УДК 519.6

© *А. Г. Ченцов*

# ФИЛЬТРЫ И УЛЬТРАФИЛЬТРЫ В КОНСТРУКЦИЯХ МНОЖЕСТВ ПРИТЯЖЕНИЯ [1]

Рассматривается абстрактная задача о достижимости с ограничениями асимптотического характера, для которой конструируется несеквенциальное (вообще говоря) множество притяжения, получаемое посредством сопоставления решению соответствующего элемента притяжения. Сами же решения определяются в виде направленностей, фильтров или ультрафильтров пространства обычных решений (каждый из упомянутых классов достаточен для построения множества притяжения). Основное внимание уделяется вопросам построения множеств притяжения в классе ультрафильтров широко понимаемых измеримых пространств (пространства с семействами, замкнутыми относительно пересечений, измеримые пространства с алгебрами множеств и т.п.). В качестве инструмента исследования используется конструкция, возникающая при рассмотрении ультрафильтров решетки множеств.

*Ключевые слова*: множество притяжения, топологическое пространство, ультрафильтр.

## Введение

В дальнейшем используются следующие сокращения: МП — множество притяжения, НМ — направленное множество, п/м — подмножество, п/п — подпространство, ТП — топологическое пространство, у/ф — ультрафильтр.

Проблема выбора решений с соблюдением ограничений возникает во многих сферах человеческой деятельности. При этом нередко требуется так или иначе оценивать последствия упомянутого выбора. Один из вариантов такого оценивания связан с оптимизацией при наличии ограничений (см., в частности, [1, гл. III]). При другом варианте конструируются те или иные аналоги областей достижимости [1, 2] в теории управления (см. также [3]). Возмущение ограничений может, однако, приводить к скачкообразному изменению достижимых (в надлежащем смысле) множеств. В частности, представляет интерес ослабление ограничений, поскольку в этом случае наши возможности расширяются, и, по этой причине, упомянутые скачки объективно оказываются полезными. Однако само ослабление ограничений должно быть обычно очень малым, а тогда имеет смысл анализировать пределы достижимых множеств, отвечающих возмущенным ограничениям при их последовательном ужесточении. Знание такого предела может быть весьма полезным с точки зрения прогнозирования реальных возможностей соответствующей системы. С идейной точки зрения речь идет о МП. Данное МП связано уже не с исходными невозмущенными ограничениями, а с тем семейством условий, которые отвечают ослабленным ограничениям. В этой связи представляется уместным (для задач подобного типа) полагать сразу, что ограничения имеют асимптотический характер и определяются семейством п/м пространства обычных решений. В случае, когда в качестве исходной рассматривается задача со стандартным ограничением, множества семейства можно определить [4,5] как множества допустимых элементов для ослабленных в той или иной степени ограничений. Можно, однако, иметь в виду и другие содержательные постановки, для которых уже нет необходимости в наличии (предварительно определяемых) стандартных ограничений, а семейство, задающее ограничения асимптотического характера вводится изначально (часто в качестве этого семейства используется фильтр или база фильтра). Ниже мы придерживаемся такого подхода к описанию упомянутого явления.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 09–01–00436, 10-01-00356) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математическая теория управления».

## § 1. Общие определения и обозначения, 1

Используем кванторы и пропозициональные связки; $\exists!$ заменяет фразу «существует и единственно», def — фразу «по определению», $\triangleq$ — равенство по определению, $\varnothing$ — пустое множество. Принимаем аксиому выбора. Семейством именуем множество, все элементы которого сами являются множествами. Если $x$ и $y$ — объекты, то через $\{x;y\}$ обозначаем их неупорядоченную пару (двоеточие), то есть множество, содержащее $x,\ y$ и не содержащее никаких других элементов; см. [6, гл. II]. Для произвольного объекта $u$ полагаем, как обычно, $\{u\} \triangleq \{u;u\}$. При определении упорядоченных пар следуем [6, гл. II]: если $\alpha$ и $\beta$ — объекты, то $(\alpha,\beta) \triangleq \{\{\alpha\};\{\alpha;\beta\}\}$ есть упорядоченная пара с первым элементом $\alpha$ и вторым элементом $\beta$. Если $z$ — упорядоченная пара, то через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы $z$, однозначно определяемые условием $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$. Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества $X$. Через $\mathrm{Fin}(H)$ обозначаем семейство всех непустых конечных п/м множества $H$.

Если $A$ и $B$ — множества, то через $B^A$ обозначаем множество всех отображений из $A$ в $B$; при $f \in B^A$ используем обычное выражение $f:\ A \longrightarrow B$. Если $A$ и $B$ — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \triangleq \{f(x):\ x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ (образ $C$ при действии отображения $f$).

**Преобразования семейств.** Если $\mathcal{A}$ — непустое семейство и $B$ — множество, то

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{\ A \cap B:\ A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B)).$$

Для всяких множеств $X$ и $Y$, а также отображения $f \in Y^X$

$$\begin{aligned}&\Big(\ f^1[\mathcal{X}] \triangleq \big\{f^1(A):\ A \in \mathcal{X}\big\} \in \mathcal{P}'\left(\mathcal{P}(Y)\right)\ \ \forall \mathcal{X} \in \mathcal{P}'\left(\mathcal{P}(X)\right)\Big)\ \& \\ &\&\ \left(\ f^{-1}[\mathcal{Y}] = \{f^{-1}(B):\ B \in \mathcal{Y}\} \in \mathcal{P}'\left(\mathcal{P}(X)\right)\ \ \forall \mathcal{Y} \in \mathcal{P}'\left(\mathcal{P}(Y)\right)\right).\end{aligned} \tag{1.1}$$

В частности, рассматриваем образы баз фильтров, фильтров и у/ф, понимаемые в смысле первого положения в (1.1); прообразы локальных баз топологии (фундаментальных систем окрестностей) понимаем в духе второго положения.

Если $\mathcal{E}$ — семейство, то $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ — непустое семейство ($\varnothing \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$) и

$$\{\cup\}(\mathcal{E}) \triangleq \left\{\ \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H:\ \mathcal{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{E})\right\} \tag{1.2}$$

также есть непустое семейство, а семейство

$$\{\cap\}(\mathcal{E}) \triangleq \left\{\ \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H:\ \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E})\right\} \tag{1.3}$$

может быть пустым лишь при $\mathcal{E} = \varnothing$ (тогда $\mathcal{P}'(\mathcal{E}) = \varnothing$); наконец, семейство

$$\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}) \triangleq \left\{\ \bigcap_{H \in \mathcal{K}} H:\ \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})\right\} \tag{1.4}$$

обладает свойством $\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}) \subset \{\cap\}(\mathcal{E})$. Если же $\mathcal{E}$ — непустое семейство, то каждое из семейств (1.2)–(1.4) непусто и содержит $\mathcal{E}$; кроме того, каждое из семейств (1.2)–(1.4) содержится в семействе всех п/м объединения множеств из $\mathcal{E}$. Если $E$ — множество, то определяем отображение $\mathbf{C}_E:\ \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \longrightarrow \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ по правилу: $\mathbf{C}_E(\mathcal{H}) \triangleq \{E \setminus H:\ H \in \mathcal{H}\}\ \ \forall \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$; при этом, конечно, $\mathbf{C}_E(\mathbf{C}_E(\mathcal{E})) = \mathcal{E}$ при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и $\mathbf{C}_E(\mathcal{P}(E)) = \mathcal{P}(E)$.

**Специальные семейства.** Фиксируем в пределах настоящего пункта множество $I$. Тогда

$$\pi[I] \triangleq \big\{\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))\ |\ (\varnothing \in \mathcal{L})\ \&\ (I \in \mathcal{L})\ \&\ (A \cap B \in \mathcal{L}\ \ \forall A \in \mathcal{L}\ \forall B \in \mathcal{L})\big\}. \tag{1.5}$$

есть множество всех $\pi$-систем в $I$ с «нулем» и «единицей». Частные случаи таких $\pi$-систем доставляют топологии и алгебры п/м $I$ :

$$(\mathrm{top})[I] \triangleq \left\{\tau \in \pi[I] \mid \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G \in \tau \ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\right\},$$

$$(\mathrm{alg})[I] \triangleq \{\mathcal{L} \in \pi[I] \mid I \setminus L \in \mathcal{L} \ \ \forall L \in \mathcal{L}\}; \tag{1.6}$$

можно указать и другие варианты $\pi$-систем из множества (1.5) (таковыми, например, являются полуалгебры [7, гл. I]). Кроме того,

$$(\mathrm{LAT})[I] \triangleq \big\{\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (\varnothing \in \mathcal{L}) \ \&\ (\forall A \in \mathcal{L}\ \forall B \in \mathcal{L} \ \ (A \cup B \in \mathcal{L}) \ \&\ (A \cap B \in \mathcal{L}))\big\} \tag{1.7}$$

(множество всех решеток п/м $I$), выделяем решетки с «единицей» в виде элементов множества

$$(\mathrm{LAT})_0[I] \triangleq \{\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})[I] \mid I \in \mathcal{L}\} \in \mathcal{P}(\pi[I]). \tag{1.8}$$

Как правило, будем использовать решетки из множества (1.8); определение (1.7) является, следовательно, промежуточным. Введем множество решеток с синглетонами:

$$(\mathrm{LAT})^0[I] \triangleq \{\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_0[I] \mid \{x\} \in \mathcal{L} \ \ \forall x \in I\}. \tag{1.9}$$

Выделяем семейства, двойственные топологиям (семейства замкнутых множеств):

$$\begin{gathered}(\mathrm{clos})[I] \triangleq \Big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (\varnothing \in \mathcal{F}) \ \&\ (I \in \mathcal{F}) \ \& \\ \&\ (A \cup B \in \mathcal{F} \ \ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F}) \ \&\ \Big(\bigcap_{H\in\mathcal{H}} H \in \mathcal{F} \ \ \forall \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{F})\Big)\Big\};\end{gathered} \tag{1.10}$$

разумеется, эти семейства, как и топологии, являются решетками с единицей:

$$((\mathrm{top})[I] \subset (\mathrm{LAT})_0[I]) \ \ \& \ \ ((\mathrm{clos})[I] \subset (\mathrm{LAT})_0[I]). \tag{1.11}$$

Из (1.8) и (1.11) имеем, конечно, вложение $(\mathrm{clos})[I] \subset \pi[I]$; кроме того,

$$(\mathbf{C}_I(\tau) \in (\mathrm{clos})[I] \ \ \forall \tau \in (\mathrm{top})[I]) \ \&\ (\mathbf{C}_I(\mathcal{F}) \in (\mathrm{top})[I] \ \ \forall \mathcal{F} \in (\mathrm{clos})[I]). \tag{1.12}$$

В (1.12) имеем естественную с точки зрения общей топологии двойственность. Как обычно,

$$(\mathbf{c}-\mathrm{top})[I] \triangleq \left\{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \forall \xi \in \mathcal{P}'(\tau) \ \ \left(I = \bigcup_{G\in\xi} G\right) \Longrightarrow \left(\exists \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\xi): \ I = \bigcup_{G\in\mathcal{K}} G\right)\right\}$$

есть множество компактных топологий $I$ (в терминологии [8, гл. I] — квазикомпактных). Если $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ и $x \in I$, то $N^0_\tau(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$, а

$$N_\tau(x) \triangleq \{H \in \mathcal{P}(I) \mid \exists G \in N^0_\tau(x): \ G \subset H\}$$

есть семейство всех окрестностей $x$ в $(I, \tau)$, понимаемых в смысле [8, гл. I]. Тогда

$$(\mathrm{top})_0[I] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \forall x_1 \in I\ \forall x_2 \in I \setminus \{x_1\}\ \exists H_1 \in N_\tau(x_1)\ \exists H_2 \in N_\tau(x_2): \ H_1 \cap H_2 = \varnothing\}$$

есть множество всех хаусдорфовых топологий $I$; $(\mathbf{c}-\mathrm{top})_0[I] \triangleq (\mathbf{c}-\mathrm{top})[I] \cap (\mathrm{top})_0[I]$. При $\tau \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})_0[I]$ ТП $(I, \tau)$ называют компактом [9, с. 208]. Пусть, наконец,

$$\begin{gathered}(\mathcal{D}-\mathrm{top})[I] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \forall x \in I\ \forall y \in I \setminus \{x\}\ \exists H \in N_\tau(x): \ y \notin H\} = \\ = \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \{x\} \in \mathbf{C}_I(\tau) \ \ \forall x \in I\}.\end{gathered} \tag{1.13}$$

В (1.13) введены топологии, превращающие $I$ в $T_1$-пространство (см. [9, § 1.5]). Из (1.9), (1.10) и (1.13) вытекает, что
$$\mathbf{C}_I(\tau) \in (\mathrm{LAT})^0[I] \ \ \forall \tau \in (\mathcal{D}-\mathrm{top})[I]. \tag{1.14}$$
В связи с (1.14) см. также (1.7), (1.8); отметим здесь же, что решетки замкнутых п/м $T_1$-пространства (а это и есть семейства (1.14)) играют важную роль в расширении Волмэна; см. [9, § 3.6]. Пусть $\mathrm{cl}(A,\tau) \triangleq \{x \in I \mid A \cap H \neq \varnothing \ \ \forall H \in N_\tau(x)\} \ \ \forall \tau \in (\mathrm{top})[I] \ \forall A \in \mathcal{P}(I)$ (операция замыкания). Потребуется также понятие локальной базы ТП или фундаментальной системы окрестностей; введем соответствующие множества локальных баз, полагая, что
$$(x-\mathrm{bas})[\tau] \triangleq \{\mathcal{G} \in \mathcal{P}(N_\tau(x)) \mid \forall A \in N_\tau(x)\ \exists B \in \mathcal{G}:\ B \subset A\} \ \ \forall \tau \in (\mathrm{top})[I]\ \forall x \in I. \tag{1.15}$$

В топологии важную роль играют базы. Рассматриваем базы открытые и замкнутые;
$$\begin{gathered}(\mathrm{op}-\mathrm{BAS})[I] \triangleq \Big\{\mathcal{B} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(I)) \mid \Big(I = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\Big)\ \& \\ \&\ (\forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \forall x \in B_1 \cap B_2\ \exists B_3 \in \mathcal{B}:\ (x \in B_3)\ \&\ (B_3 \subset B_1 \cap B_2))\Big\},\end{gathered} \tag{1.16}$$
$$\begin{gathered}(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[I] \triangleq \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (I \in \mathcal{B})\ \&\ (\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \varnothing)\ \& \\ \&\ (\forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \forall x \in I \setminus (B_1 \cup B_2)\ \exists B_3 \in \mathcal{B}:\ (B_1 \cup B_2 \subset B_3)\ \&\ (x \notin B_3))\}.\end{gathered} \tag{1.17}$$
Из (1.16) имеем равенство $(\mathrm{op}-\mathrm{BAS})[I] = \{\beta \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(I)) \mid \{\cup\}(\beta) \in (\mathrm{top})[I]\}$. Для приведения (1.16), (1.17) в двойственность используем несущественную коррекцию (1.16), полагая $(\mathrm{op}-\mathrm{BAS})_\varnothing[I] \triangleq \{\mathcal{B} \in (\mathrm{op}-\mathrm{BAS})[I] \mid \varnothing \in \mathcal{B}\}$. При $\mathcal{B} \in (\mathrm{op}-\mathrm{BAS})[I]$ имеем
$$\mathcal{B} \cup \{\varnothing\} \in (\mathrm{op}-\mathrm{BAS})_\varnothing[I]:\ \{\cup\}(\mathcal{B}) = \{\cup\}(\mathcal{B} \cup \{\varnothing\}).$$

Тогда
$$(\mathbf{C}_I(\mathcal{B}) \in (\mathrm{op}-\mathrm{BAS})_\varnothing[I] \ \ \forall \mathcal{B} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[I])\ \&\ (\mathbf{C}_I(\beta) \in (\mathrm{cl}-BAS)[I] \ \ \forall \beta \in (\mathrm{op}-\mathrm{BAS})_\varnothing[I]). \tag{1.18}$$
Свойство (1.18) дополняется очевидным положением:
$$\{\cap\}(\mathcal{B}) \in (\mathrm{clos})[I] \ \ \forall \mathcal{B} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[I]. \tag{1.19}$$

Посредством (1.19) семейства из множества (1.17) действительно характеризуются как базы замкнутых множеств. Разумеется, из (1.19) вытекает свойство
$$\mathbf{C}_I(\{\cap\}(\mathcal{B})) = \{\cup\}(\mathbf{C}_I(\mathcal{B})) \in (\mathrm{top})[I] \ \ \forall \mathcal{B} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[I]. \tag{1.20}$$

**Специальные отображения.** В пределах настоящего пункта фиксируем два непустых множества: $X$ и $Y$. Рассмотрим сюръективные и биективные отображения из $X$ на $Y$. Пусть $(\mathrm{su})[X;Y] \triangleq \{f \in Y^X \mid f^1(X) = Y\}$; в терминах упомянутого множества сюръекций полагаем, что $(\mathrm{bi})[X;Y] \triangleq \{f \in (\mathrm{su})[X;Y] \mid \forall x_1 \in X\ \forall x_2 \in X \ \ (f(x_1) = f(x_2)) \Longrightarrow (x_1 = x_2)\}$. Если $\tau_1 \in (\mathrm{top})[X]$ и $\tau_2 \in (\mathrm{top})[Y]$, то $C(X,\tau_1,Y,\tau_2) \triangleq \{f \in Y^X \mid f^{-1}(G) \in \tau_1 \ \ \forall G \in \tau_2\}$ (множество всех $(\tau_1,\tau_2)$-непрерывных отображений из $Y^X$); здесь же введем множества
$$C_{\mathrm{op}}(X,\tau_1,Y,\tau_2) \triangleq \{f \in C(X,\tau_1,Y,\tau_2) \mid f^1(G) \in \tau_2 \ \ \forall G \in \tau_1\}, \tag{1.21}$$
$$C_{\mathrm{cl}}(X,\tau_1,Y,\tau_2) \triangleq \{f \in C(X,\tau_1,Y,\tau_2) \mid f^1(F) \in \mathbf{C}_Y(\tau_2) \ \ \forall F \in \mathbf{C}_X(\tau_1)\} \tag{1.22}$$
открытых и замкнутых отображений из $(X,\tau_1)$ в $(Y,\tau_2)$ соответственно. В терминах множеств (1.21), (1.22) можно представить [9, с. 64,65] соответствующие множества гомеоморфизмов:
$$\begin{gathered}(\mathrm{Hom})[X;\tau_1;Y;\tau_2] \triangleq C_{\mathrm{op}}(X,\tau_1,Y,\tau_2) \cap (\mathrm{bi})[X;Y] = C_{\mathrm{cl}}(X,\tau_1,Y,\tau_2) \cap (\mathrm{bi})[X;Y] \\ \forall \tau_1 \in (\mathrm{top})[X]\ \forall \tau_2 \in (\mathrm{top})[Y].\end{gathered} \tag{1.23}$$

В свою очередь, на основе (1.23) определяются гомеоморфные вложения, играющие важную роль в теории расширений ТП.

