УДК 517.982.272, 515.122.55

© ***А. В. Осипов***

СОПРЯЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО К $C_{rc}(X)$[1]

Исследуется сопряженное пространство непрерывных линейных функционалов пространства $C_{rc}(X)$. В работе rc обозначает C-компактно-открытую топологию на $C(X)$, множестве всех вещественнозначных функций на тихоновском пространстве X. Так как сопряженное пространство соотносится с пространством мер, то получена характеристика сопряженного пространства к $C_{rc}(X)$ с точки зрения теории меры. Исследуется свойство сепарабельности сопряженного пространства.

Ключевые слова: непрерывный линейный функционал, функциональное пространство, C-компактное подмножество, C-компактно-открытая топология, мера, нуль-множество, сепарабельность.

Введение

На множестве всех непрерывных вещественнозначных функций $C(X)$ так же, как на множестве $C^*(X)$ всех ограниченных непрерывных вещественнозначных функций, определенных на тихоновском пространстве X, можно рассматривать достаточно много различных топологий. Одним из общих методов определения топологии на $C(X)$ является метод, предложенный Р. Фоксом (см. [10]), определения компактно-открытой топологии. Предбазу такой топологии образуют все множества вида $\{f \in C(X): \ f(F) \subseteq U\}$, где F — компактное подмножество пространства X, а U — открытое подмножество числовой прямой. Естественным обобщением компактно-открытой топологии является множественно-открытая топология. Множественно-открытая топология на семействе α непустых подмножеств пространства X была впервые введена Р. Аренсом и Ж. Дугунджи [2]. Предбазу такой топологии образуют все множества вида $\{f \in C(X): \ f(F) \subseteq U\}$, где $F \in \alpha$, а U — открытое подмножество числовой прямой. Топологическое пространство $C(X)$ с множественно-открытой топологией на семействе α будем обозначать $C_\alpha(X)$.

Топология равномерной сходимости задается базой в каждой точке $f \in C(X)$. Эта база состоит из всех множеств вида $\big\{g \in C(X)\colon \sup\{|g(x) - f(x)| < \epsilon$ для всех $x \in X\}\big\}$. Естественным обобщением этой топологии является топология равномерной сходимости на элементах семейства α (α-топология), где α — фиксированное семейство непустых подмножеств пространства X. Базу α-топологии в точке $f \in C(X)$ образуют все множества вида $\big\{g \in C(X)\colon \sup\{|g(x) - f(x)| < \epsilon$ для всех $x \in F\}\big\}$, где $F \in \alpha$ и $\epsilon > 0$. Топологическое пространство $C(X)$ с топологией равномерной сходимости на семействе α будем обозначать через $C_{\alpha,u}(X)$.

Из определений множественно-открытой топологии и α-топологии следует, что их свойства зависят от выбранного семейства α. Так, если в качестве семейства α взять, например, все конечные, компактные, счетно компактные, секвенциально компактные, C-компактные или псевдокомпактные подмножества X, то мы получим достаточно классические локально выпуклые топологии: топологию поточечной сходимости, компактно-открытую топологию, счетно компактно-открытую, секвенциально компактно-открытую, C-компактно-открытую и псевдокомпактно-открытую топологию соответственно. Эти топологии активно изучаются и находят свое приложение в теории меры и функциональном анализе. Заметим, что все эти топологии обладают тем свойством, что $C_\alpha(X) = C_{\alpha,u}(X)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке программы Отделения математических наук РАН (проект 12–T–1–1003).

Особый интерес, с точки зрения приложений, возникает тогда, когда $C_\alpha(X)$ является локально выпуклым топологическим векторным пространством (ТВП). В работе [7] была доказана теорема (Theorem 3.3), которая является критерием для того, чтобы множество $C(X)$ со множественно-открытой топологией было топологическим векторным пространством.

Теорема 1. *Для пространства X следующие утверждения эквивалентны.*
1. $C_\alpha(X) = C_{\alpha,u}(X)$.
2. $C_\alpha(X)$ — *топологическая группа.*
3. $C_\alpha(X)$ — *топологическое векторное пространство.*
4. $C_\alpha(X)$ — *локально выпуклое топологическое векторное пространство.*
5. α — *семейство C-компактных подмножеств и $\alpha = \{A \in \alpha : \forall$ C-компактного $B \subseteq A$, множество $[B,U]$ открыто в $C_\alpha(X)$ $\forall$ открытого $U \subseteq \mathbb{R}\}$.*

Напомним, что множество A называют C-компактным подмножеством в X, если для любой $f \in C(X)$ образ $f(A)$ компактен в $\mathbb{R}$.

Итак, из теоремы 1 следует, что C-компактно-открытая топология, то есть множественно-открытая топология на семействе всех C-компактных подмножеств пространства X, наиболее интересная из всех множественно-открытых топологий на множестве $C(X)$ как с точки зрения топологии, так и с точки зрения теории меры. Эта топология уже исследовалась в работах [7,8] и [6]. В частности, в этих работах были изучены такие свойства C-компактно-открытой топологии на $C(X)$, как субметризуемость, метризуемость, сепарабельность, полнота, первая и вторая аксиомы счетности и другие. Так как эта топология локально выпуклая, то естественно рассмотреть сопряженное пространство, а именно, рассмотреть пространство непрерывных линейных функционалов на $C_{rc}(X)$, где $C_{rc}(X)$ обозначает пространство $C(X)$, наделенное C-компактно-открытой топологией. В этой работе изучаются основные свойства сопряженного пространства к пространству $C_{rc}(X)$.

