УДК 517.95

© *Я. Т. Мегралиев*

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

В работе исследована одна обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с дополнительным интегральным условием первого рода. Для рассматриваемой обратной краевой задачи вводится определение классического решения. С помощью метода Фурье задача сводится к решению системы интегральных уравнений. С помощью метода сжатых отображений доказывается существование и единственность решения системы интегральных уравнений. Далее доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: обратная краевая задача, эллиптическое уравнение, метод Фурье, классическое решение.

Введение

Современные проблемы естествознания приводят к необходимости постановки и исследования качественно новых задач, ярким примером которых является класс нелокальных задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Исследование таких задач вызвано как теоретическим интересом, так и практической необходимостью.

Среди нелокальных задач можно выделить класс задач с интегральными условиями. Условия такого вида появляются при математическом моделировании явлений, связанных с физикой плазмы [1], распространением тепла [2,3], процессом влагопереноса в капиллярно-простых средах [4], вопросами демографии и математической биологии, а также при исследовании некоторых обратных задач математической физики.

Вопросы разрешимости задач с нелокальными интегральными условиями для уравнений с частными производными изучены в работах [5–7]. Обратные задачи с интегральным условием переопределения для параболических уравнений были исследованы в работах [8–10].

Целью данной работы является доказательство единственности и существования решений обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с интегральным условиям переопределения.

§ 1. Постановка задачи и её сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

и поставим для него в области $D_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ обратную краевую задачу с граничными условиями:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,T) = \psi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{3}$$

и интегральным условием переопределения

$$\int_0^1 u(x,t)\,dx = h(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{4}$$

где $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(t)$ — заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ — искомые функции.

Условие (4) является нелокальным интегральным условием первого рода, то есть не содержит значений искомого решения в точках границы.

Определение 1. *Классическим решением* обратной краевой задачи (1)–(4) назовём пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих следующими свойствами:

1) функция $u(x,t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1);

2) функция $a(t)$ непрерывна на $[0,T]$;

3) все условия (1)–(4) удовлетворяются в обычном смысле.

Для исследования задачи (1)–(4) сначала рассмотрим следующую задачу:

$$y''(t) = a(t)y(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{5}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(T) = 0, \tag{6}$$

где $a(t) \in C[0,T]$ — заданная функция, а $y = y(t)$ — искомая функция, причём под решением задачи (5), (6) понимаем функцию $y(t)$, непрерывную на $[0,T]$ вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (5), и удовлетворяющую условиям (5), (6) в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть функция* $a(t) \in C[0,T]$ *такова, что* $\|a(t)\|_{C[0,T]} \leqslant R = const$, *и пусть, кроме того, выполнено неравенство*

$$\frac{1}{2}T^2R < 1. \tag{7}$$

Тогда задача (5), (6) *имеет только тривиальное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно видеть, что задача

$$y''(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(T) = 0 \tag{8}$$

имеет только тривиальное решение.

Тогда известно [11], что задача (8) имеет одну функцию Грина и краевая задача (5), (6) эквивалентна интегральному уравнению

$$y(t) = \int_0^T G(t,\tau)a(\tau)y(\tau)\,d\tau \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{9}$$

где

$$G(t,\tau) = \begin{cases} -t, & t \in [0,\tau], \\ -\tau, & t \in [\tau,T]. \end{cases}$$

Обозначив

$$Ay(t) = \int_0^T G(t,\tau)a(\tau)y(\tau)\,d\tau,$$

запишем (9) в виде

$$y(t) = A(y(t)). \tag{10}$$

Уравнение (10) будем изучать в пространстве $C[0,T]$. Легко видеть, что оператор A является непрерывным в пространстве $C[0,T]$. Покажем, что оператор A является в пространстве $C[0,T]$ сжимающим. Действительно, для любых $y(t), \overline{y}(t)$ из пространства $C[0,T]$ имеем

$$\|A(y(t)) - A(\overline{y}(t))\|_{C[0,T]} \leqslant \frac{1}{2}\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\,T^2\,\|y(t) - \overline{y}(t)\|_{C[0,T]}\,. \tag{11}$$

