УДК 517.977

© *Д. В. Сахаров*

О ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ ПРОСТОГО ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Рассматриваются две задачи простого преследования группой преследователей группы убегающих. Первая задача посвящена преследованию группой преследователей группы жестко скоординированных убегающих при равных возможностях всех участников. Предполагается, что убегающие не покидают пределы выпуклого многогранного множества, терминальные множества — выпуклые компакты и целью группы преследователей является поимка хотя бы одного убегающего. В терминах начальных позиций и параметров игры получены условия разрешимости задачи преследования и задачи уклонения.

Вторая задача посвящена преследованию группой преследователей группы убегающих в предположении, что убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь может поймать не более одного убегающего. Целью группы преследователей является поимка заданного числа убегающих. Терминальные множества — выпуклые компакты, множество допустимых управлений — произвольный выпуклый компакт. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования.

Ключевые слова: дифференциальная игра, простое движение, групповое преследование, жесткосоединенные убегающие.

Введение

Важное направление современной теории дифференциальных игр связано с разработкой методов решения игровых задач преследования–уклонения с участием нескольких объектов [1–6]. При этом представляет интерес получение как необходимых, так и достаточных условий разрешимости задач уклонения и преследования в зависимости от начальных данных и параметров игры.

В работе рассматриваются две задачи простого преследования группой преследователей группы убегающих при равных возможностях всех участников. Получены условия разрешимости задач преследования и уклонения. Работа примыкает к исследованиям [7–10].

§ 1. Преследование жесткосоединенных убегающих

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$. Закон движения каждого из преследователей имеет вид

$$\dot{x}_i = u_i, \quad u_i \in U, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Закон движения убегающего E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = v, \quad v \in U, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Здесь $x_i, y_j, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^k$ — выпуклый компакт.

При $t = 0$ заданы начальные положения участников:

$$x_i(0) = x_i^0, \ \ y_j(0) = y_j^0,$$

причем $z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0 \notin M_{ij}$, где $M_{ij} \subset \mathbb{R}^k$ — выпуклые компакты.

Дополнительно предполагается, что убегающие в процессе игры не покидают выпуклого многогранного множества

$$D = \{y |\ y \in \mathbb{R}^k,\ (p_s, y) \leqslant \mu_s,\ s = 1, \ldots, r\},$$

где $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — вещественные числа такие, что $\operatorname{Int} D \neq \varnothing$.

Случай, когда U — шар с центром в нуле, а $M_{ij} = \{0\}$ для всех i, j, рассматривался в работе [11]. Были получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования.

Определение 1. *Стратегией убегающих* E_j будем называть отображение V, ставящее в соответствие величинам

$$\big(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), y_1(t), \ldots, y_m(t), \min_{i=1,\ldots,n} \min_{\tau \in [0,t]} \|x_i(\tau) - y_1(\tau)\|, \ldots,$$
$$\ldots, \min_{i=1,\ldots,n} \min_{\tau \in [0,t]} \|x_i(\tau) - y_m(\tau)\|\big) \quad (1)$$

измеримую функцию $v(t)$ такую, что

$$v(t) \in U, \quad y_j(t) \in D \text{ для всех } j = 1, \ldots, m \text{ и } t \geqslant 0.$$

Определение 2. *Стратегией преследователя* P_i называется отображение U_i, ставящее в соответствие величинам (1) и управлению $v(\tau)$, $\tau \in [0, t]$ измеримую функцию $u_i(t)$ такую, что

$$u_i(t) \in U \text{ для всех } i = 1, \ldots, n \text{ и } t \geqslant 0.$$

Обозначим данную игру $\Gamma(n, m, D)$.

Определение 3. В игре $\Gamma(n, m, D)$ *происходит уклонение от встречи*, если для любого $T > 0$ существует стратегия V убегающих E_j такая, что для любых допустимых траекторий $x_i(t)$ преследователей выполнено $x_i(t) - y_j(t) \notin M_{ij},\ t \in [0, T]$.

Определение 4. В игре $\Gamma(n, m, D)$ *происходит поимка*, если существует $T > 0$ и для любой стратегии V убегающих существуют стратегии U_i преследователей P_i, момент $\tau \in [0, T]$ и номера $p \in \{1, \ldots, n\}, s \in \{1, \ldots, m\}$ такие, что $x_p(\tau) - y_s(\tau) \in M_{ps}$.

