УДК 517.9

© *А. А. Жидков, А. В. Калинин, А. А. Тюхтина*

# $L_p$-ОЦЕНКИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРИИ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ[1]

Работа посвящена изучению оценок скалярных произведений векторных полей и их применению при доказательстве разрешимости задач математической физики. В работе доказаны оценки скалярных произведений векторных полей в весовых функциональных пространствах суммируемых функций. В качестве примера применения таких оценок доказана разрешимость задачи об определении стационарного магнитного поля в трёхмерном евклидовом пространстве, содержащем ограниченную проводящую область. Также показана связь предложенной постановки задачи и соответствующей вариационной формулировки. Изучена возможность определения остальных неизвестных функций (электрического поля, объёмной плотности электрических зарядов) внутри проводящей подобласти.

*Ключевые слова*: скалярное произведение, векторное поле, уравнения Максвелла, разрешимость, функциональные пространства.

## Введение

$L_p$–оценки норм векторных полей и их приложения в задачах математической физики достаточно глубоко были изучены в многочисленных работах различных авторов, некоторые результаты этих исследований и более подробная библиография отражены в работах [1–6]. Применение этих оценок, как правило, требует однородности физических сред, в которых изучаются векторные поля. При изучении задач математической физики в неоднородных средах с кусочно-гладкими коэффициентами, как правило, использовались соображения, связанные с условиями согласования на границе раздела сред [3].

Для исследования векторных полей в неоднородных средах при более общих условиях на коэффициенты авторами было предложено использовать оценки для скалярных произведений векторных полей. В работах [7–10] были получены $L_p$-оценки скалярных произведений векторных полей в ограниченных областях и была изучена возможность их применения для исследования разрешимости различных задач электромагнитной теории.

Для многих задач математической физики естественно рассматривать постановки в неограниченных неоднородных областях. Для этих задач также оказывается актуальным получение оценок скалярных произведений векторных полей. В работах [11, 12] доказаны $L_2$-оценки скалярных произведений векторных полей в неограниченных областях. В настоящей работе доказываются $L_p$-оценки скалярных произведений в весовых функциональных пространствах, с использованием которых изучается разрешимость одной стационарной задачи для системы уравнений Максвелла в пространстве $\mathbb{R}^3$.

## § 1. Основные функциональные пространства

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — некоторое открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^3$ (в частности, $\Omega \equiv \mathbb{R}^3$). Через $L_p(\Omega)$ обозначается банахово пространство функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, суммируемых со

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках Аналитической целевой ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 годы)» Минобрнауки РФ (регистрационный номер 2.1.1/3927) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (шифр проекта НК–13П–13).

степенью $p$, норма в котором определяется стандартным образом

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \Big( \int_\Omega |u(x)|^p \, dx \Big)^{1/p}.$$

Через $\{L_p(\Omega)\}^3$ обозначается банахово пространство вектор–функций $\vec{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\vec{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$ таких, что $u_i \in L_p(\Omega)$ $(i = 1, 2, 3)$, с нормой

$$\|\vec{u}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} = \Big( \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|^p_{L_p(\Omega)} \Big)^{1/p}.$$

Пусть $\Omega \equiv \mathbb{R}^3$. Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \geqslant 1$ определим банаховы пространства вектор–функций

$$H^\alpha_p(\mathrm{rot}; \mathbb{R}^3) = \Big\{ \vec{u} \in \big\{L_p(\mathbb{R}^3)\big\}^3 : \big(1 + |\cdot|^2\big)^{\alpha/p} \,\mathrm{rot}\, \vec{u}(\cdot) \in \big\{L_p(\mathbb{R}^3)\big\}^3 \Big\},$$
$$H^\alpha_p(\mathrm{div}; \mathbb{R}^3) = \Big\{ \vec{u} \in \big\{L_p(\mathbb{R}^3)\big\}^3 : \big(1 + |\cdot|^2\big)^{\alpha/p} \,\mathrm{div}\, \vec{u}(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^3) \Big\}$$

с соответствующими нормами

$$\|\vec{u}\|_{\alpha,p,\mathrm{rot}} = \left( \|\vec{u}\|^p_{\{L_p(\Omega)\}^3} + \Big\| \big(1 + |\cdot|^2\big)^{\alpha/p} \,\mathrm{rot}\, \vec{u} \Big\|^p_{\{L_p(\Omega)\}^3} \right)^{1/p},$$
$$\|\vec{u}\|_{\alpha,p,\mathrm{div}} = \left( \|\vec{u}\|^p_{\{L_p(\Omega)\}^3} + \Big\| \big(1 + |\cdot|^2\big)^{\alpha/p} \,\mathrm{div}\, \vec{u} \Big\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p}.$$

При $p = 2$ введённые пространства будем обозначать следующим образом [12]:

$$H^\alpha(\mathrm{rot}; \mathbb{R}^3) = H^\alpha_2(\mathrm{rot}; \mathbb{R}^3), \quad H^\alpha(\mathrm{div}; \mathbb{R}^3) = H^\alpha_2(\mathrm{div}; \mathbb{R}^3).$$

## § 2. Оценки скалярных произведений

Основным результатом настоящей работы является

**Теорема 1.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $p \neq 3/2$, $q = \dfrac{p}{p-1}$, $\alpha > \dfrac{1}{2} \max\{p, q\}$. *Тогда существует такая положительная постоянная* $C(\alpha, p)$, *не зависящая от вектор–функций* $\vec{u} \in H^\alpha_q(\mathrm{rot}; \Omega)$ *и* $\vec{v} \in H^\alpha_p(\mathrm{div}; \Omega)$, *что справедливо неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}(x) \cdot \vec{v}(x)) \, dx \leqslant C(\alpha, p) \cdot \left( \Big\| \big(1 + |\cdot|^2\big)^{\alpha/q} \,\mathrm{rot}\, \vec{u} \Big\|_{\{L_q(\mathbb{R}^3)\}^3} \|\vec{v}\|_{\{L_p(\mathbb{R}^3)\}^3} + \right.$$
$$\left. + \|\vec{u}\|_{\{L_q(\mathbb{R}^3)\}^3} \Big\| \big(1 + |\cdot|^2\big)^{\alpha/p} \,\mathrm{div}\, \vec{v} \Big\|_{L_p(\mathbb{R}^3)} \right). \tag{2.1}$$

При доказательстве теоремы 1 используется следующее утверждение.

