 1967, vol. 3, no. 12, pp. 2127–2134.
3. Popova S.N., Tonkov E.L. Consistent systems and control over Lyapunov exponents, *Differ. Uravn.*, 1997, vol. 33, no. 2, pp. 226–235.
4. Tonkov E.L. Canonical representative of linear control system, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat.*, 2003, no. 1, pp. 113–123.
5. Anosov D.V. *Lektsii po lineinoi algebre* (Lectures on linear algebra), Moscow: Regular and Chaotic Dynamics, 1999. 105 p.
6. Anosov D.V., Aranson S.Kh., Arnol'd V.I., Bronshtein I.U., Grines V.Z., Il'yashenko Yu.S. Dynamical Systems–1, *Itogi Nauki i Tekhniki Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Naprav.*, vol. 1, Moscow: Vseross. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform. (VINITI), 1985, 244 p.
7. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravnenii* (Qualitative theory of differential equations), Moscow: GITTL, 1949. 550 p.
8. Birkhoff G.D. *Dynamical Systems*, New York, 1927. Translated under the title *Dinamicheskie sistemy*, Izhevsk: RCD, 1999. 408 p.
9. Bebutov M.V. Dynamical systems in the space of continuous function, *Bull. Mat. Inst. Moscow State University*, 1940, vol. 2, no. 5, pp. 1–52.
10. Kalman R., Falb P., Arbib M. *Topics in mathematical system theory*, New York: McGraw-Hill, 1969, 358 p. Translated under the title *Ocherki po matematicheskoi teorii sistem*, Moscow: Editorial URSS, 2004, 400 p.
11. Horn R., Johnson C. *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985. Translated under the title *Matrichnyi analiz*, Moscow: Mir, 1989, 655 p.
12. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* (Theory of control of motion), Moscow: Nauka, 1968, 475 p.
13. Tonkov E.L. Globally controllable linear systems, *Sovrem. Mat. Prilozh.*, 2005, vol. 23, p. 145–165.

Received 01.02.2012

Tonkov Evgenii Leonidovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: eltonkov@udm.ru