Введем следующие обозначения:

$$\lambda_{ij}(v, m_{ij}) = \sup\{\lambda | \lambda \geqslant 0, -\lambda(z_{ij}^0 - m_{ij}) \in -v + U\},$$
$$\lambda_{ij}(v) = \sup_{m_{ij} \in M_{ij}} \lambda_{ij}(v, m_{ij}), \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m,$$
$$\lambda_{n+s,j}(v) = (p_s, v), \quad s = 1, \ldots, r, \quad j = 1, \ldots, m,$$
$$\delta(z^0) = \min_{v \in U} \max_{i=1,\ldots,n+r} \max_{j=1,\ldots,m} \lambda_{ij}(v).$$

Теорема 1. *Если* $\delta(z^0) = 0$, *то в игре* $\Gamma(n, m, D)$ *происходит уклонение от встречи.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем теорему сначала для случая $D = \mathbb{R}^k$. В силу условия $\delta(z^0) = 0$ существует $v_0 \in U$ такой, что

$$\lambda_{ij}(v_0) = 0 \text{ для всех } i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m. \quad (2)$$

Зададим стратегию убегающих следующим образом: $v(t) = v_0$, $t \geqslant 0$.

Пусть $u_i(t)$ — произвольное допустимое управление преследователя P_i. Имеем

$$z_{ij}(t) = z_{ij}^0 + \int_0^t (-v_0 + u_i(\tau))\, d\tau \in z_{ij}^0 - t v_0 + tU \text{ для всех } t \geqslant 0.$$

Из (2) следует, что

$$\{-v_0+U\}\cap\{-\lambda(z_{ij}^0-M_{ij}),\lambda\geqslant 0)\}=\{0\}.$$

Поэтому

$$\{t(-v_0+U)\}\cap\{-\lambda t(z_{ij}^0-M_{ij}),\lambda\geqslant 0\}=\{0\},$$
$$\{z_{ij}^0-tv_0+tU\}\cap\{z_{ij}^0-\lambda t(z_{ij}^0-M_{ij}),\lambda\geqslant 0\}=\{z_{ij}^0\}.$$

Так как $z_{ij}^0\notin M_{ij}$, $M_{ij}\in\{z_{ij}^0-\lambda t(z_{ij}^0-M_{ij}),\lambda\geqslant 0,t\geqslant 0\}$, то для всех $t>0$ и всех i,j выполнено $M_{ij}\cap\{z_{ij}^0+t(-v_0+U)\}=\varnothing$. В игре $\Gamma(n,m,D)$ происходит уклонение от встречи.

Теперь проведем доказательство для произвольного многогранного множества D. Пусть $\delta(z^0)=0$. Тогда существует $v_0\in U$ такой, что

$$\lambda_{ij}(v_0)=0 \ \text{ для всех } \ i=1,\ldots,n+r,\quad j=1,\ldots,m.$$

Отсюда вытекает, что

$$(p_s,v_0)\leqslant 0 \ \text{ для всех } \ s=1,\ldots,r$$

и, кроме того,

$$\{-v_0+U\}\cap\{-\lambda(z_{ij}^0-M_{ij}),\lambda\geqslant 0)\}=\{0\} \quad \text{для всех } \ i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m. \tag{3}$$

Зададим стратегию убегающих следующим образом: $v(t)=v_0$, $t\geqslant 0$. Тогда $y_j(t)=y_j^0+v_0t$.

Убегающие не покидают множества D, так как

$$(p_s,y_j(t))=(p_s,y_j^0)+t(p_s,v_0)\leqslant \mu_s.$$

Предположим, что в игре $\Gamma(n,m,D)$ происходит поимка. Это означает, что существуют момент времени $T>0$, стратегии $U_1,\ldots,U_n$ преследователей $P_1,\ldots,P_n$ такие, что $z_{ij}(T)\in M_{ij}$ при некоторых i,j. Здесь

$$z_{ij}(T)=z_{ij}^0-Tv_0+\int_0^T u_i(\tau)\,d\tau.$$

Пусть

$$u_i(T)=\frac{1}{T}\int_0^T u_i(\tau)\,d\tau.$$

Тогда $u_i(T)\in U$. Действительно, из цепочки

$$(\psi,u_i(T))=\frac{1}{T}\int_0^T(\psi,u_i(\tau))\,d\tau\leqslant\frac{1}{T}\int_0^T c_U(\psi)\,d\tau=c_U(\psi)$$

следует, что

$$(\psi,u_i(T))\leqslant c_U(\psi) \ \text{ для всех } \ \psi,$$

откуда в силу выпуклости компакта U вытекает $u_i(T)\in U$.

