УДК 517.929

© *Г. Г. Исламов*

К ВОПРОСУ ОБ ОБОБЩЁННОЙ ВЫПУКЛОСТИ ОПЕРАТОРА ГРИНА

Пусть Q есть дифференциальный оператор порядка $m-1$, $2 \leqslant m \leqslant n$, для которого (a,b) будет промежутком неосцилляции, причём оператор Грина $G : L[a,b] \to W^n[a,b]$ краевой задачи $Lx = f$, $l_i(x) = 0$, $i = 1,\ldots,n$ обладает свойством обобщённой выпуклости: $QGP > 0$ для некоторого линейного гомеоморфизма P лебегова пространства $L[a,b]$. Найдены условия, при которых возмущённая краевая задача $Lx = PVQx + f$, $l_i(x) = 0$, $i = 1,\ldots,n$ также однозначно разрешима в соболевском пространстве $W^n[a,b]$ и её оператор Грина $\widehat{G}$ наследует свойство G, а именно $Q\widehat{G}P > 0$.

Ключевые слова: оператор Грина, обобщённая выпуклость.

Введение

В линейной теории функционально-дифференциальных уравнений особую роль играют краевые задачи. Поиск эффективных условий однозначной разрешимости краевой задачи и конструктивная проверка выполнения этих условий представляют собой одно из направлений исследований [1]. Оператор Грина G краевой задачи $Lx = f$, $l_i(x) = 0$, $i = 1,\ldots,n$ даёт зависимость $x = Gf$ решения этой задачи от правой части уравнения. Изучение свойств этого оператора составляет другое направление исследований [2–5]. Отметим свойства, представляющие практический интерес: скорость аппроксимации оператора Грина конечномерными операторами; полнота системы корневых векторов оператора Грина; положительность оператора Грина относительно выбранной пары конусов полуупорядоченных пространств.

§ 1. Теоремы о положительности обратных операторов

Исходная краевая задача может быть записана в виде одного операторного уравнения $Ax = g$. Многие свойства оператора Грина наследуются при специальных видах возмущений оператора A. В основе исследования этой проблемы, как правило, лежит левая, либо правая регуляризация. Форма левой регуляризации $A \to B^{-1}A$ приводит к новому уравнению относительно исходной переменной x, тогда как правая регуляризация $A \to AB^{-1}$ даёт уравнение относительно новой переменной $z\,(x = Wz = B^{-1}z)$. В ряде работ, где изучаются вопросы устойчивости решений и положительности оператора Грина, правая регуляризация называется «W–методом» Н. В. Азбелева. Следующий результат работы [6] является примером применения левой регуляризации. В терминах монографии [7] можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть A и B — линейные операторы, переводящие KB-линеал X в себя и удовлетворяющие условиям $B \geqslant A$, B обратим и $\|(I - B^{-1}A)^k\| < 1$ при некотором k. Тогда из положительности оператора B^{-1} следует положительность оператора A^{-1}.*

Этот факт содержится в следующем утверждении работы [8], которое получается в результате применения правой регуляризации.

Теорема 2. *Пусть аддитивный и однородный оператор A, заданный на линейном подмножестве E KB-линеала X, отображает E в X. Пусть, далее, существует аддитивный и однородный оператор B, отображающий E на X, такой, что оператор $I - AB^{-1}$ ограничен и положителен и $\|(I - AB^{-1})^k\| < 1$ при некотором k. Тогда из положительности оператора B^{-1} следует положительность оператора A^{-1}.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию теоремы оператор $C = I - AB^{-1}$ ограничен, положителен и $\|C^k\| < 1$ при некотором k. Следовательно, $(I - C)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C^n > 0$. Так как $A = (I - C)B$, то область значений $R(A) = X$ и $A^{-1} = B^{-1}(I - C)^{-1} > 0$ как произведение двух положительных операторов, отображающих КВ-линеал X в себя. □

Покажем, что условия теоремы 1 обеспечивают выполнение условий доказанной теоремы 2. Возьмём $E = X$. Обозначим $D = I - B^{-1}A$. Для $C = I - AB^{-1}$ имеем $C = (B - A)B^{-1} > 0$ как произведение положительных операторов. Так как ряд Неймана $\sum\limits_{n=0}^{\infty} D^n$ сходится, то сходится и ряд Неймана для подобного оператора $BDB^{-1} = C$. Значит, $\|C^k\| < 1$ для некоторого натурального k.