Аналогично компактно-открытой и псевдокомпактно-открытой топологиям на $C(X)$ (см., например, [5]) C-компактно-открытая топология rc на $C(X)$ порождается с помощью семейства полунорм $\{p_A : A$ — C-компактное подмножество $X\}$, где $p_A(f) = \sup\{|f(x)|\colon x \in A\}$ для $f \in C(X)$. Пусть $RC(X)$ — семейство всех C-компактных подмножеств пространства X. Базу C-компактно-открытой топологии в точке $f \in C(X)$ образуют все множества вида $\langle f, F, \epsilon\rangle = \big\{g \in C(X)\colon \sup\{|g(x) - f(x)| < \epsilon$ для всех $x \in F\}\big\}$, где $F \in RC(X)$ и $\epsilon > 0$. Так как замыкание C-компактного подмножества пространства X является C-компактным и $f(\overline{F}) \subseteq \overline{f(F)} = f(F)$ для любого $f \in C(X)$ и $F \subseteq X$, мы будем всегда рассматривать замкнутое C-компактное подмножество F пространства X в множестве $\langle f, F, \epsilon\rangle$.

Отметим, что свойства сопряженного пространства к пространству $C_{rc}(X)$ мы будем сравнивать со свойствами сопряженных к пространствам $C_c(X)$, $C_{ps}(X)$ и $C^*_\infty(X)$, где $C_c(X)$, $C_{ps}(X)$ — множество $C(X)$ с компактно-открытой и псевдокомпактно-открытой топологией соответственно, а $C^*_\infty(X)$ — банахово пространство на $C^*(X)$, наделенное нормой $\|.\|_\infty$, где $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ для $f \in C^*(X)$. Заметим, что топология на $C^*(X)$, индуцированная нормой $\|.\|_\infty$, является топологией равномерной сходимости на множестве $C^*(X)$. Сопряженное к пространствам $C_c(X)$, $C_{ps}(X)$, $C_{rc}(X)$ и $C^*_\infty(X)$, то есть множество непрерывных линейных функционалов на $C_c(X)$, $C_{ps}(X)$, $C_{rc}(X)$ и $C^*_\infty(X)$, будем обозначать как $\Lambda_c(X)$, $\Lambda_{ps}(X)$, $\Lambda_{rc}(X)$ и $\Lambda_\infty(X)$, соответственно. Заметим, что, так как $C^*(X)$ — плотное подмножество в $C_j(X)$, $(j = c, ps, rc)$, $\Lambda_j(X)$ можно рассматривать как множество всех непрерывных линейных функционалов на $C^*_j(X)$, где $C^*_j(X)$ обозначает пространство $C^*(X)$, наделенное топологией j, $(j = c, ps, rc)$. Очевидно, что $\Lambda_c(X) \subseteq \Lambda_{ps}(X) \subseteq \Lambda_{rc}(X)$.

Все пространства, рассматриваемые в работе, будем предполагать тихоновскими. Если X и Y — топологические пространства, то запись $X \geqslant Y$ ($X > Y$, $X = Y$) означает, что X и Y совпадают как множества, и топология на X сильнее или равна (строго сильнее, равна) топологии на Y. Символы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ обозначают множество вещественных и натуральных чисел соответственно. Стоун-Чеховскую компактификацию и Хьюиттовское пополнение пространства X будем обозначать βX и υX соответственно. Функцию, тождественно равную нулю, будем обозначать 0. Символом $\emptyset$ обозначаем пустое множество. Если $A \subseteq X$, а $f \in C(X)$, то через $f|_A$ обозначаем сужение функции f на множество A. Пространство X будем называть субметризуемым, если существует уплотнение $f\colon X \to Y$, где Y — метризуемое пространство.

§ 1. Основные понятия и свойства

Функциональное пространство $C(X)$, так же как $C^*(X)$, является векторной решеткой — частично упорядоченным вещественным векторным пространством с отношением порядка: $f \leqslant g$, если $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in X$. Обозначим $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ и $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ для всех $x \in X$. Линейный функционал λ на $C(X)$ (или $C^*(X)$) называется положительным, если $\lambda(f) \geqslant 0$ для каждого $f \in C(X)$ (или для каждого $f \in C^*(X)$) такого, что $f \geqslant 0$. Будем обозначать положительный линейный функционал как $\lambda \geqslant 0$, и множество положительных функционалов $\Lambda_j^+(X) = \{\lambda \in \Lambda_j(X) : \lambda \geqslant 0\}$, где $j = c, ps, rc, \infty$, будем называть положительным конусом $\Lambda_j(X)$.

Пусть λ — линейный функционал на $C(X)$ (или на $C^*(X)$) и A — подмножество пространства X. Тогда $\operatorname{supp} \lambda = A$ значит, что λ имеет *носитель* A, то есть для любого $f \in C(X)$ ($f \in C^*(X)$) с условием $f|_A = 0$ выполняется $\lambda(f) = 0$. Заметим, что в силу линейности λ, равенство $\operatorname{supp} \lambda = A$ эквивалентно тому, что для любых $f, g \in C(X)$ (или $f, g \in C^*(X)$) с условием $f|_A = g|_A$ выполняется равенство $\lambda(f) = \lambda(g)$.

Теорема 2. *Для каждого $\lambda \in \Lambda_{rc}(X)$ существует C-компактное подмножество A пространства X такое, что $\operatorname{supp} \lambda = A$. Верно и обратное: если λ — положительный линейный функционал на $C(X)$ с носителем на некотором C-компактном подмножестве, то $\lambda \in \Lambda_{rc}^+(X)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \Lambda_{rc}(X)$, тогда $\lambda : C_{rc}(X) \mapsto \mathbb{R}$ непрерывно в точке 0, а значит, существуют $A \in RC(X)$ и $\epsilon > 0$ такие, что $\lambda(\langle f, A, \epsilon\rangle) \subseteq (-1, 1)$. Пусть $f \in C^*(X)$ и $f|_A = 0$. Для каждого $\delta > 0$, $\lambda(\frac{1}{\delta} f) \in (-1, 1)$, а значит, $|\lambda(f)| < \delta$.