Тогда $z_{ij}(T)=z_{ij}^0-Tv_0+Tu_i(T)$. Так как $z_{ij}^0\notin M_{ij}$, то $u_i(T)\neq v_0$. Из условия $z_{ij}(T)\in M_{ij}$ получаем

$$z_{ij}^0-Tv_0+Tu_i(T)\in M_{ij}$$

или

$$(-v_0+u_i(T))\in-\frac{1}{T}(z_{ij}^0-M_{ij}).$$

Так как $-v_0+u_i(T)\neq 0$, то последнее включение противоречит (3). Тем самым доказано, что в игре $\Gamma(n,m,D)$ происходит уклонение от встречи. Теорема доказана. □

Определение 5. Множества $M_1, \ldots, M_n \subset \mathbb{R}^k$ *образуют положительный базис пространства* $\mathbb{R}^k$, если для любого $x \in \mathbb{R}^k$ существуют $\alpha_1 \geqslant 0, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$, $m_1 \in M_1, \ldots, m_n \in M_n$ такие, что

$$x = \alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_n m_n.$$

Утверждение 1. *Множества* $M_1, \ldots, M_n$ *образуют положительный базис пространства* $\mathbb{R}^k$ *тогда и только тогда, когда* $0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \bigcup\limits_i M_i$.

Утверждение 2. *Множества* $M_1, \ldots, M_n$ *образуют положительный базис пространства* $\mathbb{R}^k$ *тогда и только тогда, когда для любого* $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$ *существуют число* $q \in \{1, \ldots, n\}$ *и вектор* $m_q \in M_q$ *такие, что* $(m_q, p) > 0$.

Утверждения 1 и 2 доказываются аналогично теоремам 1.1, 1.2 [6, с. 13].

Следствие 1. *Пусть* U *— строго выпуклый компакт,* $D = \mathbb{R}^k$ *и*

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{z_{ij}^0 - M_{ij}\}.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, m)$ *происходит уклонение от встречи.*

Доказательство. Покажем, что $\delta(z^0) = 0$. Проведем доказательство от противного. Пусть семейство $\{z_{ij}^0 - M_{ij}\}$ не образует положительный базис, но $\delta(z^0) > 0$. Тогда в силу утверждения 2 существует единичный вектор p такой, что

$$(p, z_{ij}^0 - m_{ij}) \leqslant 0 \ \text{ для всех } \ i = 1, \ldots, n, \ \ j = 1, \ldots, m, \ \ m_{ij} \in M_{ij}.$$

Пусть $v_0 \in U$ удовлетворяет условию

$$(v_0, p) = C_U(p). \tag{4}$$

Так как $\delta(z^0) > 0$, то существуют i, j такие, что $\lambda_{ij}(v_0) > 0$. Поэтому

$$v_0 - \lambda_{ij}(v_0)(z_{ij}^0 - m_{ij}) \in U.$$

Отсюда

$$(v_0, p) - \lambda_{ij}(v_0)(z_{ij}^0 - m_{ij}, p) \leqslant C_U(p). \tag{5}$$

Из (4), (5) следует, что

$$(z_{ij}^0 - m_{ij}, p) \leqslant 0,$$

откуда $(z_{ij}^0 - m_{ij}, p) = 0$ и

$$v_0 - \lambda_i(v_0) a_i \in U(U; p),$$

что противоречит строгой выпуклости U в направлении p, а следовательно, и строгой выпуклости U. Поэтому $\delta(z^0) = 0$ и в силу предыдущей теоремы в игре происходит уклонение от встречи. Следствие доказано. □

Следствие 2. *Пусть* $U = D_1(0)$,

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{z_{ij}^0 - M_{ij}, p_1, \ldots, p_r\}.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, m, D)$ *происходит уклонение от встречи.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $U = D_1(0)$, то

$$\lambda_{ij}(v) = \sup_{m_{ij}\in M_{ij}} \lambda_{ij}(v, m_{ij}) =$$
$$= \max_{m_{ij}\in M_{ij}} \frac{(v, z_{ij}^0 - m_{ij}) + \sqrt{(v, z_{ij}^0 - m_{ij})^2 + \|z_{ij}^0 - m_{ij}\|^2(1-\|v\|^2)}}{\|z_{ij}^0 - m_{ij}\|^2} =$$
$$= \frac{(v, z_{ij}^0 - m_{ij}^*) + \sqrt{(v, z_{ij}^0 - m_{ij}^*)^2 + \|z_{ij}^0 - m_{ij}^*\|^2(1-\|v\|^2)}}{\|z_{ij}^0 - m_{ij}^*\|^2}, \quad (6)$$

где $m_{ij}^* \in M_{ij}$ — точка, на которой достигается максимум.