## § 2. Общие определения и обозначения, 2

В настоящем разделе фиксируем непустое множество $\mathbb{E}$. Рассмотрим некоторые (непустые) семейства из множеств $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{E}))$ и $\mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathbb{E}))$. Через $\beta[\mathbb{E}]$ (через $\beta_0[\mathbb{E}]$) обозначаем множество всех семейств $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{E}))$ (всех семейств $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathbb{E}))$), для каждого из которых

$$\forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B}:\ B_3 \subset B_1 \cap B_2. \tag{2.1}$$

Ясно, что $\beta_0[\mathbb{E}] \subset \beta[\mathbb{E}]$. Семейства из $\beta[\mathbb{E}]$ направлены двойственно к вложению (см. (2.1)); семейства из $\beta_0[\mathbb{E}]$ — суть базы фильтров на $\mathbb{E}$. При этом

$$\mathfrak{F}[\mathbb{E}] \triangleq \big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathbb{E})) \mid (A \cap B \in \mathcal{F}\ \ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F})\ \&\ (\{H \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) \mid F \subset H\} \subset \mathcal{F}\ \ \forall F \in \mathcal{F})\big\} \tag{2.2}$$

есть множество всех фильтров на $\mathbb{E}$; $N_\tau(x) \in \mathfrak{F}[\mathbb{E}]\ \ \forall \tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{E}]\ \forall x \in \mathbb{E}$. Соответственно

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{E}] \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}[\mathbb{E}] \mid \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[\mathbb{E}]\ \ ((\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F}))\} \tag{2.3}$$

есть множество всех у/ф на $\mathbb{E}$. При этом $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{E}] \subset \mathfrak{F}[\mathbb{E}] \subset \beta_0[\mathbb{E}]$;

$$(\mathbb{E} - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) \mid \exists B \in \mathcal{B}:\ B \subset H\} \in \mathfrak{F}[\mathbb{E}]\ \ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[\mathbb{E}]. \tag{2.4}$$

В (2.4) введена стандартная [8, гл. I] операция конструирования фильтров посредством баз. В частности, при $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[\mathbb{E}]$ определен фильтр $(\mathbb{E} - \mathbf{fi})[\mathcal{F}] \in \mathfrak{F}[\mathbb{E}]$; легко видеть, однако, что он совпадает с $\mathcal{F}$ (ниже это свойство используется без дополнительных пояснений).

Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{E}))$, то через $\mathfrak{F}_0[\mathbb{E}|\mathcal{E}]$ (через $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[\mathbb{E}|\mathcal{E}]$) обозначаем множество всех фильтров $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[\mathbb{E}]$ (всех у/ф $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{E}]$) таких, что $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Отметим в этой связи следующий известный факт (см., в частности, [7, с. 26]): если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[\mathbb{E}]$, то $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[\mathbb{E}|\mathcal{F}] \neq \varnothing$ и, более того, $\mathcal{F}$ совпадает с пересечением всех у/ф $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[\mathbb{E}|\mathcal{F}]$.

**Сходимость баз фильтров.** Следуем [8, гл. I], полагая $\forall \tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{E}]\ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[\mathbb{E}]\ \forall x \in \mathbb{E}$

$$\Big(\mathcal{B} \overset{\tau}{\Longrightarrow} x\Big) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (N_\tau(x) \subset (\mathbb{E} - \mathbf{fi})[\mathcal{B}])\,. \tag{2.5}$$

Отметим важный частный случай (2.5): $\forall \tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{E}]\ \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[\mathbb{E}]\ \forall x \in \mathbb{E}$

$$\Big(\mathcal{F} \overset{\tau}{\Longrightarrow} x\Big) \Longleftrightarrow (N_\tau(x) \subset \mathcal{F}). \tag{2.6}$$

Разумеется, (2.6) применимо в случае, когда $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{E}]$.

**Направленности.** Направленностью в множестве $\mathbb{E}$ называем произвольный триплет $(D, \preceq, f)$, где $(D, \preceq)$ — непустое НМ (см. [10, гл. 2]) и $f \in \mathbb{E}^D$. Напомним, что в данном весьма традиционном определении НМ $(D, \preceq)$ есть непустое множество $D$ с направлением $\preceq$; подробнее см. в [10, гл. 2]. Как обычно, для всяких $d_1 \in D$ и $d_2 \in D$ полагаем, что $(d_1 \preceq d_2) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} ((d_1, d_2) \in\ \preceq)$ (напомним, что $\preceq \in \mathcal{P}'(D \times D)$ : направление есть бинарное отношение). Если $d_1 \preceq d_2$, то $d_2$ мажорирует $d_1$ в $(D, \preceq)$. Если $(D, \preceq, f)$ есть направленность в $\mathbb{E}$, то

$$(\mathbb{E} - \mathrm{ass})[D; \preceq; f] \triangleq \{V \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) \mid \exists d \in D\ \forall \delta \in D\ \ ((d \preceq \delta) \Longrightarrow (f(\delta) \in V))\} \in \mathfrak{F}[\mathbb{E}] \tag{2.7}$$

(фильтр, ассоциированный с $(D, \preceq, f)$). С учетом (2.6), (2.7) естественно определить «обычную» сходимость по Мору-Смиту [10, гл. 2] в терминах сходимости фильтров: если $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{E}]$, $(D, \preceq, f)$ — направленность в $\mathbb{E}$ и $x \in \mathbb{E}$, то

$$\Big((D, \preceq, f) \overset{\tau}{\longrightarrow} x\Big) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \Big((\mathbb{E} - \mathrm{ass})[D; \preceq; f] \overset{\tau}{\Longrightarrow} x\Big)\,. \tag{2.8}$$

**Тривиальные ультрафильтры.** Точки $\mathbb{E}$ порождают у/ф на $\mathbb{E}$ по следующему правилу:

$$(\mathbb{E} - \mathrm{ult})[x] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) \mid x \in H\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{E}] \ \ \forall x \in \mathbb{E}. \tag{2.9}$$

Посредством (2.9) определена операция естественного погружения $\mathbb{E}$ в $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{E}]$. Грубо говоря, точки $\mathbb{E}$ и соответствующие им тривиальные у/ф можно не различать.

**Фильтры и ультрафильтры мультипликативных пространств.** Если $\mathcal{L} \in \pi[\mathbb{E}]$, то пару $(\mathbb{E}, \mathcal{L})$ называем мультипликативным пространством. Фиксируем до конца настоящего раздела $\mathcal{L} \in \pi[\mathbb{E}]$. Введем в рассмотрение фильтры пространства $(\mathbb{E}, \mathcal{L})$. Пусть

$$\begin{gathered}\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{F})\&( A \cap B \in \mathcal{F} \ \ \forall A \in \mathcal{F}\, \forall B \in \mathcal{F})\& \\ \&(\forall F \in \mathcal{F}\, \forall L \in \mathcal{L} \ \ ((F \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{F}))\}.\end{gathered} \tag{2.10}$$

Элементы (2.10) называем далее фильтрами $(\mathbb{E}, \mathcal{L})$ или кратко $\mathcal{L}$-фильтрами. Пусть

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ \ ((\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F}))\} \tag{2.11}$$

(множество всех максимальных $\mathcal{L}$-фильтров или $\mathcal{L}$-у/ф, то есть у/ф $(\mathbb{E}, \mathcal{L})$). Тогда [5, с. 29]

$$\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\ \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) : \ \mathcal{F} \subset \mathcal{U}. \tag{2.12}$$

**Замечание 2.1.** При $\mathcal{L} = \mathcal{P}(\mathbb{E})$ имеем $(\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) = \mathfrak{F}[\mathbb{E}])$ & $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{E}])$. Первое получаем комбинацией (2.2) и (2.10), а второе — комбинацией (2.3) и (2.11).

Отметим для общего случая $\mathcal{L} \in \pi[\mathbb{E}]$ ряд простых свойств. Из (2.1), (2.10) следует, что

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \beta_0[\mathbb{E}], \tag{2.13}$$

это позволяет использовать $\mathcal{L}$-фильтры в (2.4): с учетом (2.13) получаем, что

$$(\mathbb{E} - \mathbf{fi})[\mathcal{F}] \in \mathfrak{F}[\mathbb{E}] \ \ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}). \tag{2.14}$$

С другой стороны, из (1.5), (2.2) и (2.10) вытекает, что

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ \ \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[\mathbb{E}]. \tag{2.15}$$

В связи с (2.4) отметим свойство: $(\mathbb{E} - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \in \mathfrak{F}_0[\mathbb{E} \mid \mathcal{B}] \ \ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[\mathbb{E}]$. Тогда (см. (2.13), (2.14))

$$(\mathbb{E} - \mathbf{fi})[\mathcal{F}] \in \mathfrak{F}_0[\mathbb{E} \mid \mathcal{F}] \ \ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}). \tag{2.16}$$

Условимся о следующих обозначениях: $\forall \mathcal{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$

$$(\mathbb{F}^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{H}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{H} \subset \mathcal{F}\}) \ \&\ (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{H}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{H} \subset \mathcal{U}\}). \tag{2.17}$$

Из (2.17) следует, конечно, что при $\mathcal{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ непременно $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{H}) \subset \mathbb{F}^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{H})$.

## § 3. Множества притяжения

Фиксируем в настоящем разделе непустые множества $X$ и $Y$, а также отображение $f \in Y^X$; имеем

$$f^1[\mathcal{B}] \in \beta_0[Y] \ \ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[X]. \tag{3.1}$$

В связи с (3.1) отметим также следующее известное [8, гл. I] свойство: $\forall \mathcal{B} \in \beta_0[X]$

$$((X - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]) \Longrightarrow ((Y - \mathbf{fi})[f^1[\mathcal{B}]] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[Y]). \tag{3.2}$$

Из (3.2) имеем очевидное следствие:

$$(Y - \mathbf{fi})[f^1[\mathcal{U}]] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[Y] \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X] \tag{3.3}$$

Полезно отметить, что [8, гл. I]

$$( f \in (\mathrm{su})[X;Y]) \Longrightarrow ((f^1[\mathcal{F}] \in \mathfrak{F}[Y] \ \ \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X]) \ \& \ ( f^1[\mathcal{U}] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[Y] \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X])).$$

До конца настоящего раздела фиксируем топологию $\tau \in (\mathrm{top})[Y]$.

**Определение 3.1.** Если $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$, то через $(\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}]$ обозначаем множество всех $y \in Y$, для каждого из которых существует такая направленность $(D, \preceq, g)$ в $X$, что $(\mathcal{X} \subset (X - \mathrm{ass})[D;\preceq;g]) \ \& \ ((D,\preceq, f\circ g) \xrightarrow{\tau} y)$; в дальнейшем именуем $(\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}]$ МП, соответствующим семейству $\mathcal{X}$.

В определении 3.1 направленности используются в качестве несеквенциальных (вообще говоря) аналогов приближенных решений Варги [1, гл. III]. Известно [9, § 1.6], что всякий фильтр на $X$ порожден некоторой направленностью. Наряду с (2.7) это доставляет следующее

**Предложение 3.1.** *Если* $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$, *то*

$$(\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}] = \{ \, y \in Y \mid \exists \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0[X|\mathcal{X}] : \ f^1[\mathcal{F}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y\}.$$

**Следствие 3.1.** *Если* $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$, *то*

$$(\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}] = \left\{ y \in Y \mid \exists \mathcal{U} \in \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[X|\mathcal{X}] : \ f^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y \right\}.$$

Доказательство использует свойство мажорирования фильтра некоторым у/ф. Далее приведем сводку простейших положений, относящихся к МП, опуская доказательства. Ясно, что

$$\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{X}) \in \beta[X] \ \ \forall \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)). \tag{3.4}$$

Если $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$, то по аксиомам фильтра

$$(\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[X|\mathcal{X}] = \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[X|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{X})]) \ \& \ (\mathfrak{F}_0[X|\mathcal{X}] = \mathfrak{F}_0[X|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{X})]). \tag{3.5}$$

Из предложения 4.1 и (3.5) вытекает с очевидностью, что

$$(\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}] = (\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{X})] \ \ \forall \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)). \tag{3.6}$$

Кроме того, напомним, что [4, (3.3.10)] справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\tilde{\mathcal{X}}] = \bigcap_{B \in \tilde{\mathcal{X}}} \mathrm{cl}\left(f^1(B), \tau\right) \ \ \forall \tilde{\mathcal{X}} \in \beta[X]. \tag{3.7}$$

Свойства (3.6), (3.7) допускают комбинацию: $(\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}] = \bigcap\limits_{B \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{X})} \mathrm{cl}\left(f^1(B), \tau\right) \ \ \forall \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$. Если $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$ и $\varnothing \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{X})$, то непременно $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[X|\mathcal{X}] = \varnothing$ и, как следствие, $(\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}] = \varnothing$. Последнее равенство возможно и при $\varnothing \notin \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{X})$ (случай центрированного семейства, формирующего «асимптотические ограничения»). Однако

$$(\tau \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[Y]) \Longrightarrow ((\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{B}] \neq \varnothing \ \ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[X]). \tag{3.8}$$

Из (3.8) можно извлечь следующее очевидное свойство: если $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$ и $\varnothing \notin \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{X})$, то (см. (3.4)) $\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{X}) \in \beta_0[X]$, а потому согласно (3.6), (3.8)

$$(\tau \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[Y]) \Longrightarrow ((\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}] \neq \varnothing).$$

Отметим несколько простых вспомогательных свойств, связанных со сходимостью образа базы фильтра. Так, $\forall \mathcal{B} \in \beta_0[X] \ \forall y \in Y \ \forall \mathcal{Y} \in (y - \mathrm{bas})[\tau]$

$$\left(f^1[\mathcal{B}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y\right) \Longleftrightarrow \left(f^{-1}[\mathcal{Y}] \subset (X - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]\right). \tag{3.9}$$

**Замечание 3.2.** Рассмотрим доказательство (3.9), фиксируя $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$, $y \in Y$ и $\mathcal{Y} \in (y-\mathrm{bas})[\tau]$. Пусть $f^1[\mathcal{B}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y$. Тогда согласно (2.5) $N_\tau(y) \subset (Y-\mathbf{fi})[f^1[\mathcal{B}]]$, а потому $\forall S \in N_\tau(y)\ \exists B \in \mathcal{B}:\ f^1(B) \subset S$. Пусть $U_* \in f^{-1}[\mathcal{Y}]$, а $V_* \in \mathcal{Y}$ реализует $U_*$ в виде $U_* = f^{-1}(V_*)$. Поскольку $V_* \in N_\tau(y)$ согласно (1.15), то $f^1(B_*) \subset V_*$ для некоторого $B_* \in \mathcal{B}$. В этом случае $B_* \subset f^{-1}(f^1(B_*)) \subset f^{-1}(V_*) = U_*$ и, следовательно, $U_* \in (X-\mathbf{fi})[\mathcal{B}]$. Поскольку выбор $U_*$ был произвольным, установлено, что $f^{-1}[\mathcal{Y}] \subset (X-\mathbf{fi})[\mathcal{B}]$. Итак, истинна импликация

$$\Big(f^1[\mathcal{B}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y\Big) \Longrightarrow \big(f^{-1}[\mathcal{Y}] \subset (X-\mathbf{fi})[\mathcal{B}]\big). \tag{3.10}$$

Пусть, напротив, $f^{-1}[\mathcal{Y}] \subset (X-\mathbf{fi})[\mathcal{B}]$. Тогда $\forall S \in \mathcal{Y}\ \exists B \in \mathcal{B}:\ B \subset f^{-1}(S)$. Выберем произвольно $U^* \in N_\tau(y)$, после чего, используя (1.15), подберем $V^* \in \mathcal{Y}$ так, что при этом $V^* \subset U^*$. Тогда для некоторого $B^* \in \mathcal{B}$ имеем вложение $B^* \subset f^{-1}(V^*)$. Поэтому $f^1(B^*) \subset f^1(f^{-1}(V^*)) \subset V^* \subset U^*$, что означает включение $U^* \in (Y-\mathbf{fi})[f^1[\mathcal{B}]]$. Поскольку выбор $U^*$ был произвольным, установлено вложение $N_\tau(y) \subset (Y-\mathbf{fi})[f^1[\mathcal{B}]]$. Поэтому (см. (2.5)) $f^1[\mathcal{B}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y$. Итак, установлена импликация $\big(f^{-1}[\mathcal{Y}] \subset (X-\mathbf{fi})[\mathcal{B}]\big) \Longrightarrow \Big(f^1[\mathcal{B}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y\Big)$. С учетом (3.10) получаем требуемое свойство (3.9). $\square$

Фиксируем до конца настоящего раздела $\pi$-систему

$$\mathcal{L} \in \pi[X]. \tag{3.11}$$

Рассмотрим теперь вопрос об асимптотической реализации элементов $Y$ в классе фильтров и у/ф мультипликативного пространства $(X, \mathcal{L})$. В этой связи полагаем, что

$$(\mathcal{L}-\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}] \triangleq \Big\{y \in Y \mid \exists \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}|\mathcal{X}):\ f^1[\mathcal{F}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y\Big\}\quad \forall \mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{L}). \tag{3.12}$$

Учитываем, что (см. (2.13)) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \beta_0[X]$. Вполне очевидно следующее

**Предложение 3.2.** *Если* $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$, *то справедливо равенство*

$$(\mathcal{L}-\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}] = \{y \in Y \mid \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{X}):\ f^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y\}. \tag{3.13}$$

**Предложение 3.3.** *Если* $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то непременно*

$$(\mathcal{L}-\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}] \subset (\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}]. \tag{3.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y_0 \in (\mathcal{L}-\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}]$. Тогда согласно (3.12) $y_0 \in Y$ и для некоторого $\mathcal{L}$-фильтра $\mathcal{F}_0 \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}|\mathcal{X})$ $\quad f^1[\mathcal{F}_0] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y_0$. Согласно (2.17) $\mathcal{F}_0 \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и $\mathcal{X} \subset \mathcal{F}_0$. Кроме того, из (2.13) следует, что $\mathcal{F}_0 \in \beta_0[X]$, а тогда из (2.5) имеем, что

$$N_\tau(y_0) \subset (Y-\mathbf{fi})[f^1[\mathcal{F}_0]].$$

Согласно (2.14) $\mathcal{F}^0 \triangleq (X-\mathbf{fi})[\mathcal{F}_0] \in \mathfrak{F}[X]$, причем $\mathcal{X} \subset \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}^0$. Получили включение $\mathcal{F}^0 \in \mathfrak{F}_0[X|\mathcal{X}]$ (см. § 2). Кроме того, $f^1[\mathcal{F}_0] \subset f^1[\mathcal{F}^0]$, а тогда $(Y-\mathbf{fi})[f^1[\mathcal{F}_0]] \subset (Y-\mathbf{fi})[f^1[\mathcal{F}^0]]$. Поэтому $N_\tau(y_0) \subset (Y-\mathbf{fi})[f^1[\mathcal{F}^0]]$. Это означает (см. (2.5)) сходимость $f^1[\mathcal{F}^0] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y_0$. Итак, $\mathcal{F}^0 \in \mathfrak{F}_0[X|\mathcal{X}]:\ \ f^1[\mathcal{F}^0] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y_0$. С учетом предложения 3.1 имеем включение $y_0 \in (\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}]$. Поскольку выбор $y_0$ был произвольным, (3.14) установлено. $\square$

**Предложение 3.4.** *Если*

$$\forall y \in Y\ \exists \mathcal{Y} \in (y-\mathrm{bas})[\tau]:\ \ f^{-1}[\mathcal{Y}] \subset \mathcal{L}, \tag{3.15}$$