На основе теорем 1 и 2 изучается существование неотрицательных решений дифференциальных и интегральных уравнений с запаздывающим аргументом.

Возьмём, например, в теореме 1 в качестве КВ–линеала X пространство непрерывных функций $C[0,1]$ с конусом неотрицательных на $[0,1]$ функций. Пусть $A = I - \sum\limits_{i=1}^{n} K_i$, где

$$(K_i x)(t) = \int_0^t K_i(t,s)x(h_i^+(s))\,ds$$

и все функции предполагаются непрерывными, причём $h_i(t) \leqslant t$ на $[0,1]$. Здесь и далее $\alpha^+ = (|\alpha| + \alpha)/2$. Положим $B = (I - \sum\limits_{i=1}^{n} U_i)(I - \sum\limits_{j=1}^{n} V_j)$, где

$$(U_i x)(t) = \int_0^t U_i(t,s)x(h_i^+(s))\,ds, \quad (V_j x)(t) = \int_0^t V_j(t,s)x(h_j^+(s))\,ds$$

и все функции предполагаются непрерывными, причём $U_i(t,s) \geqslant 0$, $V_j(t,s) \geqslant 0$ в треугольнике $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$.

Имеем $B^{-1} = (I - \sum\limits_{j=1}^{n} V_j)^{-1}(I - \sum\limits_{i=1}^{n} U_i)^{-1} > 0$. Так как $I - B^{-1}A$ есть вольтерров интегральный оператор с запаздывающим аргументом, то $\|(I - B^{-1}A)^k\| < 1$ при некотором k. При выполнении неравенства

$$K_j(t,s) \geqslant U_j(t,s) + V_j(t,s) - \int_s^t \sum_{i=1}^{n} U_i(t,\tau)V_j(h_i^+(\tau),s)\,d\tau$$

в треугольнике $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$ имеем $B \geqslant A$ и, по теореме 1, $A^{-1} > 0$.

Это значит, что в пространстве $C[0,1]$ для интегрального уравнения

$$x(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^{n} K_i(t,s)x(h_i(s))\,ds + f(t), \quad t \in [0,1],$$

где $x(t) = f(t), t \leqslant 0$ также непрерывна, можно гарантировать существование неотрицательных решений при знакопеременных ядрах $K_i(t,s), i = 1,\ldots,n$, если выполнено дополнительное условие

$$\int_0^t \sum_{i=1}^{n} K_i(t,s)(f(h_i^-(s)) - f(0))\,ds + f(t) \geqslant 0$$

при $t \in [a,b]$. Здесь и далее $\alpha^- = (|\alpha| - \alpha)/2$.

В заключение параграфа приведём простое применение теоремы 2. Возьмём $X = C[0,1]$. В качестве линейного подмножества E выберем класс непрерывно–дифференцируемых функций $x(t)$ с $x(0) = 0$. Рассмотрим дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i(t)x(h_i(t)) = f(t), \quad t \in [0,1],$$

где $x(t) = 0$, $t \leqslant 0$ и все функции, входящие в уравнение, непрерывны, причём $h_i(t) \leqslant t$ на $[a,b]$, $i = 1,\ldots,n$. Оно может быть записано в эквивалентном операторном виде $Ax = f$, где оператор $A : E \to X$ задаётся равенством

$$(Ax)(t) = x'(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i(t)x(h_i^+(t)), \quad t \in [0,1].$$

Пусть $v(t)$ — непрерывно–дифференцируемая и положительная на $[a,b]$ функция. Дифференциальный оператор $(Bx)(t) = v(t)(x(t)/v(t))'$ отображает E на X, причём обратный оператор

$$(B^{-1}f)(t) = \int_0^t \frac{v(t)}{v(s)} f(s)\,ds$$

положителен. Простые вычисления показывают, что $I - AB^{-1}$ есть вольтерров интегральный оператор с ядром

$$Q(t,s) = \frac{(-1)}{v(s)}[v'(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i(t)\,\mathrm{sign}\,(h_i^+(t) - s)^+ v(h_i^+(t)].$$

Следовательно, $\|(I - AB^{-1})^k\| < 1$ при некотором k. При выполнении условия

$$v'(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i^+(t)v(h_i^+(t)) \leqslant 0, \quad t \in [0,1]$$

оператор $I - AB^{-1} > 0$. По теореме 2 $A^{-1} > 0$ и, значит, исходное дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом имеет неотрицательное решение при любой неотрицательной правой части.