Обозначим

$$\mathrm{B} = \mathrm{co}\{z_{ij}^0 - M_{ij}, p_1, \ldots, p_r\}.$$

Покажем, что $\delta(z^0) = 0$. Проведем доказательство от противного. Пусть семейство $\{z_{ij}^0 - M_{ij},\ p_1, \ldots, p_r\}$ не образует положительный базис, но $\delta(z^0) > 0$. Из условия $0 \notin \mathrm{Int}\,\mathrm{B}$ следует, что 0 и B отделимы. Значит, существует $\widehat{v}$, $\|\widehat{v}\| = 1$ такая, что $(b, \widehat{v}) \leqslant 0$ для всех $b \in \mathrm{B}$. Отсюда

$$(\widehat{v}, z_{ij}^0 - m_{ij}^*) \leqslant 0 \ \text{ для всех } \ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m;$$
$$(\widehat{v}, p_l) \leqslant 0 \ \text{ для всех } \ l = 1. \ldots, r.$$

Из последних неравенств и представления (6) вытекает $\delta(z^0) = 0$. В игре происходит поимка. Следствие доказано. □

Получим теперь некоторые условия разрешимости задачи преследования в случае, когда $U = D_1(0)$. Будем предполагать, что выполнено условие

$$0 \in \mathrm{Int}\,\mathrm{co}\{z_{ij}^0 - M_{ij},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m;\ p_1, \ldots, p_r\}. \quad (7)$$

Пусть среди векторов $\{p_1, \ldots, p_r\}$ найдется l линейно независимых.

Условие (7) равносильно тому, что существуют $m_{ij} \in M_{ij}$ такие, что $0 \in \mathrm{Int}\,\mathrm{co}\{z_{ij}^0 - m_{ij}, p_1, \ldots, p_r\}$, то есть семейство векторов $\{z_{ij}^0 - m_{ij}, p_1, \ldots, p_r\}$ образует положительный базис. Рассмотрим минимальный положительный базис $\{z_{ij}^0 - m_{ij}, p_s | (i,j) \in K, s \in S\}$, обладающий свойством $|S| = \min\{k, l\}$. Не ограничивая общности, можно считать, что любые k векторов семейства $\{z_{ij}^0 - m_{ij}, p_1, \ldots, p_r\}$ линейно независимы, поэтому $|K| + |S| = k + 1$. Обозначим

$$I = \{i | (i,j) \in K \text{ при некотором } j\},$$
$$J = \{j | (i,j) \in K \text{ при некотором } i\}.$$

Лемма 1. *Для того чтобы в двудольном графе $G(a,b)$, не имеющем изолированных вершин, существовал цикл, необходимо, чтобы количество ребер $E \geqslant 2 + \max\{a,b\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное: граф имеет цикл, но $E \leqslant 1 + \max\{a,b\}$. Поскольку граф двудольный и не имеет изолированных вершин, то $E \geqslant \max\{a,b\}$. Рассмотрим оба случая: $E = \max\{a,b\}$. Тогда степени вершин большей доли равны 1, то есть цикла нет. Если же $E = 1 + \max\{a,b\}$ и граф имеет цикл, то существуют по крайней мере 4 вершины, входящие в цикл, степени которых не менее 2. Тогда общее количество ребер $E \geqslant 2 + \max\{a,b\}$, что противоречит условию. Лемма доказана. □

Рассмотрим систему уравнений вида

$$x_i + y_j = m_{ij}, \text{ где } (i,j) \in K. \quad (8)$$

Система содержит $|K|$ уравнений и $|I| + |J|$ неизвестных.

Данную систему можно представить в виде двудольного графа с множествами вершин I и J и ребрами $(i,j) \in K$. Очевидно, что для существования решения такой системы достаточно, чтобы указанный двудольный граф не имел цикла.

Теорема 2. *Пусть* $U = D_1(0)$, $D = \mathbb{R}^k$. *Тогда если для игры* $\Gamma(n,m)$ *выполнено условие* $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_{ij}^0 - M_{ij}\}$ *и, кроме того,* $\max\{|I|,|J|\} \geqslant k$, *то в игре происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $r = 0$, то $|S| = 0$, и, не ограничивая общности, можно считать, что $|K| = k+1$. Из условия $\max\{|I|,|J|\} \geqslant k$ следует, что $|K| \leqslant 1 + \max\{|I|,|J|\}$, откуда следует, что граф не имеет цикла, а значит система (8) имеет решение. Тогда

$$z_{ij}^0 - m_{ij} = x_i^0 - y_j^0 - (x_i + y_j) = (x_i^0 - x_i) - (y_j^0 - y_j)$$

и вместо игры $\Gamma(n,m)$ рассмотрим игру $\widetilde{\Gamma}(n,m)$, где начальные положения преследователей равны $a_i^0 = x_i^0 - x_i$, а начальные положения убегающих $b_j^0 = y_j^0 - y_j$.