**Лемма 1** (см. [8, 13]). *Пусть* $\Omega$ — *открытое множество в* $\mathbb{R}^3$ (*в частности,* $\Omega \equiv \mathbb{R}^3$), *звездное относительно точки* $0 \in \Omega$. *Тогда для любого* $x \in \Omega$ *и всех функций* $\vec{u} \in \big\{C^1(\Omega)\big\}^3$ *справедливы следующие тождества:*

$$\vec{u}(x) = \mathrm{grad}_x \left( \int_0^1 (\vec{u}(z) \cdot x) \; d\tau \right) + \int_0^1 \tau \left[\mathrm{rot}_z \vec{u}(z) \times x\right] \, d\tau, \tag{2.2}$$
$$\vec{u}(x) = \mathrm{rot}_x \left( \int_0^1 \tau \left[\vec{u}(z) \times x\right] \, d\tau \right) + \int_0^1 \tau^2 x \,\mathrm{div}_z \vec{u}(z) \, d\tau, \tag{2.3}$$

*где* $z = \tau x$, $\tau \in [0, 1]$.

Пусть $r \equiv |x| = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$, $\xi = \tau r$, $s = x/|x|$. Тогда тождества (2.2) и (2.3) могут быть переписаны в виде

$$\vec{u}(rs) = \operatorname{grad}_x \left( \int_0^r \left(\vec{u}(\xi s) \cdot s\right)\, d\xi \right) + \frac{1}{r} \int_0^r \xi \left[\operatorname{rot} \vec{u}(\xi s) \times s\right]\, d\xi, \tag{2.4}$$

$$\vec{u}(rs) = \operatorname{rot}_x \left( \int_0^r \xi \left[\vec{u}(\xi s) \times s\right]\, d\xi \right) + \frac{s}{r^2} \int_0^r \xi^2 \operatorname{div} \vec{u}(\xi s)\, d\xi. \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о   т е о р е м ы   1. Поскольку множество гладких функций плотно в пространствах $H_q(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3)$, $H_p(\mathrm{div};\mathbb{R}^3)$ [3, 4], достаточно рассмотреть вектор–функции $\vec{u}$ и $\vec{v}$ такие, что

$$\vec{u} \in \left\{C^1(\mathbb{R}^3)\right\}^3 \bigcap H_q^\alpha(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3), \quad \vec{v} \in \left\{C^1(\mathbb{R}^3)\right\}^3 \bigcap H_p^\alpha(\mathrm{div};\mathbb{R}^3).$$

Пусть $B_R$ — замкнутый шар радиуса $R > 0$ с центром в начале координат, с границей $\partial B_R$. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^3} \theta_R(|x|)\ \left(\vec{u}(x) \cdot \vec{v}(x)\right) dx, \tag{2.6}$$

где $\theta_R(|x|)$ — функция вида

$$\theta_R(r) = \begin{cases} 1, & r \leqslant R/2, \\ R/r - 1, & R/2 < r \leqslant R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Очевидно, что при $R \to \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \theta_R(|x|)\ \left(\vec{u}(x) \cdot \vec{v}(x)\right) dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \left(\vec{u}(x) \cdot \vec{v}(x)\right) dx.$$

Для оценки интеграла (2.6) применим в случае $p > 3/2$ представление (2.3) к вектор–функции $\vec{v}$ и представление (2.2) к вектор–функции $\vec{u}$ при $1 < p < 3/2$. В обеих ситуациях доказательство проводится по одной и той же схеме. Поэтому ограничимся более подробным изучением первого случая.

$$\int_{B_R} \theta_R(|x|)\ \left(\vec{u}(x) \cdot \vec{v}(x)\right) dx = \int_{B_R} \left( \theta_R(|x|)\vec{u}(x) \cdot \operatorname{rot} \left( \int_0^1 \tau \left[\vec{v}(\tau x) \times x\right] d\tau \right) \right) dx +$$
$$+ \int_{B_R} \left( \theta_R(|x|)\vec{u}(x) \cdot \int_0^1 \tau^2 x \operatorname{div} \vec{v}(\tau x) d\tau \right) dx = I_1 + I_2.$$

В первом из полученных интегралов ($I_1$) воспользуемся соотношением

$$\operatorname{div}\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = \left(\operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{b}\right) - \left(\vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}\right),$$

применим формулу Гаусса–Остроградского и используем тот факт, что $\theta_R(|x|) = 0$ при $x \in \partial B_R$. Получим

$$I_1 = \int_{B_R} \left( \theta_R(|x|)\vec{u}(x) \cdot \operatorname{rot} \left( \int_0^1 \tau \left[\vec{v}(\tau x) \times x\right] d\tau \right) \right) dx =$$
$$= \int_{B_R} \left( \operatorname{rot}\left(\theta_R(|x|)\vec{u}(x)\right) \cdot \int_0^1 \tau \left[\vec{v}(\tau x) \times x\right] d\tau \right) dx.$$

Или, раскрывая оператор rot и переходя к сферическим координатам,

$$I_1 = \int_S ds \int_0^R r \left( \theta_R(r) \operatorname{rot} \vec{u}(rs) \cdot \int_0^r \xi \left[\vec{v}(\xi s) \times s\right] d\xi \right) dr +$$
$$+ \int_S ds \int_0^R r \left( \left[\operatorname{grad} \theta_R(r) \times \vec{u}(rs)\right] \cdot \int_0^r \xi \left[\vec{v}(rs) \times s\right] d\xi \right) dr = I_{1,1} + I_{1,2}.$$

Оценим первый интеграл. Применяя неравенство Гёльдера к $\int_0^r \xi\,|\vec v(\xi s)|\,d\xi$, получим

$$\int_0^r \xi\,|\vec v(\xi s)|\,d\xi \leqslant \left(\int_0^r \xi^2\,|\vec v(\xi s)|^p\,d\xi\right)^{1/p}\cdot\left(\int_0^r \xi^{\left(1-\frac{2}{p}\right)q}d\xi\right)^{1/q} = \frac{r^{\frac{3-q}{q}}}{(3-q)^{1/q}}\cdot\left(\int_0^r \xi^2\,|\vec v(\xi s)|^p\,d\xi\right)^{1/p}.$$

Тогда

$$|I_{1,1}| \leqslant \int_S ds\int_0^R r\,\theta_R(r)\,|\mathrm{rot}\,\vec u(rs)|\int_0^r \xi|\vec v(\xi s|d\xi\,dr \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(3-q)^{1/q}}\int_S ds\int_0^R r^{3/q}\,\theta_R(r)\,|\mathrm{rot}\,\vec u(rs)|\left(\int_0^r \xi^2|\vec v(\xi s|^p d\xi\right)^{1/p} dr \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(3-q)^{1/q}}\int_S ds\left(\int_0^R \xi^2|\vec v(\xi s|^p d\xi\right)^{1/p}\cdot\int_0^R \frac{r^{1/q}\,\theta_R(r)}{(1+r^2)^{\alpha/q}}\cdot r^{2/q}\left(1+r^2\right)^{\alpha/q}|\mathrm{rot}\,\vec u(rs)|\,dr.$$

Применяя ко второму внутреннему интегралу неравенство Гёльдера, получаем

$$|I_{1,1}| \leqslant \frac{1}{(3-q)^{1/q}}\int_S ds\left(\int_0^R \xi^2|\vec v(\xi s|^p d\xi\right)^{1/p}\cdot\left(\int_0^R \frac{r^{p-1}\,\theta_R^p(r)}{(1+r^2)^{\alpha(p-1)}}dr\right)^{1/p}\cdot$$
$$\cdot\left(\int_0^R r^2\left(1+r^2\right)^{\alpha}|\mathrm{rot}\,\vec u(rs)|^q\,dr\right)^{1/q}.$$

Оценим интеграл

$$\int_0^R \frac{r^{p-1}\,\theta_R^p(r)}{(1+r^2)^{\alpha(p-1)}}dr \leqslant \int_0^1 \frac{r^{p-1}\,dr}{(1+r^2)^{\alpha(p-1)}}+\int_1^R \frac{r^{p-1}\,dr}{(1+r^2)^{\alpha(p-1)}} \leqslant \int_0^1 r^{p-1}\,dr+\int_1^R \frac{r^{p-1}\,dr}{r^{2\alpha(p-1)}} =$$
$$= \frac{1}{p}+\frac{1}{2\alpha(p-1)-p}\left(1-R^{p-2\alpha(p-1)}\right).$$

Очевидно, что при $\alpha > q/2$ выражение $p-2\alpha(p-1) < 0$. Тогда

$$|I_{1,1}| \leqslant C_{1,1}(\alpha,p,R)\cdot\left\|(1+|\cdot|^2)^{\alpha/q}\mathrm{rot}\,\vec u(x)\right\|_{\{L_q(B_R)\}^3}\cdot\|\vec v\|_{\{L_p(B_R)\}^3},$$
$$C_{1,1}(\alpha,p,R) = \left(\frac{2p-3}{p-1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2\alpha(p-1)-p}\left(1-\frac{1}{R^{2\alpha(p-1)-p}}\right)\right)^{1/p}.$$

Оценим интеграл $I_{1,2}$. Легко видеть, что $\mathrm{grad}\,\theta_R(|x|) = \dfrac{d\theta_R(r)}{dr}\cdot s$, где

$$\frac{d\theta_R(r)}{dr} = \begin{cases} -R/r^2, & R/2 < r < R,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Применяя необходимое количество раз неравенство Гёльдера, получаем

$$|I_{1,2}| \leqslant \frac{1}{(3-q)^{1/q}}\left(\int_{R/2}^R r^{p-1}\left|\frac{d\theta_R(r)}{dr}\right|^p dr\right)^{1/p}\cdot$$
$$\cdot\int_S ds\left(\int_0^R \xi^2|\vec v(\xi s)|^p d\xi\right)^{1/p}\left(\int_{R/2}^R r^2|\vec u(rs)|^q dr\right)^{1/q} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(3-q)^{1/q}}\left(\int_{R/2}^R r^{p-1}\left|\frac{d\theta_R(r)}{dr}\right|^p dr\right)^{1/p}\cdot\|\vec v\|_{\{L_p(\mathbb{R}^3)\}^3}\left(\int_S ds\int_{R/2}^R r^2|\vec u(rs)|^q dr\right)^{1/q}.$$

Очевидна следующая оценка

$$0 < \left( \int_{R/2}^{R} r^{p-1} \left| \frac{d\theta_R(r)}{dr} \right|^p dr \right)^{1/p} = \left( \frac{2^p - 1}{p} \right)^{1/p} < \infty.$$

Так как

$$\int_S ds \int_{R/2}^{R} r^2 |\vec{u}(rs)|^q dr \to 0 \text{ при } R \to \infty,$$

то $|I_{1,2}| \to 0$ при $R \to \infty$.

Получим оценку для интеграла $I_2$. Применим к $\displaystyle\int_0^r \xi^2 |\operatorname{div} \vec{v}(\xi s)|\, d\xi$ неравенство Гёльдера следующим образом:

$$\int_0^r \xi^2 |\operatorname{div} \vec{v}(\xi s)|\, d\xi = \int_0^r \frac{\xi^{2/q}}{(1+\xi^2)^{\alpha/p}} \cdot \xi^{2/p} (1+\xi^2)^{\alpha/p} |\operatorname{div} \vec{v}(\xi s)|\, d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \left( \int_0^r \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^{\alpha(q-1)}} d\xi \right)^{1/q} \left( \int_0^r \xi^2 (1+\xi^2)^{\alpha} |\operatorname{div} \vec{v}(\xi s)|^p d\xi \right)^{1/p}.$$

Отсюда следует оценка для $I_2$:

$$|I_2| \leqslant \int_S ds \left( \int_0^R \xi^2 (1+\xi^2)^{\alpha} |\operatorname{div} \vec{v}(\xi s)|^p d\xi \right)^{1/p} \cdot \int_0^R \left( \int_0^r \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^{\alpha(q-1)}} d\xi \right)^{1/q} \theta_R(r) |\vec{u}(rs)|\, dr.$$

Во втором интеграле снова применим неравенство Гёльдера

$$|I_2| \leqslant \int_S ds \left( \int_0^R \xi^2 (1+\xi^2)^{\alpha} |\operatorname{div} \vec{v}(\xi s)|^p d\xi \right)^{1/p} \cdot$$
$$\cdot \left( \int_0^R \frac{\theta_R^p(r)}{r^{2(p-1)}} \left( \int_0^r \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^{\alpha(q-1)}} d\xi \right)^{p-1} dr \right)^{1/p} \cdot \left( \int_0^R r^2 |\vec{u}(rs)|\, dr \right)^{1/q}.$$

Оценим следующий интеграл

$$\int_0^R \frac{\theta_R^p(r)}{r^{2(p-1)}} \left( \int_0^r \frac{\xi^2\, d\xi}{(1+\xi^2)^{\alpha(q-1)}} \right)^{p-1} dr \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 \frac{1}{r^{2(p-1)}} \left( \int_0^r \frac{\xi^2\, d\xi}{(1+\xi^2)^{\alpha(q-1)}} \right)^{p-1} dr + \int_1^R \frac{1}{r^{2(p-1)}} \left( \int_0^r \frac{\xi^2\, d\xi}{(1+\xi^2)^{\alpha(q-1)}} \right)^{p-1} dr.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{r^{2(p-1)}} \left( \int_0^r \frac{\xi^2\, d\xi}{(1+\xi^2)^{\alpha(q-1)}} \right)^{p-1} dr \leqslant \int_0^1 \frac{1}{r^{2(p-1)}} \left( \int_0^r \xi^2\, d\xi \right)^{p-1} dr = \frac{1}{3^{p-1} p}.$$

Обозначим $\kappa = 2\alpha(q-1)$ и рассмотрим

$$J = \int_0^r \frac{\xi^2\, d\xi}{(1+\xi^2)^{\alpha(q-1)}} = \int_0^r \frac{\xi^2\, d\xi}{(1+\xi^2)^{\kappa/2}}.$$

Если $\kappa < 3$ (то есть $\alpha < \dfrac{3}{2}(p-1)$), то

$$J \leqslant \int_0^r \xi^{2-\kappa} d\xi = \frac{1}{3-\kappa} r^{3-\kappa}$$

и, соответственно,

$$\int_1^R \frac{1}{r^{2(p-1)}} J^{p-1} dr \leqslant \frac{1}{(3-\kappa)^{p-1}} \int_1^R \frac{dr}{r^{(\kappa-1)(p-1)}} = \frac{1}{(3-\kappa)^{p-1}(2\alpha-p)} \left(1 - \frac{1}{R^{2\alpha-p}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(3-\kappa)^{p-1}(2\alpha-p)}.$$

Если $\kappa > 3$, то

$$J \leqslant \int_0^1 \xi^2\, d\xi + \int_1^R \frac{d\xi}{\xi^{\kappa-2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\kappa-3}\left(1 - \frac{1}{r^{\kappa-3}}\right) \leqslant \frac{\kappa}{3(\kappa-3)},$$
$$\int_1^R \frac{1}{r^{2(p-1)}} J^{p-1} dr \leqslant \left(\frac{\kappa}{3(\kappa-3)}\right)^{p-1} \int_1^R \frac{dr}{r^{2(p-1)}} = \left(\frac{\kappa}{3(\kappa-3)}\right)^{p-1} \frac{1}{2p-3}\left(1 - \frac{1}{R^{2p-3}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2p-3}\left(\frac{\kappa}{3(\kappa-3)}\right)^{p-1}.$$

Наконец, если $\kappa = 3$, тогда

$$J = \int_0^r \frac{\xi^2\, d\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}} \leqslant \frac{1}{3} + \int_1^r \frac{\xi^{2+\frac{3-q}{2}}\, d\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3-q}\left(r^{\frac{3-q}{2}} - 1\right) \leqslant \frac{2}{3-q} \cdot r^{\frac{3-q}{2}},$$
$$\int_1^R \frac{1}{r^{2(p-1)}} J^{p-1} dr \leqslant \left(\frac{2}{3-q}\right)^{p-1} \int_1^R \frac{dr}{r^{(2p-1)/2}} = \left(\frac{2}{3-q}\right)^{p} \left(1 - \frac{1}{R^{p-3/2}}\right) \leqslant \left(\frac{2}{3-q}\right)^{p}.$$

Таким образом, получаем

$$\int_0^R \frac{\theta_R^p(r)}{r^{2(p-1)}} \left(\int_0^r \frac{\xi^2\, d\xi}{(1+\xi^2)^{\alpha(q-1)}}\right)^{p-1} dr \leqslant C_2(\alpha, p),$$

следовательно,

$$|I_2| \leqslant (C_2(\alpha,p))^{1/p} \int_S ds \left(\int_0^R \xi^2 (1+\xi^2)^\alpha |\operatorname{div} \vec{v}(\xi s)|^p d\xi\right)^{1/p} \cdot \left(\int_0^R r^2 |\vec{u}(rs)|\, dr\right)^{1/q} \leqslant$$
$$\leqslant (C_2(\alpha,p))^{1/p} \left\| \left(1 + |\cdot|^2\right)^{\alpha/p} \operatorname{div} \vec{v} \right\|_{L_p(B_R)} \|\vec{u}\|_{\{L_q(B_R)\}^3}.$$

Сводя воедино полученные оценки, заключаем, что для интеграла (2.6) справедливо неравенство

$$\int_{B_R} \theta_R(|x|)\, (\vec{u}(x) \cdot \vec{v}(x))\, dx \leqslant C(\alpha, p) \left( \left\| \left(1 + |\cdot|^2\right)^{\alpha/q} \operatorname{rot} \vec{u} \right\|_{\{L_q(\mathbb{R}^3)\}^3} \|\vec{v}\|_{\{L_p(\mathbb{R}^3)\}^3} + \right.$$
$$\left. + \left\| \left(1 + |\cdot|^2\right)^{\alpha/p} \operatorname{div} \vec{v} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^3)} \|\vec{u}\|_{\{L_q(\mathbb{R}^3)\}^3} \right),$$

где $C(\alpha, p) = \max\{\lim_{R\to\infty} C_{1,1}(\alpha, p, R), C_2(\alpha, p)\}$.

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $R \to \infty$, получаем оценку (2.1). $\square$

## § 3. Применение оценок при изучении стационарной задачи для системы уравнений Максвелла

Достаточно широкий класс инженерных проблем связан с анализом пондеромоторных сил и джоулевых энерговыделений, вызываемых магнитными полями и токами, протекающими в проводящих элементах конструкций [14, 15]. Для решения этих проблем полезны корректные постановки математических задач для системы уравнений Максвелла, позволяющие однозначно определить необходимые поля в проводящей подобласти $\Omega_\sigma \subset \mathbb{R}^3$, не решая при этом полную задачу об исчерпывающем определении всех полей во всём пространстве $\mathbb{R}^3$. Для иллюстрации применения полученных в работе оценок скалярных произведений в этом пункте приводится одна из возможных постановок стационарной задачи в терминах напряжённости магнитного поля, позволяющая однозначно определить напряжённость магнитного поля во всём пространстве $\mathbb{R}^3$, а электрическое поле, токи и заряды — в проводящей подобласти $\Omega_\sigma \subset \mathbb{R}^3$.

Стационарная система уравнений Максвелла с учётом материальных соотношений в гауссовой системе единиц записывается в виде [16]

$$\operatorname{rot} \vec{H}(x) = \frac{4\pi}{c}\sigma(x)\left(\vec{E}(x) + \vec{E}^{\text{ст}}(x)\right), \tag{3.1}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(x) = 0, \tag{3.2}$$

$$\operatorname{div}(\mu(x)\vec{H}(x)) = 0, \tag{3.3}$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon(x)\vec{E}(x)) = 4\pi\rho(x). \tag{3.4}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^3$; $\Omega_\sigma$ — открытое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^3$ с регулярной границей $\Gamma$, в каждой точке которой определён единичный вектор внешней нормали $\vec{n}(x)$, $x \in \Gamma$.

Предполагается, что заданные функции $\sigma$, $\mu$, $\varepsilon \in L_\infty(\mathbb{R}^3)$, $\vec{E}^{\text{ст}} \in \left\{L_2(\mathbb{R}^3)\right\}^3$ удовлетворяют условиям

$$\sigma(x) = 0,\ \mu(x) = \varepsilon(x) = 1,\ \vec{E}^{\text{ст}}(x) = 0 \text{ при почти всех } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\sigma, \tag{3.5}$$

$$\sigma_* \leqslant \sigma(x) \leqslant \sigma^*,\ \mu_* \leqslant \mu(x) \leqslant \mu^*,\ \varepsilon_* \leqslant \varepsilon(x) \leqslant \varepsilon^* \text{ при почти всех } x \in \Omega_\sigma, \tag{3.6}$$

где $\sigma_*$, $\sigma^*$, $\mu_*$, $\mu^*$, $\varepsilon_*$, $\varepsilon^*$, $c$ — некоторые положительные постоянные.

Естественной с физической точки зрения является задача об определении электрических и магнитных полей, вызванных только источниками, сосредоточенными в подобласти $\Omega_\sigma$. Отсутствие внешних источников, в частности, предполагает, что

$$\rho(x) = 0 \text{ при почти всех } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\sigma, \tag{3.7}$$

а отсутствие внешних полей, наряду с вытекающими из (3.1)–(3.5), (3.7) соотношениями

$$\operatorname{rot} \vec{H}(x) = 0,\ \operatorname{div} \vec{H}(x) = 0,\ \operatorname{div} \vec{E}(x) = 0 \text{ при почти всех } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\sigma \tag{3.8}$$

требует выполнения дополнительных условий на поведение полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ при $|x| \to \infty$:

$$\left|\vec{E}(x)\right| \leqslant \frac{C}{|x|^2}, \quad \left|\vec{H}(x)\right| \leqslant \frac{C}{|x|^2} \tag{3.9}$$

при достаточно больших $|x|$ [17].

При сделанных предположениях задача об определении напряжённости магнитного поля $\vec{H}(x)$ может быть в замкнутой форме сформулирована в виде интегрального тождества. Для этого уравнение (3.1), записанное при $x \in \Omega_\sigma$ в виде

$$\frac{c}{4\pi}\sigma^{-1} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{E} + \vec{E}^{\text{ст}},$$

домножается скалярно на $\operatorname{rot} \vec{\psi}$, полученный результат интегрируется по области $\Omega_\sigma$:

$$\frac{c}{4\pi}\int_{\Omega_\sigma}\left(\sigma^{-1}(x)\operatorname{rot}\vec{H}(x) \cdot \operatorname{rot}\vec{\psi}(x)\right)dx = \int_{\Omega_\sigma}\left(\vec{E}(x) + \vec{E}^{\text{ст}}(x) \cdot \operatorname{rot}\vec{\psi}(x)\right)dx.$$

Считая, что $\vec{\psi}(x)$ при достаточно больших $|x|$ подчиняется ограничениям вида (3.9), и, учитывая тот факт, что $\operatorname{rot} \vec{E}(x) = 0$ при почти всех $x \in \mathbb{R}^3$, можно показать, что

$$\int_{\Omega_\sigma}\left(\vec{E}(x) \cdot \operatorname{rot}\vec{\psi}(x)\right)dx = \int_{\mathbb{R}^3}\left(\vec{E}(x) \cdot \operatorname{rot}\vec{\psi}(x)\right)dx = 0.$$

Таким образом, вектор напряжённости магнитного поля $\vec{H}$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\frac{c}{4\pi}\int_{\Omega_\sigma}\Big(\sigma^{-1}(x)\,\mathrm{rot}\,\vec{H}(x)\cdot\mathrm{rot}\,\vec{\psi}(x)\Big)\,dx=\int_{\Omega_\sigma}\Big(\vec{E}^{\text{ст}}(x)\cdot\mathrm{rot}\,\vec{\psi}(x)\Big)\,dx. \tag{3.10}$$

Введём необходимые функциональные пространства:

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{div};\mathbb{R}^3)=\Big\{\vec{u}\in\big\{L_2(\mathbb{R}^3)\big\}^3:\mathrm{div}\,\vec{u}=0\Big\},$$
$$\mathrm{Ker}(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3)=\Big\{\vec{u}\in\big\{L_2(\mathbb{R}^3)\big\}^3:\mathrm{rot}\,\vec{u}=0\Big\},$$
$$\mathrm{Ker}(\mathrm{div}\,\mu;\mathbb{R}^3)=\Big\{\vec{u}\in\big\{L_2(\mathbb{R}^3)\big\}^3:\mu\vec{u}\in\mathrm{Ker}(\mathrm{div};\mathbb{R}^3)\Big\},$$
$$V(\mathrm{rot};\Omega_\sigma)=\Big\{\vec{u}\in\big\{L_2(\mathbb{R}^3)\big\}^3:\mathrm{rot}\,\vec{u}\in\big\{L_2(\mathbb{R}^3)\big\}^3,\ \mathrm{rot}\,\vec{u}(x)=0 \text{ при почти всех } x\in\mathbb{R}^3\setminus\Omega_\sigma\Big\}.$$

Обозначим $U(\Omega_\sigma)\equiv\mathrm{Ker}(\mathrm{div}\,\mu;\mathbb{R}^3)\cap V(\mathrm{rot};\Omega_\sigma)$. Можно показать, что данное пространство будет гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})_{U(\Omega_\sigma)}=(\vec{u}\cdot\vec{v})_{\{L_2(\mathbb{R}^3)\}^3}+(\mathrm{rot}\,\vec{u}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v})_{\{L_2(\mathbb{R}^3)\}^3}\,.$$

Задача об определении вектора напряжённости магнитного поля может быть сформулирована в следующем виде: определить вектор–функцию $\vec{H}\in U(\Omega_\sigma)$, удовлетворяющую интегральному тождеству (3.10) при всех функциях $\vec{\psi}\in U(\Omega_\sigma)$.

Для доказательства теоремы о разрешимости задачи (3.10) потребуется следующее утверждение.

**Лемма 2** (Лакс–Мильграм [18]). *Пусть $V$ — гильбертово пространство над полем действительных чисел. Пусть $a(\cdot,\cdot)\colon V\times V\to\mathbb{R}$ — билинейная, симметричная, ограниченная, коэрцитивная форма, $f(\cdot)\colon V\to\mathbb{R}$ — линейный ограниченный функционал. Тогда существует и притом единственный элемент $u\in V$, удовлетворяющий равенству $a(u,v)=f(v)$ при всех $v\in V$.*

**Теорема 2.** *Пусть функции $\sigma$, $\mu$, $\varepsilon\in L_\infty(\mathbb{R}^3)$, $\vec{E}^{cm}\in\big\{L_2(\mathbb{R}^3)\big\}^3$ удовлетворяют условиям* (3.5), (3.6). *Тогда решение $\vec{H}\in U(\Omega_\sigma)$ интегрального тождества* (3.10) *существует и единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$a(\vec{H},\vec{\psi})=\frac{c}{4\pi}\int_{\Omega_\sigma}\Big(\sigma^{-1}(x)\,\mathrm{rot}\,\vec{H}(x)\cdot\mathrm{rot}\,\vec{\psi}(x)\Big)\,dx,\quad \vec{H},\vec{\psi}\in U(\Omega_\sigma),$$
$$f(\vec{\psi})=\int_{\Omega_\sigma}\Big(\vec{E}^{\text{ст}}(x)\cdot\mathrm{rot}\,\vec{\psi}(x)\Big)\,dx,\quad \vec{\psi}\in U(\Omega_\sigma).$$

Проверим, что функционалы $a(\cdot,\cdot)$ и $f(\cdot)$ удовлетворяют условиям леммы Лакса–Мильграма. Билинейность и симметричность формы $a(\cdot,\cdot)$ очевидны. Ограниченность формы $a(\cdot,\cdot)$ вытекает из оценки

$$|a(\vec{u},\vec{v})|=\frac{c}{4\pi}\left|\int_{\Omega_\sigma}\big(\sigma^{-1}(x)\,\mathrm{rot}\,\vec{u}(x)\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}(x)\big)\,dx\right|\leqslant\frac{c}{4\pi\sigma_*}\left|\int_{\Omega_\sigma}\big(\mathrm{rot}\,\vec{u}(x)\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}(x)\big)\,dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant|a(\vec{u},\vec{v})|\leqslant\frac{c}{4\pi\sigma_*}\left(\int_{\Omega_\sigma}|\mathrm{rot}\,\vec{u}(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega_\sigma}|\mathrm{rot}\,\vec{v}(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\leqslant\frac{c}{4\pi\sigma_*}\|\vec{u}\|_{U(\Omega_\sigma)}\cdot\|\vec{v}\|_{U(\Omega_\sigma)}.$$

Докажем коэрцитивность формы $a(\cdot,\cdot)$. Поскольку $\vec{H}\in V(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3)$, то $\vec{H}\in H^\alpha(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3)$ для любого $\alpha>1$, то есть для вектор–функции $\vec{H}(x)$ справедлива оценка

$$\|\vec{H}\|^2\leqslant\frac{1}{\mu_*}\Big(\vec{H}\cdot\mu\vec{H}\Big)_{\{L_2(\mathbb{R}^3)\}^3}\,.$$

Здесь и далее используется обозначение $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\{L_2(\mathbb{R}^3)\}^3}$. Воспользуемся оценкой (2.1).

$$\|\vec{H}\|^2 \leqslant \frac{C(\alpha,2)}{\mu_*} \cdot \left( \left\| \left(1+|\cdot|^2\right)^{\alpha/2} \operatorname{rot} \vec{H} \right\| \cdot \|\mu\vec{H}\| + \|\vec{H}\| \cdot \left\| \left(1+|\cdot|^2\right)^{\alpha/2} \operatorname{div} \mu\vec{H} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \right).$$

Так как $\vec{H} \in U(\Omega_\sigma)$, последнее слагаемое равно нулю. Тогда, пользуясь неравенством Гёльдера, получаем

$$\|\vec{H}\|^2 \leqslant C(\alpha,2)\, \frac{\mu^*}{\mu_*} \cdot \left\| \left(1+|\cdot|^2\right)^{\alpha/2} \operatorname{rot} \vec{H} \right\| \cdot \|\vec{H}\|,$$

откуда

$$\|\vec{H}\|_{\{L_2(\mathbb{R}^3)\}^3} \leqslant C(\alpha,2)\, \frac{\mu^*}{\mu_*} \cdot \left(1+R^2\right)^{\alpha/2} \left\| \operatorname{rot} \vec{H} \right\|_{\{L_2(\Omega_\sigma)\}^3},$$

где $R = \operatorname{diam} \Omega_\sigma$. Из полученной оценки следует коэрцитивность билинейной формы, поскольку

$$\left\|\vec{H}\right\|^2_{V(\mathrm{rot};\mathbb{R}^3)} \leqslant \left( \left( C(\alpha,2)\, \frac{\mu^*}{\mu_*} \right)^2 \cdot \left(1+R^2\right)^{\alpha} + 1 \right) \int_{\Omega_\sigma} (\operatorname{rot} \vec{H}(x) \cdot \operatorname{rot} \vec{H}(x)) dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\pi\sigma^*}{c} \left( \left( C(\alpha,2)\, \frac{\mu^*}{\mu_*} \right)^2 \cdot \left(1+R^2\right)^{\alpha} + 1 \right) \cdot a(\vec{H},\vec{H}).$$

Проверим выполнение условий леммы Лакса–Мильграма для функционала $f(\cdot)$. Линейность очевидна, а ограниченность следует из неравенства Коши–Буняковского

$$\left| f(\vec{\psi}) \right| \leqslant \left( \int_{\Omega_\sigma} \left| \vec{E}^{\text{ст}}(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left( \int_{\Omega_\sigma} \left| \operatorname{rot} \vec{\psi}(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant \left\| \vec{E}^{\text{ст}} \right\|_{\{L_2(\mathbb{R}^3)\}^3} \cdot \|\operatorname{rot} \vec{\psi}\|_{U(\Omega_\sigma)}.$$

Таким образом, выполнены все условия леммы Лакса–Мильграма, и, следовательно, решение задачи (3.10) существует и единственно. □

**Замечание 1.** Разрешимость рассматриваемой задачи остаётся также справедливой в том случае, когда $\sigma$ — симметричный, положительно определённый тензор, удовлетворяющий условию (3.5). Схема доказательства аналогична приведённой в теореме 2.

**Замечание 2.** Результат теоремы 2 показывает, что может быть дана следующая корректная формулировка задачи об определении $\vec{H}$ во всём пространстве $\mathbb{R}^3$ при условии отсутствия внешних полей и источников по отношению к области $\Omega_\sigma$ как решение следующей вариационной задачи

$$\frac{c}{8\pi} \int_{\Omega_\sigma} \sigma^{-1}(x) \left| \operatorname{rot} \vec{H}(x) \right|^2 dx - \int_{\Omega_\sigma} \left( \vec{E}^{\text{ст}}(x) \cdot \operatorname{rot} \vec{H}(x) \right) dx \to \min, \tag{3.11}$$

при условиях

$$\operatorname{rot} \vec{H} \in \left\{ L_2(\mathbb{R}^3) \right\}^3, \tag{3.12}$$

$$\operatorname{div} \left( \mu(x) \vec{H}(x) \right) = 0 \text{ при почти всех } x \in \mathbb{R}^3, \tag{3.13}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}(x) = 0, \quad \text{при почти всех } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\sigma, \tag{3.14}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mu(x) \vec{H}^2(x)\, dx < \infty. \tag{3.15}$$

Соотношения (3.12)–(3.15) эквивалентны включению $\vec{H}$ в пространство $U(\Omega_\sigma)$, причём условие (3.15), эквивалентное требованию конечности энергии магнитного поля, позволяет исключить из постановки задачи условие поведения $\vec{H}(x)$ при $|x| \to \infty$ вида (3.9). Вариационный принцип (3.11), эквивалентный интегральному тождеству (3.10) [18], имеет физический смысл минимизации джоулевых энерговыделений [16].

Пусть $\vec{H} \in U(\Omega_\sigma)$ удовлетворяет соотношению (3.10) при всех $\vec{\psi} \in U(\Omega_\sigma)$. Покажем, что функции $\vec{E}$ и $\rho$ в области $\Omega_\sigma$ определяются из соотношений (3.1)–(3.4) как производные величины $\vec{H}$.

Определим в проводящей области вектор–функцию $\vec{E}$ соотношением

$$\vec{E} = \frac{c}{4\pi\sigma}\operatorname{rot}\vec{H} - \vec{E}^{\text{ст}}.$$

Очевидно, что $\vec{E} \in \{L_2(\Omega_\sigma)\}^3$. Из тождества (3.10) следует, что равенство

$$\int_{\Omega_\sigma} \left(\frac{c}{4\pi}\sigma^{-1}\operatorname{rot}\vec{H} - \vec{E}^{\text{ст}} \cdot \operatorname{rot}\vec{\psi}\right) dx = 0$$

выполняется для любой функции $\vec{\psi} \in U(\Omega_\sigma)$, а следовательно, и для любой $\vec{\psi} \in \{\mathcal{D}(\Omega_\sigma)\}^3$. Тогда

$$\int_{\Omega_\sigma} \left(\vec{E} \cdot \operatorname{rot}\vec{\psi}\right) dx = 0, \quad \vec{\psi} \in \{\mathcal{D}(\Omega_\sigma)\}^3,$$

откуда следует, что $\vec{E} \in \operatorname{Ker}(\operatorname{rot}; \Omega_\sigma)$.

Сужение распределения $\rho \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ на $\Omega_\sigma$ может быть определено следующим образом

$$\langle \rho, \varphi \rangle = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_\sigma} \varepsilon(x)\left(\vec{E}(x) \cdot \operatorname{grad}\varphi(x)\right) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_\sigma).$$

Таким образом, электрическое поле $\vec{E}$, объёмная плотность токов $\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^{\text{ст}})$ и плотность электрических зарядов $\rho$ в $\Omega_\sigma$ однозначно определяются как производные величины от магнитного поля $\vec{H}$.

**Замечание 3.** Приведённая постановка задачи не позволяет однозначно определить электрическое поле $\vec{E}$ во всём пространстве $\mathbb{R}^3$ и заряд, распределённый на поверхности $\Gamma$. Для исчерпывающего решения этой задачи необходима дополнительная информация о полном заряде, сосредоточенном в $\overline{\Omega}_\sigma = \Omega_\sigma \bigcup \Gamma$, или о значении интеграла

$$\int_\Gamma (\vec{E} \cdot \vec{n})\, d\Gamma,$$

где $(\vec{E} \cdot \vec{n})$, вообще говоря, определяется как след на границе $\Gamma$ функции $\vec{E} \in \left\{L_2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_\sigma)\right\}^3$, удовлетворяющей условию $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_\sigma$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вейль Г. Метод ортогональной проекции в теории потенциала, Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984. С. 275–307.
2. Быховский Э.Б., Смирнов Н.В. Об ортогональном разложении пространства вектор–функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа // Труды МИАН СССР. 1960. Т. 59. С. 5–36.
3. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
4. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.
5. Масленникова В.Н. Оценки в $L_p$ и асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для системы Соболева // Труды МИАН СССР. 1968. Т. 103. С. 107–141.
6. Girault V., Raviart P.-A. Finite Element Approximation of the Navier–Stokes Equations. New York: Springer–Verlag, 1979. 207 p.
7. Калинин А.В., Морозов С.Ф. Стационарные задачи для системы уравнений Максвелла в неоднородных средах // Вестник ННГУ. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление. 1997. Т. 20. № 1. С. 24–31.