Обратно, пусть λ — положительный линейный функционал на $C^*(X)$ с носителем на некотором $A \in RC(X)$. Необходимо проверить непрерывность λ в нуле. Пусть $\epsilon > 0$; определим $\delta = \frac{\epsilon}{2\delta(1)+1}$ и пусть $f \in \langle 0, A, \delta\rangle$. Пусть $\widehat{f}$ — продолжение f на βX. Очевидно, что $\widehat{f}$ отображает $cl_{\beta X} A$ в отрезок $[-\delta, \delta]$. Следовательно, $\widehat{f}|_{cl_{\beta X} A}$ имеет продолжение $\widehat{g} \in C(\beta X)$, образ которого содержится в $[-\delta, \delta]$. Пусть $g = \widehat{g}|_X$. Заметим, что на множестве A выполняется равенство $g = f$, то есть $(g - f)|_A = 0$ и, следовательно, $\lambda(g - f) = 0$ влечет, что $\lambda(g) = \lambda(f)$. Отсюда следует, что $|\lambda(f)| = |\lambda(g)| = |\lambda(g^+ - g^-)| \leqslant |\lambda(g^+)| + |\lambda(g^-)| \leqslant \lambda(g^+) + \lambda(g^-) \leqslant \lambda(\delta) + \lambda(\delta) = 2\delta\lambda(1) < \epsilon$.

Теорема 3. *Для каждого $f \in C(X)$ и конечного множества $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subseteq \Lambda_{rc}(X)$ существует $g \in C^*(X)$ такая, что $\lambda_i(f) = \lambda_i(g)$ для каждого $i = 1, \ldots, n$. Более того, если $f \geqslant 0$, тогда g можно выбрать так, что $g \geqslant 0$.*

Доказательство. Пусть $f \in C(X)$ и $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subseteq \Lambda_{rc}(X)$; тогда, по теореме 2, существуют C-компактные подмножества A_i пространства X такие, что $A_i = \operatorname{supp} \lambda_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Пусть $A = \bigcup A_i$. Множество A — C-компактное подмножество пространства X (как конечное объединение C-компактных подмножеств). Таким образом, $f(A)$ — компактное подмножество $\mathbb{R}$ и содержится в некотором отрезке $[-\delta, \delta]$. Пусть $\widehat{f}$ — продолжение f на βX. Очевидно, что $\widehat{f}$ отображает $cl_{\beta X} A$ в отрезок $[-\delta, \delta]$. Следовательно, $\widehat{f}|_{cl_{\beta X} A}$ имеет продолжение $\widehat{g} \in C(\beta X)$, образ которого содержится в $[-\delta, \delta]$. Пусть $g = \widehat{g}|_X$. Заметим, что $g \in C^*(X)$ и на множестве A выполняется равенство $g = f$, то есть $(g - f)|_A = 0$ и, следовательно, $\lambda_i(g - f) = 0$ влечет, что $\lambda_i(g) = \lambda_i(f)$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Если $f \geqslant 0$, тогда $f(A) \subseteq [0, \delta]$. Таким образом, выбранное $g \geqslant 0$.

Заметим, что теоремы 2 и 3 справедливы и для пространств $\Lambda_{ps}(X)$, $\Lambda_{ps}^+(X)$ ($\Lambda(X)$, $\Lambda^+(X)$), если C-компактность подмножества A заменить на псевдокомпактность (на компактность). Также заметим, что каждый положительный линейный функционал на $C_\infty^*(X)$ является непрерывным, то есть принадлежит $\Lambda_\infty(X)$.

Напомним, что линейный функционал λ на пространстве $C(X)$ (или $C^*(X)$) называется *ограниченным*, если для каждого $g \in C(X)$ (или $C^*(X)$) $g \geqslant 0$ существует $M > 0$ такое, что $|\lambda(f)| \leqslant M$ выполняется для всех $f \in C(X)$ ($f \in C^*(X)$) при условии $|f| \leqslant g$. Ясно, что каждый положительный линейный функционал на $C(X)$ или на $C^*(X)$ является ограниченным. Множество всех ограниченных линейных функционалов на $C(X)$ (на $C^*(X)$) обозначим как $C(X)^{\sim}$ ($C^*(X)^{\sim}$) и будем называть порядково ограниченным сопряженным к $C(X)$ ($C^*(X)$).

Теорема 4. *Для любого пространства X выполнены соотношения.*
1. $\Lambda_{rc}(X) \subseteq C(X)^{\sim}$.
2. $\Lambda_{\infty}(X) = C^*(X)^{\sim}$.

Заметим, что если $\lambda \in C(X)^{\sim}$ и A — C-компактное подмножество пространства X, то $A = \operatorname{supp} \lambda$ тогда и только тогда, когда $A = \operatorname{supp} \lambda^+$ и $A = \operatorname{supp} \lambda^-$, а также тогда и только тогда, когда $A = \operatorname{supp} |\lambda|$. Следовательно, мы получаем следующий результат.

Теорема 5. *Пусть λ — ограниченный линейный функционал на $C(X)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*
1. $\lambda \in \Lambda_{rc}(X)$.
2. λ^+ *и* λ^- *принадлежат* $\Lambda_{rc}(X)$.
3. $|\lambda| \in \Lambda_{rc}(X)$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\lambda \in \Lambda_{rc}(X)$, тогда существует $A \in RC(X)$ такое, что $A = \operatorname{supp} \lambda$. Для каждого $f \in C^*(X)$ такого, что $f \geqslant 0$, $\lambda^+(f) = \sup\{\lambda(g) : 0 \leqslant g \leqslant f\}$. Очевидно, что $A = \operatorname{supp} \lambda^+$ и, следовательно, $\lambda^+ \in \Lambda_{rc}(X)$. Аналогично доказывается, что $\lambda^- \in \Lambda_{rc}(X)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Очевидно, так как $|\lambda| = \lambda^+ + \lambda^-$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $f \in C^*(X)$ такая, что $f \geqslant 0$, $|\lambda|(f) = \sup\{\lambda(g) : |g| \leqslant f\}$. Если $A = \operatorname{supp} |\lambda|$, тогда $A = \operatorname{supp} \lambda^+$ и $A = \operatorname{supp} \lambda^-$. Следовательно, λ^+ и λ^- непрерывны на $C^*_{rc}(X)$. Так как $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, то $\lambda \in \Lambda_{rc}(X)$.