Тогда $\widetilde{z}_{ij}^0 = a_i^0 - b_j^0 = z_{ij}^0 - m_{ij}$, откуда $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{\widetilde{z}_{ij}^0\}$. В силу последнего включения по теореме Пшеничного [2] в игре $\widetilde{\Gamma}(n,m)$ происходит поимка по крайней мере одного убегающего, следовательно, в игре $\Gamma(n,m)$ происходит поимка. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3. *Пусть* $U = D_1(0)$, *среди векторов* $\{p_1,\ldots,p_r\}$ *найдется* l *линейно независимых,* $l \leqslant k-3$ *и количество элементов множества* $\bigcup_{i=1}^{n}(z_{ij}^0 - M_{ij})$ *не менее* k. *Тогда если для игры* $\Gamma(n,m,D)$ *выполнено условие* $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_{ij}^0 - M_{ij}, p_1,\ldots,p_r\}$ *и, кроме того,* $\max\{|I|,|J|\} \geqslant k-l$, *то в игре происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $|S| = l$, то $|K| = k+1-l$. Из условия $\max\{|I|,|J|\} \geqslant k-l$ получаем $|K| \leqslant 1 + \max\{|I|,|J|\}$, откуда следует, что граф не имеет цикла, а значит система (8) имеет решение. Тогда

$$z_{ij}^0 - m_{ij} = x_i^0 - y_j^0 - (x_i + y_j) = (x_i^0 - x_i) - (y_j^0 - y_j),$$

и вместо игры $\Gamma(n,m,D)$ рассмотрим игру $\widetilde{\Gamma}(n,m,D)$, где начальные положения преследователей равны $a_i^0 = x_i^0 - x_i$, а начальные положения убегающих $b_j^0 = y_j^0 - y_j$.

Тогда $\widetilde{z}_{ij}^0 = a_i^0 - b_j^0 = z_{ij}^0 - m_{ij}$, откуда $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{\widetilde{z}_{ij}^0, p_1,\ldots,p_r\}$. В силу последнего включения в игре $\widetilde{\Gamma}(n,m,D)$ происходит поимка по крайней мере одного убегающего, следовательно, в игре $\Gamma(n,m,D)$ происходит поимка. Теорема доказана. $\square$

Следствие 3. *Пусть* $U = D_1(0)$, *среди векторов* $\{p_1,\ldots,p_r\}$ *найдется* $k-2$ *линейно независимых и количество элементов множества* $\bigcup_{i=1}^{n}(z_{ij}^0 - M_{ij})$ *не менее* k. *Тогда если для игры* $\Gamma(n,m,D)$ *выполнено условие* $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_{ij}^0 - M_{ij}, p_1,\ldots,p_r\}$, *то в игре происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия $|S| \geqslant k-2$ следует, что $|K| \leqslant 3$. Поэтому граф не имеет цикла. Доказательство поимки аналогично доказательству предыдущей теоремы. Следствие доказано. $\square$

Следствие 4. *В случае* $k = 2$, $U = D_1(0)$, $D = \mathbb{R}^k$ *условие* $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_{ij}^0 - M_{ij}\}$ *является необходимым и достаточным условием поимки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость вытекает из следствия 1. Докажем достаточность. Пусть $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_{ij}^0 - M_{ij}\}$. В силу $k = 2$ получаем $|K| = 3$, система (8) содержит $|I| + |J| \geqslant 3$ неизвестных. Отсюда $\max\{|I|,|J|\} \geqslant 2$ и все условия теоремы 2 выполнены. В игре происходит поимка. Следствие доказано. $\square$

§ 2. Поимка заданного числа убегающих

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$. Закон движения каждого из преследователей имеет вид

$$\dot{x}_i = u_i, \quad u_i \in U, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Закон движения убегающего E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = v_j, \quad v_j \in U, \quad j = 1, \ldots, m.$$

При $t = 0$ заданы начальные позиции преследователей $x_1^0, \ldots, x_n^0$ и убегающих $y_1^0, \ldots, y_m^0$, причем $z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0 \notin M_{ij}$ ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$). Здесь x_i, y_j, u_i, $v_j \in \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^k$, $M_{ij} \subset \mathbb{R}^k$ — выпуклые компакты.