*то* $(\mathcal{L}-\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}] = (\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}]\ \ \forall \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено условие (3.15). Выберем произвольно $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ и точку $y^0 \in (\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}]$. Тогда $y^0 \in Y$ и согласно предложению 3.1 для некоторого фильтра $\mathcal{F}^0 \in \mathfrak{F}_0[X|\mathcal{X}]$ имеет место сходимость

$$f^1[\mathcal{F}^0] \overset{\tau}{\Longrightarrow} y^0. \tag{3.16}$$

Тогда $\mathcal{F}^0 \in \mathfrak{F}[X]$ и при этом $\mathcal{X} \subset \mathcal{F}^0$. Имеем, в частности, включение $\mathcal{F}^0 \in \beta_0[X]$. Пусть (см. (3.15)) $\mathfrak{Y} \in (y^0 - \mathrm{bas})[\tau]$ обладает свойством $f^{-1}[\mathfrak{Y}] \subset \mathcal{L}$. Согласно (3.9) и (3.16) имеем вложение $f^{-1}[\mathfrak{Y}] \subset (X - \mathbf{fi})[\mathcal{F}^0] = \mathcal{F}^0$. Как следствие $f^{-1}[\mathfrak{Y}] \subset \mathcal{F}^0 \cap \mathcal{L}$, где согласно (2.15) $\mathcal{F}^0 \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. При этом $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}$ и $\mathcal{X} \subset \mathcal{F}^0$, а тогда $\mathcal{X} \subset \mathcal{F}^0 \cap \mathcal{L}$. Следовательно, согласно (2.17)

$$\mathcal{F}^0 \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}|\mathcal{X}). \tag{3.17}$$

Согласно (2.13) справедливо, в частности, свойство: $\mathcal{F}^0 \cap \mathcal{L} \in \beta_0[X]$. Согласно (3.9) имеем $\Big( f^1[\mathcal{F}^0 \cap \mathcal{L}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} y^0 \Big) \iff \big(f^{-1}[\mathfrak{Y}] \subset (X - \mathbf{fi})[\mathcal{F}^0 \cap \mathcal{L}]\big)$, где $\mathcal{F}^0 \cap \mathcal{L} \subset (X - \mathbf{fi})[\mathcal{F}^0 \cap \mathcal{L}]$. Тогда $f^{-1}[\mathfrak{Y}] \subset (X - \mathbf{fi})[\mathcal{F}^0 \cap \mathcal{L}]$, а потому $f^1[\mathcal{F}^0 \cap \mathcal{L}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} y^0$. Из (3.17) и (3.12) имеем теперь включение $y^0 \in (\mathcal{L} - \mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}]$. Поскольку выбор $y^0$ был произвольным, установлено вложение $(\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}] \subset (\mathcal{L} - \mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}]$, из которого с учетом предложения 3.3 следует равенство $(\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}] = (\mathcal{L} - \mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}]$. □

Заметим, что (3.15) может рассматриваться как условие некоторой ослабленной измеримости. При этом условии $\mathcal{L}$-фильтры, а, стало быть (см. (3.13)), и $\mathcal{L}$-у/ф достаточны для целей конструирования несеквенциальных аналогов приближенных решений Дж. Варги. Правда, это касается случаев, для которых семейство п/м $X$, определяющее ограничения асимптотического характера, содержится в $\mathcal{L}$. Кое-что, однако, можно «исправить», привлекая надлежащие редукции этого семейства, сохраняющие МП. Некоторые конструкции такого рода отмечены ниже, а сейчас ограничимся наиболее важным случаем центрированного семейства, определяющего «асимптотические ограничения». В этом случае по исходному семейству легко конструируется база фильтра $X$ (см., в частности, (3.4)), а затем и фильтр, ею порожденный. В результате мы можем получить семейство, существенно более обширное в сравнении с исходным (то есть с $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$).

## § 4. Некоторые добавления

Зафиксируем до конца раздела непустое множество $X$. Отметим сначала ряд легко проверяемых свойств, связанных с базами фильтров, полагая, что

$$(\mathcal{X} - \mathrm{set})[X] \triangleq \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \cap S \neq \varnothing \ \ \forall S \in \mathcal{X}\} \ \ \forall \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)). \tag{4.1}$$

Легко видеть, что $\mathcal{B}|_A \in \beta_0[A] \ \ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[X] \ \forall A \in (\mathcal{B} - \mathrm{set})[X]$. С другой стороны, $\beta_0[A] \subset \beta_0[X] \ \ \forall A \in \mathcal{P}'(X)$. Комбинируя вышеупомянутые свойства, получаем, что

$$\mathcal{B}|_A \in \beta_0[X] \ \ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[X] \ \forall A \in (\mathcal{B} - \mathrm{set})[X]. \tag{4.2}$$

В связи с (4.2) отметим следующее свойство: если $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$ и $A \in (\mathcal{B} - \mathrm{set})[X]$, то база фильтра $\mathcal{B}|_A$ такова, что

1) $\forall B \in \mathcal{B} \ \exists \tilde{B} \in \mathcal{B}|_A : \ \ \tilde{B} \subset B$;

2) $\exists \hat{B} \in \mathcal{B}|_A : \ \ \hat{B} \subset A$.

Как следствие получаем утверждение: если $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$ и $A \in (\mathcal{B} - \mathrm{set})[X]$, то база фильтра $\mathcal{B}_A \triangleq \mathcal{B}|_A \in \beta_0[X]$ такова, что

$$(X - \mathbf{fi})[\mathcal{B}_A] \in \mathfrak{F}[X] : \ (\ (X - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \subset (X - \mathbf{fi})[\mathcal{B}_A]) \ \& \ (A \in (X - \mathbf{fi})[\mathcal{B}_A]). \tag{4.3}$$

Итак, (4.3) указывает, в частности, условия, при которых фильтр на $X$ и п/м $X$ могут быть включены в некоторый объемлющий фильтр. Используем (3.5), полагая, что

$$\mathbb{Z}[X] \triangleq \big\{\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) \mid \varnothing \notin \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{X})\big\}\,; \tag{4.4}$$

если $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) \setminus \mathbb{Z}[X]$, то $\varnothing \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{H})$ и (см.(3.5)) ( $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[X|\mathcal{H}] = \varnothing$) & ( $\mathfrak{F}_0[X|\mathcal{H}] = \varnothing$ ). Итак, для нас представляет интерес рассмотрение только тех случаев, когда в (3.5) $\mathcal{X} \in \mathbb{Z}[X]$. При этом (см. (3.4), (4.4))

$$\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{X}) \in \beta_0[X] \ \ \forall \mathcal{X} \in \mathbb{Z}[X]. \tag{4.5}$$

Из (4.5) вытекает следующая полезная возможность (см. (2.4)):

$$\mathbf{F}_X[\mathcal{X}] \triangleq (X - \mathbf{fi})[\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{X})] \in \mathfrak{F}[X] \ \ \forall \mathcal{X} \in \mathbb{Z}[X]. \tag{4.6}$$

**Предложение 4.1.** *Если $\mathcal{X} \in \mathbb{Z}[X]$, то справедливы равенства*

$$( \mathfrak{F}_0[X|\mathcal{X}] = \mathfrak{F}_0[X|\mathbf{F}_X[\mathcal{X}]]) \ \& \ ( \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[X|\mathcal{X}] = \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[X|\mathbf{F}_X[\mathcal{X}]]). \tag{4.7}$$

Доказательство следует из аксиом фильтра (см. (2.2)).

**Предложение 4.2.** *Если $Y$ — непустое множество, $\tau \in (\mathrm{top})[Y]$, $f \in Y^X$ и $\mathcal{X} \in \mathbb{Z}[X]$, то*

$$(\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}] = (\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathbf{F}_X[\mathcal{X}]].$$

Доказательство очевидным образом следует из предложений 3.1 и 4.1:

$$(\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathcal{X}] = \Big\{ y \in Y \mid \exists \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0[X \mid \mathcal{X}] : \ f^1[\mathcal{F}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} y \Big\} =$$
$$= \Big\{ y \in Y \mid \exists \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0[X|\mathbf{F}_X[\mathcal{X}]] : \ f^1[\mathcal{F}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} y \Big\} = (\mathbf{as})[X;Y;\tau;f;\mathbf{F}_X[\mathcal{X}]].$$

## § 5. Некоторые конструкции, связанные с фильтрами мультипликативных пространств

Фиксируем в настоящем разделе непустое множество $\mathbf{E}$ и $\pi$-систему $\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{E}]$; итак, в данном разделе фиксировано мультипликативное пространство $(\mathbf{E}, \mathcal{L})$. Мы располагаем непустыми множествами $\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ (в самом деле, $\{\mathbf{E}\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, а непустота $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ следует из (2.12)). Отметим свойство: если $T$ — непустое множество и $(\mathcal{F}_t)_{t \in T} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})^T$, то $\bigcap\limits_{t \in T} \mathcal{F}_t \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$.

**Предложение 5.1.** *Если $T$ — непустое множество и задано отображение*

$$(\mathcal{F}_t)_{t \in T} : \ T \longrightarrow \mathbb{F}^*(\mathcal{L}), \tag{5.1}$$

*то справедливо следующее равенство:*

$$\bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t = \left\{ \bigcup_{t \in T} F_t : \ (F_t)_{t \in T} \in \prod_{t \in T} \mathcal{F}_t \right\} \cap \mathcal{L}. \tag{5.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ множества в левой и правой частях (5.2) соответственно. Пусть $A \in \mathbf{A}$. Тогда $A \in \mathcal{L}$ и при этом $A \in \mathcal{F}_t \ \ \forall t \in T$. Введем $(\mathbb{A}_t)_{t \in T} \in \prod\limits_{t \in T} \mathcal{F}_t$ посредством правила: $\mathbb{A}_s \triangleq A \ \ \forall s \in T$. Тогда $\bigcup\limits_{t \in T} \mathbb{A}_t = A \in \mathbf{B}$. Вложение $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ установлено. Пусть теперь $B \in \mathbf{B}$. Тогда $B \in \mathcal{L}$ и для некоторого отображения

$$(\hat{B}_t)_{t \in T} \in \prod_{t \in T} \mathcal{F}_t \tag{5.3}$$

справедливо равенство $B = \bigcup\limits_{t \in T} \hat{B}_t$. Пусть теперь $\mathbf{t} \in T$. Тогда в силу (5.3) $\hat{B}_{\mathbf{t}} \in \mathcal{F}_{\mathbf{t}}$ и при этом $\hat{B}_{\mathbf{t}} \subset B$, откуда согласно (2.10) имеем включение $B \in \mathcal{F}_{\mathbf{t}}$. Коль скоро выбор $\mathbf{t}$ был произвольным, установлено, что $B \in \mathbf{A}$, чем и завершается проверка вложения $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$. $\square$

**Замечание 5.1.** Если $\mathcal{L} = \tau$, где $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{E}]$, то при всяком выборе непустого множества $T$ и отображения (5.1) $\bigcap_{t\in T} \mathcal{F}_t = \left\{ \bigcup_{t\in T} G_t : (G_t)_{t\in T} \in \prod_{t\in T} \mathcal{F}_t \right\}$.

Рассмотрим теперь некоторые общие положения, касающиеся множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ при оснащении последнего естественной топологией. Прежде всего отметим, что множество

$$\beta_{\mathcal{L}}^0[\mathbf{E}] \triangleq \beta_0[\mathbf{E}] \cap \mathcal{P}(\mathcal{L}) = \{\mathcal{B} \in \beta_0[\mathbf{E}] \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{L}\} \tag{5.4}$$

таково, что $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \beta_{\mathcal{L}}^0[\mathbf{E}]$. Кроме того, согласно (4.2) и (5.4)

$$\mathcal{B}|_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\} \in \beta_{\mathcal{L}}^0[\mathbf{E}] \;\; \forall \mathcal{B} \in \beta_{\mathcal{L}}^0[\mathbf{E}] \; \forall A \in (\mathcal{B} - \mathrm{set})[\mathbf{E}] \cap \mathcal{L}.$$

Как следствие имеем при $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и $A \in (\mathcal{F} - \mathrm{set})[\mathbf{E}] \cap \mathcal{L}$, что $\mathcal{F}|_A \in \beta_{\mathcal{L}}^0[\mathbf{E}]$. Поскольку $\mathcal{F} \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \;\; \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[\mathbf{E}]$, имеем следующее очевидное свойство:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{fi})[\tilde{\mathcal{B}}|\mathcal{L}] \triangleq (\mathbf{E} - \mathbf{fi})[\tilde{\mathcal{B}}] \cap \mathcal{L} = \{L \in \mathcal{L} \mid \exists B \in \tilde{\mathcal{B}} : B \subset L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \;\; \forall \tilde{\mathcal{B}} \in \beta_{\mathcal{L}}^0[\mathbf{E}].$$

Кроме того, с учетом (4.1) и (4.2) имеем $\forall \mathcal{B} \in \beta_{\mathcal{L}}^0[\mathbf{E}] \; \forall A \in (\mathcal{B} - \mathrm{set})[\mathbf{E}] \cap \mathcal{L}$

$$(\mathbf{E} - \mathbf{fi})[\mathcal{B}|_A \mid \mathcal{L}] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) : \; ((\mathbf{E} - \mathbf{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{L}] \subset (\mathbf{E} - \mathbf{fi})[\mathcal{B}|_A \mid \mathcal{L}]) \; \& \; ( A \in (\mathbf{E} - \mathbf{fi})[\mathcal{B}|_A \mid \mathcal{L}]). \tag{5.5}$$

При этом, конечно, $(\mathbf{E} - \mathbf{fi})[\mathcal{F} \mid \mathcal{L}] = \mathcal{F} \;\; \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. Это свойство можно использовать в (5.5): если $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и $A \in (\mathcal{F} - \mathrm{set})[\mathbf{E}] \cap \mathcal{L}$, то фильтр $\tilde{\mathcal{F}}_A \triangleq (\mathbf{E} - \mathbf{fi})[\mathcal{F}|_A \mid \mathcal{L}] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ обладает следующими очевидными свойствами $(\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}_A) \; \& \; ( A \in \tilde{\mathcal{F}}_A)$. Итак, справедливо следующее свойство:

$$\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \; \forall A \in (\mathcal{F} - \mathrm{set})[\mathbf{E}] \cap \mathcal{L} \; \exists \tilde{\mathcal{F}} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) : \; (\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}) \; \& \; (A \in \tilde{\mathcal{F}}). \tag{5.6}$$

Разумеется, (5.6) является непосредственным следствием (5.5). В связи с (5.6) отметим и естественное свойство у/ф (учитываем присущее им свойство максимальности):

$$(\mathcal{U} - \mathrm{set})[\mathbf{E}] \cap \mathcal{L} = \mathcal{U} \;\; \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{5.7}$$

Из (5.7) легко следует равенство

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{F} = (\mathcal{F} - \mathrm{set})[\mathbf{E}] \cap \mathcal{L}\}. \tag{5.8}$$

Всюду в дальнейшем отображение $\Phi_{\mathcal{L}} : \; \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$ определяем следующим правилом:

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \triangleq \{ \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \in \mathcal{U}\} \;\; \forall L \in \mathcal{L}. \tag{5.9}$$

С учетом (2.17) и (5.9) получаем, в частности, $\forall \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{H}) = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} \Phi_{\mathcal{L}}(H). \tag{5.10}$$

Из (5.9) и аксиом $\mathcal{L}$-фильтра вытекает естественное свойство

$$(\mathbb{UF})[\mathbf{E}; \mathcal{L}] \triangleq \{ \Phi_{\mathcal{L}}(L) : \; L \in \mathcal{L}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]; \tag{5.11}$$

итак, $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), (\mathbb{UF})[\mathbf{E}; \mathcal{L}])$ — мультипликативное пространство. С учетом (1.5), (1.16) и (5.11) получаем, в частности, что

$$(\mathbb{UF})[\mathbf{E}; \mathcal{L}] \in (\mathrm{op} - \mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \tag{5.12}$$

Из (5.12) следует, в свою очередь, что (см. § 1)

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[\mathbf{E}] \triangleq \{\cup\}((\mathbb{UF})[\mathbf{E}; \mathcal{L}]) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \tag{5.13}$$

**Предложение 5.2.** *Если* $\mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, $\mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ *и при этом* $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$, *то непременно* $\exists A \in \mathcal{U}_1\ \exists B \in \mathcal{U}_2 :\ A \cap B = \varnothing$.

Доказательство повторяет рассуждение в [9, с. 271], где рассматривались у/ф семейства замкнутых множеств $T_1$-пространства. Пусть $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ удовлетворяют условиям предложения. Тогда

$$(\ \mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_2 \neq \varnothing\ )\ \vee\ (\ \mathcal{U}_2 \setminus \mathcal{U}_1 \neq \varnothing\ ). \tag{5.14}$$

Ограничимся рассмотрением первого случая в (5.14). Итак, пусть $\mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_2 \neq \varnothing$. Выберем произвольно $M \in \mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_2$. Тогда $M \in \mathcal{U}_1$ и, в частности, $M \in \mathcal{L}$. С другой стороны, $M \notin \mathcal{U}_2$, а тогда согласно (5.7) $M \notin (\mathcal{U}_2 - \mathrm{set})[\mathbf{E}]$; с учетом (4.1) для некоторого $N \in \mathcal{U}_2$ имеем равенство $M \cap N = \varnothing$. Итак, $(\mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_2 \neq \varnothing) \Longrightarrow (\exists A \in \mathcal{U}_1\ \exists B \in \mathcal{U}_2 :\ A \cap B = \varnothing)$.Для второго случая в (5.14) рассуждение аналогично. $\square$

**Следствие 5.1.** *Топология (5.13) является хаусдорфовой:* $\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}] \in (\mathrm{top})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$.

В связи с доказательством см. (5.9), (5.11) и (5.13). Следующее свойство легко следует из (5.9) с учетом определения у/ф:

$$\bigcap_{L \in \mathcal{U}} \Phi_{\mathcal{L}}(U) = \{\mathcal{U}\}\ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{5.15}$$

В свою очередь, из (5.12) легко извлекается следующее положение:

$$\{\Phi_{\mathcal{L}}(L) :\ L \in \mathcal{U}\} \in (\mathcal{U} - \mathrm{bas})[\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]]\ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{5.16}$$

Отметим, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \beta_0[\mathbf{E}]$. Поэтому корректно определяется фильтр

$$(\mathbf{E} - \mathbf{fi})[\mathcal{F}] \in \mathfrak{F}[\mathbf{E}]\ \ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}). \tag{5.17}$$

В связи с (5.17) заметим, что конструкция на основе (5.17) определяет своеобразное продолжение $\mathcal{L}$-фильтра: если $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, то (см. (2.16))

$$(\mathbf{E} - \mathbf{fi})[\mathcal{F}] \cap \mathcal{L} = \mathcal{F}. \tag{5.18}$$

**Замечание 5.2.** Проверим (5.18). Вложение $\mathcal{F} \subset (\mathbf{E} - \mathbf{fi})[\mathcal{F}]$ следует из (2.4). Поэтому (см. (2.10)) $\mathcal{F} \subset (\mathbf{E} - \mathbf{fi})[\mathcal{F}] \cap \mathcal{L}$. Пусть $\Phi \in (\mathbf{E} - \mathbf{fi})[\mathcal{F}] \cap \mathcal{L}$. Тогда множество $\Phi \in \mathcal{L}$ обладает тем свойством, что $F \subset \Phi$ для некоторого множества $F \in \mathcal{F}$. Согласно (2.10) $\Phi \in \mathcal{F}$. Поскольку выбор $\Phi$ был произвольным, установлено вложение $(\mathbf{E} - \mathbf{fi})[\mathcal{F}] \cap \mathcal{L} \subset \mathcal{F}$. $\square$

Заметим, что на основе (5.17), (5.18) определено, в частности, продолжение у/ф; результатом такого продолжения является фильтр на $\mathbf{E}$. Легко видеть, однако, что

$$\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \exists \tilde{\mathcal{U}} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{E}] :\ \mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}} \cap \mathcal{L} \tag{5.19}$$

(следует применить (2.13) при использовании вместо $\mathcal{L}$ семейства $\mathcal{P}(\mathbf{E})$; см. также замечание 2.1). Отметим, что из (2.9) и (2.15) следует, в частности, что

$$(\mathbf{E} - \mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\ \ \forall x \in \mathbf{E}. \tag{5.20}$$

**Замечание 5.3.** Подчеркнем, что (несмотря на (2.9)) возможна ситуация, когда $(\mathbf{E} - \mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{L} \notin \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ при $x \in \mathbf{E}$ (максимальность фильтра не наследуется, вообще говоря, при его сужении на $\mathcal{L}$). Рассмотрим следующий пример.