Далее определим естественную норму на пространстве $\Lambda_{rc}(X)$, которая согласуется с решетчатой структурой, то есть $\Lambda_{rc}(X)$ будет рассматриваться как нормированная векторная решетка.

Напомним, что $\Lambda_{\infty}(X)$ — пространство всех непрерывных линейных функционалов на банаховом пространстве $C^*_{\infty}(X)$. Положим на пространстве $\Lambda_{\infty}(X)$ норму $\|\lambda\|_* = \sup\{|\lambda(f)| : f \in C^*(X)$ и $\|f\|_{\infty} \leqslant 1\}$. Заметим, что тогда $(\Lambda_{\infty}(X), \|.\|_*)$ — банахова решетка.

Определим отображение $L : \Lambda_{rc}(X) \mapsto \Lambda_{\infty}(X)$ следующим образом. Пусть $i : C^*_{\infty}(X) \mapsto C^*_{rc}(X)$ — тождественное отображение и $j : C^*_{rc}(X) \mapsto C_{rc}(X)$ — отображение включения; оба отображения непрерывны и линейны. Тогда для каждого $\lambda \in \Lambda_{rc}(X)$, определим $L(\lambda) = \lambda \circ j \circ i$. Заметим, что L — непрерывное и линейное отображение, и поэтому $L \in \Lambda_{\infty}(X)$. Более того, L — взаимно однозначное отображение. Действительно, пусть λ и $\mu \in \Lambda_{rc}(X)$ и $\lambda \neq \mu$. Тогда $\lambda(f) \neq \mu(f)$ для некоторого $f \in C(X)$. По теореме 3 существует $g \in C^*(X)$ такое, что $\lambda(g) = \lambda(f)$ и $\mu(g) = \mu(f)$. Тогда $L(\lambda)(g) = \lambda(g) \neq \mu(g) = L(\mu)(g)$ и, следовательно, $L(\lambda) \neq L(\mu)$. Отсюда следует, что элемент λ отождествляется с элементом $L(\lambda)$ и, следовательно, $\Lambda_c(X) \subseteq \Lambda_{ps}(X) \subseteq \Lambda_{rc}(X) \subseteq \Lambda_{\infty}(X)$. Таким образом, для каждого $\lambda \in \Lambda_{rc}(X)$, определена $\|\lambda\|_* = \|L(\lambda)\|_*$. Ясно, что $\|.\|_*$ — норма на $\Lambda_{rc}(X)$. Отметим, что пространство $\Lambda_{rc}(X)$ — нормированное линейное пространство $(\Lambda_{rc}(X), \|.\|_*)$. Следующий результат показывает, что норма $\|.\|_*$ на $\Lambda_{rc}(X)$ является нормой, соответствующей решетчатой структуре на $\Lambda_{rc}(X)$.

Теорема 6. *Если λ, $\mu \in \Lambda_{rc}(X)$, тогда выполняются следующие утверждения.*
1. *Если* $|\lambda| \leqslant |\mu|$, *тогда* $\|\lambda\|_* \leqslant \|\mu\|_*$.
2. $\|\lambda^+ - \mu^+\|_* \leqslant \|\lambda - \mu\|_*$.
3. $\|\lambda^- - \mu^-\|_* \leqslant \|\lambda - \mu\|_*$.

В частности, $\Lambda_{rc}(X)$ — нормированная векторная решетка.

Заметим, что теорема 6 будет выполняться, если $\Lambda_{rc}(X)$ заменить на $\Lambda_{ps}(X)$ или на $\Lambda_c(X)$.

Теорема 7. *Для любого пространства X, $\Lambda_{rc}^+(X)$ замкнуто в пространстве $(\Lambda_{rc}(X), \|.\|_*)$.*

Далее мы исследуем вопрос, когда $\Lambda_{rc}(X)$ является полным нормированным линейным пространством. Заметим, что норма $\|.\|_*$ на $\Lambda_{rc}(X)$ индуцирует метрику d_*, где $d_*(\lambda,\mu) = \|\lambda-\mu\|_*$ для λ, $\mu \in \Lambda_{rc}(X)$. В частности, $(\Lambda_{rc}^+(X), d_*)$ — метрическое пространство.

Ранее было замечено, что $C^*(X)$ плотно в $C_{rc}(X)$, $\Lambda_{rc}(X)$ совпадает со всеми непрерывными линейными функционалами на $C_{rc}^*(X)$. В следующей теореме равенство $\Lambda_{rc}(X) = \Lambda_\infty(X)$ обозначает, что семейство всех непрерывных линейных функционалов на $C_\infty^*(X)$ совпадает с семейством всех непрерывных линейных функционалов на $C_{rc}^*(X)$.

Теорема 8. *Для пространства X следующие утверждения эквивалентны.*
1. *X — псевдокомпакт.*
2. *$C_{rc}(X) = C_{rc}^*(X) = C_\infty^*(X)$.*
3. *$\Lambda_{rc}(X) = \Lambda_\infty(X)$.*
4. *$(\Lambda_{rc}(X), \|.\|_*)$ — банахова решетка.*
5. *$(\Lambda_{rc}^+(X), d_*)$ — полное метрическое пространство.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). Так как C-компактность всего пространства X является свойством псевдокомпактности, то выполнение импликаций очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (4). Следует из того, что $(\Lambda_\infty(X), \|.\|_*)$ банахова решетка.

(4) $\Rightarrow$ (5). Следует из теоремы 7.

(5) $\Rightarrow$ (1). Пусть $(\Lambda_{rc}^+(X), d_*)$ — полное метрическое пространство. Предположим, что X не псевдокомпактное пространство. Тогда X содержит Y — замкнутую C-вложенную копию $\mathbb{N}$. Пусть $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим $\lambda_m : C_{rc}(X) \mapsto \mathbb{R}$ таким образом: для каждого $f \in C(X)$, $\lambda_m(f) = \sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} f(y_n)$. Так как $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} = \operatorname{supp}\lambda_m$, по теореме 2, каждый функционал $\lambda_m \in \Lambda_{rc}^+(X)$. Заметим, что для каждого k и m, где $k < m$, $\|\lambda_k - \lambda_m\|_* \leqslant \sum\limits_{n=k+1}^{m} \frac{1}{2^n}$. Таким образом, $\{\lambda_m\}$ — фундаментальная последовательность (последовательность Коши) в полном метрическом пространстве $(\Lambda_{rc}^+(X), d_*)$. Значит, существует $\lambda \in \Lambda_{rc}^+(X)$ такой, что $\lambda_m \to \lambda$. Заметим, что $\lambda(f) = \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} f(y_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(y_n)$ для каждого $f \in C^*(X)$.

