МАТЕМАТИКА 2011. Вып. 1

УДК 517.958: 530.145.6

© *Т. С. Тинюкова*

УРАВНЕНИЕ ЛИППМАНА – ШВИНГЕРА ДЛЯ КВАНТОВЫХ ПРОВОЛОК

Для дискретного оператора Шредингера на графе с вершинами на пересечении двух прямых с потенциалом определенного вида в окрестностях точек ± 2 (граничных точек существенного спектра) доказаны существование и единственность квазиуровней (собственных значений или резонансов), для них получены асимптотические формулы. Найдены условия, при которых коэффициент отражения равен нулю.

Ключевые слова: резонанс, собственное значение, дискретное уравнение Липпмана–Швингера.

Введение

В пространстве $l^2(\Gamma)$, где $\Gamma = (\mathbb{Z}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbb{Z})$, рассматривается ограниченный самосопряженный оператор $H_V = H + V$, где H действует следующим образом:

$$\begin{aligned}(H\psi)(0,0) &= \psi(1,0)+\psi(-1,0)+\psi(0,1)+\psi(0,-1),\\ (H\psi)(n,0) &= \psi(n-1,0)+\psi(n+1,0), \quad n\neq 0,\\ (H\psi)(0,m) &= \psi(0,m-1)+\psi(0,m+1), \quad m\neq 0.\end{aligned}$$

Здесь V — это оператор умножения на функцию

$$V(n,m) = \begin{cases} V_0(\delta_{n,N}+\delta_{n,-N}), & m=0,\\ 0, & n=0\end{cases}$$

при некотором натуральном N, δ_{nm} — символ Кронекера.

Данный оператор является гамильтонианом электрона вблизи пересечения двух квантовых проволок (см. [1, 2]), при этом потенциал V описывает влияние примесей. Существенный спектр оператора H_V равен $[-2,2]$ (см. [3]).

В настоящей статье доказаны существование и единственность квазиуровней (резонансов или собственных значений) в окрестностях точек ± 2 для всех достаточно малых V_0, получены асимптотические формулы для квазиуровней. Кроме того, доказано существование точек в $(-2,2)$, в которых коэффициент отражения в обычной задаче рассеяния равен нулю для всех достаточно больших V_0; для данных точек получены асимптотические выражения.

§ 1. Квазиуровни оператора H_V

Спектр оператора A будем обозначать $\sigma(A)$. Рассмотрим оператор H_0, действующий в $l^2(\mathbb{Z})$ по формуле

$$(H_0\psi)(n) = \psi(n+1)+\psi(n-1), \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Известно [4], что $\sigma(H_0) = [-2,2]$.

Обратная функция к функции Жуковского $z = \dfrac{1}{2}\left(w+\dfrac{1}{w}\right)$ имеет вид

$$w = g(z) = z - \sqrt{z^2-1};$$

она определена на двулистной римановой поверхности $\mathcal{M}_0$, листы которой склеиваются по отрезку $[-1,1]$. Выпишем ядро $G_0(n,m,\lambda)$ резольвенты $R_0(\lambda)=(H_0-\lambda)^{-1}$ оператора H_0 (см. [4])

$$G_0(n,m,\lambda)=G_0(n-m,\lambda)=-\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4}}\left(\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}\right)^{|n-m|}=-\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4}}\left(g\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)^{|n-m|}. \quad (1.1)$$

Функция $G_0(n,m,\lambda)$ определена для $\lambda\in\mathcal{M}=2\mathcal{M}_0$.

Уравнение Шредингера $(H+V)\psi=\lambda\psi$, рассматриваемое в классе $l^2(\Gamma)$, для $\lambda\notin\sigma(H)$ перепишем в виде

$$\psi=-R(\lambda)V\psi. \quad (1.2)$$

Введем обозначение $\sqrt{V}=\sqrt{|V|}\operatorname{sign}V$ (только для V). Положим $\varphi=\sqrt{|V|}\psi$, тогда (1.2) примет вид

$$\varphi=-\sqrt{|V|}R(\lambda)\sqrt{V}\varphi. \quad (1.3)$$

Переход от ψ к новой переменной функции $\varphi\in l^2(\Gamma)$ позволяет рассматривать соответствующие решения ψ уравнения (1.2), не принадлежащие $l^2(\Gamma)$ и отвечающие резонансам $\lambda\in\mathbf{C}$.