Пусть (в данном примере) $\mathbf{E} = \mathbb{N}$, где $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$ есть множество натуральных чисел с обычным порядком $\leqslant$; полагаем, что $\overrightarrow{k, \infty} \triangleq \{j \in \mathbb{N} \mid k \leqslant j\}\ \ \forall k \in \mathbb{N}$. Пусть, кроме того, $\mathfrak{N} \triangleq \{\overrightarrow{k, \infty} :\ k \in \mathbb{N}\}$ и $\mathcal{L} \triangleq \mathfrak{N} \cup \{\varnothing\}$. Тогда $\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{E}]$ (в самом деле, $\varnothing \in \mathcal{L}$, $\mathbf{E} = \overrightarrow{1, \infty} \in \mathcal{L}$, если $k \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{N}$, то число $r \triangleq \sup(\{k;l\}) \in \mathbb{N}$ таково, что $\overrightarrow{r,\infty} = \overrightarrow{k,\infty} \cap \overrightarrow{l,\infty}$; теперь следует учесть (1.5)). Более того, семейство $\mathcal{L}$ — топология $\mathbf{E} = \mathbb{N}$, то есть $\mathcal{L} \in (\mathrm{top})[\mathbf{E}]$, но это для нас в данном случае несущественно.

Отметим, что $\mathfrak{N} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. В самом деле, $\mathfrak{N} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ и при этом $\varnothing \notin \mathfrak{N}$; легко видеть также, что семейство $\mathfrak{N}$ замкнуто относительно пересечений: при $A \in \mathfrak{N}$ и $B \in \mathfrak{N}$ непременно $A \cap B \in \mathfrak{N}$. Если $n \in \mathcal{N}$ и $L \in \mathcal{L}$ обладает свойством $\overrightarrow{n,\infty} \subset L$, то $L \neq \varnothing$ и, как следствие, $L \in \mathfrak{N}$. Следовательно, $\mathfrak{N} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ (для наших целей это достаточно). Если же $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и при этом $\mathfrak{N} \subset \mathcal{F}$, то, коль скоро $\varnothing \notin \mathcal{F}$, имеем цепочку вложений $\mathfrak{N} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{L} \setminus \{\varnothing\} = \mathfrak{N}$; в итоге $\mathcal{F} = \mathfrak{N}$. Требуемое свойство максимальности $\mathfrak{N}$ установлено.

Пусть теперь $m \in \mathbf{E}$, то есть $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $\mathcal{L}$-фильтр $\tilde{\mathcal{F}} \triangleq (\mathbf{E} - \mathrm{ult})[m] \cap \mathcal{L}$. Коль скоро $\varnothing \notin \tilde{\mathcal{F}}$ и $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{L}$, то $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathfrak{N}$. Однако $\overrightarrow{m+1,\infty} \in \mathfrak{N} \setminus \tilde{\mathcal{F}}$. Это означает, в частности, что $\tilde{\mathcal{F}} \neq \mathfrak{N}$. Следовательно, $\tilde{\mathcal{F}} \notin \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Поскольку выбор $m$ был произвольным, установлено, что $(\mathbf{E} - \mathrm{ult})[t] \cap \mathcal{L} \notin \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \ \forall t \in \mathbf{E}$.

Свойство, установленное в замечании, показывает, что сужение у/ф на п/п может не быть у/ф этого п/п (имеется в виду сужение на $\pi$-систему с «нулем» и «единицей»). Отметим очевидные свойства, характеризующие случай, когда упомянутое сужение является у/ф, возвращаясь к общему случаю мультипликативного пространства $(\mathbf{E}, \mathcal{L})$ : $\mathbf{E}$ — непустое множество, $\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{E}]$. Итак (см. (5.7)), $\forall x \in \mathbf{E}\quad ((\mathbf{E} - \mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \Longleftrightarrow (\forall L \in \mathcal{L}\quad (x \notin L) \Longrightarrow (\ \exists \Lambda \in (\mathbf{E} - \mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{L} :\ \ \Lambda \cap L = \varnothing))$. Как следствие получаем следующее положение: $((\mathbf{E} - \mathrm{ult})[t] \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \ \forall t \in \mathbf{E}) \Longleftrightarrow (\forall L \in \mathcal{L}\ \forall t \in \mathbf{E} \setminus L\ \exists \Lambda \in (\mathbf{E} - \mathrm{ult})[t] \cap \mathcal{L} :\ \Lambda \cap L = \varnothing)$.

**Предложение 5.3.** *В общем случае $\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{E}]$ справедливо свойство: если $L_1 \in \mathcal{L}$ и $L_2 \in \mathcal{L}$, то* $(L_1 \cap L_2 = \varnothing) \Longrightarrow (\Phi_{\mathcal{L}}(L_1) \cap \Phi_{\mathcal{L}}(L_2) = \varnothing)$.

Доказательство следует из (2.10) и того, что $\Phi_{\mathcal{L}}(L_1 \cap L_2) = \Phi_{\mathcal{L}}(L_1) \cap \Phi_{\mathcal{L}}(L_2)$.

В связи со свойством (5.19) заметим еще раз, что (см. замечание 5.3) возможен случай, когда $\mathcal{U} \cap \mathcal{L} \notin \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ при $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{E}]$; в этой связи следует напомнить (2.9). Итак, след у/ф множества $\mathbf{E}$ на семейство $\mathcal{L}$ не обязан быть у/ф пространства $(\mathbf{E}, \mathcal{L})$ (отметим, кстати, что в примере замечания 5.3 $\mathcal{L} \in (\mathrm{top})[\mathbf{E}]$ и, в частности, $\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}]$). Следовательно, у/ф упомянутого пространства всегда «продолжаются» до у/ф множества $\mathbf{E}$, но у/ф $\mathbf{E}$ не всегда «сужаются» до у/ф пространства $(\mathbf{E}, \mathcal{L})$. Далее будет отмечен весьма общий случай, когда упомянутое свойство «сужения» имеет место. Сейчас отметим положение [15, (10.6.13)] о том, что след у/ф $\mathbf{E}$ на произвольную полуалгебру п/м $\mathbf{E}$ есть у/ф этой полуалгебры множеств.

## § 6. Фильтры на решетках множеств

В пределах настоящего раздела фиксируем непустое множество $\mathbf{E}$, а также решетку

$$\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}]. \tag{6.1}$$

Разумеется, согласно (1.8) мы, в частности, в виде $\mathcal{L}$ имеем $\pi$-систему с «нулем» и «единицей», а потому конструкции предыдущего раздела здесь вполне применимы. Появляются, однако, и новые свойства (в этой связи отметим [11, § II.5], где рассматривались топологические представления, связанные с пространствами идеалов решеток). Прежде всего отметим свойство: если $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}),\ A \in \mathcal{L}$ и $B \in \mathcal{L}$, то

$$(\ A \cup B \in \mathcal{U}) \Longrightarrow ((\ A \in \mathcal{U}) \vee (\ B \in \mathcal{U})). \tag{6.2}$$

**Замечание 6.1.** Проверим (6.2), полагая, что $A \cup B \in \mathcal{U}$. Тогда согласно (2.10)

$$(A \cup B) \cap S \neq\ \varnothing\ \forall S \in \mathcal{U}.$$

Как следствие получаем очевидное свойство

$$(A \cap S) \cup (B \cap S) \neq \varnothing \ \ \forall S \in \mathcal{U}. \tag{6.3}$$

Покажем, что $(\ A \in \mathcal{U}) \ \vee \ (\ B \in \mathcal{U})$. Допустим противное: $(\ A \notin \mathcal{U})$ & $(B \notin \mathcal{U})$. Из (2.10) вытекает, что $A \cap B \notin \mathcal{U}$. Согласно (5.8) $A \notin (\mathcal{U} - \mathrm{set})[\mathbf{E}] \cap \mathcal{L}$ и, коль скоро $A \in \mathcal{L}$, непременно $A \notin (\mathcal{U} - \mathrm{set})[\mathbf{E}]$. С учетом (4.1) имеем для некоторого множества $M_0 \in \mathcal{U}$ равенство $A \cap M_0 = \varnothing$, а для некоторого $N_0 \in \mathcal{U}$ справедливо $B \cap N_0 = \varnothing$. Тогда $M_0 \cap N_0 \in \mathcal{U}$ согласно (2.10), $(A \cap (M_0 \cap N_0)) \cup (B \cap (M_0 \cap N_0)) = \varnothing$, что невозможно в силу (6.3). Противоречие показывает, что $(A \in \mathcal{U}) \vee (B \in \mathcal{U})$. $\square$

Из (6.2) вытекает очевидное следствие (см. (2.10)): $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \forall A \in \mathcal{L} \ \forall B \in \mathcal{L}$

$$(\ A \cup B = \mathbf{E}) \Longrightarrow ((A \in \mathcal{U}) \ \vee \ (B \in \mathcal{U})). \tag{6.4}$$

Кроме того, из (5.9), (6.2) и (6.4) получаем, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(A \cup B) = \Phi_{\mathcal{L}}(A) \cup \Phi_{\mathcal{L}}(B) \ \ \forall A \in \mathcal{L} \ \forall B \in \mathcal{L}. \tag{6.5}$$

В свою очередь, из (1.7), (1.8), (5.11) и (6.5) вытекает следующее свойство:

$$(\mathbb{UF})[\mathbf{E}; \mathcal{L}] \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \tag{6.6}$$

В связи с (6.6) заметим, что согласно (1.7), (1.8) и (1.17) $(\mathrm{LAT})_0[I] \subset (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})[I]$ для всякого непустого множества $I$. В качестве $I$ можно использовать $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$; поэтому (см. (6.6))

$$(\mathbb{UF})[\mathbf{E}; \mathcal{L}] \in (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \tag{6.7}$$

В свою очередь, из (1.19) и (6.7) вытекает важное свойство:

$$\{\cap\}((\mathbb{UF})[\mathbf{E}; \mathcal{L}]) \in (\mathrm{clos})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \tag{6.8}$$

Посредством (6.8) определяется топология непустого множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Согласно (1.18) и (6.7)

$$\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}((\mathbb{UF})[\mathbf{E}; \mathcal{L}]) \in (\mathrm{op} - \mathrm{BAS})_{\varnothing}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]; \tag{6.9}$$

при этом в силу (1.20), (6.7) и (6.8) получаем, что

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[\mathbf{E}] \triangleq \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}(\{\cap\}((\mathbb{UF})[\mathbf{E}; \mathcal{L}])) = \{\cup\}(\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}((\mathbb{UF})[\mathbf{E}; \mathcal{L}])) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \tag{6.10}$$

**Предложение 6.1.** *Топология (6.10) компактна:* $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[\mathbf{E}] \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$.

Доказательство. Полагая, что $\mathfrak{U} \triangleq \{\cap\}((\mathbb{UF})[\mathbf{E}; \mathcal{L}])$, имеем согласно (6.10), что $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[\mathbf{E}] = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}(\mathfrak{U})$ и, кроме того, $\mathfrak{U} = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[\mathbf{E}])$. Если же $S \in \mathfrak{U}$, то (непустое) семейство $\mathbf{u}[S] \triangleq \{B \in (\mathbb{UF})[\mathbf{E}; \mathcal{L}] \mid S \subset B\} \in \mathcal{P}'((\mathbb{UF})[\mathbf{E}; \mathcal{L}])$ обладает очевидным свойством (см. (1.3)):

$$S = \bigcap_{B \in \mathbf{u}[S]} B. \tag{6.11}$$

Пусть $\eta \in \mathcal{P}'(\mathfrak{U})$ центрировано, то есть $\varnothing \notin \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\eta)$. Пусть $\overline{1,k} \triangleq \{i \in \mathbb{N} \mid i \leqslant k\} \ \ \forall k \in \mathbb{N}$. Если $m \in \mathbb{N}$ и $(N_i)_{i \in \overline{1,m}} : \ \overline{1,m} \longrightarrow \eta$, то пересечение всех множеств $N_i, \ i \in \overline{1,m}$ непусто. Покажем, что пересечение всех множеств из $\eta$ непусто. Если $H \in \eta$, то семейство

$$\mathbb{D}_H \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid \Phi_{\mathcal{L}}(L) \in \mathbf{u}[H]\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \tag{6.12}$$

(каждое множество из $\mathbf{u}[H]$ есть $\Phi_{\mathcal{L}}(\tilde{L})$ для некоторого $\tilde{L} \in \mathcal{L}$) обладает свойством

$$\mathbb{D}_H \subset \mathcal{U} \ \ \forall \mathcal{U} \in H. \tag{6.13}$$

Действительно, если $\mathcal{U} \in H$ и $D \in \mathbb{D}_H$, то $D \in \mathcal{L}$ и при этом согласно (6.12) $\Phi_{\mathcal{L}}(D) \in \mathbf{u}[H]$, а тогда $H \subset \Phi_{\mathcal{L}}(D)$ в силу (6.11). Поэтому $\mathcal{U} \in \Phi_{\mathcal{L}}(D)$, откуда следует, что $D \in \mathcal{U}$ (см. (5.9)). Поскольку $D$ выбиралось произвольно, установлено вложение $\mathbb{D}_H \subset \mathcal{U}$, из которого в силу произвольности выбора $\mathcal{U}$ вытекает (6.13). Покажем теперь, что семейство

$$\mathfrak{L} \triangleq \bigcup_{H \in \eta} \mathbb{D}_H \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \tag{6.14}$$

центрировано. В самом деле, пусть $n \in \mathbb{N}$ и $(\Lambda_i)_{i \in \overline{1,n}} : \overline{1,n} \longrightarrow \mathfrak{L}$. Подберем, кроме того, кортеж $(\tilde{H}_i)_{i \in \overline{1,n}} : \overline{1,n} \longrightarrow \eta$, для которого справедливо следующее свойство: $\Lambda_j \in \mathbb{D}_{\tilde{H}_j} \quad \forall j \in \overline{1,n}$. Из (6.12) имеем, что $(\Lambda_i)_{i \in \overline{1,n}} : \overline{1,n} \longrightarrow \mathcal{L}$; кроме того, $\Phi_{\mathcal{L}}(\Lambda_j) \in \mathbf{u}[\tilde{H}_j] \quad \forall j \in \overline{1,n}$. В силу (6.11) имеем систему вложений: $\tilde{H}_j \subset \Phi_{\mathcal{L}}(\Lambda_j) \;\; \forall j \in \overline{1,n}$. В итоге

$$\bigcap_{i=1}^{n} \tilde{H}_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} \Phi_{\mathcal{L}}(\Lambda_i). \tag{6.15}$$

Напомним, что по свойству центрированности $\eta$ непременно

$$\bigcap_{i=1}^{n} \tilde{H}_i \neq \varnothing. \tag{6.16}$$

С учетом (6.16) выберем произвольно у/ф $\tilde{\mathcal{U}} \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \tilde{H}_i$. Тогда из (5.9) и (6.15) следует, что $\Lambda_j \in \tilde{\mathcal{U}} \quad \forall j \in \overline{1,n}$. С учетом (2.10) получаем (используя индукцию),что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \Lambda_i \neq \varnothing$. Итак, $\mathfrak{L}$ центрировано, то есть $\mathfrak{L} \in \mathbb{Z}[\mathbf{E}]$ и $\varnothing \notin \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathfrak{L})$. Тогда $\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathfrak{L}) \in \beta_0[\mathbf{E}]$ и, коль скоро $\mathfrak{L} \subset \mathcal{L}$, имеем свойство $\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathfrak{L}) \in \beta^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]$ (см. § 5). Следуя построениям § 5, введем в рассмотрение фильтр $\mathcal{V} \triangleq (\mathbf{E} - \mathbf{fi})[\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathfrak{L})] \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, для которого с учетом (2.12) подберем у/ф $\mathcal{W} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ так, что $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Получаем цепочку вложений $\mathfrak{L} \subset \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathfrak{L}) \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Выберем произвольно $\mathbb{M} \in \eta$. В силу (6.12) и (6.14) $\mathbb{D}_{\mathbb{M}} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{L})$; непустое семейство $\mathbf{u}[\mathbb{M}]$ реализует $\mathbb{M}$ в виде

$$\mathbb{M} = \bigcap_{B \in \mathbf{u}[\mathbb{M}]} B. \tag{6.17}$$

Выберем произвольно $\Sigma \in \mathbf{u}[\mathbb{M}]$, получая при этом множество $\Sigma \in (\mathbb{UF})[\mathbf{E}; \mathcal{L}]$, для которого (см. (6.17)) $\mathbb{M} \subset \Sigma$. С учетом (5.11) подберем $\mathbf{D} \in \mathcal{L}$ такое, что $\Sigma = \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{D})$. Тогда $\mathbf{D} \in \mathcal{L} : \; \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{D}) \in \mathbf{u}[\mathbb{M}]$. Согласно (6.12) $\mathbf{D} \in \mathbb{D}_{\mathbb{M}}$, а потому (см. (6.14)) $\mathbf{D} \in \mathfrak{L}$. В частности, $\mathbf{D} \in \mathcal{W}$. Поэтому $\mathcal{W} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) : \;\; \mathbf{D} \in \mathcal{W}$. С учетом (5.9) имеем включение $\mathcal{W} \in \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{D})$, то есть $\mathcal{W} \in \Sigma$. Коль скоро выбор $\mathbb{M}$, $\Sigma$ был произвольным, установлено свойство: $\mathcal{W} \in H \quad \forall H \in \eta$. Пересечение всех множеств из $\eta$ непусто. Но выбор $\eta$ был произвольным и мы получили, что для каждого центрированного семейства $\nu \in \mathcal{P}'(\mathfrak{U})$ пересечение всех множеств из $\nu$ непусто. Тогда (см. [5, (2.2.21)], [9, с. 196]) топология $\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]$ обладает требуемым свойством компактности. □

В дополнение к предложению 6.1 отметим, что согласно (5.15) $\{\mathcal{U}\} \in \{\cap\}((\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]) \;\; \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$. Следовательно, из (1.13) и предложения 6.1 имеем свойство

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}] \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})] \cap (\mathcal{D} - \mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]. \tag{6.18}$$

Итак, установлено, что $(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}])$ есть непустое компактное $T_1$-пространство. При этом

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(L) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \mid L \notin \mathcal{U}\} \;\; \forall L \in \mathcal{L}. \tag{6.19}$$

В свою очередь с (6.19) естественно связать следующее

**Предложение 6.2.** *Топология* $\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]$ *допускает следующее представление:*

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}] = \{\, G \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})) \mid \forall \mathcal{U} \in G \; \exists L \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{U} \; \forall \mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \;\; (L \notin \mathcal{V}) \Longrightarrow (\mathcal{V} \in G)\}. \tag{6.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\Omega$ семейство в правой части (6.20). Пусть $T \in \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]$. С учетом (1.2) и (6.10) имеем для некоторого семейства $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(\mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}((\mathbb{UF})[\mathbf{E};\mathcal{L}]))$ равенство $T = \bigcup\limits_{B\in\mathcal{T}} B$. Пусть $\mathcal{F} \in T$. Тогда $\mathcal{F} \in \mathbb{B}$, где $\mathbb{B} \in \mathcal{T}$. Из определения $\mathcal{T}$ следует, что $\mathbb{B} \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}((\mathbb{UF})[\mathbf{E};\mathcal{L}])$ и согласно (5.11) $\mathbb{B} = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(\Lambda)$, где $\Lambda \in \mathcal{L}$. С учетом (6.19)

$$\mathbb{B} = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \mid \Lambda \notin \mathcal{U}\}. \tag{6.21}$$

Если $\mathcal{F}_0 \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ и при этом $\Lambda \notin \mathcal{F}_0$, то $\mathcal{F}_0 \in \mathbb{B}$ и, как следствие, $\mathcal{F}_0 \in T$ (поскольку $\mathbb{B} \subset T$ по выбору $\mathbb{B}$). Поскольку $\mathcal{F}_0$ выбиралось произвольно, установлено, что $\forall \mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})\ (\Lambda \notin \mathcal{V}) \Longrightarrow (\mathcal{V} \in T)$. Коль скоро $\mathcal{F} \in \mathbb{B}$, то в силу (6.21) $\Lambda \notin \mathcal{F}$; поэтому $\Lambda \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{F}$. Стало быть, $\forall \mathcal{U} \in T\ \exists L \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{U}\ \forall \mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})\quad (L \notin \mathcal{V}) \Longrightarrow (\mathcal{V} \in T)$. Следовательно, $T \in \Omega$. Итак, установлено вложение $\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}] \subset \Omega$.