Так как $\lambda \in \Lambda_{rc}^+(X)$, то существует замкнутое C-компактное подмножество A пространства X такое, что $A = \operatorname{supp}\lambda$. Заметим, что $Y \subseteq A$. Действительно, пусть существует $y_m \notin A$, тогда существует неотрицательная функция $f \in C^*(X)$ такая, что $f(x) = 0$ для всех $x \in A$ и $f(y_m) = 1$. Так как $f|_A = 0$, то $\lambda(f) = 0$, но $\lambda(f) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(y_n) \geqslant \frac{1}{2^m} > 0$. Следовательно, $Y \subseteq A$. Но так как Y — C-вложенное в X и A — C-компактное подмножество пространства X, получаем противоречие с фактом, что Y — копия $\mathbb{N}$. Следовательно, X — псевдокомпакт.

В завершение этого параграфа исследуем вопрос совпадения пространств $\Lambda_c(X)$ и $\Lambda_{rc}(X)$.

Теорема 9. *Для пространства X следующие утверждения эквивалентны.*
1. *Каждое замкнутое C-компактное подмножество пространства X является компактным.*
2. *$C_c(X) = C_{rc}(X)$.*
3. *$\Lambda_c(X) = \Lambda_{rc}(X)$.*

Доказательство.

(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). Следует из определений.

(3) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что $\Lambda_c(X) = \Lambda_{rc}(X)$. Предположим, что существует замкнутое C-компактное не компактное подмножество A пространства X. Так как A — C-компактное подмножество X, $cl_{\beta X}A \subseteq \upsilon X$ и так как A не компакт, существует $p \in cl_{\upsilon X}A \setminus A$. Определим

линейный функционал λ на $C(X)$ следующим образом: для каждого $f \in C(X)$, $\lambda(f) = f^{\upsilon}(p)$, где f^{υ} — непрерывное продолжение f на пространство υX. Заметим, что λ — положительный линейный функционал на $C(X)$. Если $f \in C(X)$ такая, что $f|_A = 0$, тогда $f^{\upsilon}(p) = 0$, так как $p \in cl_{\beta X} A$. Следовательно, $\lambda(f) = 0$ и $A = \operatorname{supp}\lambda$. По теореме 2, $\lambda \in \Lambda_{rc}(X)$. Заметим, что λ не может иметь носитель на любом компактном подмножестве пространства X. Пусть K — компактное подмножество X, тогда K — компактное подмножество υX. Так как $p \notin K$, существует $\widehat{f} \in C(\upsilon X)$ такая, что $\widehat{f}|_K = 0$ и $\widehat{f}(p) = 1$. Пусть $\widehat{f}|_X = f$. Заметим, что $\widehat{f} = f^{\upsilon}$. Если $K = \operatorname{supp}\lambda$, то $\lambda(f) = 0$, но $\lambda(f) = f^{\upsilon}(p) = 1$. Получили противоречие, следовательно, каждое замкнутое C-компактное подмножество X является компактным.

Отметим, что в классе субметризуемых пространств C-компактность подмножества совпадает с компактностью (теорема 1 в работе [9]). Поэтому получаем следующий результат.

Следствие 1. *Пусть X — субметризуемое пространство. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. $C_c(X) = C_{ps}(X) = C_{rc}(X)$.
2. $\Lambda_c(X) = \Lambda_{ps}(X) = \Lambda_{rc}(X)$.

§ 2. Изоморфизм между пространством $\Lambda_{rc}(X)$ и пространством мер $M_{\upsilon}(X)$

Алгебру, порожденную замкнутыми подмножествами пространства X, будем обозначать как $\mathcal{B}o^*(X)$, а порожденную σ-алгебру как $\mathcal{B}o(X)$. Борелевским множеством называем элемент σ-алгебры $\mathcal{B}o(X)$. Напомним, что мерой на $\mathcal{B}o(X)$ (борелевской мерой) называют вещественнозначную σ-аддитивную функцию, определенную на $\mathcal{B}o(X)$. Мера μ, определенная на $\mathcal{B}o(X)$, имеет носитель $A \in \mathcal{B}o(X)$, если $|\mu|(X \setminus A) = 0$. Мера μ, определенная на $\mathcal{B}o(X)$, называется замкнуто регулярной, если для $A \in \mathcal{B}o(X)$ и $\epsilon > 0$ существуют замкнутое множество C и открытое множество U в пространстве X такие, что $C \subseteq A \subseteq U$ и $|\mu|(U \setminus C) < \epsilon$. Замкнуто регулярная мера называется компактно регулярной, если замкнутое множество C — компактное подмножество пространства X. Очевидно, что замкнуто регулярная мера с компактным носителем является компактно регулярной.

Пусть $M(X)$ — линейное пространство всех замкнуто регулярных σ-аддитивных борелевских мер, определенных на $\mathcal{B}o(X)$, $M_c(X) = \{\mu \in M(X) : \mu$ — компактно регулярна$\}$ и $M_{rc}(X) = \{\mu \in M(X) : \mu$ имеет носитель на замкнутом C-компактном подмножестве пространства X $\}$. Через $M^+(X)$, $M_c^+(X)$ и $M_{rc}^+(X)$ обозначим подмножества положительных мер в пространствах $M(X)$, $M_c(X)$ и $M_{rc}(X)$ соответственно. Для $\mu \in M(X)$ определим норму $\|\mu\| = |\mu|(X)$. Пусть μ и $\nu \in M(X)$, определим $\mu \leqslant \nu$, если $\mu(A) \leqslant \nu(A)$ $\forall A \in \mathcal{B}o(X)$. Относительно этого порядка пространство $M(X)$, обладающее полно вариационной нормой $\|\mu\|$, есть нормированная решетка. Следующий результат доказывается в работе [3, Theorem 4].