Цель группы преследователей — поймать не менее q убегающих ($1 \leqslant q \leqslant m$). Данную задачу будем рассматривать при следующем предположении. Считаем, что сначала все убегающие выбирают свои управления сразу на $[t_0, \infty)$, а затем преследователи, на основе информации о выборе убегающих, выбирают свои управления, и, кроме того, каждый преследователь может поймать не более одного убегающего. Игру с n преследователями, m убегающими и заданными начальными позициями игроков z^0 будем обозначать $G_q(n, m, z^0)$.

Случай, когда U — шар с центром в нуле, а $M_{ij} = \{0\}$ для всех i, j, рассматривался в работе [12]. Были получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования.

Определение 6. Будем говорить, что в игре $G_q(n, m, z^0)$ *разрешима задача преследования*, если существует момент $T > 0$ такой, что для любой совокупности допустимых управлений $v_j(t)$ убегающих найдутся допустимые управления преследователей $u_i(t) = u_i(t, z_{ij}^0, v_j(s),\ s \in [t_0, \infty))$, обладающие следующим свойством: существуют множества

$$N \subset \{1, \ldots, n\}, \quad M \subset \{1, \ldots, m\}, \quad |N| = |M| = q$$

такие, что каждый убегающий E_j, $j \in M$ ловится не позднее момента T некоторым преследователем P_i, $i \in N$, причем если преследователь P_i ловит убегающего E_j, то остальные убегающие считаются им не пойманными. Выражение «преследователь P_i ловит убегающего E_j» означает, что для некоторого $\tau \in (0, T]$ выполнено $z_{ij}(\tau) \in M_{ij}$.

Пусть $N \subset \{1, \ldots, n\}$ и $M \subset \{1, \ldots, m\}$. Введем следующие обозначения:

$$\lambda_{ij}(v, m_{ij}) = \sup\{\lambda | \lambda \geqslant 0, -\lambda(z_{ij}^0 - m_{ij}) \in U - v\},$$
$$\lambda_{ij}(v) = \sup_{m_{ij} \in M_{ij}} \lambda_{ij}(v, m_{ij}),$$
$$\delta_j(z^0) = \min_{v \in U} \max_{i \in N} \lambda_{ij}(v), \quad \delta_{NM}(z^0) = \min_{j \in M} \delta_j(z^0).$$

Теорема 4. *Для того чтобы в игре $G_q(n, m, z^0)$ была разрешима задача преследования, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $s \in \{0, \ldots, q-1\}$ было верно следующее утверждение: для любого множества $N \subset \{1, \ldots, n\}$, $|N| = n - s$ найдется такое множество $M \subset \{1, \ldots, m\}$, $|M| = q - s$, что $\delta_{NM}(z^0) > 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность. Докажем, что любые $n - s$ преследователей ловят не менее $q - s$ убегающих, где $s \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$. При $s = 0$ получим утверждение теоремы.

Пусть $s = q - 1$ и $N \subset \{1, \ldots, n\}$, $|N| = n - s$. В силу условия теоремы существует $\beta \in \{1, \ldots, m\}$ такой, что $\delta_\beta(z^0) > 0$. Из теоремы Григоренко [5, с. 55] следует, что преследователи P_α, $\alpha \in N$ ловят убегающего E_β.

Предположим, что утверждение выполнено для всех $s \geqslant k_0 + 1$. Докажем его при $s = k_0$. Пусть $N \subset \{1, \ldots, n\}$, $|N| = n - k_0$. Тогда существует $M \subset \{1, \ldots, m\}$, $|M| = q - k_0$ такое, что $\delta_\beta(z^0) > 0$ для любого $\beta \in M$.

Для каждого $\beta \in M$ определим множества

$$J_\beta = \{\alpha \in N : \text{преследователь } P_\alpha \text{ ловит убегающего } E_\beta\}.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$M = \{1, 2, \ldots, q - k_0\} \text{ и } |J_1| \leqslant |J_2| \leqslant \ldots \leqslant |J_{r-k_0}|.$$

В силу теоремы Григоренко $J_\beta \neq \varnothing$ для всех $\beta \in M$. Возможны два случая.

1. $\Big|\bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1} J_\beta\Big| \geqslant n_1$ для любого $n_1 = 1, 2, \ldots, q - k_0$. Тогда по теореме Холла для множеств J_β существует система различных представителей, то есть существуют попарно различные $\alpha_\beta \in N$, $\beta \in M$ такие, что $\alpha_\beta \in J_\beta$. Таким образом, доказано, что преследователь P_{α_β} ловит убегающего E_β, $\beta \in M$ и утверждение в этом случае справедливо.