Выберем произвольно $M \in \Omega$. Тогда $M \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))$ и $\forall \mathcal{U} \in M\ \exists L \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{U}\ \forall \mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$

$$(L \notin \mathcal{V}) \Longrightarrow (\mathcal{V} \in M). \tag{6.22}$$

Из (6.19) и (6.22) вытекает, что $\forall \mathcal{U} \in M\ \exists L \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{U}:\ \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(L) \subset M$. При $\mathcal{U} \in M$ и $L \in \mathcal{L}\setminus\mathcal{U}$ имеем (поскольку $L \notin \mathcal{U}$), что $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})\setminus\Phi_{\mathcal{L}}(L)$; см. (6.19). С учетом (5.11) получаем, что $\forall \mathcal{U} \in M\ \exists B \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}((\mathbb{UF})[\mathbf{E};\mathcal{L}]):\quad (\mathcal{U} \in B)\ \&\ (B \subset M)$. Но в этом случае (см. [5, (2.6.3)]), согласно (6.10), имеем включение $M \in \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]$. Вложение $\Omega \subset \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]$ установлено, чем и завершается обоснование (6.20). □

**Предложение 6.3.** *Если* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$, *то* $\{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(L):\ L \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{U}\} \in (\mathcal{U} - \mathrm{bas})[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]]$.

Доказательство очевидно. Условимся о следующем соглашении (использующем (5.11)):

$$(\mathbb{UF})[\mathbf{E};\mathcal{L}|\mathbf{S}] \triangleq \{\mathbb{P} \in (\mathbb{UF})[\mathbf{E};\mathcal{L}] \mid \mathbf{S} \subset \mathbb{P}\}\ \ \forall \mathbf{S} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})). \tag{6.23}$$

Отметим, что в (6.23) введены непустые семейства: при $\mathbf{S} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))$ имеем $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) = \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{E}) \in (\mathbb{UF})[\mathbf{E};\mathcal{L}|\mathbf{S}]$; поэтому $(\mathbb{UF})[\mathbf{E};\mathcal{L}|\mathbf{S}] \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})))$ и определено пересечение всех множеств из $(\mathbb{UF})[\mathbf{E};\mathcal{L}|\mathbf{S}]$, являющееся п/м $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$.

**Предложение 6.4.** $\mathrm{cl}(\mathbf{S},\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]) = \bigcap\limits_{B\in(\mathbb{UF})[\mathbf{E};\mathcal{L}|\mathbf{S}]} B\quad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем множество $\mathbf{S} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))$. Тогда для семейства

$$\mathfrak{S} \triangleq \{\Phi \in \{\cap\}((\mathbb{UF})[\mathbf{E};\mathcal{L}]) \mid \mathbf{S} \subset \Phi\}$$

имеем, с одной стороны, вложение $(\mathbb{UF})[\mathbf{E};\mathcal{L}|\mathbf{S}] \subset \mathfrak{S}$ (см. (6.23)) и, как следствие, свойство непустоты этого семейства, а, с другой — согласно (6.10)

$$\mathrm{cl}(\mathbf{S},\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]) = \bigcap_{\Phi\in\mathfrak{S}} \Phi. \tag{6.24}$$

Из двух упомянутых свойств вытекает, что

$$\mathrm{cl}(\mathbf{S},\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]) \subset \bigcap_{B\in(\mathbb{UF})[\mathbf{E};\mathcal{L}|\mathbf{S}]} B. \tag{6.25}$$

Пусть $\mathcal{U}$ — элемент множества в правой части (6.25), то есть $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ и при этом $\mathcal{U} \in B\ \ \forall B \in (\mathbb{UF})[\mathbf{E};\mathcal{L} \mid \mathbf{S}]$. Выберем произвольное множество $\Phi_* \in \mathfrak{S}$. Тогда $\Phi_* \in \{\cap\}((\mathbb{UF})[\mathbf{E};\mathcal{L}])$ и при этом $\mathbf{S} \subset \Phi_*$. С учетом (1.3) выберем семейство $\varkappa \in \mathcal{P}'((\mathbb{UF})[\mathbf{E};\mathcal{L}])$ со свойством

$$\Phi_* = \bigcap_{B\in\varkappa} B. \tag{6.26}$$

Тогда согласно (6.23) $\varkappa \subset (\mathbb{UF})[\mathbf{E};\mathcal{L} \mid \mathbf{S}]$. Тогда $\mathcal{U} \in B\quad \forall B \in \varkappa$. Поэтому согласно (6.26) $\mathcal{U} \in \Phi_*$. Поскольку выбор $\Phi_*$ был произвольным, установлено, что $\mathcal{U} \in \Phi\quad \forall \Phi \in \mathfrak{S}$. В силу (6.24) $\mathcal{U} \in \mathrm{cl}(\mathbf{S},\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}])$, чем и завершается проверка вложения, противоположного (6.25). □

**Замечание 6.2.** Предложение 6.4 является частным случаем следующего положения: если $I$ — множество, $\mathcal{B} \in (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})[I]$ и $H \in \mathcal{P}(I)$, то $\mathcal{B}_H \triangleq \{ B \in \mathcal{B} \mid H \subset B\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$ и, более того, $\mathrm{cl}(H, \mathbf{C}_I(\{\cap\}(\mathcal{B})))$ совпадает с пересечением всех множеств из $\mathcal{B}_H$.

**Предложение 6.5.** *Если* $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то* $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{H}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[\mathbf{E}])$.

Доказательство получается комбинацией (2.17), (5.10), (5.11), (6.8) и (6.10).

Отметим несколько простых свойств, связанных с пересечениями $\mathcal{L}$-фильтров (см. в этой связи предложение 5.1). Прежде всего отметим, что

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{\mathrm{pr}_1(z) \cup \mathrm{pr}_2(z) : \ z \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ \ \forall \mathcal{F}_1 \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\ \forall \mathcal{F}_2 \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}). \tag{6.27}$$

Доказательство (6.27) сводится к непосредственной комбинации (1.7), (1.8) и предложения 5.1. Из (6.27) вытекает следующее

**Предложение 6.6.** *Если* $\mathcal{F}_1 \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ *и* $\mathcal{F}_2 \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, *то* $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{F}_1) \cup \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{F}_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.17) вытекает вложение

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{F}_1) \cup \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{F}_2) \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2). \tag{6.28}$$

Пусть $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$. Тогда $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и при этом $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{U}$. Тогда

$$(\,\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{F}_1)) \ \vee \ (\,\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{F}_2)). \tag{6.29}$$

В самом деле, допустим противное: $\mathcal{U} \notin \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{F}_1)$ и $\mathcal{U} \notin \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{F}_2)$. Тогда согласно (2.17) имеем $(\,\mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{U} \neq \varnothing)\ \&\ (\,\mathcal{F}_2 \setminus \mathcal{U} \neq \varnothing)$. Пусть $F_1 \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{U}$ и $F_2 \in \mathcal{F}_2 \setminus \mathcal{U}$. В силу (6.27) $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, а потому $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{U}$. С учетом (6.2) имеем $(\ F_1 \in \mathcal{U}) \ \vee \ (\ F_2 \in \mathcal{U})$, то есть противоречие, которое и доказывает (6.29). Поскольку выбор $\mathcal{U}$ был произвольным, установлено вложение, противоположное (6.28). □

Свойства, отмеченные в (6.27) и в предложении 6.6, распространяются по индукции на случай произвольных конечных пересечений фильтров из $\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$; соответствующие положения подобны приводимым в [12, с. 232–233]. Сейчас ограничимся непосредственной комбинацией предложений 3.2 и 6.6: если $(Y, \tau)$ — ТП, $Y \neq \varnothing$, $g \in Y^{\mathbf{E}}$, $\mathcal{F}_1 \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и $\mathcal{F}_2 \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, то

$$(\mathcal{L} - \mathbf{as})[\mathbf{E}; Y; \tau; g; \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2] = (\mathcal{L} - \mathbf{as})[\mathbf{E}; Y; \tau; g; \mathcal{F}_1] \cup (\mathcal{L} - \mathbf{as})[\mathbf{E}; Y; \tau; g; \mathcal{F}_2] \tag{6.30}$$

(свойство (6.30) распространяется по индукции на случай, когда ограничения асимптотического характера определяются произвольным конечным пересечением фильтров из $\mathbb{F}_*(\mathcal{L})$).

## § 7. Свойства плотности

В настоящем разделе рассматриваются некоторые частные случаи положений раздела 7, связанные с погружением исходного множества в пространство ультрафильтров решетки его подмножеств. В разделе 6 был приведен пример ТП, в котором сужения тривиальных у/ф на топологию не являются у/ф данной топологии. Пример полезно дополнить первым положением в (1.11). Итак, след тривиального у/ф на решетку множеств с «единицей» не обязан быть у/ф данной решетки. В этой связи введем некоторый естественный тип решеток (множеств), фиксируя для большей краткости в обозначениях непустое множество $\mathbf{E}$. Пусть

$$(\mathbf{u} - \mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}] \triangleq \{\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}] \mid (\mathbf{E} - \mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \ \forall x \in \mathbf{E}\}. \tag{7.1}$$

Легко видеть, что справедливо следующее вложение

$$(\mathrm{LAT})^0[\mathbf{E}] \subset (\mathbf{u} - \mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}] \tag{7.2}$$

(ниже будет показано, что $(\mathrm{alg})[\mathbf{E}] \subset (\mathbf{u}-\mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}]$). Из (7.1) вытекает, что

$$\mathfrak{E}_{\mathcal{L}} \triangleq \{(\mathbf{E}-\mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{L}:\ x \in \mathbf{E}\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))\ \ \forall \mathcal{L} \in (\mathbf{u}-\mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}]. \tag{7.3}$$

Переход от $\mathbf{E}$ к $\mathfrak{E}_{\mathcal{L}}$, где $\mathcal{L} \in (\mathbf{u}-\mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}]$, можно рассматривать как погружение исходного множества $\mathbf{E}$ в пространство у/ф на $\mathcal{L}$. Введем соответствующий оператор погружения, полагая при $\mathcal{L} \in (\mathbf{u}-\mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}]$, что

$$w[\mathcal{L}] \triangleq ((\mathbf{E}-\mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{L})_{x \in \mathbf{E}}; \tag{7.4}$$

тогда $w[\mathcal{L}]:\ \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и при этом $w[\mathcal{L}]^1(\mathbf{E}) = \mathfrak{E}_{\mathcal{L}}$. Из (7.4) следует, что

$$w[\mathcal{L}]^{-1}(\Phi_{\mathcal{L}}(L)) = L\ \ \forall \mathcal{L} \in (\mathbf{u}-\mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}]\ \ \forall L \in \mathcal{L}. \tag{7.5}$$

**Замечание 7.1.** Проверим (7.5), фиксируя $\mathcal{L} \in (\mathbf{u}-\mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}]$ и $L \in \mathcal{L}$. Если $x_1 \in w[\mathcal{L}]^{-1}(\Phi_{\mathcal{L}}(L))$, то $x_1 \in \mathbf{E}$ и при этом $w[\mathcal{L}](x_1) \in \Phi_{\mathcal{L}}(L)$, что означает справедливость включения $L \in w[\mathcal{L}](x_1)$; см. (5.9). Тогда, в частности, $L \in (\mathbf{E}-\mathrm{ult})[x_1]$ (см. (7.4)), а потому согласно (2.9) $x_1 \in L$. Вложение

$$w[\mathcal{L}]^{-1}(\Phi_{\mathcal{L}}(L)) \subset L \tag{7.6}$$

установлено. Пусть $x_2 \in L$. Согласно (2.9) $L \in (\mathbf{E}-\mathrm{ult})[x_2]$. Поскольку $L \in \mathcal{L}$, то из (7.4) вытекает, что $L \in w[\mathcal{L}](x_2)$, чем завершается проверка вложения, противоположного (7.6).

Отметим, что согласно (7.4) при $\mathcal{L} \in (\mathbf{u}-\mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}]$ и $A \in \mathcal{P}(\mathbf{E})$ определено (см. (6.10)) множество $\mathrm{cl}(w[\mathcal{L}]^1(A), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}])$; в качестве $A$ можно использовать множество из $\mathcal{L}$.

**Предложение 7.1.** *Если* $\mathcal{L} \in (\mathbf{u}-\mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}]$ *и* $L \in \mathcal{L}$, *то*

$$\mathrm{cl}(w[\mathcal{L}]^1(L), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]) = \Phi_{\mathcal{L}}(L). \tag{7.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что $w[\mathcal{L}]^1(L) = \{w[\mathcal{L}](x):\ x \in L\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$, а тогда (см. (6.10), (6.23)) справедливо следующее свойство:

$$\mathrm{cl}(w[\mathcal{L}]^1(L), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]) \subset B\ \ \forall B \in (\mathbb{UF})[\mathbf{E}; \mathcal{L}|w[\mathcal{L}]^1(L)]. \tag{7.8}$$

С учетом (7.5) имеем, однако, очевидное вложение

$$w[\mathcal{L}]^1(L) = w[\mathcal{L}]^1(w[\mathcal{L}]^{-1}(\Phi_{\mathcal{L}}(L))) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(L). \tag{7.9}$$

С учетом (5.11), (6.23) и (7.9) получаем, в частности, что $\Phi_{\mathcal{L}}(L) \in (\mathbb{UF})\left[\mathbf{E}; \mathcal{L}|w[\mathcal{L}]^1(L)\right]$, а тогда из (7.8) вытекает следующее вложение

$$\mathrm{cl}\left(w[\mathcal{L}]^1(L), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]\right) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(L). \tag{7.10}$$

Выберем произвольно $\mathcal{W} \in \Phi_{\mathcal{L}}(L)$. Тогда (см. (5.9)) $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и при этом $L \in \mathcal{W}$. С учетом предложения 6.3

$$\mathfrak{B} \triangleq \{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(\Gamma):\ \Gamma \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{W}\} \in (\mathcal{W}-\mathrm{bas})\left[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]\right]. \tag{7.11}$$

Выберем произвольное множество $\Lambda \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{W}$. Тогда $\Lambda \in \mathcal{L}$ и $\Lambda \notin \mathcal{W}$, а потому $\Lambda \neq L$. Если при этом $L \setminus \Lambda = \varnothing$, то $L \subset \Lambda$, а потому $\Lambda \in \mathcal{W}$ (см. (2.10)), что невозможно; поэтому $L \setminus \Lambda \neq \varnothing$. С учетом этого выберем и зафиксируем $x_* \in L \setminus \Lambda$. Тогда $x_* \in L$ и при этом $x_* \notin \Lambda$. Рассмотрим у/ф $w[\mathcal{L}](x_*) = (\mathbf{E}-\mathrm{ult})[x_*] \cap \mathcal{L} \in w[\mathcal{L}]^1(L)$ (см. (7.4)). При этом $\Lambda \notin (\mathbf{E}-\mathrm{ult})[x_*]$, так как $x_* \notin \Lambda$. Тогда $\Lambda \notin w[\mathcal{L}](x_*)$. В силу (5.9) $w[\mathcal{L}](x_*) \notin \Phi_{\mathcal{L}}(\Lambda)$, то есть $w[\mathcal{L}](x_*) \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(\Lambda)$. Поэтому $w[\mathcal{L}]^1(L) \cap (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(\Lambda)) \neq \varnothing$. Поскольку выбор $\Lambda$ был произвольным, установлено, что (см. (7.11)) $w[\mathcal{L}]^1(L) \cap B \neq \varnothing\ \ \forall B \in \mathfrak{B}$. Вновь используя (7.11), получаем из (1.15) и (7.11), что $w[\mathcal{L}]^1(L) \cap H \neq \varnothing\ \ \forall H \in N_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]}(\mathcal{W})$. Иными словами, $\mathcal{W} \in \mathrm{cl}\left(w[\mathcal{L}]^1(L), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]\right)$. Поскольку выбор $\mathcal{W}$ был произвольным, установлено вложение $\Phi_{\mathcal{L}}(L) \subset \mathrm{cl}\left(w[\mathcal{L}]^1(L), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]\right)$, откуда с учетом (7.10) получаем требуемое равенство (7.7). $\square$

**Предложение 7.2.** *Если* $\mathcal{L} \in (\mathbf{u} - \mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}]$, *то* $\mathrm{cl}\left(\mathfrak{E}_{\mathcal{L}}, \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]\right) = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что $w[\mathcal{L}]^1(\mathbf{E}) = \mathfrak{E}_{\mathcal{L}}$, где $\mathbf{E} \in \mathcal{L}$ согласно (1.8) и (7.1). Из предложения 7.1 имеем равенство $\mathrm{cl}\left(w[\mathcal{L}]^1(\mathbf{E}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]\right) = \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{E})$. Согласно (2.10) $\mathbf{E} \in \mathcal{F} \ \ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. Из (2.11) и (5.9) следует, что $\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{E}) = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$, а тогда

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) = \mathrm{cl}\left(w[\mathcal{L}]^1(\mathbf{E}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]\right).$$

$\square$

Отметим также, что из предложения 7.1 вытекает свойство (см. предложение 5.3): $\forall \mathcal{L} \in (\mathbf{u} - \mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}] \ \forall L_1 \in \mathcal{L} \ \forall L_2 \in \mathcal{L}$

$$(\, L_1 \cap L_2 = \varnothing) \Longrightarrow \left(\, \mathrm{cl}\left(w[\mathcal{L}]^1(L_1), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]\right) \cap \mathrm{cl}\left(w[\mathcal{L}]^1(L_2), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]\right) = \varnothing\right). \tag{7.12}$$

Возвращаясь к (7.1), отметим следующее очевидное представление:

$$(\mathbf{u} - \mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}] = \{\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}] \mid \forall L \in \mathcal{L} \ \forall x \in \mathbf{E} \setminus L \ \exists \Lambda \in \mathcal{L} : \ (x \in \Lambda) \ \& \ (\, \Lambda \cap L = \varnothing)\}. \tag{7.13}$$

**Замечание 7.2.** Рассмотрим доказательство (7.13), обозначая множество в правой части (7.13) через $\Omega$. Пусть $\mathcal{E} \in (\mathbf{u} - \mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}]$. Выберем произвольно $\Sigma \in \mathcal{E}$ и $x_* \in \mathbf{E} \setminus \Sigma$. При этом $\mathcal{U}_* \triangleq (\mathbf{E} - \mathrm{ult})[x_*] \cap \mathcal{E} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})$, а тогда согласно (5.8)

$$\mathcal{U}_* = (\mathcal{U}_* - \mathrm{set})[\mathbf{E}] \cap \mathcal{E}. \tag{7.14}$$

Поскольку $x_* \notin \Sigma$, то $\Sigma \notin \mathcal{U}_*$ (см. (2.9)). Коль скоро $\Sigma \in \mathcal{E}$, из (7.14) вытекает, что $\Sigma \notin (\mathcal{U}_* - \mathrm{set})[\mathbf{E}]$, а тогда (см. (4.1)) $\Sigma \cap S_* = \varnothing$ для некоторого множества $S_* \in \mathcal{U}_*$. По определению $\mathcal{U}_*$ имеем, что $S_* \in \mathcal{E}$ и при этом $(x_* \in S_*) \ \& \ (S_* \cap \Sigma = \varnothing)$. Поскольку выбор $\Sigma$ и $x_*$ был произвольным, установлено, что $\mathcal{E} \in \Omega$. Вложение

$$(\mathbf{u} - \mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}] \subset \Omega \tag{7.15}$$

установлено. Пусть теперь $\mathcal{T} \in \Omega$. Тогда $\mathcal{T} \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}]$, причем $\forall T \in \mathcal{T} \ \forall x \in \mathbf{E} \setminus T \ \exists \Lambda \in \mathcal{T}$ :

$$(x \in \Lambda) \ \& \ (\Lambda \cap T = \varnothing). \tag{7.16}$$

Фиксируем $x^* \in \mathbf{E}$ и полагаем, что $\mathcal{U}^* \triangleq (\mathbf{E} - \mathrm{ult})[x^*] \cap \mathcal{T}$. Тогда (см. (5.20)) $\mathcal{U}^* \in \mathbb{F}^*(\mathcal{T})$.