Теорема 10. *Пусть X — нормальное счетно компактное пространство, тогда отображение $F : (M(X), \|.\|) \mapsto (\Lambda_\infty(X), \|.\|_*)$, определенное как $F(\mu)(f) = \int_X f d\mu$, является изометрическим решетчатым изоморфизмом $M(X)$ на $\Lambda_\infty(X)$. При этом изоморфизме $M^+(X)$ отождествляется с $\Lambda_\infty^+(X)$.*

Отметим, что любое замкнутое C-компактное подмножество нормального пространства является псевдокомпактным (и даже счетно компактным). Поэтому в нормальных пространствах характеристика пространства $\Lambda_{rc}(X)$ с точки зрения теории меры совпадает с характеристикой пространства $\Lambda_{ps}(X)$, полученной в работе [4, Theorem 3.3]. Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 11. *Пусть X — нормальное пространство. Тогда отображение $F : (M_{rc}(X), \|.\|) \mapsto (\Lambda_{rc}(X), \|.\|_*)$, определенное как $F(\mu)(f) = \int_X f d\mu$, является изометрическим решетчатым изоморфизмом $M_{rc}(X)$ на $\Lambda_{rc}(X)$. При этом изоморфизме $M_{rc}^+(X)$ отождествляется с $\Lambda_{rc}^+(X)$.*

Заметим, что по следствию 1 теорема 11 справедлива и в классе субметризуемых пространств.

Для характеристики пространства $\Lambda_{rc}(X)$, когда пространство X не является нормальным (или субметризуемым), рассматривается υX — Хьюттовское пополнение пространства X.

Пусть A — C-компактное подмножество пространства X и $f \in C(X)$. Если f^υ — непрерывное продолжение f на υX, тогда $f(A) = f^\upsilon(\overline{A})$ и, следовательно, $p_A(f) = p_{\overline{A}}(f^\upsilon)$, где $\overline{A} = cl_{\upsilon X}A$. Заметим, что $C_{rc}(\upsilon X) = C_c(\upsilon X)$ и, следовательно, $\Lambda_{rc}(\upsilon X) = \Lambda_c(\upsilon X)$. Пусть $\lambda \in \Lambda_{rc}(X)$, тогда $\widehat{\lambda} \in \Lambda_c(\upsilon X)$ определим следующим образом: для $h \in C(\upsilon X)$ определим $\widehat{\lambda} : (\upsilon X) \mapsto \mathbb{R}$ как $\widehat{\lambda}(h) = \lambda(h|_X)$. Так как $\lambda \in \Lambda_{rc}(X)$, существуют $M > 0$ и C-компактное подмножество A пространства X такие, что $|\lambda(g)| \leqslant M * p_A(g)$ для любого $g \in C(X)$. Так, $|\widehat{\lambda}(h)| = |\lambda(h|_X)| \leqslant M * p_A(h|_X) = M * p_{\overline{A}}(h)$ и, следовательно, $\widehat{\lambda} \in C_c(\upsilon X)$. Пусть $\mu \in \Lambda_c(\upsilon X)$, и предположим, что $cl_{\upsilon X}A = \operatorname{supp}\mu$, где A — C-компактное подмножество пространства X. Тогда μ^+ и μ^- имеют носитель $cl_{\upsilon X}A$. Определим $\lambda_1, \lambda_2 : C(X) \mapsto \mathbb{R}$ следующим образом: для каждого $f \in C(X)$, $\lambda_1(f) = \mu^+(f^\upsilon)$ и $\lambda_2(f) = \mu^-(f^\upsilon)$. Линейные функционалы λ_1 и λ_2 являются положительными и имеют носитель множество A. Следовательно, λ_1 и λ_2 принадлежат $\Lambda^+_{rc}(X)$. Пусть $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, тогда $\lambda \in \Lambda_{rc}(X)$ и для каждого $f \in C(X)$, $\lambda(f) = \lambda_1(f) - \lambda_2(f) = \mu^+(f^\upsilon) - \mu^-(f^\upsilon) = \mu(f^\upsilon)$, следовательно, $\mu = \widehat{\lambda}$.

Заметим, что если $f \in C(X)$, то $\|f\|_\infty \leqslant 1$ тогда и только тогда, когда $\|f^\upsilon\|_\infty \leqslant 1$. Следовательно, $\|\lambda\|_* = \|\widehat{\lambda}\|_*$. Отсюда следует, что если λ_1 и λ_2 принадлежат $\Lambda_{rc}(X)$, тогда $\lambda_1 = \lambda_2$ тогда и только тогда, когда $\widehat{\lambda_1} = \widehat{\lambda_2}$. Так, отождествляя элемент λ из $\Lambda_{rc}(X)$ с естественным продолжением $\widehat{\lambda}$, получаем следующий результат.

Теорема 12. *Для любого пространства X имеем:* $\Lambda_{rc}(X) = \{\widehat{\lambda} \in \Lambda_c(\upsilon X) :$ *существует C-компактное подмножество A пространства X такое, что* $\operatorname{supp}\widehat{\lambda} = cl_\upsilon A\}$. *Более того, для любого $\lambda \in \Lambda_{rc}(X)$, $\|\lambda\|_* = \|\widehat{\lambda}\|_*$, где $\widehat{\lambda}$ — продолжение λ на $C_c(\widehat{X})$.*

Пусть $M_\upsilon(X) = \{\mu \in M_c(\upsilon X)$: существует C-компактное подмножество A пространства X такое, что $|\mu|(\upsilon X \setminus cl_{\upsilon X}A) = 0\}$ и $M^+_\upsilon(X) = \{\mu \in M_\upsilon(X) : \mu \geqslant 0\}$. Заметим, что $M_\upsilon(X)$ — линейное подпространство $M_c(\upsilon X)$. Следующий результат отождествляет пространство $M_\upsilon(X)$ с пространством $\Lambda_{rc}(X)$.