2. Существует $n_1 \in \{1, 2, \ldots, q - k_0\}$, при котором $\Big|\bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1} J_\beta\Big| < n_1$. Пусть n_1 — наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющих такому условию. Отметим, что

$$n_1 > 1 \ \text{ и } \ \Big|\bigcup_{\beta=1}^{n_2} J_\beta\Big| \geqslant n_2 \ \text{ для всех } \ n_2 \in \{1, 2, \ldots, n_1 - 1\}.$$

При $n_2 = n_1 - 1$ имеем систему неравенств

$$\Big|\bigcup_{\beta=1}^{n_1} J_\beta\Big| < n_1, \quad \Big|\bigcup_{\beta=1}^{n_1-1} J_\beta\Big| \geqslant n_1 - 1,$$

из которой получаем $\Big|\bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1} J_\beta\Big| = n_1 - 1$. Рассмотрим множество $N_1 = N \setminus \bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1} J_\beta$. Множество $N_1 \neq \varnothing$, так как

$$|N| = n - k_0, \ \Big|\bigcup_{\beta=1}^{n_1} J_\beta\Big| = n_1 - 1, \ n_1 \in \{1, 2, \ldots, q - k_0\}, \ n \geqslant q.$$

По предположению для числа $s = k_0 + n_1 - 1$ существует множество $M_1 \subset \{1, 2, \ldots, m\}$, $|M_1| = q - (k_0 + n_1 - 1)$ такое, что преследователи P_α, $\alpha \in N_1$ ловят убегающих E_β, $\beta \in M_1$, причем $\{1, 2, \ldots, n_1 - 1\} \cap M_1 = \varnothing$, ибо в противном случае существовал бы номер $\alpha \in N_1$ такой, что преследователь P_α ловит убегающего E_β, где $\beta \in \{1, 2, \ldots, n_1 - 1\}$, что противоречит построению множества N_1.

Имеем $\Big|\bigcup\limits_{\beta=1}^{n_2} J_\beta\Big| \geqslant n_2$ для всех $n_2 \in \{1, 2, \ldots, n_1 - 1\}$. Применяя теорему Холла, получаем, что для J_β существует система различных представителей, то есть существуют попарно различные $\alpha_\beta \in J_\beta$, где $\beta = 1, 2, \ldots, n_1 - 1$. Значит, преследователи P_α, где $\alpha \in \bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1-1} J_\beta$, ловят не менее $n_1 - 1$ убегающих. Таким образом, все преследователи ловят не менее

$$(q - (k_0 + n_1 - 1)) + (n_1 - 1) = q - k_0$$

убегающих. Достаточность доказана.

Необходимость. Предположим, что условие теоремы не выполнено. Это означает, что существуют $s \in \{0, \ldots, q - 1\}$ и множество $N \subset \{1, \ldots, n\}$, $|N| = n - s$ такие, что для любого множества $M \subset \{1, \ldots, m\}$, $|M| = q - s$ существует $j \in M$ такой, что $\delta_j(z^0) = 0$. Последнее утверждение равносильно следующему. Существуют $s \in \{0, \ldots, q - 1\}$ и множества $N \subset \{1, \ldots, n\}$,

$|N| = n - s$ и $M \subset \{1, \ldots, m\}$, $|M| = m - q + s + 1$ такие, что для каждого $j \in M$ выполнено $\delta_j(z^0) = 0$. Покажем, что в этом случае в игре $G_q(n, m, z^0)$ не менее $m-q+1$ убегающих может избежать поимки.

В силу условия $\delta_j(z^0) = 0$ получаем, что для каждого $j \in M$ выполнено $\min\limits_{v \in U} \max\limits_{i \in N} \lambda_{ij}(v) = 0$. Тогда существует вектор $v_j^0 \in U$ такой, что

$$\{-v_j^0 + U\} \cap \{-\lambda(z_{ij}^0 - M_{ij}), \lambda \geqslant 0\} = \{0\}. \tag{9}$$

Зададим стратегии убегающих E_j, $j \in M$ следующим образом: $v_j(t) = v_j^0$ при $t \geqslant 0$. Пусть $u_i(t)$ — произвольное допустимое управление преследователя P_i, $i \in N$. Тогда

$$z_{ij}(t) = z_{ij}^0 + \int_0^t (-v_j^0 + u_i(s))\, ds \in z_{ij}^0 - tv_j^0 + tU$$

для всех $t \geqslant 0$. Из условия (9) следует, что для всех $t \geqslant 0$

$$\{t(-v_j^0 + U)\} \cap \{-\lambda t(z_{ij}^0 - M_{ij}), \lambda \geqslant 0\} = \{0\}.$$