Тогда, с учётом (7), из (11) следует, что оператор A является сжимающим в $C[0,T]$. Поэтому в пространстве $C[0,T]$ оператор A имеет единственную неподвижную точку $y(t)$, которая является единственным решением уравнения (10). Таким образом, интегральное уравнение (9) имеет в $C[0,T]$ единственное решение, следовательно, краевая задача (5), (6) также имеет в $C[0,T]$ единственное решение. Так как $y(t)=0$ является решением краевой задачи (5), (6), то она имеет только одно тривиальное решение. Лемма доказана. □

Наряду с обратной краевой задачей (1)–(4), рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу. Требуется определить пару $\{u(x,t),a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих свойствами 1) и 2) определения классического решения задачи (1)–(4), из соотношений (1)–(3) и

$$h''(t)-u_x(0,t)=a(t)h(t)+\int_0^1 f(x,t)\,dx \quad (0\leqslant t\leqslant T). \tag{12}$$

Справедлива следующая

Лемма 2. *Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)\in C[0,1]$, $h(t)\in C^2[0,T]$, $h(t)\neq 0$ при $t\in[0,T]$, $f(x,t)\in C(D_T)$ и выполняются условия согласования*

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx=h(0),\qquad \int_0^1 \psi(x)\,dx=h'(T). \tag{13}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Каждое классическое решение $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1)–(4) является и решением задачи (1)–(3), (12);*

2. *Каждое решение $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1)–(3), (12) такое, что*

$$\frac{1}{2}T^2\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}<1, \tag{14}$$

является классическим решением (1)–(4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{u(x,t),a(t)\}$ является решением задачи (1)–(4). Из (4) видно, что

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u(x,t)\,dx=h'(t),\qquad \frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(1,t)\,dx=h''(t)\quad (0\leqslant t\leqslant T). \tag{15}$$

Проинтегрируем уравнение (1) по x от 0 до 1 и, учитывая условия (3), имеем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)\,dx-u_x(0,t)=a(t)\int_0^1 u(x,t)\,dx+\int_0^1 f(x,t)\,dx\quad (0\leqslant t\leqslant T). \tag{16}$$

Отсюда, с учётом (4) и (15), приходим к выполнению (12).

Теперь предположим, что $\{u(x,t),a(t)\}$ является решением задачи (1)–(3), (12), причём выполнено условие (6). Тогда, из (12) и (16), получаем

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_0^1 u(x,t)\,dx-h(t)\right)=a(t)\left(\int_0^1 u(x,t)\,dx-h(t)\right)\quad (0\leqslant t\leqslant T). \tag{17}$$

Далее, в силу (2) и условий согласования (13), имеем

$$\begin{gathered}\int_0^1 u\left(x,0\right)\,dx-h(0)=\int_0^1 \varphi(x)\,dx-h(0)=0,\\ \int_0^1 u_t\left(x,T\right)\,dx-h'(T)=\int_0^1 \psi(x)\,dx-h'(T)=0.\end{gathered} \tag{18}$$

Из (17) и (18), в силу леммы 1, заключаем, что выполняется условие (4). Лемма доказана. □

§ 2. Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1)–(3), (12) будем искать в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin\lambda_k x \quad \left(\lambda_k=\frac{\pi}{2}(2k-1)\right), \tag{19}$$

где

$$u_k(t)=2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x\,dx \quad (k=1,2,\ldots)$$

— дважды непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[0,T]$. Тогда, применяя формальную схему метода Фурье, из (1) и (2) имеем

$$u_k''(t)-\lambda_k^2u_k(t)=F_k(t;a,u) \quad (k=1,2,\ldots;\quad 0\leqslant t\leqslant T), \tag{20}$$

$$u_k(0)=\varphi_k,\quad u_k'(T)=\psi_k \quad (k=1,2,\ldots), \tag{21}$$

где

$$F_k(t;u,a)=f_k(t)+a(t)u_k(t),\quad f_k(t)=2\int_0^1 f(x,t)\sin\lambda_k x\,dx,$$

$$\varphi_k=2\int_0^1\varphi(x)\sin\lambda_k x\,dx,\quad \psi_k=2\int_0^1\psi(x)\sin\lambda_k x\,dx \quad (k=1,2,\ldots).$$