Теорема 13. *Для любого пространства X отображение $F : (M_\upsilon(X), \|.\|) \mapsto (\Lambda_{rc}(X), \|.\|_*)$, определенное как $F(\mu)(f) = \int_X f^\upsilon d\mu$, является изометрическим решетчатым изоморфизмом $M_\upsilon(X)$ на $\Lambda_{rc}(X)$. При этом изоморфизме $M^+_\upsilon(X)$ отождествляется с $\Lambda^+_{rc}(X)$.*

Доказательство. Отметим, что приведенное ниже доказательство аналогично доказательству теоремы 3.6 в [4] для пространства $\Lambda_{ps}(X)$.

Пусть $\mu \in M_\upsilon(X)$. Тогда существует C-компактное подмножество A такое, что $|\mu|(\upsilon X \setminus cl_{\upsilon X}A) = 0\}$. Пусть $f \in C(X)$, $|F(\mu)(f)| = |\int_{\upsilon X} f^\upsilon d\mu| = |\int_{cl_{\upsilon X}A} f^\upsilon d\mu| \leqslant \int_{cl_{\upsilon X}A} |f^\upsilon| d|\mu| \leqslant p_{\overline{A}}(f^\upsilon)|\mu|(cl_{\upsilon X}A) = p_A(f)|\mu|(\upsilon X)$, где $\overline{A} = cl_{\upsilon X}A$. Следовательно, $F(\mu) \in \Lambda_{rc}(X)$.

Заметим, что для любого $h \in C(\upsilon X)$, $\widehat{F(\mu)}(h) = F(\mu)(h|_X) = \int_{\upsilon X} h d\mu$ и, следовательно, $|\widehat{F(\mu)}(h)| \leqslant p_{\overline{A}}(h)|\mu|(cl_{\upsilon X}A)$. Следовательно, $\widehat{F(\mu)} \in \Lambda_c(\upsilon X)$. По теореме 4.3 в [3] $\|\widehat{F(\mu)}\|_* = \|\mu\|_*$.

Докажем, что F — сюрьективное отображение. Для этого необходимо для каждого $\lambda \in \Lambda^+_{rc}(X)$ найти такое $\mu \in M^+_\upsilon(X)$, что $F(\mu) = \lambda$. Действительно, пусть $\lambda \in \Lambda^+_{rc}(X)$ и пусть $\widehat{\lambda}$ — естественное продолжение на $\Lambda^+_c(\upsilon X)$. По теореме 2 существует C-компактное подмножество A пространства X такое, что $\operatorname{supp}\lambda = A$. Так как $\widehat{\lambda} \in \Lambda_c(\upsilon X)$, то по теореме 4.3 в [3] существует $\mu \in M^+_c(\upsilon X)$ такое, что $\widehat{\lambda}(h) = \int_{\upsilon X} h d\mu$ для любого $h \in C(\upsilon X)$. Так, для каждого $f \in C(X)$, $\lambda(f) = \widehat{\lambda}(f^\upsilon) = \int_{\upsilon X} f^\upsilon d\mu = F(\mu)(f)$. Следовательно, $F(\mu) = \lambda$.

Пусть B — произвольное компактное подмножество $\upsilon X \setminus cl_{\upsilon X}A$. Из регулярности пространства υX следует, что существует открытое множество U в υX такое, что $B \subseteq U \subseteq cl_{\upsilon X}U \subseteq \upsilon X \setminus cl_{\upsilon X}A$. Так как B — компакт и $B \bigcap(\upsilon X \setminus U) = \emptyset$, то существует непрерывная функция

$h : \upsilon X \mapsto [0,1]$ такая, что $h(x) = 1$ для всех $x \in B$ и $h(x) = 0$ для всех $x \in \upsilon X \setminus U$. Заметим, что $cl_{\upsilon X} A \subseteq \upsilon X \setminus U$ и, следовательно, $0 = \lambda(h|_X) = \widehat{\lambda}(h) = \int_{\upsilon X} hd\mu = \int_B hd\mu + \int_{\upsilon X \setminus B} hd\mu = \mu(B) + \int_{\upsilon X \setminus B} hd\mu$. Получили, что $\mu(B) = 0$. Так как μ — компактно регулярно, $\mu(\upsilon X \setminus cl_{\upsilon X} A) = 0$ и, следовательно, $\mu \in M^+_{\upsilon}(X)$. Таким образом, F — сюрьективное отображение.

По теореме 7.3 в [1] получаем, что F — изометрический решетчатый изоморфизм.

§ 3. Сепарабельность сопряженного пространства $\Lambda_{rc}(X)$

В этом параграфе мы исследуем некоторые условия, эквивалентные сепарабельности пространства $\Lambda_{rc}(X)$. Напомним, что норма $\|.\|$ на пространстве $M_{rc}(X)$ индуцирует метрику d, где $d(\mu,\nu) = \|\mu - \nu\|$ для μ, $\nu \in M_{rc}(X)$. В частности, $(M^+_{rc}(X), d)$ — метрическое пространство.

Теорема 14. *Для пространства X следующие условия эквивалентны.*

1. $(\Lambda^+_{rc}(X), d_*)$ — *сепарабельно.*
2. $(\Lambda_{rc}(X), \|.\|_*)$ — *сепарабельно.*
3. X — *счетно.*
4. $(M^+_{rc}(X), d)$ — *сепарабельно.*
5. $(M_{rc}(X), \|.\|)$ — *сепарабельно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть D — счетное плотное подмножество пространства $(\Lambda^+_{rc}(X), d_*)$, и пусть $D^* = \{\lambda_1 - \lambda_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in D\}$. Тогда D^* — плотное счетное подмножество $\Lambda_{rc}(X)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Напомним, что для каждого $x \in X$ можно рассмотреть отображение вычисления $e_x : C(X) \mapsto \mathbb{R}$, определенное по правилу $e_x(f) = f(x)$ для любого $f \in C(X)$. Заметим, что e_x — положительный линейный функционал с носителем $\{x\}$. Таким образом, $e_x \in \Lambda^+_{rc}(X)$. Заметим, что для различных точек x, $y \in X$ существует $f \in C(X)$ такая, что $f(x) = 0$ и $f(y) = 1$. Так как $e_x(f) \neq e_y(f)$, то $e_x \neq e_y$. Следовательно, $card\, X = card\, D$, где $D = \{e_x : x \in X\}$. Так, для пары различных точек x, $y \in X$, $d_*(e_x, e_y) = \|e_x - e_y\|_* \geqslant 1$. Таким образом, D дискретно в пространстве $(\Lambda_{rc}(X), \|.\|_*)$. Если пространство $(\Lambda_{rc}(X), \|.\|_*)$ сепарабельно, то (D, d_*) сепарабельно и, следовательно, X — счетно.