Поэтому

$$\{z_{ij}^0 + t(-v_j^0 + U)\} \cap \{z_{ij}^0 - \lambda t(z_{ij}^0 - M_{ij}), \lambda \geqslant 0\} = \{z_{ij}^0\}.$$

Так как $z_{ij}^0 \notin M_{ij}$, $M_{ij} \subset \{z_{ij}^0 - \lambda t(z_{ij}^0 - M_{ij}), \lambda \geqslant 0, t \geqslant 0\}$, то для всех $t > 0$ и всех $i \in N$, $j \in M$ выполнено $M_{ij} \cap \{z_{ij}^0 + t(-v_j^0 + U)\}$. Из последнего неравенства следует, что никакой из преследователей P_i, $i \in N$ не ловит ни одного из убегающих E_j, $j \in M$. Остальные преследователи P_i, $i \notin N$ могут поймать не более s убегающих. Следовательно, по крайней мере $m - q + 1$ из убегающих E_j, $j \in M$ окажутся непойманными. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Л.А. Игры преследования со многими участниками // Известия АН Арм. ССР. 1966. Т. 1. № 5. С. 331–340.
2. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
3. Иванов Р.П. Простое преследование на компакте // ДАН СССР. 1978. Т. 254. № 6. С. 1318–1321.
4. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 240 с.
5. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. 197 с.
6. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2009. 266 с.
7. Петров Н.Н., Петров Н.Никандр. О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1366–1374.
8. Банников А.С. Об одной задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 3. С. 3–11.
9. Банников А.С., Петров Н.Н. К нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 40–51.
10. Сахаров Д.В. Об одной дифференциальной игре преследования со многими участниками // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 1. С. 81–88.
11. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Задача преследования группы жестко скоординированных убегающих // Известия РАН. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 75–79.
12. Петров Н.Н., Прокопенко В.А. Об одной задаче преследования группы убегающих // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 724–726.

МАТЕМАТИКА 2012. Вып. 1

Поступила в редакцию 19.10.2011

Сахаров Денис Валентинович, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: drden@e-izhevsk.ru

D. V. Sakharov
On two differential games of simple group pursuit

Keywords: differential game, simple motion, group pursuit, rigidly co-ordinated evaders.

Mathematical Subject Classifications: 49N70, 49N75

Two differential games of the simple pursuit of a group of evaders by a group of pursuers are considered. The first problem is devoted to the pursuit of a group of rigidly co-ordinated evaders by a group of pursuers with equal possibilities for all participants. It is supposed that the evaders remain in the bounds of the convex polyhedral set, terminal sets are convex compacts and the aim of the group of pursuers is to capture at least one evader. The solvability conditions of the problem of pursuit and the problem of evasion are obtained in the terms of initial positions and parameters of the game.

The second problem is devoted to the pursuit of a group of evaders by a group of pursuers under condition that the evaders use program strategies and one pursuer can catch only one evader. The aim of a group of pursuers is to capture a specified number of evaders. Terminal sets are convex compacts, the set of possible controls is an arbitrary convex compact. Necessary and sufficient solvability conditions of the problem of pursuit are obtained.

REFERENCES

1. Petrosyan L.A. Games of pursuit with many participants, *Izv. Akad. Nauk Arm. SSR*, 1966, vol. 1, no. 5, pp. 331–340.

2. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by a few objects, *Kibernetika*, 1976, no. 3, pp. 145–146.

3. Ivanov R.P. Simple pursuit in a compact set, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1978, vol. 254, no. 6, pp. 1318–1321.

4. Chikrii A.A. *Konfliktno upravlyaemye protsessy* (Conflict controlled processes), Kyiv: Naukova Dumka, 1992, 240 p.

5. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control a few dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990, 197 p.

6. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009, 266 p.

7. Petrov N.N., Petrov N.Nikandr. About differential game "cossacks-robbers", *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 8, pp. 1366–1374.

8. Bannikov A.S. On one problem of simple pursuit, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2009, no. 3, pp. 3–11.

9. Bannikov A.S., Petrov N.N. On non-stationary problem of group pursuit with phase restrictions, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2010, vol. 16, no. 1, pp. 40–51.

10. Sakharov D.V. About one differential game of pursuit with many persons, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2010, no. 1, pp. 81–88.

11. Vagin D.A., Petrov N.N. Problem of pursuit a group of co-ordinated rigidly evaders, *Izv. Akad. Nauk Teor. Sist. Upr.*, 2001, no. 5, pp. 75–79.

12. Petrov N.N., Prokopenko V.A. On one pursuit problem of a group of evaders, *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 4, pp. 724–726.

Received 19.10.2011

Sakharov Denis Valentinovich, post-graduate student, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: drden@e-izhevsk.ru