Решая задачу (20), (21), находим

$$u_k(t)=\frac{\mathrm{ch}(\lambda_k(T-t))}{\mathrm{ch}(\lambda_kT)}\varphi_k+\frac{\mathrm{sh}(\lambda_kt)}{\lambda_k\,\mathrm{ch}(\lambda_kT)}\psi_k+\frac{1}{\lambda_k}\int_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau;u,a)\,d\tau, \tag{22}$$

где

$$G_k(t,\tau)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\,\mathrm{ch}(\lambda_kT)}\left[\mathrm{sh}\left(\lambda_k(T+t-\tau)\right)-\mathrm{sh}\left(\lambda_k(T-(t+\tau))\right)\right], & t\in[0,\tau],\\ \dfrac{1}{2\,\mathrm{ch}(\lambda_kT)}\left[\mathrm{sh}\left(\lambda_k(T-(t+\tau))\right)-\mathrm{sh}\left(\lambda_k(T-(t-\tau))\right)\right], & t\in[\tau,T].\end{cases} \tag{23}$$

После подстановки выражений из (22) в (19), для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1)–(3), (12), получаем

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\mathrm{ch}(\lambda_k(T-t))}{\mathrm{ch}(\lambda_kT)}\varphi_k+\frac{\mathrm{sh}(\lambda_kt)}{\lambda_k\,\mathrm{ch}(\lambda_kT)}\psi_k+\frac{1}{\lambda_k}\int_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau;u,a)\,d\tau\right\}\sin\lambda_kx. \tag{24}$$

Теперь из (12) с учётом (19) имеем

$$a(t)=h^{-1}(t)\Big\{h''(t)-\int_0^1 f(x,t)\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_ku_k(t)\Big\}. \tag{25}$$

Для того чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1)–(3), (12), подставим выражение (22) в (25):

$$\begin{aligned}a(t)=h^{-1}(t)\Big\{h''(t)-\int_0^1 f(x,t)\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\Big(\frac{\mathrm{ch}(\lambda_k(T-t))}{\mathrm{ch}(\lambda_kT)}\varphi_k+\\ +\frac{\mathrm{sh}(\lambda_kt)}{\lambda_k\,\mathrm{ch}(\lambda_kT)}\psi_k+\frac{1}{\lambda_k}\int_0^T G_k(t,\tau)\,F_k(\tau;u,a)\,d\tau\Big)\Big\}.\end{aligned} \tag{26}$$

Таким образом, решение задачи (1)–(3), (12) свелось к решению системы (24), (26) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $a(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1)–(3), (12) важную роль играет следующая

Лемма 3. *Если* $\{u(x,t), a(t)\}$ *— любое решение задачи* (1)–(3), (12), *то функции*

$$u_k(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x\,dx \quad (k=1,2,\ldots)$$

удовлетворяют на $[0,T]$ *системе* (22).

Доказательство. Пусть $\{u(x,t), a(t)\}$ — любое решение задачи (1)–(3), (12). Тогда, умножив обе части уравнения (1) на функцию $2\sin\lambda_k x$ $(k=1,2,\ldots)$, интегрируя полученное равенство по x от 0 до 1 и пользуясь соотношениями

$$2\int_0^1 u_{tt}(x,t)\sin\lambda_k x\,dx = \frac{d^2}{dt^2}\left(2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x\,dx\right) = u_k''(t) \quad (k=1,2,\ldots),$$
$$2\int_0^1 u_{xx}(x,t)\sin\lambda_k x\,dx = -\lambda_k^2\left(2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x\,dx\right) = -\lambda_k^2 u_k(t) \quad (k=1,2,\ldots),$$

получаем, что удовлетворяется уравнение (20).