§ 2. Наследование свойства обобщённой выпуклости

Такие свойства оператора Грина $W : L[a,b] \to W^n[a,b]$, как монотонность, выпуклость и др., могут быть описаны в терминах произведения $Q = D_{m-2}\cdots D_0$, $2 \leqslant m \leqslant n$ операторов

$$(D_jx)(t) = \frac{d}{dt}\frac{x(t)}{w_j(t)}, \quad j = 0,1,\ldots,m-2.$$

Здесь $w_j(t)$, $j = 0,1,\ldots,m-2$ есть положительные функции класса $C^{m-2-j}[a,b]$. Известно, что семейство $u_j(t)$, $j = 0,1,\ldots,m-2$ решений начальных задач Коши

$$u_0 = \omega_0, \quad D_{j-1}\cdots D_0u_j = w_j, \quad u_j^{(k)}(a) = 0, \quad k = 0,1,\ldots,j-1$$

образует ECT–систему [9]. Мы изучаем наследование следующего свойства оператора Грина при линейных возмущениях: для некоторого линейного гомеоморфизма P лебегова пространства $L[a,b]$ расширенное семейство $u_0,u_1,\ldots,u_{m-2}$, GPf образует WT–систему на открытом интервале (a,b) [9] при любой неотрицательной функции $f \in L[a,b]$. Это свойство эквивалентно положительности оператора $QGP : L[a,b] \to C[a,b]$ относительно конуса неотрицательных функций (свойству обобщённой выпуклости [9]).

Приводимая ниже теорема 3 доказывается по схеме работы [10] в предположении, что $Q : W^n[a,b] \to C[a,b]$ есть линейный слабо компактный и инъективный на пересечении ядер функционалов исходной краевой задачи оператор, и для любой конечной системы различных точек t_i, $i = 1,\dots,\nu$ интерполяционная задача $(Qx)(t_i) = \alpha_i$, $i = 1,\dots,\nu$ разрешима в $W^n[a,b]$ при любых скалярах α_i, $i = 1,\dots,\nu$. В нашем случае инъективность эквивалентна тому, что ранг матрицы $l_i(u_j)$, $i = 1,\dots,n$, $j = 0,1,\dots,m-2$ равен $m-1$. При выполнении этого предположения имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $V : C[a,b] \to L[a,b]$ есть линейный положительный оператор относительно конуса неотрицательных функций и найдётся такая функция $u \in W^n[a,b]$, что $l_i(u) = 0$, $i = 1,\dots,n$, образ Qu неотрицателен на $[a,b]$, а невязка $\psi = P^{-1}Lu - VQu$ положительна почти всюду на $[a,b]$. Тогда возмущённая краевая задача*

$$Lx = PVQx + f, \quad l_i(x) = 0, \quad i = 1,\dots,n$$

также однозначно разрешима в соболевском пространстве $W^n[a,b]$ при любом $f \in L[a,b]$ и её оператор Грина $\widehat{G}$ наследует свойство G, а именно $Q\widehat{G}P > 0$.

Доказательство. Введём обозначения $B = L[a,b]$, $C = C[a,b]$, $D = W^n[a,b]$. Возмущённая краевая задача эквивалентна уравнению второго рода $x = GPVQx + Gf$ в пространстве D. Однозначная замена $y = Qx$, $l_i(x) = 0$, $i = 1,\dots,n$ приводит к уравнению $y = Ay + g$ в пространстве C, где $A = (QGP)V > 0$, $g = QGf$. Функция $y = (I-A)^{-1}g$ принадлежит образу QGB, так как $Ay, g \in QGB$. Поэтому $x = Q^{-1}(I-A)^{-1}QGf = \widehat{G}f$ будет единственным решением возмущённой краевой задачи. Теперь имеем $Q\widehat{G}P = (I-A)^{-1}QGP > 0$, так как здесь записано произведение двух положительных операторов $(I-A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ и QGP.