Определение 1. Число λ, принадлежащее второму (так называемому «нефизическому») листу римановой поверхности $\mathcal{M}$, будем называть *резонансом* оператора H_V, если существует ненулевое решение $\varphi\in l^2(\Gamma)$ уравнения (1.3). (Если решение существует на первом листе, причем $\lambda\notin[-2,2]$, то λ является собственным значением оператора H_V).

Определение 2. Число $\lambda\in\mathcal{M}$ называется *квазиуровнем* оператора H_V, если λ является резонансом или собственным значением оператора H_V.

Введем обозначения

$$\psi_1(n)=\psi(n,0),$$

$$\psi_2(m)=\psi(0,m),$$

$$f(\psi_i)=f(\lambda,\psi_i)=(R_0(\lambda)\psi_i)(1)+(R_0(\lambda)\psi_i)(-1),\quad i=1,2.$$

Определим θ равенствами $\cos\theta=\dfrac{\lambda}{2}$, $\sin\theta=-\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^2}$.

Теорема 1. 1) *В сколь угодно малой окрестности каждой из точек ±2 для значений V_0 достаточно близких к $\pm1/N$ существует единственный квазиуровень $\lambda_\pm=2\cos\theta_\pm$ оператора H_V, причем*

$$\theta_+=i\left(V_0-\frac{1}{N}\right)+o\left(V_0-\frac{1}{N}\right),$$

$$\theta_-=-\pi-i\left(V_0+\frac{1}{N}\right)+o\left(V_0+\frac{1}{N}\right).$$

2) *В сколь угодно малой окрестности каждой из точек ±2 для значений V_0, достаточно близких к $\pm\dfrac{1}{N-1}$, существует единственный квазиуровень $\lambda_\pm=2\cos\theta_\pm$ оператора H_V, причем*

$$\theta_+=\frac{(N-1)^2i}{(N-1)^2+1}\left(V_0-\frac{1}{N-1}\right)+o\left(V_0-\frac{1}{N-1}\right),$$

$$\theta_-=-\pi-\frac{(N-1)^2i}{(N-1)^2+1}\left(V_0+\frac{1}{N-1}\right)+o\left(V_0+\frac{1}{N-1}\right).$$

МАТЕМАТИКА 2011. Вып. 1

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (1.2) можно переписать в виде системы (см. выражение для резольвенты оператора H [3, с. 106]):

$$\begin{cases} \psi_1(n) = -(R_0(\lambda)V_1\psi_1)(n) - \dfrac{f(V_1\psi_1)f(\delta)}{1-f^2(\delta)}(R_0(\lambda)\delta)(n), & n \in \mathbb{Z}, \\ \psi_2(m) = \dfrac{f(V_1\psi_1)}{1-f^2(\delta)}(R_0(\lambda)\delta)(m), & m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{1.4}$$

Первое уравнение системы (1.4) с учетом (1.1) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} \psi_1(n) = \frac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}}\Big(q^{|n-N|}\psi_1(N) + q^{|n+N|}\psi_1(-N)\Big) + \\ + \frac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}}\Big(q^{N-1}+q^{N+1}\Big)\Big(\psi_1(N)+\psi_1(-N)\Big)\frac{2q^{|n|+1}}{\lambda^2-4-4q^2}, \end{gathered} \tag{1.5}$$

где $q = \dfrac{\lambda - \sqrt{\lambda^2-4}}{2} = e^{i\theta}$.

Заметим, что зная $\psi_1(n)$, легко найти $\psi_2(m)$. Далее, в силу (1.5) для нахождения $\psi_1(n)$ достаточно знать $\psi_1(N)$ и $\psi_1(-N)$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \psi_1(N) = \dfrac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}}\Big(\psi_1(N) + q^{2N}\psi_1(-N)\Big) + \dfrac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}}\Big(q^{N-1}+q^{N+1}\Big) \times \\ \qquad \times \Big(\psi_1(N)+\psi_1(-N)\Big)\dfrac{2q^{N+1}}{\lambda^2-4-4q^2}, \\ \psi_1(-N) = \dfrac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}}\Big(q^{2N}\psi_1(N) + \psi_1(-N)\Big) + \dfrac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}}\Big(q^{N-1}+q^{N+1}\Big) \times \\ \qquad \times \Big(\psi_1(N)+\psi_1(-N)\Big)\dfrac{2q^{N+1}}{\lambda^2-4-4q^2}. \end{cases}$$

Условие существования ненулевого решения, то есть равенство нулю определителя, имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 - \dfrac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}} - \dfrac{2V_0q^{N+1}(q^{N-1}+q^{N+1})}{\sqrt{\lambda^2-4}(\lambda^2-4-4q^2)} & -\dfrac{V_0q^{2N}}{\sqrt{\lambda^2-4}} - \dfrac{2V_0q^{N+1}(q^{N-1}+q^{N+1})}{\sqrt{\lambda^2-4}(\lambda^2-4-4q^2)} \\ -\dfrac{V_0q^{2N}}{\sqrt{\lambda^2-4}} - \dfrac{2V_0q^{N+1}(q^{N-1}+q^{N+1})}{\sqrt{\lambda^2-4}(\lambda^2-4-4q^2)} & 1 - \dfrac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}} - \dfrac{2V_0q^{N+1}(q^{N-1}+q^{N+1})}{\sqrt{\lambda^2-4}(\lambda^2-4-4q^2)} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$1 - \frac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}} - \frac{2V_0q^{2N+1}\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4}(\lambda^2-4-4q^2)} = \pm\bigg(\frac{V_0q^{2N}}{\sqrt{\lambda^2-4}} + \frac{2V_0q^{2N+1}\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4}(\lambda^2-4-4q^2)}\bigg). \tag{1.6}$$

Для определенности рассмотрим случай V_0 вблизи $1/N$. Уравнение (1.6) для знака «$-$» можно переписать следующим образом:

$$1 - \frac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}}(1-q^{2N}) = 0$$

или

$$1 + \frac{V_0}{2i\sin\theta}(1-e^{2Ni\theta}) = 0. \tag{1.7}$$

Обозначим $F(V_0,\theta) = 1 + \dfrac{V_0}{2i\sin\theta}(1-e^{2Ni\theta})$. Проведем несложные преобразования для θ близких к нулю:

$$F(V_0,\theta) = 1 + \frac{V_0}{2i\theta + o(\theta^3)}(-2Ni\theta + o(\theta^2)) = 1 - V_0N + o(\theta) = o(\theta). \tag{1.8}$$

Очевидно, что функция $o(\theta)$ аналитически зависит от θ. Если $V_0 = 1/N$, то, согласно (1.8), $\theta = 0$ — решение уравнения (1.7). Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{V_0 N^2}{i} + o(\theta), \quad \frac{\partial F}{\partial V_0} = -N + o(\theta).$$

Заметим, что $\frac{\partial F}{\partial \theta}\left(\frac{1}{N}, 0\right) \neq 0$. По теореме о неявной функции (см., например, [5]) в достаточно малой окрестности точки $1/N$ существует единственное решение $\theta = \theta(V_0)$ уравнения (1.7), причем

$$\theta(V_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial V_0}\left(\frac{1}{N}, 0\right)}{\frac{\partial F}{\partial \theta}\left(\frac{1}{N}, 0\right)}\left(V_0 - \frac{1}{N}\right) + o\left(V_0 - \frac{1}{N}\right) = i\left(V_0 - \frac{1}{N}\right) + o\left(V_0 - \frac{1}{N}\right).$$

Аналогично доказываются оставшиеся утверждения теоремы. □

Замечание 1. Из (1.4) вытекает экспоненциальное убывание на бесконечности, а следовательно, принадлежность $l^2(\Gamma)$ функции ψ в случае, если $\operatorname{Im}\theta > 0$ (ср. [4]). Таким образом, для V_0 достаточно близких к $\pm 1/N$ и $|V_0| > 1/N$ значения $\lambda_\pm$ являются собственными значениями оператора H_V . В случае V_0 достаточно близких к $\pm\frac{1}{N-1}$ и $|V_0| > \frac{1}{N-1}$ значения $\lambda_\pm$ также являются собственными значениями оператора H_V .

§ 2. Уравнение Липпмана – Швингера

Рассмотрим уравнение Липпмана – Швингера для оператора H_V с «налетающей волной», распространяющейся вдоль $\mathbb{Z} \times \{0\}$:

$$\begin{cases} \psi_1(n) = e^{i\theta n} - (R_0(\lambda)V_1\psi_1)(n) - \dfrac{f(V_1\psi_1)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)}(R_0(\lambda)\delta)(n), & n \in \mathbb{Z}, \\ \psi_2(m) = \dfrac{f(V_1\psi_1)}{1 - f^2(\delta)}(R_0(\lambda)\delta)(m), & m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Первое уравнение системы можно переписать в виде