Аналогично из (2) получаем, что выполняется условие (21). Таким образом, $u_k(t)$ $(k=1,2,\ldots)$ является решением задачи (20), (21). А отсюда непосредственно следует, что функции $u_k(t)$ $(k=1,2,\ldots)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (22). Лемма доказана. □

Очевидно, что если $u_k(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x\,dx \quad (k=1,2,\ldots)$ является решением системы (22), то пара $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\lambda_k x$ и $a(t)$ является решением системы (24), (26). Из леммы 3 вытекает

Следствие 1. *Пусть система* (24), (26) *имеет единственное решение. Тогда задача* (1)–(3), (12) *не может иметь более одного решения, то есть если задача* (1)–(3), (12) *имеет решение, то оно единственно.*

Теперь с целью исследования задачи (1)–(3), (12) рассмотрим следующие пространства.

1. Обозначим через $B_{2,T}^3$ [12] совокупность всех функций $u(x,t)$ вида

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\lambda_k x \quad (\lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k-1)),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_k(t)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$J_T(u) \equiv \Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\Big)^{1/2} < +\infty.$$

Норму в этом множестве определим так: $\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} = J_T(u)$.

2. Через E_T^3 обозначим пространство, состоящее из топологического произведения

$$B_{2,T}^3 \times C[0,T].$$

Норма элемента $z = \{u, a\}$ определяется формулой

$$\|z\|_{E_T^3} = \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что $B_{2,T}^3$ и E_T^3 являются банаховыми пространствами.

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^3 оператор $\Phi(u,a) = \{\Phi_1(u,a), \Phi_2(u,a)\}$, где

$$\Phi_1(u,a) = \tilde{u}(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\tilde{u}_k(t)\sin\lambda_k x, \quad \Phi_2(u,a) = \tilde{a}(t),$$

а $\tilde{u}_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $\tilde{a}(t)$ равны соответственно правым частям (22) и (26).

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)} < 2, \quad \frac{\operatorname{sh}(\lambda_k t)}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)} < 1, \quad \frac{\operatorname{sh}(\lambda_k(T+t-\tau))}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)} < 1 \quad (t \in [0,\tau]),$$
$$\frac{\operatorname{sh}(\lambda_k(T-(t+\tau))}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)} < 1, \quad \frac{\operatorname{sh}(\lambda_k(T-(t-\tau))}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)} < 1 \quad (t \in [\tau, T]).$$

Учитывая эти соотношения, имеем

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3 \, \|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2\Big)^{1/2} \leqslant 4\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3 \, |\varphi_k|)^2\Big)^{1/2} + 2\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2 \, |\psi_k|)^2\Big)^{1/2} +$$
$$+2\sqrt{T}\Big(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2 \, |f_k(\tau)|)^2 \, d\tau\Big)^{1/2} + 2T \, \|a(t)\|_{C[0,T]} \Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3 \, \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\Big)^{1/2}, \tag{27}$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leqslant \left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]} \left\{ \left\|h''(t) - \int_0^1 f(x,t)\, dx\right\|_{C[0,T]} + \Big(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-4}\Big)^{1/2} \times \right.$$
$$\times\Bigg[2\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3 \, |\varphi_k|\right)^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^2 \, |\psi_k|\right)^2\Big)^{1/2} + \sqrt{T}\Big(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^2 \, |f_k(\tau)|\right)^2 \, d\tau\Big)^{1/2} +$$
$$\left. +T \, \|a(t)\|_{C[0,T]} \Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3 \, \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\Big)^{1/2}\Bigg]\right\}. \tag{28}$$

Предположим, что данные задачи (1)–(3), (12) удовлетворяют следующим условиям:
1) $\varphi(x) \in C^2\,[0,1]\,, \quad \varphi^{(3)}(x) \in L_2\,(0,1)\,, \quad \varphi(0) = \varphi'(1) = \varphi''(0) = 0;$
2) $\psi(x) \in C^1\,[0,1]\,, \quad \psi^{(2)}(x) \in L_2\,(0,1)\,, \quad \psi(0) = \psi'(1) = 0;$
3) $f(x,t), f_x(x,t) \in C(D_T), \quad f_{xx}(x,t) \in L_2(D_T), \quad f(0,t) = f_x(1,t) = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T);$
4) $h(t) \in C^2[0,T]$, $h(t) \neq 0$ при $t \in [0,T]$.