(3) $\Rightarrow$ (4). Пусть $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Для каждого x рассмотрим δ_x — меру (Дирака): для каждого $A \subseteq X$, $\delta_x(A) = 1$, если $x \in A$ и $\delta_x(A) = 0$, если $x \notin A$. Заметим, что δ_x, суженное на $\mathcal{B}o(X)$, принадлежит $M^+_{rc}(X)$. Определим $D = \{\sum\limits_{i=1}^{n} q_i \delta_{x_i} : n \in \mathbb{N}$ и $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}^+\}$, где $\mathbb{Q}^+$ — множество неотрицательных рациональных чисел. Заметим, что D — счетное плотное подмножество пространства $M^+_{rc}(X)$.

(4) $\Rightarrow$ (5). Доказательство аналогично доказательству (1) $\Rightarrow$ (2).

(5) $\Rightarrow$ (1). Пусть $D = \{\delta_x : x \in X\}$, где δ_x — мера Дирака, определенная выше в доказательстве (3) $\Rightarrow$ (4). Заметим, что для различных точек x, $y \in X$, $\delta_x \neq \delta_y$ и, следовательно, $card\, D = card\, X$. Если x и y — различные точки из X, то $d(\delta_x, \delta_y) = \|\delta_x - \delta_y\| = |\delta_x - \delta_y|(X) \geqslant 1$. Следовательно, D — дискретно в пространстве $(M_{rc}(X), \|.\|)$. Пусть $(M_{rc}(X), \|.\|)$ — сепарабельно, тогда (D, d) — сепарабельно и, следовательно, X счетно и нормально. Следовательно, по теореме 11 $(\Lambda_{rc}(X), \|.\|_*)$ — сепарабельно, а значит и $(\Lambda^+_{rc}(X), d_*)$ — сепарабельно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aliprantis C.D., Burkinshaw O. Positive operators // Academic Press. Orlando. 1985.
2. Arens R., Dugundji J. Topologies for function spaces // Pacific J. Math. 1951. № 1. P. 5–31.
3. Kundu S. Spaces of continuous linear functionals: something old and something new // Topology Proceedings. 1989. № 14 (1). P. 113–129.
4. Kundu S. The dual of $C_{ps}(X)$ // Positivity. 2009. № 13. P. 367–384.
5. Kundu S., Garg P. Countability properties of the pseudocompact-open topology on $C(X)$ // Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. 2007. Vol. XXXIX. P. 421–444.
6. Osipov A.V. The Set-Open topology // Topology Proceedings. 2011. № 37. P. 181–204.

7. Osipov A.V. Topological-algebraic properties of function spaces with set-open topologies // Topology and its Applications. 2012. Vol. 159. Issue 3. P. 800–805.
8. Осипов А.В. Свойства C-компактно-открытой топологии на пространстве функций // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 4. С. 258–277.
9. Осипов А.В., Косолобов А.В. О секвенциально-компактно-открытой топологии // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 3. С. 75–84.
10. Fox R.H. On topologies for function spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1945. № 51. P. 429–432.

Поступила в редакцию 14.01.2012

Осипов Александр Владимирович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел алгебры и топологии, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: oab@list.ru

A. V. Osipov
The dual of $C_{rc}(X)$

Keywords: continuous linear functional, function space, C-compact subset, C-compact-open topology, measure, zero set, separability.

Mathematical Subject Classifications: 54C40, 54C35, 54D60

This is a study of the dual space of continuous linear functionals on the function space $C_{rc}(X)$. Here rc denotes the C-compact-open topology on $C(X)$, the set of all real-valued continuous functions on a Tychonoff space X. Since this dual space is inherently related to a space of measures, the measure-theoretic characterization of this dual space has been studied extensively. The separability of this dual space has been studied.

REFERENCES

1. Aliprantis C.D., Burkinshaw O. Positive operators, *Academic Press*, Orlando, 1985.
2. Arens R., Dugundji J. Topologies for function spaces, *Pacific J. Math*, 1951, no. 1, pp. 5–31.
3. Kundu S. Spaces of continuous linear functionals: something old and something new, *Topology Proceedings*, 1989, no. 14 (1), pp. 113–129.
4. Kundu S. The dual of $C_{ps}(X)$, *Positivity*, 2009, no. 13, pp. 367–384.
5. Kundu S., Garg P. Countability properties of the pseudocompact-open topology on $C(X)$, *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 2007, vol. XXXIX, pp. 421–444.
6. Osipov A.V. The Set-Open topology, *Topology Proceedings*, 2011, no. 37, pp. 181–204.
7. Osipov A.V. Topological-algebraic properties of function spaces with set-open topologies, *Topology and its Applications*, 2012, vol. 159, issue 3, pp. 800–805.
8. Osipov A.V. Properties of the C-compact-open topology on a function space, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 258–277.
9. Osipov A.V., Kosolobov D.A. On sequentially compact-open topology, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, no. 3, pp. 75–84.
10. Fox R.H. On topologies for function spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1945, no. 51, pp. 429–432.

Received 14.01.2012

Osipov Alexander Vladimirovich, Senior Researcher, Candidate of Physics and Mathematics, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: oab@list.ru