Осталось показать, что спектральный радиус $r(A) < 1$. Для элемента u в условиях теоремы 3 запишем цепочку преобразований:

$$Lu = PVQu + P\psi, \quad u = GPVQu + GP\psi.$$

Для $v = Qu$ и $\varphi = QGP\psi$ имеем $v = Av + \varphi$, причём $v \geqslant 0$ и $\varphi \geqslant 0$. $A = QGPV$ есть положительный слабо компактный оператор в C, так как $V : C \to B$ ограничен как положительный оператор, действующий из банахова пространства C с воспроизводящим конусом в банахово пространство B с нормальным конусом, $GP : B \to D$ — ограничен, а оператор $Q : D \to C$ слабо компактный по условию.

Утверждение будет следовать из теоремы об оценке сверху спектрального радиуса работы [10], если покажем, что невязка $\varphi(t)$ имеет не более конечного числа нулей и $\varphi(\tau) > 0$ в каждой точке $\tau \in [a,b]$, существенной [10] для слабо компактного оператора A.

Заметим, что оператор $QGP : B \to C$ интегральный с неотрицательным ядром, которое обозначим через $K(t,s)$. Поэтому

$$\varphi(t) = \int_a^b K(t,s)\psi(s)\,ds.$$

По условию $\psi(s) > 0$ почти всюду на $[a,b]$. Если $\varphi(\tau) = 0$, то $K(\tau,s) = 0$ при почти всех $s \in [a,b]$ и, значит, точка τ не может быть существенной для оператора

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s)(Vx)(s)\,ds.$$

Если же имеется счётное множество различных нулей $t_1, t_2, \dots$ функции $\varphi(t)$, то $K(t_i,s) = 0$, $i = 1,2,\dots$ почти всюду на $[a,b]$ и, следовательно, нётеров оператор $GP : B \to D$ имеет счётное множество линейно независимых дефектных функционалов $\gamma_i(x) = (Qx)(t_i)$, $i = 1,2,\dots,$ что невозможно. □

Для линейного положительного относительно конуса неотрицательных функций оператора $T: C[a,b] \to L[a,b]$ и такой функции $\phi \in L_\infty[a,b]$, что $\phi(s) \geqslant \dfrac{b-s}{b-a}$ почти всюду на $[a,b]$, имеет место следующее утверждение.

Следствие 1. *Линейная краевая задача*

$$x''(t) + (Tx)(t) = f(t), \quad t \in [a,b], \quad x(a) = 0, \quad x'(a) + \int_a^b \phi(s) x''(s)\, ds = 0$$

однозначно разрешима в $W^2[a,b]$ *при любом* $f \in L[a,b]$ *и функция Грина* $G(t,s)$ *этой задачи неположительна в квадрате* $[a,b] \times [a,b]$ *в том и только том случае, когда найдётся удовлетворяющая краевым условиям неотрицательная функция* $v \in W^2[a,b]$ *с неположительной почти всюду на* $[a,b]$ *невязкой* $\psi(t) = v''(t) + (Tv)(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства достаточно в теореме 3 взять

$$Qx = x, \quad x \in W^n[a,b], \quad Pf = -f, \quad f \in L[a,b], \quad V = T.$$

Невозмущённая краевая задача

$$x''(t) = f(t), \quad t \in [a,b], \quad x(a) = 0, \quad x'(a) + \int_a^b \phi(s) x''(s)\, ds = 0$$

однозначно разрешима, и её функция Грина $G(t,s) = (t-s)^+ - (t-a)\phi(s)$. При наложенном ограничении на $\phi(s)$ функция $G(t,s) \leqslant 0$. Если $\phi(s) \equiv \dfrac{b-s}{b-a}$, то второе краевое условие превращается в равенство $\dfrac{x(b)-x(a)}{b-a} = 0$. Поэтому исходная задача сведётся к двухточечной краевой задаче $x(a) = 0$, $x(b) = 0$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф., Максимов В.П. Методы современной теории линейных функционально-дифференциальных уравнений. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2000. 300 с.
2. Исламов Г.Г. Оценки минимального ранга конечномерных возмущений операторов Грина // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 9. С. 1496–1503.
3. Исламов Г.Г. О некоторых приложениях теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения. I // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 11. С. 1872–1881.
4. Исламов Г.Г. О некоторых приложениях теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения. II // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 2. С. 224–232.
5. Исламов Г.Г. Критерий разрешимости уравнений с краевыми неравенствами // Известия института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 1994. Вып. 2. С. 3–24.
6. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф., Цалюк З.Б. Заметка о положительности обратных операторов // Учёные записки Удмуртского госпединститута. 1958. Вып. 12. С. 47–49.
7. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961. 408 с.
8. Исламов Г.Г. О существовании положительных решений уравнений с запаздывающим аргументом // Материалы третьей Всесоюз. межвуз. конф. по теории и приложениям диффер. уравн. с отклоняющимся аргументом. Черновцы, 1972. С. 95–97.
9. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976. 568 с.
10. Исламов Г.Г. К вопросу об оценке сверху спектрального радиуса // Вестник Удмуртского университета. 1992. Вып. 1. С. 82–86.

МАТЕМАТИКА 2012. Вып. 1

Поступила в редакцию 01.02.2012

Исламов Галимзян Газизович, д. ф.–м. н., профессор, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: ggislamov@gmail.com

G. G. Islamov
On the question of extended convexity of Green operator

Keywords: Green's operator, extended convexity.

Mathematical Subject Classifications: 34K06, 34K10

Let Q be a differential operator of order $m-1$, $2 \leqslant m \leqslant n$, for which (a,b) is the interval of nonoscillation, and the Green's operator $G : L[a,b] \to W^n[a,b]$ of boundary value problem $Lx = f$, $l_i(x) = 0$, $i = 1,\dots,n$ has the property of generalized convexity: $QGP > 0$ for some linear homeomorphism P of Lebesgue space $L[a,b]$. Under some conditions, we prove, that the perturbed boundary value problem $Lx = PVQx + f$, $l_i(x) = 0$, $i = 1,\dots,n$ is also uniquely solvable in the Sobolev space $W^n[a,b]$ and the Green's operator $\widehat{G}$ inherits the property of G, that is $Q\widehat{G}P > 0$.

REFERENCES

1. Azbelev N.V., Rakhmatullina L.F., Maksimov V.P. *Metody sovremennoi teorii lineinykh funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* (Methods of modern theory of linear functional–differential equations), Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2000, 300 p.

2. Islamov G.G. Estimation of the minimal rank of finite–dimensional perturbations of Green's operators, *Differ. Uravn.*, 1989, vol. 25, no. 9, pp. 1046–1052.

3. Islamov G.G. Some applications of the theory of abstract functional-differential equation. I, *Differ. Uravn.*, 1989, vol. 25, no. 11, pp. 1309–1317.

4. Islamov G.G. Some applications of the theory of abstract functional-differential equation. II, *Differ. Uravn.*, 1990, vol. 26, no. 2, pp. 167–173.

5. Islamov G.G. The solvability criterion for equations with boundary inequalities, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, Izhevsk, 1994, no. 2, pp. 3–24.

6. Azbelev N.V., Rakhmatullina L.F., Tsalyuk Z.B. A note on the positivity of inverse operators, *Uch. Zap. Udmurt. Gos. Ped. Inst.*, 1958, no. 12, pp. 47–49.

7. Vulikh B.Z. *Vvedenie v teoriyu poluuporyadochennykh prostranstv* (Introduction to the theory of partially ordered spaces), Moscow: Fizmatgiz, 1961, 408 p.

8. Islamov G.G. On the existence of positive solutions of equations with retarded argument, *Proceedings of the Third All-Union Conference on Theory and Applications of Differential Equations with Deviating Argument*, Chernovtsy State University, 1972, pp. 95–97.

9. Karlin S., Studden W.J. Tchebycheff systems: with applications in analysis and statistics, Interscience Publishers, 1966.

10. Islamov G.G. On the question of an upper estimation of the spectral radius, *Vestn. Udmurt. Univ.*, 1992, no. 1, pp. 82–86.

Received 01.02.2012

Islamov Galimzyan Gazizovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: ggislamov@gmail.com