Пусть $F \in (\mathcal{U}^* - \mathrm{set})[\mathbf{E}] \cap \mathcal{T}$. Тогда $F \in \mathcal{T}$ и при этом

$$F \cap U \neq \varnothing \ \ \forall U \in \mathcal{U}^*. \tag{7.17}$$

Если $x^* \notin F$, то согласно (7.16) найдется множество $\Lambda^* \in \mathcal{T}$, для которого $x^* \in \Lambda^*$ и $\Lambda^* \cap F = \varnothing$; в этом случае $\Lambda^* \in (\mathbf{E} - \mathrm{ult})[x^*]$ и, стало быть, $\Lambda^* \in \mathcal{U}^*$, что в силу (7.17) приводит к свойству $F \cap \Lambda^* \neq \varnothing$, то есть к противоречию. Следовательно, $x^* \in F$, а тогда $F \in \mathcal{U}^*$. Вложение

$$(\mathcal{U}^* - \mathrm{set})[\mathbf{E}] \cap \mathcal{T} \subset \mathcal{U}^* \tag{7.18}$$

установлено. Если же $F^* \in \mathcal{U}^*$, то согласно (2.10) $F^* \cap B \neq \varnothing \ \ \ \forall B \in \mathcal{U}^*$. Согласно (4.1) $F^* \in (\mathcal{U}^* - \mathrm{set})[\mathbf{E}] \cap \mathcal{T}$, чем и завершается проверка вложения $\mathcal{U}^* \subset (\mathcal{U}^* - \mathrm{set})[\mathbf{E}] \cap \mathcal{T}$, что с учетом (7.18) означает справедливость равенства $\mathcal{U}^* = (\mathcal{U}^* - \mathrm{set})[\mathbf{E}] \cap \mathcal{T}$. В силу (5.8) получаем включение $\mathcal{U}^* \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{T})$. Поскольку выбор $x^*$ был произвольным, установлено, что

$$(\mathbf{E} - \mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{T} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{T}) \ \ \forall x \in \mathbf{E}.$$

Из (7.1) следует, что $\mathcal{T} \in (\mathbf{u} - \mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}]$, чем и завершается проверка вложения

$$\Omega \subset (\mathbf{u} - \mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}].$$

С учетом (7.15) получаем равенство $(\mathbf{u} - \mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}] = \Omega$.

Рассмотрим частный случай, соответствующий (7.2). Итак, если не оговорено противное, полагаем до конца настоящего раздела, что

$$\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})^0[\mathbf{E}], \tag{7.19}$$

получая, в частности, что $\mathcal{L} \in (\mathbf{u}-\mathrm{LAT})_0[\mathbf{E}]$. Тогда из (7.2) следует, что определены (непустое) семейство $\mathfrak{E}_{\mathcal{L}} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$ и (согласно (7.4)) отображение

$$w[\mathcal{L}] \in (\mathrm{su})[\mathbf{E}; \mathfrak{E}_{\mathcal{L}}]. \tag{7.20}$$

Из (7.5) и (7.19) следует при этом, что $w[\mathcal{L}]^{-1}(\Phi_{\mathcal{L}}(L)) = L \quad \forall L \in \mathcal{L}$. Из предложения 7.1 вытекает, что

$$\mathrm{cl}\left(w[\mathcal{L}]^1(L), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]\right) = \Phi_{\mathcal{L}}(L) \;\; \forall L \in \mathcal{L}. \tag{7.21}$$

Как частный случай (7.21) получаем из предложения 7.2 свойство плотности

$$\mathrm{cl}\left(\mathfrak{E}_{\mathcal{L}}, \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]\right) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{7.22}$$

В (7.21), (7.22) имеем «более традиционные» (см. (7.19)) конструкции погружения в семейство у/ф. В связи с (7.19) отметим, что (см. (1.9)) $\{x\} \in \mathcal{L} \quad \forall x \in \mathbf{E}$. Поэтому согласно (5.9) при $x \in \mathbf{E}$ определено множество $\Phi_{\mathcal{L}}(\{x\}) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$. При этом $\Phi_{\mathcal{L}}(\{x\}) = \{w[\mathcal{L}](x)\} \quad \forall x \in \mathbf{E}$. Кроме того, отметим очевидное свойство инъективности: $\forall x_1 \in \mathbf{E}\; \forall x_2 \in \mathbf{E}$

$$(w[\mathcal{L}](x_1) = w[\mathcal{L}](x_2)) \Longrightarrow (x_1 = x_2) \tag{7.23}$$

(здесь учитывается, что $\{x\} \in w[\mathcal{L}](x) \;\; \forall x \in \mathbf{E}$). С учетом (7.20) и (7.23) получаем, что

$$w[\mathcal{L}] \in (\mathrm{bi})[\mathbf{E}; \mathfrak{E}_{\mathcal{L}}]. \tag{7.24}$$

## § 8. Частный случай: расширение Волмэна

Положения настоящего раздела имеют иллюстративный характер и связаны с конкретизацией свойств, отмеченных в § 7. Всюду в настоящем разделе фиксируем непустое множество $\mathbf{E}$, а также топологию $\tau \in (\mathcal{D} - \mathrm{top})[\mathbf{E}]$, получая $T_1$-пространство $(\mathbf{E}, \tau)$. Кроме того, полагаем в настоящем разделе, что $\mathcal{L} = \mathbf{C}_{\mathbf{E}}(\tau)$; с учетом (7.11) получаем свойство (7.19). Итак, все условия, постулируемые в § 7, выполнены, а, следовательно, мы можем использовать весьма общие положения (см., в частности, (7.21) и (7.22)) в упомянутом конкретном случае решетки замкнутых множеств в $T_1$-пространстве $(\mathbf{E}, \tau)$, то есть в случае

$$\mathcal{L} = \mathbf{C}_{\mathbf{E}}(\tau) \in (\mathrm{LAT})^0[\mathbf{E}]. \tag{8.1}$$

Полагаем для краткости, что в рассматриваемом здесь конкретном случае $\mathbf{f} \triangleq w[\mathcal{L}]$, где $\mathcal{L}$ соответствует (8.1); $\mathbf{f} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^{\mathbf{E}}$ согласно (7.7). Тем самым определено погружение множества $\mathbf{E}$ в пространство у/ф решетки замкнутых множеств. Согласно (7.23) отображение $\mathbf{f}$ инъективно. При этом (см. (7.2))

$$\mathfrak{E}_{\mathcal{L}} = \mathbf{f}^1(\mathbf{E}) = \{(\mathbf{E} - \mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{L} : \; x \in \mathbf{E}\}; \tag{8.2}$$

имеем из (7.24) и (8.2) очевидное свойство биективности: $\mathbf{f} \in (\mathrm{bi})[\mathbf{E}; \mathfrak{E}_{\mathcal{L}}]$. Следуя (на идейном уровне) традиции (см. [14, с. 103]) будем называть у/ф из множества (8.2) тривиальными. Эти у/ф можно отождествлять с точками множества $\mathbf{E}$. В этой связи напомним, что согласно (7.3) и (7.5)

$$\mathbf{f}^{-1}(\Phi_{\mathcal{L}}(L)) = L \;\; \forall L \in \mathcal{L}. \tag{8.3}$$

Согласно (1.13) и (8.1) в рассматриваемом случае $\mathcal{L} \in (\mathrm{clos})[\mathbf{E}]$ и, в частности, $\mathcal{L}$ замкнуто относительно произвольных пересечений (см. (1.10)). Из (5.11) и (8.3) вытекает, что

$$\mathbf{f}^{-1}(B) \in \mathcal{L} \;\; \forall B \in (\mathbb{UF})[\mathbf{E}; \mathcal{L}]. \tag{8.4}$$

В качестве естественного следствия определений § 2 отметим очевидное равенство

$$C\left(\mathbf{E},\tau,\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}),\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]\right)=\left\{f\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^{\mathbf{E}}\mid f^{-1}(F)\in\mathcal{L}\ \ \forall F\in\{\cap\}((\mathbb{UF})[\mathbf{E};\mathcal{L}])\right\}$$

(мы учитываем (6.10) и (8.1)). Тогда из (1.10), (8.1) и (8.4) вытекает

**Предложение 8.1.** $\mathbf{f}\in C(\mathbf{E},\tau,\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}),\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}])$.

Из (8.2) и предложения 8.1 вытекает весьма очевидное

**Следствие 8.1.** $\mathbf{f}\in C\left(\mathbf{E},\tau,\mathfrak{E}_{\mathcal{L}},\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]|_{\mathfrak{E}_{\mathcal{L}}}\right)$.

**Предложение 8.2.** $\mathbf{f}\in C_{\mathrm{op}}\left(\mathbf{E},\tau,\mathfrak{E}_{\mathcal{L}},\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]|_{\mathfrak{E}_{\mathcal{L}}}\right)$.

Доказательство. Будем использовать (1.21), фиксируя множество $G\in\tau$ и полагая $F\triangleq\mathbf{E}\setminus G$; тогда $F\in\mathcal{L}$ (см. (8.1)). Из (5.9) и (5.11) имеем, что $\Phi_{\mathcal{L}}(F)=\{\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\mid F\in\mathcal{U}\}\in(\mathbb{UF})[\mathbf{E};\mathcal{L}]$. Тогда, в частности (см. (6.1)), $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\setminus\Phi_{\mathcal{L}}(F)\in\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]$ и, следовательно,

$$\mathbb{G}\triangleq\mathfrak{E}_{\mathcal{L}}\cap(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\setminus\Phi_{\mathcal{L}}(F))\in\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]|_{\mathfrak{E}_{\mathcal{L}}}.\tag{8.5}$$

Покажем, что $\mathbf{f}^1(G)=\mathbb{G}$. В самом деле, пусть $\mathcal{V}\in\mathbf{f}^1(G)$, а $x_*\in G$ реализует $\mathcal{V}$ в виде $\mathcal{V}=\mathbf{f}(x_*)$; в частности, $\mathcal{V}\subset(\mathbf{E}-\mathrm{ult})[x_*]$. Тогда $x_*\notin F$ и, как следствие, $F\notin(\mathbf{E}-\mathrm{ult})[x_*]$. В итоге $F\notin\mathcal{V}$, а тогда $\mathcal{V}\notin\Phi_{\mathcal{L}}(F)$. Получили включение $\mathcal{V}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\setminus\Phi_{\mathcal{L}}(F)$. Поскольку $\mathcal{V}\in\mathfrak{E}_{\mathcal{L}}$ (см. (8.2)), то согласно (8.5) $\mathcal{V}\in\mathbb{G}$, чем завершается проверка вложения $\mathbf{f}^1(G)\subset\mathbb{G}$.

Пусть теперь $\mathcal{W}\in\mathbb{G}$, то есть $\mathcal{W}\in\mathfrak{E}_{\mathcal{L}}$ и, кроме того, $\mathcal{W}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\setminus\Phi_{\mathcal{L}}(F)$. С учетом (7.2) и (8.2) подберем $x^*\in\mathbf{E}$ так, что при этом $\mathcal{W}=\mathbf{f}(x^*)$. Из (6.19) следует, что $F\notin\mathcal{W}$. Поскольку $F\in\mathcal{L}$, то $F\notin(\mathbf{E}-\mathrm{ult})[x^*]$ (см. (7.4) и определение $\mathbf{f}$), а тогда $x^*\notin F$, то есть $x^*\in G$ и, следовательно, $\mathcal{W}\in\mathbf{f}^1(G)$. Получили вложение $\mathbb{G}\subset\mathbf{f}^1(G)$, что означает справедливость равенства $\mathbf{f}^1(G)=\mathbb{G}$, из которого, согласно (8.5), вытекает включение $\mathbf{f}^1(G)\in\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]|_{\mathfrak{E}_{\mathcal{L}}}$. Так как выбор $G$ был произвольным, с учетом (1.21) и предложения 8.1 имеем требуемое утверждение. □

Из предложения 8.2 с учетом биективности $\mathbf{f}$ (как отображения из $\mathbf{E}$ в $\mathfrak{E}_{\mathcal{L}}$; см. (7.24)) следует согласно (1.23), что

$$\mathbf{f}\in(\mathrm{Hom})[\mathbf{E};\tau;\mathfrak{E}_{\mathcal{L}};\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]|_{\mathfrak{E}_{\mathcal{L}}}].\tag{8.6}$$

Согласно (8.6) $\mathbf{f}$ является гомеоморфным вложением $T_1$-пространства $(\mathbf{E},\tau)$ в компактное $T_1$-пространство

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}),\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}])\tag{8.7}$$

(см. (6.18)). При этом согласно (7.22) и (8.2) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})=\mathrm{cl}\left(\mathbf{f}^1(\mathbf{E}),\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{E}]\right)$. Тем самым реализовано «обычное» расширение Волмэна (см. [9, § 3.6], [13, с. 69]).

## § 9. Измеримое пространство с алгеброй множеств

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, фиксируем непустое множество $E$ и алгебру $\mathcal{A}\in(\mathrm{alg})[E]$ п/м упомянутого множества $E$. В виде

$$(E,\mathcal{A})\tag{9.1}$$

имеем, следовательно, измеримое пространство (ИП) с алгеброй множеств. Тогда, в частности, $\mathcal{A}\in(\mathrm{LAT})_0[E]$ (см. (1.5), (1.6), (1.8)) и, как следствие, $\mathcal{A}\in\pi[E]$. Последнее свойство позволяет рассматривать топологию (5.13), превращающую $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в хаусдорфово ТП (см. следствие 5.1). С другой стороны, имеем топологию (6.10), превращающую $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в компактное $T_1$-пространство (см. (6.18)). В настоящем разделе будет показано, что топологии (5.13) и (6.10) в рассматриваемом случае ИП с алгеброй множеств совпадают, реализуя, таким образом, компакт, отвечающий пространству стоуновского представления (см. [7, с. 26]). В этой связи отметим известное [7, § I.2] представление

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})=\{\mathcal{F}\in\mathbb{F}^*(\mathcal{A})\mid\forall A\in\mathcal{A}\quad(A\in\mathcal{F})\vee(\,E\setminus A\in\mathcal{F})\}\tag{9.2}$$

(в связи с (9.2) напомним (6.1), (6.4); см. также [5, с. 32]). Из (5.9) и (9.1) вытекает, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \setminus \Phi_{\mathcal{A}}(A) = \Phi_{\mathcal{A}}(E \setminus A) \ \ \forall A \in \mathcal{A} \tag{9.3}$$

(напомним, что согласно (1.6) и (5.9) при $L \in \mathcal{A}$ определено множество $\Phi_{\mathcal{A}}(E \setminus L)$).

**Предложение 9.1.** *Семейство* $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{A}]$ *есть неподвижная точка оператора* $\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})}$ :

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{A}] = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})}((\mathbb{UF})[E;\mathcal{A}]).$$

Доказательство легко следует из (9.3). В свою очередь, из предложения 9.1 вытекает

**Предложение 9.2.** *Топологии (5.13) и (6.10) совпадают:* $\mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E] = \mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}[E]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (6.10) и предложения 9.1 $\mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}[E] = \{\cup\}((\mathbb{UF})[E;\mathcal{A}])$, а тогда из (5.13) получаем требуемое равенство. □

**Предложение 9.3.** $\mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E] \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})]$.

Доказательство получается непосредственной комбинацией следствия 5.1 и предложения 6.1. Итак, установлено, что

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E]) \tag{9.4}$$

есть непустой компакт (здесь мы существенно дополняем (6.18)). С учетом (6.10) и предложения 9.2 получаем, что

$$\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})}\left(\mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E]\right) = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})}\left(\mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}[E]\right) = \{\cap\}((\mathbb{UF})[E;\mathcal{A}]). \tag{9.5}$$

В (9.5) имеем описание семейства множеств, замкнутых в компакте (9.4). В связи с (9.5) полезно заметить, что

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{A}] = (\mathrm{alg})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})] \tag{9.6}$$

(свойство (5.11) дополняется соотношением (9.3)) и, кроме того,

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{A}] = \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})}(\mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E]). \tag{9.7}$$

**Замечание 9.1.** Свойство (9.7) известно (см., например, [7, § I.2]), его доказательство использует компактность ТП (9.4).

Отметим, что в рассматриваемом сейчас случае ИП с алгеброй множеств

$$(E - \mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{A} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \ \ \forall x \in E. \tag{9.8}$$

**Замечание 9.2.** Свойство (9.8) вытекает из (9.2) с учетом (5.20). Разумеется, (9.8) подобно аналогичному свойству, связанному с (7.19), но устанавливается при других условиях (включение $\mathcal{A} \in (\mathrm{LAT})^0[E]$ может не выполняться).