$$\begin{gathered} \psi_1(n) = e^{i\theta n} + \frac{V_0}{\sqrt{\lambda^2 - 4}}\left(q^{|n-N|}\psi_1(N) + q^{|n+N|}\psi_1(-N)\right) + \\ + \frac{V_0}{\sqrt{\lambda^2 - 4}}\left(q^{N-1} + q^{N+1}\right)\left(\psi_1(N) + \psi_1(-N)\right)\frac{2q^{|n|+1}}{\lambda^2 - 4 - 4q^2}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Лемма 1. *Решение уравнения Липпмана – Швингера имеет вид*

$$\psi_1(n) = e^{i\theta n} + \frac{V_0}{\sqrt{\lambda^2 - 4}}\left(q^{|n-N|}\frac{\Delta_1}{\Delta} + q^{|n+N|}\frac{\Delta_2}{\Delta}\right) + \frac{2V_0 q^{N+1+|n|}\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}(\lambda^2 - 4 - 4q^2)}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta} + \frac{\Delta_2}{\Delta}\right),$$

$$\psi_2(m) = \frac{V_0 q^{N+|m|}\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4 - 4q^2}}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta} + \frac{\Delta_2}{\Delta}\right),$$

где

$$\Delta = \left(1 - \frac{V_0}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} - \frac{2V_0 q^{2N+1}\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}(\lambda^2 - 4 - 4q^2)}\right)^2 - \left(\frac{V_0 q^{2N}}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} + \frac{2V_0 q^{2N+1}\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}(\lambda^2 - 4 - 4q^2)}\right)^2$$

$$\Delta_1 = q^N + \frac{2V_0 q^{N+1}(1 - q^{2N})}{\sqrt{\lambda^2 - 4}(2\sqrt{\lambda^2 - 4} - \lambda)}, \quad \Delta_2 = q^{-N} + \frac{V_0(q^{3N} - q^{-N})}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} + \frac{2V_0 q^{N+1}(q^{2N} - 1)}{\sqrt{\lambda^2 - 4}(2\sqrt{\lambda^2 - 4} - \lambda)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (2.2) для нахождения $\psi_1(n)$ достаточно найти величины $\psi_1(N)$ и $\psi_1(-N)$, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \psi_1(N) = e^{i\theta N} + \dfrac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}}\Big(\psi_1(N) + q^{2N}\psi_1(-N)\Big) + \dfrac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}}\Big(q^{|1-N|} + q^{|1+N|}\Big)\times \\ \qquad \times\Big(\psi_1(N)+\psi_1(-N)\Big)\dfrac{2q^{N+1}}{\lambda^2-4-4q^2}, \\ \psi_1(-N) = e^{-i\theta N} + \dfrac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}}\Big(q^{2N}\psi_1(N) + \psi_1(-N)\Big) + \dfrac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}}\Big(q^{|1-N|} + q^{|1+N|}\Big)\times \\ \qquad \times\Big(\psi_1(N)+\psi_1(-N)\Big)\dfrac{2q^{N+1}}{\lambda^2-4-4q^2}. \end{cases}$$

Записав решение полученной системы с помощью формул Крамера, получим требуемую формулу для $\psi_1(n)$. После этого легко получаем формулу для $\psi_2(m)$. □

Обозначим через $P^-(\lambda)$ вероятность отражения в точке $\lambda \in (-2,2)$. Имеем равенство $P^-(\lambda) = |A^-(\lambda)|^2$, где $A^-(\lambda)$ — коэффициент отражения (вдоль прямой $\mathbb{Z}\times\{0\}$), который легко выписывается из вида решения уравнения Липпмана – Швингера (см. лемму 1):

$$\psi_1(n) = e^{i\theta n} + Ce^{-i\theta n}, \quad n < -N,$$

где

$$C = A^-(\lambda) = \frac{V_0}{\sqrt{\lambda^2-4}}\Big(q^N\frac{\Delta_1}{\Delta} + q^{-N}\frac{\Delta_2}{\Delta}\Big) + \frac{2V_0q^{N+1}\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4}(\lambda^2-4-4q^2)}\Big(\frac{\Delta_1}{\Delta}+\frac{\Delta_2}{\Delta}\Big).$$

Теорема 2. *В сколь угодно малой окрестности каждой из точек*

$$\lambda_n^0 = 2\cos\frac{\pi n}{N}, \quad n \in \{\overline{1, N-1}\}$$

для всех достаточно больших V_0 *существует единственное решение уравнения* $P^-(\lambda) = 0$ *вида*

$$\lambda_n = 2\cos\frac{\pi n}{N} - \frac{2}{NV_0}\sin^2\frac{\pi n}{N} + o\Big(\frac{1}{V_0}\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим уравнение $A^-(\lambda) = 0$. Проведя несложные преобразования, данное уравнение можно переписать в виде

$$\begin{gathered} q^{2N}\sqrt{\lambda^2-4}(2\sqrt{\lambda^2-4}-\lambda) + 4V_0q^{2N+1} + q^{-2N}(2\sqrt{\lambda^2-4}-\lambda)\sqrt{\lambda^2-4}- \\ -V_0q^{-2N}(2\sqrt{\lambda^2-4}-\lambda) - 4V_0q + V_0q^{2N}(2\sqrt{\lambda^2-4}-\lambda) + 2q^{2N+1}\sqrt{\lambda^2-4} + 2q\sqrt{\lambda^2-4} = 0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Введем обозначения $\mu = 1/V_0$,

$$\begin{gathered} F(\mu,\lambda) = q^{2N}\sqrt{\lambda^2-4}(2\sqrt{\lambda^2-4}-\lambda)\mu + 4q^{2N+1} + q^{-2N}(2\sqrt{\lambda^2-4}-\lambda)\sqrt{\lambda^2-4}\mu- \\ -q^{-2N}(2\sqrt{\lambda^2-4}-\lambda) - 4q + q^{2N}(2\sqrt{\lambda^2-4}-\lambda) + 2q^{2N+1}\sqrt{\lambda^2-4}\mu + 2q\sqrt{\lambda^2-4}\mu. \end{gathered}$$

Тогда (2.3) для $V_0 \neq 0$ можно переписать в виде

$$F(\mu,\lambda) = 0.$$

Уравнение $F(0,\lambda) = 0$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} \cos\theta\cos 2N\theta - \sin\theta\sin 2N\theta \mp 2\sin 2N\theta\sin\theta - \cos\theta = 0, \\ \sin\theta\cos 2N\theta - \sin\theta = 0, \end{cases}$$

которая имеет решения $\theta_n = \dfrac{\pi n}{N}$, $n \in \{\overline{-N, N-1}\}$. Таким образом, уравнение $F(0,\lambda) = 0$ имеет $(N-1)$ различных решений $\lambda_n^0 = 2\cos\dfrac{\pi n}{N}$, $n \in \{\overline{1, N-1}\}$.

Нетрудно вычислить

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}(0,0) = -8\sin^2\frac{\pi n}{N}, \quad \frac{\partial F}{\partial \mu}(0,0) = -4N \neq 0.$$

В силу теоремы о неявной функции в сколь угодно малой окрестности каждой из точек $\lambda_n^0 = 2\cos\frac{\pi n}{N}$ для μ близких к нулю существует единственное решение уравнения $A^-(\lambda) = 0$:

$$\lambda_n = 2\cos\frac{\pi n}{N} - \frac{2\mu}{N}\sin^2\frac{\pi n}{N} + o(\mu).$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Miroshnichenko A. E., Kivshar Y. S. Engineering Fano resonances in discrete arrays // Phys. Rev. E. — 2005. — Vol. 72, 056611 (7p).
2. Chakrabarti A. Fano resonance in discrete lattice models: Controlling lineshapes with impurities // Phys. Letters A. — 2007. — Vol. 336, Issues 4–5. — P. 507–512.
3. Тинюкова Т. С., Чубурин Ю. П. Квазиуровни дискретного оператора Шредингера с убывающим потенциалом на графе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки. — 2009. — Вып. 3. — С. 104–113.
4. Морозова Л. Е., Чубурин Ю. П. Об уровнях одномерного дискретного оператора Шредингера с убывающим потенциалом // Известия Института математики и информатики. УдГУ. — 2004. — Вып. 1 (29). — С. 85–94.
5. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих переменных. — М.: Мир. 1969. — 396 с.

Поступила в редакцию 01.09.10

T. S. Tinyukova
The Lippmann – Schwinger equation for quantum wires

We consider the discrete Schrödinger operator with a potential of a special form defined on a graph whose nodes lie on the union of two intersected straight lines. We prove that there exist unique quasi-levels (eigenvalues or resonances) in the neighborhoods of the point ± 2 (these points consist a boundary of the essential spectrum). The asymptotic formulae for quasi-levels are obtained. We find the conditions for the coefficient of reflection is equal to zero.

Keywords: eigenvalue, resonance, discrete Lippmann–Schwinger equation.

Mathematical Subject Classifications: 81Q10, 81Q15

Тинюкова Татьяна Сергеевна, аспирант кафедры математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4)
E-mail: TAshih@mail.ru