Тогда из (27) и (28) соответственно получаем

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B^3_{2,T}} \leqslant A_1(T) + 2T \, \|a(t)\|_{C[0,T]} \, \|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\,, \tag{29}$$
$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leqslant B_1(T) + B_2(T) T \, \|a(t)\|_{C[0,T]} \, \|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\,, \tag{30}$$

где

$$A_1(T) = 4\left\|\varphi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + 2\left\|\psi^{(2)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + 2\sqrt{T} \, \|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}\,,$$
$$B_1(T) = \left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]} \left\{ \left\|h''(t) - \int_0^1 f(x,t)\, dx\right\|_{C[0,T]} + \right.$$
$$\left. +\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-4}\Big)^{1/2}\Big[2\left\|\varphi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \left\|\psi^{(2)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + 4\sqrt{T} \, \|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}\Big]\right\},$$
$$B_2(T) = 4\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]} \Big(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-4}\Big)^{1/2}.$$

Из неравенств (29), (30) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B^3_{2,T}} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leqslant A(T) + B(T) T \, \|a(t)\|_{C[0,T]} \, \|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\,, \tag{31}$$

где $\quad A(T) = A_1(T) + B_1(T), \quad B(T) = 2 + B_2(T).$

Итак, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1–4 *и*

$$(A(T)+2)^2 B(T)T < 1. \tag{32}$$

Тогда задача (1)–(3), (12) *имеет в шаре* $K = K_R(\|z\|_{E_T^3} \leqslant R = A(T)+2)$ *пространства* E_T^3 *единственное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В пространстве E_T^3 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \tag{33}$$

где $z = \{u, a\}$, компоненты $\Phi_i(u,a)$ $(i = 1,2)$ оператора $\Phi(u,a)$ определены правыми частями уравнений (22) и (26). Рассмотрим оператор $\Phi(u,a)$ в шаре $K = K_R$ из E_T^3. Аналогично (31) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки

$$\|\Phi z\|_{E_T^3} \leqslant A(T) + B(T)T\, \|a(t)\|_{C[0,T]}\, \|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\,, \tag{34}$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^3} \leqslant B(T)TR(\|a_1(t)-a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t)-u_2(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\,. \tag{35}$$

Тогда из оценок (34) и (35) с учётом (32) следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a\}$, которая является единственным в шаре $K = K_R$ решением уравнения (33), то есть является единственным в шаре $K = K_R$ решением системы (24), (26).

Функция $u(x,t)$ как элемент пространства $B^3_{2,T}$ имеет непрерывные производные $u(x,t)$, $u_x(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ в D_T. Из (20) нетрудно видеть, что

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k \left\|u_k''(t)\right\|_{C[0,T]})^2\Big)^{1/2} \leqslant \sqrt{3}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\Big)^{1/2}\Big\{\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\left\|u_k(t)\right\|_{C[0,T]})^2\Big)^{1/2} + \\ + \Big\|\|f_x(x,t)\|_{C[0,T]}\Big\|_{L_2(0,1)} + \|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\Big\}.$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(x,t)$ непрерывна в D_T. Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3) и (12) удовлетворяются в обычном смысле. Следовательно, $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1)–(3), (12), причём, в силу леммы 3, оно единственное. Теорема доказана.□

С помощью леммы 2 доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1,

$$\frac{1}{2}(A(T)+1)T^2 < 1$$

и выполнены условия согласования

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = h(0), \quad \int_0^1 \psi(x)\,dx = h'(T).$$

Тогда задача (1)–(4) *имеет в шаре* $K = K_R(\|z\|_{E^3_{T,T}} \leqslant A(T)+2)$ *из* E_T^3 *единственное классическое решение.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.
2. Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. Vol. 5. № 21. P. 155–160.
3. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.

4. Нахушев А.М. Об одном приближённом методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 1. С. 72–81.
5. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 1. С. 115–119.
6. Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1166–1179.
7. Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Математическое моделирование. 2000. Т. 12. № 1. С. 94–103.
8. Прилепко А.И., Костин А.Б. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Математический сборник. 1992. Т. 183. № 4. С. 49–68.
9. Прилепко А.И., Ткаченко Д.С. Свойства решений параболического уравнения и единственность решения обратной задачи об источнике с интегральным переопределением // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. № 4. С. 562–570.
10. Камынин В.Л. Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения // Математические заметки. 2005. Т. 77. № 4. С. 522–534.
11. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
12. Худавердиев К.И., Велиев А.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. Баку: Чашыоглы, 2010. 162 с.

Поступила в редакцию 19.12.2011

Мегралиев Яшар Топуш оглы, к. ф.-м. н., доцент, кафедра дифференциальных и интегральных уравнений, Бакинский государственный университет, AZ1148, Азербайджан, г. Баку, ул. З. Халилова, 23.
E-mail: Yashar_aze @ mail.ru

Ya. T. Megraliev

Inverse boundary value problem for second order elliptic equation with additional integral condition

Keywords: inverse boundary value problem, elliptic equation, Fourier method, classic solution.

Mathematical Subject Classifications: 35-02

An inverse boundary value problem for the second order elliptic equation with an additional integral condition of the first kind is investigated. We introduce the definition of a classical solution for the considered inverse boundary value problem reduced to solving of the system of integral equations by the use of the Fourier method. First, the existence and uniqueness of solutions of the system of integral equations are proved by using the method of contraction mappings; and then the existence and uniqueness of classical solutions of the original problem are proved.

REFERENCES

1. Samarskii A.A. On some problems of the theory of differential equations, *Differ. Uravn.*, 1980, vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935.

2. Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy, *Quart. Appl. Math.*, 1963, vol. 5, no. 21, pp. 155–160.

3. Ionkin N.I. Solutions of boundary value problem in heat conductions theory with nonlocal boundary conditions, *Differ. Uravn.*, 1977, vol. 13, no. 2, pp. 294–304.

4. Nakhushev A.M. A method of approximation of solving the boundary value problems for the differential equations and its approximation to dynamics of soil moisture and ground water, *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 1, pp. 72–81.

5. Kapustin N.Yu., Moiseev E.I. On the spectral problems with the spectral parameter under the boundary condition, *Differ. Uravn.*, 1997, vol. 33, no. 1, pp. 115–119.

6. Kozhanov A.I., Pul'kina L.S. On the solvability of boundary-value problems with the non-local boundary condition of integral form for the multidimensional hyperbolic equations, *Differ. Uravn.*, 2006, vol. 42, no. 9, pp. 1166–1179.

7. Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. On the constructing of solutions of the non-local initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations, *Mat. Model.*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94–103.

8. Prilepko A.I., Kostin A.B. On some inverse problems for the parabolic equations with the final and integral observation, *Mat. Sb.*, 1992, vol. 183, no. 4, pp. 49–68.

9. Prilepko A.I., Tkachenko D.S. Properties of the solutions of parabolic equation and the uniqueness of solution of the reverse problem about the source with the integral redefining, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2003, vol. 43, no. 4, pp. 562–570.

10. Kamynin V.L. On the inverse problem of determining the right side in the parabolic equation with the condition of integral redefining, *Mat. Zametki*, 2005, vol. 77, no. 4, pp. 522–534.

11. Naimark M.A. *Lineinye differentsial'nye operatory* (Linear differential operators), Moscow: Nauka, 1969, 526 p.

12. Khudaverdiev K.I., Veliev A.A. *Issledovanie odnomernoi zadachi dlya odnogo klassa psevdogiperbolicheskikh uravnenii tret'ego poryadka s nelineinoi pravoi chast'yu* (Investigation of the one-dimensional mixed problem for a class of the pseudo-hyperbolic equations of the third order with the nonlinear operator at the right-hand side), Baku: Chashyogly, 2010, 168 p.

Received 19.12.2011

Megraliev Yashar Topush ogly, Associate Professor, Department of Differential and Integral Equations, Baku State University, ul. Z. Khalilova, 23, Baku, AZ1148, Azerbaijan.
E-mail: Yashar_aze @ mail.ru