Из (7.1) и (9.8) следует очевидное включение

$$\mathcal{A} \in (\mathbf{u} - \mathrm{LAT})_0[E]. \tag{9.9}$$

Поэтому согласно (7.3) определено (непустое) семейство $\mathfrak{E}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}))$, а также отображение $w[\mathcal{A}] = ((E - \mathrm{ult})[x] \cap \mathcal{A})_{x \in E} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})^E$, для которого реализуется следующее равенство:

$$\mathfrak{E}_{\mathcal{A}} = w[\mathcal{A}]^1(E). \tag{9.10}$$

Отметим также, что из (7.5) и (9.9) следует, в частности, система равенств

$$w[\mathcal{A}]^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(L)) = L \ \ \forall L \in \mathcal{A}. \tag{9.11}$$

Напомним, что из предложения 7.1 и (9.9) следует система равенств

$$\mathrm{cl}\left(w[\mathcal{A}]^1(L), \mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}[E]\right) = \Phi_{\mathcal{A}}(L) \ \ \forall L \in \mathcal{A}. \tag{9.12}$$

Кроме того, из предложения 7.2 и (9.9) имеем следующее свойство плотности (см. (9.10)):

$$\mathrm{cl}\left(\mathfrak{E}_{\mathcal{A}}, \mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}[E]\right) = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}). \tag{9.13}$$

Наконец, из (7.12) и (9.9) вытекает, что $\forall A_1 \in \mathcal{A}\ \forall A_2 \in \mathcal{A}$

$$(\ A_1 \cap A_2 = \varnothing) \Longrightarrow \left(\ \mathrm{cl}\left(w[\mathcal{A}]^1(A_1), \mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}[E]\right) \cap \mathrm{cl}\left(w[\mathcal{A}]^1(A_2), \mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}[E]\right) = \varnothing\right). \tag{9.14}$$

Из предложения 9.2 и (9.12) получаем, что

$$\mathrm{cl}(w[\mathcal{A}]^1(L), \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E]) = \Phi_{\mathcal{A}}(L) \ \ \forall L \in \mathcal{A}. \tag{9.15}$$

В свою очередь, из предложения 9.2 и (9.13) следует равенство

$$\mathrm{cl}(\mathfrak{E}_{\mathcal{A}}, \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E]) = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}). \tag{9.16}$$

Наконец, комбинируя предложение 9.2 и (9.14), получаем, что $\forall A_1 \in \mathcal{A}\ \forall A_2 \in \mathcal{A}$

$$(\ A_1 \cap A_2 = \varnothing) \Longrightarrow (\ \mathrm{cl}(w[\mathcal{A}]^1(A_1), \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E]) \cap \mathrm{cl}(w[\mathcal{A}]^1(A_2), \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E]) = \varnothing). \tag{9.17}$$

В связи со свойствами $w[\mathcal{A}]$ отметим следующую импликацию: $(\forall x \in E\ \forall y \in E \setminus \{x\}\ \exists A \in \mathcal{A} :$ $(x \in A)\ \&\ (y \notin A)) \Longrightarrow (\ w[\mathcal{A}] \in (\mathrm{bi})[E; \mathfrak{E}_{\mathcal{A}}])$. Итак, если исходная алгебра множеств различает точки $E$, то погружение на основе $w[\mathcal{A}]$ обладает биективностью как отображение $E$ на $\mathfrak{E}_{\mathcal{A}}$.

## § 10. Множества притяжения в классе ультрафильтров алгебры множеств

Следуем соглашениям предыдущего раздела в отношении ИП (9.1), имея в виду ИП $(E, \mathcal{A})$ с алгеброй множеств $\mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[E]$. Кроме того, фиксируем далее ТП $(\mathbf{H}, \tau)$, $\mathbf{H} \neq \varnothing$ и отображение $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$. Элементы $E$ рассматриваем в качестве (обычных) решений, а элементы $\mathbf{H}$ — в качестве оценок или результатов; $\mathbf{h}$ играет роль целевого оператора. Обычная реализация оценки $y \in \mathbf{H}$ осуществляется в виде $y = \mathbf{h}(e)$, где $e \in E$. Выбор решения $e$ может быть подчинен тем или иным дополнительным ограничениям.

Возможны, однако, и более изощренные способы реализации оценок, а точнее, варианты их реализации «в пределе», в виде элементов МП (см. определение 3.1). По ряду причин имеет смысл рассмотреть и конструкцию (3.12) при $\mathcal{L} = \mathcal{A}$. В этой связи напомним предложения 3.3 и 3.4. Одно из ограничений, связанных с упомянутым подходом, состоит в том, что в качестве «асимптотических ограничений» здесь следует использовать семейства измеримых множеств. Однако имеются некоторые возможности, связанные с эквивалентными в некотором смысле преобразованиями упомянутых семейств.

Если $\mathcal{E}$ — непустое семейство п/м $E$, то есть $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то полагаем, что

$$\mathfrak{Z}(\mathcal{E}|E) \triangleq \{\ L \in \mathcal{P}(E) \mid \exists H \in \mathcal{E} :\ H \subset L\};$$

при этом, конечно, $\mathcal{E} \subset \mathfrak{Z}(\mathcal{E}|E)$, $\mathfrak{F}_0[E|\mathcal{E}] = \mathfrak{F}_0[E|\mathfrak{Z}(\mathcal{E}|E)]$ и $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] = \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathfrak{Z}(\mathcal{E}|E)]$. Отметим здесь же, что $\mathfrak{Z}(\mathcal{B}|E) = (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]$ при $\mathcal{B} \in \beta_0[E]$. Более того,

$$\beta_0[E] = \{\ \mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \mid \mathfrak{Z}(\mathcal{B}|E) \in \mathfrak{F}[E]\}.$$

Отметим очевидное следствие: если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] = (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathfrak{Z}(\mathcal{E}|E)]. \tag{10.1}$$

Кроме того, напомним, что для всякого семейства $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ $\mathfrak{F}_0[E|\mathcal{E}] = \mathfrak{F}_0[E|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})]$ и $\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] = \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})]$; как следствие (см. (3.6))

$$(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathcal{E}] = (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})]. \tag{10.2}$$

Рассмотрим естественную комбинацию (10.1) и (10.2); для этого отметим, что при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ непременно $\mathfrak{Z}(\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})|E) \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ : $\mathcal{E} \subset \mathfrak{Z}(\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})|E)$. При этом, конечно, справедливы следующие два равенства: ( $\mathfrak{F}_0[E|\mathcal{E}] = \mathfrak{F}_0[E|\mathfrak{Z}(\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})|E)]$) & ($\mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathcal{E}] = \mathfrak{F}^0_{\mathbf{u}}[E|\mathfrak{Z}(\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})|E)]$). Из этих соотношений и положений § 3 вытекает, что

$$(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathcal{E}] = (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathfrak{Z}(\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})|E)] \ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \tag{10.3}$$

В связи с (10.3) полезно учесть то, что при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, $A \in \mathfrak{Z}(\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})|E)$ и $B \in \mathfrak{Z}(\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})|E)$ непременно $A \cap B \in \mathfrak{Z}(\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})|E)$. Как следствие при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ имеем следующее равенство $\mathfrak{Z}(\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})|E) = \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathfrak{Z}(\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})|E))$, а потому $\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathfrak{Z}(\mathcal{E}|E)) \subset \mathfrak{Z}(\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})|E)$. С этой точки зрения последовательность преобразований семейства п/м $E$, принятая в (10.3), представляется логичной и мы будем ей следовать. Отметим, что в качестве $\mathcal{E}$ можно использовать непустое подсемейство $\mathcal{A}$, поскольку $\mathcal{P}'(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. С учетом (10.3) и предложения 3.4 получаем, в частности, что

$$\begin{gathered}(\forall y \in \mathbf{H}\ \exists \mathcal{Y} \in (y-\mathrm{bas})[\tau]:\ \mathbf{h}^{-1}[\mathcal{Y}] \subset \mathcal{A}) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow ((\mathcal{A}-\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathcal{E}] = (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathfrak{Z}(\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})|E)] \ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{A})).\end{gathered} \tag{10.4}$$

Следовательно, в условиях истинности посылки (10.4) МП вида (3.12) могут обслуживать многие постановки, в которых ограничения асимптотического характера уже необязательно порождаются семейством $\mathcal{A}$-измеримых множеств (заметим здесь же, что использование в (10.4) (в качестве $\mathcal{A}$) именно алгебры множеств вовсе не обязательно — можно было бы рассматривать более общий случай $\mathcal{A} \in \pi[E]$,— но представляется более реалистичным с точки зрения вопроса об истинности посылки (10.4)). В то же время для таких МП удается реализовать процедуру компактификации пространства обычных решений, подобную используемой в предложении 5.2.1 монографии [4]. Напомним, что при $\mathcal{L} = \mathcal{A}$ справедливы предложения 3.2 – 3.4, дополняющие (10.4). Отметим простое следствие свойства, отмеченного в [15, (10.6.13)]:

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{A} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}) \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \tag{10.5}$$

(напомним, что $\mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[E]$). Комбинируя (5.19) и (10.5), получаем следующее равенство

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}) = \{\, \mathcal{U} \cap \mathcal{A} :\ \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]\}. \tag{10.6}$$

Из (10.6) видно, что у/ф ИП $(E, \mathcal{A})$ суть следы (на $\mathcal{A}$) у/ф множества $E$ и только они.

## § 11. Ультрарешения

В пределах настоящего раздела фиксируем непустое множество $E$, ТП $(\mathbf{H}, \tau)$, $\mathbf{H} \neq \varnothing$, и отображение $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$. Рассматриваем непустое множество $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и базы фильтров вида $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]$, $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. Ниже исследуются вопросы сходимости этих баз при естественных ограничениях на выбор $\mathcal{U}$. Следуя [16], полагаем, что

$$(\mathbf{h}-\mathrm{LIM})[\mathcal{U}|\tau] \triangleq \left\{ z \in \mathbf{H} \mid \mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} z \right\}. \tag{11.1}$$

Тогда [16] справедливы следующие свойства:
1')если $\tau \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})[\mathbf{H}]$, то $(\mathbf{h}-\mathrm{LIM})[\mathcal{U}|\tau] \in \mathcal{P}'\left(\mathrm{cl}\left(\mathbf{h}^1(E), \tau\right)\right)$ $\forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$;
2') если $\tau \in (\mathrm{top})_0[\mathbf{H}]$, то $\forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[\mathbf{H}]\ \forall y_1 \in \mathbf{H}\ \forall y_2 \in \mathbf{H}$ $\left(\left(\mathcal{F} \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y_1\right) \ \&\ \left(\mathcal{F} \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} y_2\right)\right) \Longrightarrow (y_1 = y_2)$;
3') если $\tau \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})_0[\mathbf{H}]$, то $\forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]\ \exists! z \in \mathbf{H} :\ (\mathbf{h}-\mathrm{LIM})[\mathcal{U}|\tau] = \{z\}$.

Всюду до конца настоящего раздела полагаем, что

$$\tau \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})_0[\mathbf{H}]. \tag{11.2}$$

**Замечание 11.1.** Условие (11.2) характеризует компактифицируемые задачи о достижимости, рассматриваемые в [4,5,17,18]. Рассмотрим вариант такой конструкции, полагая заданным хаусдорфово ТП $(\mathbf{Z}, \theta)$, $\mathbf{Z} \neq \varnothing$, для которого $\mathbf{h} \in \mathbf{Z}^E$. Итак, $\theta \in (\mathrm{top})_0[\mathbf{Z}]$; ТП $(\mathbf{H}, \tau)$ пока заданным не предполагаем (в пределах данного замечания). Допустим, однако, что выполнено условие, подобное используемому в предложении 5.2.1 монографии [4]: существуют (компактное) ТП $(K, t)$, $K \neq \varnothing$, $t \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[K]$, а также отображения $m \in K^E$ и $g \in C(K, t, \mathbf{Z}, \theta)$, реализующие $\mathbf{h}$ в виде суперпозиции $\mathbf{h} = g \circ m$. Тогда (см. следствие 3.1 работы [19])

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{Z}; \theta; \mathbf{h}; \mathcal{E}] = g^1((\mathbf{as})[E; K; t; m; \mathcal{E}]) \ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \tag{11.3}$$

Вместе с тем $g^1(K) \in (\theta - \mathrm{comp})[\mathbf{Z}]$ (см. [5, (2.8.5)]) и, в силу отделимости ТП $(\mathbf{Z}, \theta)$, $g^1(K) \in \mathbf{C}_{\mathbf{Z}}(\theta)$. С учетом этого (см. также (11.3)) полагаем, что $\mathbf{H} \triangleq g^1(K)$ и $\tau \triangleq \theta|_{\mathbf{H}}$, получая в виде $(\mathbf{H}, \tau)$ замкнутое п/п ТП $(\mathbf{Z}, \theta)$. Более того, $\tau \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})_0[\mathbf{H}]$ в силу компактности $\mathbf{H}$ и отделимости $(\mathbf{Z}, \theta)$. Согласно (11.3)

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{Z}; \theta; \mathbf{h}; \mathcal{E}] \subset g^1(K) = \mathbf{H}. \tag{11.4}$$

В связи с (11.4) отметим также, что при $e \in E$ $\mathbf{h}(e) = g(m(e)) \in \mathbf{H}$, так как $m(e) \in K$. В этом случае при всяком выборе направленности $(D, \preceq, f)$ в множестве $E$ и точки $y \in \mathbf{H}$ для направленности $(D, \preceq, \mathbf{h} \circ f)$ в $\mathbf{H}$ имеем свойство

$$\Big((D, \preceq, \mathbf{h} \circ f) \xrightarrow{\tau} y\Big) \Longleftrightarrow \Big((D, \preceq, \mathbf{h} \circ f) \xrightarrow{\theta} y\Big)\,; \tag{11.5}$$

см. [5, (2.3.9)]. Тогда согласно определению 3.1 имеем при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ вложение

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] \subset (\mathbf{as})[E; \mathbf{Z}; \theta; \mathbf{h}; \mathcal{E}]. \tag{11.6}$$

Фиксируем $\mathcal{E}_0 \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и точку $y_0 \in (\mathbf{as})[E; \mathbf{Z}; \theta; \mathbf{h}; \mathcal{E}_0]$. Тогда согласно (11.4) $y_0 \in \mathbf{H}$. При этом (см. определение 3.1) для некоторой направленности $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \varphi)$ в $E$

$$(\mathcal{E}_0 \subset (E - \mathrm{ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; \varphi]) \ \& \ \Big((\mathbb{D}, \sqsubseteq, \mathbf{h} \circ \varphi) \xrightarrow{\theta} y_0\Big). \tag{11.7}$$

С учетом (11.5) и свойства $y_0 \in \mathbf{H}$ имеем из (11.7), что

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \mathbf{h} \circ \varphi) \xrightarrow{\tau} y_0. \tag{11.8}$$

Комбинируя (11.8) и первое положение в (11.7), получаем (см. определение 3.1) включение $y_0 \in (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}_0]$. Поскольку выбор $y_0$ был произвольным, установлено вложение $(\mathbf{as})[E; \mathbf{Z}; \theta; \mathbf{h}; \mathcal{E}_0] \subset (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}_0]$; тогда (см. (11.6)) $(\mathbf{as})[E; \mathbf{Z}; \theta; \mathbf{h}; \mathcal{E}_0] = (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}_0]$. Следовательно, $(\mathbf{as})[E; \mathbf{Z}; \theta; \mathbf{h}; \mathcal{E}] = (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}]$ $\forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. Итак, все МП в условиях компактифицируемости, понимаемых в «обычном» смысле [4, с. 147], сводятся к МП в компакте, являющемся п/п исходного хаусдорфова пространства оценок (результатов). Поскольку тем самым охватываются случаи постановок, допускающих традиционные варианты расширений (см., например, нелинейные задачи управления с геометрическими ограничениями), условие (11.2) представляется достаточно реалистичным.

Возвращаясь к 3') и (11.2), отметим, что

$$\forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \ \exists! z \in \mathbf{H} : \ (\mathbf{h} - \mathrm{LIM})[\mathcal{U}|\tau] = \{z\}. \tag{11.9}$$

Из (11.9) вытекает, что $\exists! g \in \mathbf{H}^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]}$ : $(\mathbf{h} - \mathrm{LIM})[\mathcal{U}|\tau] = \{g(\mathcal{U})\}$ $\forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. С учетом этого мы, следуя [16], введем оператор

$$\mathfrak{H}[\tau] \in \mathbf{H}^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]} \tag{11.10}$$

посредством соглашения: если $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, то

$$\mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U}) \in \mathbf{H} : \ (\mathbf{h} - \mathrm{LIM})[\mathcal{U}|\tau] = \{\mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U})\}. \tag{11.11}$$

При этом, конечно, согласно 1') имеем, что $\mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U}) \in \mathrm{cl}\left(\mathbf{h}^1(E), \tau\right) \quad \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. В силу (11.2) $\mathrm{cl}\left(\mathbf{h}^1(E), \tau\right) \in (\tau-\mathrm{comp})[\mathbf{H}]$ и

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} \mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U}) \;\; \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{11.12}$$

С учетом (2.9) уместно ввести отображение

$$(E-\mathrm{ult})[\cdot] \triangleq ((E-\mathrm{ult})[x])_{x\in E} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]^E. \tag{11.13}$$

Тогда (см. [16]) справедливо следующее очевидное равенство:

$$\mathbf{h} = \mathfrak{H}[\tau] \circ (E-\mathrm{ult})[\cdot]. \tag{11.14}$$

Напомним также еще одно свойство, используемое в [16],

$$\bigcap_{A\in\mathcal{U}} \mathrm{cl}\left(\mathbf{h}^1(A), \tau\right) = \{\mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U})\} \;\; \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{11.15}$$

**Замечание 11.2.** Проверим (11.15), фиксируя $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и полагая $u \triangleq \mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U})$; из (11.1) следует, что $u \in \mathbf{H}: \;\; \mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} u$. Это означает, что $N_\tau(u) \subset (\mathbf{H}-\mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]]$. Поэтому $\forall T \in N_\tau(u)\ \exists U \in \mathcal{U}: \;\; \mathbf{h}^1(U) \subset T$. Пусть $\mathbb{A} \in \mathcal{U}$. Тогда $\mathbf{h}^1(\mathbb{A}) \in \mathbf{h}^1[\mathcal{U}]$, где $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[\mathbf{H}]$; см. (3.1). Пусть теперь $S \in N_\tau(u)$, а $U_S \in \mathcal{U}$ обладает свойством $\mathbf{h}^1(U_S) \subset S$. Тогда по аксиомам фильтра $\mathbb{A} \cap U_S \neq \varnothing$ и при этом $\mathbf{h}^1(\mathbb{A} \cap U_S) \subset \mathbf{h}^1(\mathbb{A}) \cap \mathbf{h}^1(U_S) \subset \mathbf{h}^1(\mathbb{A}) \cap S$, где $\mathbf{h}^1(\mathbb{A} \cap U_S) \neq \varnothing$. Поэтому $\mathbf{h}^1(\mathbb{A}) \cap S \neq \varnothing$. Поскольку выбор $S$ был произвольным, установлено, что $\mathbf{h}^1(\mathbb{A}) \cap Y \neq \varnothing \;\; \forall Y \in N_\tau(u)$. Это означает, что $u \in \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbb{A}), \tau)$. Коль скоро и выбор $\mathbb{A}$ был произвольным, установлено, что $u \in \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(A), \tau) \;\; \forall A \in \mathcal{U}$. Итак, $\{u\}$ содержится в пересечении всех множеств $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(A), \tau), \; A \in \mathcal{U}$. Выберем произвольно

$$q \in \bigcap_{A\in\mathcal{U}} \mathrm{cl}\left(\mathbf{h}^1(A), \tau\right). \tag{11.16}$$

Тогда $q \in \mathbf{H}$ и при этом $T \cap \mathbf{h}^1(A) \neq \varnothing \quad \forall A \in \mathcal{U}\ \forall T \in N_\tau(q)$. Пусть $W \in N_\tau(q)$; тогда имеем, как следствие, что $W \cap \Lambda \neq \varnothing \quad \forall \Lambda \in \mathbf{h}^1[\mathcal{U}]$. Тем более, $W \cap M \neq \varnothing \quad \forall M \in (\mathbf{H}-\mathbf{fi})\left[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]\right]$; см. (2.4). С учетом (4.1) получаем, что $W \in ((\mathbf{H}-\mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]]-\mathrm{set})[\mathbf{H}]$, где согласно (3.3) $(\mathbf{H}-\mathbf{fi})\left[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]\right] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{H}]$. С учетом (5.8) получаем (см. [15, с. 354]), что $((\mathbf{H}-\mathbf{fi})\left[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]\right]-\mathrm{set})[\mathbf{H}] = (\mathbf{H}-\mathbf{fi})\left[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]\right]$, а тогда $W \in (\mathbf{H}-\mathbf{fi})\left[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]\right]$. Тем самым установлено вложение $N_\tau(q) \subset (\mathbf{H}-\mathbf{fi})\left[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]\right]$. Поэтому (см. (2.5)) $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} q$. Следовательно, имеем следующие два свойства: $\left(\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} u\right) \;\;\&\;\; \left(\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} q\right)$. С учетом 2') $u = q$ (см. также (2.5), (2.6)), а тогда $q \in \{u\}$. Поскольку выбор $q$ (см. (11.16)) был произвольным, установлено вложение $\bigcap\limits_{A\in\mathcal{U}} \mathrm{cl}\left(\mathbf{h}^1(A), \tau\right) \subset \{u\}$.