8. Калинин А.В. Некоторые оценки теории векторных полей // Вестник ННГУ. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление. 1997. Т. 20. № 1. С. 32–38.
9. Калинин А.В., Калинкина А.А. Оценки векторных полей и стационарная система уравнений Максвелла // Вестник ННГУ. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление. 2002. Вып. 1 (25). С. 95–107.
10. Калинин А.В., Калинкина А.А. $L_p$-оценки векторных полей // Известия вузов. Математика. 2004. № 3. С. 26–35.
11. Калинин А.В. Оценки скалярных произведений векторных полей и их применения в некоторых задачах математической физики // Известия института математики и информатики УдГУ. Ижевск. 2006. Вып. 3 (37). С. 55–56.
12. Жидков А.А. Оценки скалярных произведений векторных полей в неограниченных областях // Вестник Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского. 2007. № 1. С. 162–166.
13. Калинин А.В. Оценки скалярных произведений векторных полей и их применение в математической физике. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2007. 319 с.
14. Кулон Ж.-Л., Сабоннадьер Ж.-К. САПР в электротехнике. М.: Мир, 1988. 208 с.
15. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985. 336 с.
16. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1989. 616 с.
17. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 312 с.
18. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.

Поступила в редакцию 01.07.2011

Жидков Артём Александрович, ассистент, кафедра математической физики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: Artem.Zhidkov@gmail.com

Калинин Алексей Вячеславович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математической физики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: avk@mm.unn.ru

Тюхтина Алла Александровна к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического моделирования экономических систем, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: kalinmm@yandex.ru

***A. A. Zhidkov, A. V. Kalinin, A. A. Tyukhtina***

**$L_p$-estimations of vector fields in the unbounded areas and some electromagnetic theory problems in the inhomogeneous areas**

*Keywords*: scalar product, vector field, Maxwell equations, solvability, functional spaces.

Mathematical Subject Classifications: 35D30, 35Q61, 46E20

The paper is devoted to studying of estimations of scalar products of vector fields and their application in the proof of solvability for mathematical physics problems. The estimations of scalar products of vector field were proved in weighted functional spaces of summable functions. As an example of the application of such estimations there was proved the solvability for the problem of determination of stationary magnetic field in whole three-dimensional Euclidian space containing bounded conducting domain. The association between the proposed problem statement and the corresponding variational statement was shown too. There was investigated the possibility of determination of another unknown functions (electric field, volume density of electrical charge) inside the conducting domain.

REFERENCES

1. Weil H. The method of orthogonal projection in potential theory, *Duke Math. Journal*, 1940, pp. 411–444.

2. Byhovskii E.B., Smirnov N.V. Orthogonal decomposition of the space of vector functions square-summable on a given domain, and the operators of vector analysis, *Tr. Mat. Inst. Steklov*, 1960, vol. 59, pp. 5–36.

3. Duvaut G., Lions J.-L. *Inequalities on mechanics and physics*, Berlin–New York: Springer–Verlag, 1976, 397 p. Translated under the title *Neravenstva v mekhanike i fizike*, Moscow: Nauka, 1980, 384 p.

4. Temam R. *Navier–Stokes equations: theory and numerical analysis*, Amsterdam–New York–Oxford: North–Holland Publishing Company, 1977, 408 p. Translated under the title *Uravneniya Nav'e–Stoksa. Teoriya i chislennyi analiz*, Moscow: Mir, 1981, 408 p.

5. Maslennikova V.N. Estimates in $L_p$ and the asymptotic for $t \to \infty$ of Cauchy problem solution for Sobolev set, *Tr. Mat. Inst. Steklov*, 1968, vol. 103, pp. 107–141.

6. Girault V., Raviart P.-A. *Finite Element Approximation of the Navier–Stokes Equations*, New York: Springer–Verlag, 1979, 207 p.

7. Kalinin A.V., Morozov S.F. Stationary problems for the set of Maxwell equations on inhomogeneous domains, *Vestn. Nizhegorod. Gos. Univ. Mat. Model. Optim. Upr.*, 1997, vol. 20, no. 1, pp. 24–31.

8. Kalinin A.V. Some estimations of vector field theory, *Vestn. Nizhegorod. Gos. Univ. Mat. Model. Optim. Upr.*, 1997, vol. 20, no. 1, pp. 32–38.

9. Kalinin A.V., Kalinkina A.A. Estimates of vector fields and stationary set of Maxwell equations, *Vestn. Nizhegorod. Gos. Univ. Mat. Model. Optim. Upr.*, 2002, no. 1 (25), pp. 95–107.

10. Kalinin A.V., Kalinkina A.A. $L_p$-estimates of vector fields, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2004, no. 3, pp. 26–35.

11. Kalinin A.V. Estimations of scalar products of vector fields and their applications in several mathematical physics problems, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, Izhevsk, 2006, no. 3 (37), pp. 55–56.

12. Zhidkov A.A. Estimations of scalar products of vector fields in unbounded domains, *Vestn. Nizhegorod. Gos. Univ.*, 2007, no. 1, pp. 162–166.

13. Kalinin A.V. *Otsenki skalyarnykh proizvedenii vektornykh polei i ikh primenenie v matematicheskoi fizike* (Estimations scalar products of vector fields and their applications in mathematical physics), Nizhni Novgorod: Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, 2007, 319 p.

14. Coulomb J.-L., Sabonnadière J.-K. *CAO en électrotechnique*, Paris: Hermes. Pub., 1985, 242 p. Translated under the title *SAPR v electrotekhnike*, Moscow: Mir, 1988, 208 p.

15. Il'in V.P. *Chislennye metody resheniya zadach elektrofiziki* (Numerical methods of solution of electrophysics problems), Moscow: Nauka, 1985, 336 p.

16. Tamm I.E. *Osnovy teorii electrichestva* (Fundamentals of the theory of electricity), Moscow: Nauka, 1989, 616 p.

17. Colton D., Kress R. *Integral equation methods in scattering theory*, New York: John Wiley and Sons, 1983, 271 p. Translated under the title *Metody integral'nykh uravnenii v teorii rasseyaniya*, Moscow: Mir, 1987, 312 p.

18. Ciarlet P. *The finite element method for elliptic problems*, Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland Publishing Company, 1978, 548 p. Translated under the title *Metod konechnykh elementov dlya ellipticheskikh zadach*, Moscow: Mir, 1980, 512 p.

Received 01.07.2011

Zhidkov Artem Aleksandrovich, Assistant Lecturer, Department of Mechanics and Mathematics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: Artem.Zhidkov@gmail.com

Kalinin Aleksei Vyacheslavovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: avk@mm.unn.ru

Tyukhtina Alla Aleksandrovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: kalinmm@yandex.ru