Поскольку $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \subset \beta_0[E] \subset \beta[E]$, из (3.7) и (11.15) следует, что

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{U}] = \{\mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U})\} \;\; \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E].$$

Иными словами, при использовании у/ф множества $E$ в качестве «асимптотических ограничений» соответствующее МП непременно будет одноэлементным.

## § 12. Ультрафильтры алгебры множеств как обобщенные решения в задаче об асимптотической достижимости

Сохраняем в силе все предположения, сделанные в начале § 9, фиксируя непустое множество $E$, а также алгебру множеств $\mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[E]$; итак, у нас фиксировано ИП (9.1). Пусть, кроме того, фиксировано ТП $(\mathbf{H}, \tau), \; \mathbf{H} \neq \varnothing$, и оператор $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$. Полагаем выполненным условие (11.2);

следовательно, в дальнейшем изложении (настоящего раздела) $(\mathbf{H},\tau)$— непустой компакт, а потому определен оператор $\mathfrak{H}[\tau]$ (11.10), (11.11). Напомним, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \subset \mathbb{F}^*(\mathcal{A}) \subset \beta_0[E]$, а тогда согласно (3.1) $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[\mathbf{H}]\ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$. Согласно (10.5)

$$\mathbf{h}^1[\tilde{\mathcal{U}} \cap \mathcal{A}] \in \beta_0[\mathbf{H}]\ \ \forall \tilde{\mathcal{U}} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{12.1}$$

Поэтому (см. (12.1)) мы можем использовать в данной конкретной ситуации аппарат сходимости на основе (2.5). Всюду в дальнейшем полагаем, что выполнено следующее

**Условие 12.1.** $\forall z \in \mathbf{H}\ \exists \mathcal{Z} \in (z-\mathrm{bas})[\tau]:\ \mathbf{h}^{-1}[\mathcal{Z}] \subset \mathcal{A}$.

**Предложение 12.1.** $\mathbf{h}^1[\mathcal{U} \cap \mathcal{A}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} \mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U})\ \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$.

Доказательство следует (при условии 12.1) из (11.12).

**Следствие 12.1.** $\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})\ \exists! z \in \mathbf{H}:\ \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} z$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем у/ф $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$, после чего подберем, используя (10.6), у/ф $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ такой, что $\mathcal{F} = \mathcal{U} \cap \mathcal{A}$. Согласно (11.11) $\mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U}) \in \mathbf{H}$. С учетом предложения 12.1 имеем по выбору $\mathcal{U}$ сходимость $\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} \mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U})$. Если же $y \in \mathbf{H}$ и при этом $\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} y$, то из (2.5), (2.6) и свойства 2') § 11 получаем равенство $y = \mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U})$. □

Из следствия 12.1 вытекает, что $\exists! g \in \mathbf{H}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})}:\ \ \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} g(\mathcal{F})\ \ \ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$. С учетом этого введем следующее определение: пусть отображение $\mathfrak{H}_{\mathcal{A}}[\tau]:\ \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{H}$ таково, что $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$

$$\mathfrak{H}_{\mathcal{A}}[\tau](\mathcal{U}) \in \mathbf{H}:\ \mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} \mathfrak{H}_{\mathcal{A}}[\tau](\mathcal{U}). \tag{12.2}$$

Согласно (10.6) при $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ определен элемент $\mathfrak{H}_{\mathcal{A}}[\tau](\mathcal{U} \cap \mathcal{A}) \in \mathbf{H}$ и при этом $\mathbf{h}^1[\mathcal{U} \cap \mathcal{A}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} \mathfrak{H}_{\mathcal{A}}[\tau](\mathcal{U} \cap \mathcal{A})$; с учетом предложения 12.1, (10.6) и (12.2) получаем равенство

$$\mathfrak{H}_{\mathcal{A}}[\tau](\mathcal{U} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U}). \tag{12.3}$$

**Предложение 12.2.** *Если* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ *и* $U \in \mathcal{U}$, *то* $\mathfrak{H}_{\mathcal{A}}[\tau](\mathcal{U}) \in \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(U), \tau)$.

Доказательство легко следует из (10.6), (11.15) и (12.3). В связи с (11.2) отметим, что (см. [13, с. 15]) ТП $(\mathbf{H},\tau)$ регулярно:

$$\forall y \in \mathbf{H}\ \exists \mathfrak{Y} \in (y-\mathrm{bas})[\tau]:\ \mathfrak{Y} \subset \mathbf{C}_{\mathbf{H}}(\tau). \tag{12.4}$$

**Предложение 12.3.** *Отображение* $\mathfrak{H}_{\mathcal{A}}[\tau]$ *непрерывно:* $\mathfrak{H}_{\mathcal{A}}[\tau] \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E], \mathbf{H}, \tau)$.

Доказательство фактически повторяет подобное рассуждение в [16] (имеется в виду аналогичное свойство оператора $\mathfrak{H}[\tau]$), и мы ограничимся изложением схемы, фиксируя $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ и полагая $z \triangleq \mathfrak{H}_{\mathcal{A}}[\tau](\mathcal{U})$; тогда $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} z$ согласно (12.2). При этом $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[\mathbf{H}]$ и фильтр $\mathcal{H} \triangleq (\mathbf{H}-\mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]]$ обладает свойством $N_\tau(z) \subset \mathcal{H}$, а потому

$$\forall S \in N_\tau(z)\ \exists U \in \mathcal{U}:\ \mathbf{h}^1(U) \subset S. \tag{12.5}$$

Используя (12.4), выберем $\mathcal{Z} \in (z-\mathrm{bas})[\tau]$ так, что при этом $\mathcal{Z} \subset \mathbf{C}_{\mathbf{H}}(\tau)$. Пусть $\mathbf{N} \in N_\tau(z)$. Тогда найдется множество $\mathbf{F} \in \mathcal{Z}$, обладающее свойством $\mathbf{F} \subset \mathbf{N}$. При этом $\mathbf{F} \in \mathbf{C}_{\mathbf{H}}[\tau]$. Кроме того, по выбору $\mathbf{F}$ имеем, в частности, что $\mathbf{F} \in N_\tau(z)$ и согласно (12.5) для некоторого $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$ имеет место вложение $\mathbf{h}^1(\mathbf{U}) \subset \mathbf{F}$. Согласно (1.15) и (5.16) $\Phi_{\mathcal{A}}(\mathbf{U}) \in N_{\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]}(\mathcal{U})$. Пусть $\tilde{z} \in \mathfrak{H}_{\mathcal{A}}[\tau]^1(\Phi_{\mathcal{A}}(\mathbf{U}))$; подберем $\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{A}}(\mathbf{U})$ так, что $\tilde{z} = \mathfrak{H}_{\mathcal{A}}[\tau](\mathcal{V})$. Тогда согласно (5.9) $\mathbf{U} \in \mathcal{V}$ и (см. предложение 12.2) $\tilde{z} \in \mathrm{cl}\big(\mathbf{h}^1(\mathbf{U}), \tau\big)$, где $\mathrm{cl}\big(\mathbf{h}^1(\mathbf{U}), \tau\big) \subset \mathbf{F}$ в силу замкнутости $\mathbf{F}$; в итоге $\tilde{z} \in \mathbf{F}$ и, в частности, $\tilde{z} \in \mathbf{N}$. Итак, установлено вложение $\mathfrak{H}_{\mathcal{A}}[\tau]^1(\Phi_{\mathcal{A}}(\mathbf{U})) \subset \mathbf{N}$. Поскольку выбор окрестности $\mathbf{N}$ был произвольным, установлено, что $\forall S \in N_\tau(\mathfrak{H}_{\mathcal{A}}[\tau](\mathcal{U}))\ \exists T \in N_{\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]}(\mathcal{U})$ : $\mathfrak{H}_{\mathcal{A}}[\tau]^1(T) \subset S$. Коль скоро и выбор $\mathcal{U}$ был произвольным, предложение доказано. □

Напомним, что, как легко видеть (см. построения § 9, а также (11.14)),

$$\mathbf{h} = \mathfrak{H}_{\mathcal{A}}[\tau] \circ w[\mathcal{A}]. \tag{12.6}$$

Предложение 12.3 и свойство (12.6) позволяют рассматривать набор

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E], w[\mathcal{A}], \mathfrak{H}_{\mathcal{A}}[\tau]) \tag{12.7}$$

как своеобразный компактификатор в смысле предложения 5.2.1 монографии [4]. При этом (см. предложение 3.1 и следствие 3.1 работы [19])

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] = \mathfrak{H}_{\mathcal{A}}[\tau]^1((\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}); \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]; w[\mathcal{A}]; \mathcal{E}]) \ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \tag{12.8}$$

Отметим, что $\mathcal{P}'(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, что позволяет применять (12.8) в случае, когда ограничения асимптотического характера определяются непустым подсемейством $\mathcal{A}$. Здесь, впрочем, можно использовать конструкцию на основе (10.4) в сочетании с условием 12.1 (см. также предложение 3.4).

## § 13. Представление обобщенных решений

Сохраняем в отношении $E$, $\mathcal{A}$, $\mathbf{H}$, $\tau$ и $\mathbf{h}$ все предположения предыдущего раздела, включая (11.2) и условие 12.1. Напомним, в частности, что (9.1) есть ИП с алгеброй множеств. На основе (12.7) было установлено представление (12.8), которое может рассматриваться в качестве варианта конструкции, используемой в [4, § 5.2], [19] и во многих других работах. В связи с (12.8) представляет интерес изучение множеств $(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}); \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]; w[\mathcal{A}]; \mathcal{E}]$, $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. В частности, оказывается полезным рассмотрение случаев, когда $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{A})$. Это связано со следующим положением.

**Предложение 13.1.** *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{A})$, *то* $(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}); \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]; w[\mathcal{A}]; \mathcal{E}] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{F} \in (\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}); \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]; w[\mathcal{A}]; \mathcal{E}]$. Тогда согласно определению 3.1 $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ и для некоторой направленности $(D, \preceq, f)$ в $E$

$$(\mathcal{E} \subset (E - \mathrm{ass})[D; \preceq; f]) \ \& \ \left((D, \preceq, w[\mathcal{A}] \circ f) \stackrel{\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]}{\longrightarrow} \mathcal{F}\right). \tag{13.1}$$

Пусть $A \in \mathcal{E}$. Покажем, что $A \in \mathcal{F}$. Для этого подберем с учетом первого положения в (13.1) такой элемент $d_1 \in D$, что $\forall d \in D \quad (d_1 \preceq d) \Longrightarrow (f(d) \in A)$. Поскольку $A \in \mathcal{A}$, то согласно (9.2) имеем, что $(A \in \mathcal{F}) \vee (E \setminus A \in \mathcal{F})$. Допустим, что $E \setminus A \in \mathcal{F}$. Для множества $\Phi_{\mathcal{A}}(E \setminus A) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \mid E \setminus A \in \mathcal{U}\} \in (\mathbb{UF})[E; \mathcal{A}]$ имеем очевидное свойство $\Phi_{\mathcal{A}}(E \setminus A) \in N_{\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]}(\mathcal{F})$; см. (5.13). Поэтому (см. второе положение в (13.1)) существует $d_2 \in D$ такое, что $\forall d \in D$ $(d_2 \preceq d) \Longrightarrow ((w[\mathcal{A}] \circ f)(d) \in \Phi_{\mathcal{A}}(E \setminus A))$. Используя аксиомы НМ, подберем $d_3 \in D$ так, что $(d_1 \preceq d_3) \ \& \ (d_2 \preceq d_3)$. По выбору $d_1$ имеем $f(d_3) \in A$. С другой стороны, $(w[\mathcal{A}] \circ f)(d_3) \in \Phi_{\mathcal{A}}(E \setminus A)$. Следовательно, $f(d_3) \in E$ обладает тем свойством, что $E \setminus A \in w[\mathcal{A}](f(d_3))$. В частности (см. (7.4)) $E \setminus A \in (E - \mathrm{ult})[f(d_3)]$, что означает согласно (2.9) справедливость включения $f(d_3) \in E \setminus A$; последнее невозможно, так как $f(d_3) \in A$. Полученное (при условии $E \setminus A \in \mathcal{F}$) противоречие показывает, что на самом деле $A \in \mathcal{F}$. Итак, $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Поэтому (см. (2.17)) $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E})$. Следовательно, $(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}); \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]; w[\mathcal{A}]; \mathcal{E}] \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E})$.

Выберем произвольный у/ф $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E})$. Тогда $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ и при этом $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$. Тогда [4, (3.3.7)] из (9.10) и (9.16) следует, что для некоторой направленности $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \varphi)$ в $E$

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, w[\mathcal{A}] \circ \varphi) \stackrel{\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]}{\longrightarrow} \mathcal{U} \tag{13.2}$$

(используем аксиому выбора). Покажем, что справедливо вложение

$$\mathcal{E} \subset (E - \mathrm{ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; \varphi]. \tag{13.3}$$

В самом деле, пусть $\Omega \in \mathcal{E}$. Тогда, в частности, $\Omega \in \mathcal{U}$. С учетом (1.15) и (5.16) имеем включение $\Phi_{\mathcal{A}}(\Omega) \in N_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E]}(\mathcal{U})$. Из (13.2) вытекает, что для некоторого $\mathbf{d} \in \mathbb{D}$ истинна при $\delta \in \mathbb{D}$ следующая импликация $(\mathbf{d} \sqsubseteq \delta) \Longrightarrow ((w[\mathcal{A}] \circ \varphi)(\delta) \in \Phi_{\mathcal{A}}(\Omega))$. Выберем (произвольно) и зафиксируем $\delta_* \in \mathbb{D}$ такое, что $\mathbf{d} \sqsubseteq \delta_*$. Тогда $\varphi(\delta_*) \in E$ обладает свойством $(w[\mathcal{A}] \circ \varphi)(\delta_*) \in \Phi_{\mathcal{A}}(\Omega)$, из которого следует согласно (5.9), что у/ф $(w[\mathcal{A}] \circ \varphi)(\delta_*) = w[\mathcal{A}](\varphi(\delta_*))$ содержит множество $\Omega$, то есть $\Omega \in w[\mathcal{A}](\varphi(\delta_*))$. При этом (см. § 9) $w[\mathcal{A}](\varphi(\delta_*)) = (E - \mathrm{ult})[\varphi(\delta_*)] \cap \mathcal{A}$, а потому $\Omega \in (E - \mathrm{ult})[\varphi(\delta_*)]$ и, следовательно, $\varphi(\delta_*) \in \Omega$ согласно (2.9). Итак, $(\mathbf{d} \sqsubseteq \delta_*) \Longrightarrow (\varphi(\delta_*) \in \Omega)$. Следовательно, непременно $\exists d_1 \in \mathbb{D}\ \forall \delta \in \mathbb{D} \quad (d_1 \sqsubseteq \delta) \Longrightarrow (\varphi(\delta) \in \Omega)$. Поэтому $\Omega \in (E - \mathrm{ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; \varphi]$, чем и завершается проверка (13.3). Комбинируя (13.2) и (13.3), получаем, что $\mathcal{U} \in (\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E]; w[\mathcal{A}]; \mathcal{E}]$. Итак, имеем вложение $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E}) \subset (\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E]; w[\mathcal{A}]; \mathcal{E}]$.□

**Теорема 13.1.** *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{A})$, *то* $(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] = \mathfrak{H}_{\mathcal{A}}[\tau]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E}))$.

Доказательство получается непосредственной комбинацией (12.8) и предложения 13.1.

**Следствие 13.1.** *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{A})$, *то* $(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathfrak{Z}(\{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})|E)] = \mathfrak{H}_{\mathcal{A}}[\tau]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}|\mathcal{E}))$.

Доказательство получается комбинацией (10.3) и теоремы 13.1.

В конструкциях двух последних разделов для целей расширения абстрактной задачи о достижимости использовалось пространство Стоуна. В связи с применением таких пространств в топологии отметим расширение Белла [20] и следующие две недавние работы, связанные с исследованием свойств данного расширения (см. [21, 22]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977. — 624 с.
2. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 475 с.
3. Ченцов А. Г. Представление максимина в игровой задаче с ограничениями асиптотического характера // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2010. — Вып. 3 — С. 105–119.
4. Chentsov A. G. Asymptotic attainability. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1997. — 322 p.
5. Chentsov A. G. and Morina S. I. Extensions and Relaxations. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 408 p.
6. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. — М.: Мир, 1970. — 416 с.
7. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. — М.: Мир, 1969. — 309 с.
8. Бурбаки Н. Общая топология. — М.: Наука, 1968. — 272 с.
9. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 751 с.
10. Келли Дж. Л. Общая топология. — М.: Наука, 1981. — 431 с.
11. Гретцер Г. Общая теория решеток. — М.: Мир, 1982. — 452 с.
12. Ченцов А. Г. Несеквенциальные приближенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Труды Института математики и механики УрО РАН. — Екатеринбург, 2006. — Т. 12, №1. — С. 216–241.
13. Архангельский А. В. Компактность // Итоги науки и техники. Фундаментальные направления. — Т. 50. — С. 5–128.
14. Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979. — 336 с.

15. Ченцов А. Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. — Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2010. — 541 с.

16. Ченцов А. Г. Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна–Чеха // Современная математика и ее приложения. Академия наук Грузии. Институт кибернетики, 2005. — Т. 26. — С. 119–150.

17. Chentsov A. G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. New York, London, and Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. — 244 p.

18. Chentsov A. G. Finitely Additive Measures and Extensions of Abstract Control Problems // Journal of Mathematical Sciences, 2006. — Vol. 133, №2, — P. 1045–1206 (Contemporary Mathematics and its Applications, vol. 17, Optimal Control, 2006).

19. Ченцов А. Г. Расширения абстрактных задач о достижимости: несеквенциальная версия // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2007. — Т. 13, №2. — С. 184–217.

20. Bell M. G. Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. — 1980. — Vol. 5. — P. 11–25.

21. Бастрыков Е. С. О некоторых точках расширения Белла счетного дискретного пространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Вып. 4 — С. 3–6.

22. Грызлов А. А., Бастрыков Е. С., Головастов Р. А. О точках одного бикомпактного расширения N // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2010. — Вып. 3 — С. 10–17.

Поступила в редакцию 01.09.10

***A. G. Chentsov***

**Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets**

The abstract attainability problem with constraints of asymptotic character is considered; for this problem, the nonsequential (generally speaking) attraction set obtained by the comparison to the solution an attraction element is constructed. Self solutions are defined as nets, filters, or ultrafilters of the space of usual solutions (each of the above-mentioned classes is sufficient for constructing of attraction set). Main attention are given to questions of constructing of attraction sets in the class of measurable spaces interpreted very broad (spaces with the families closed with respect to intersections, measurable spaces with algebras of sets and so forth). The construction arising under consideration of ultrafilters of lattices of sets is used as instrument of investigation.

*Keywords*: attraction set, topological space, ultrafilter.

Mathematical Subject Classifications: 28A33

Ченцов Александр Георгиевич, член-корреспондент РАН, отдел управляемых систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru