УДК 517.5

© *В. И. Родионов*

О ПРОСТРАНСТВЕ РЕГУЛЯРНО ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Определяется понятие регулярно гладкой функции. Кусочно-гладкие функции являются регулярно гладкими, а всякая регулярно гладкая функция является липшицевой. Регулярно гладкие функции имеют конечные односторонние производные: левосторонняя производная непрерывна слева, а правосторонняя непрерывна справа. Односторонние производные порождают понятие регулярной производной. Пространство регулярно гладких функций является замыканием пространства кусочно-линейных функций по норме пространства липшицевых функций. Пространство кусочно-гладких функций всюду плотно в пространстве регулярно гладких функций. Получен аналог уравнения Эйлера для простейшей вариационной задачи в пространстве регулярно гладких функций.

Ключевые слова: односторонняя производная, кусочно-гладкая функция, липшицева функция, прерывистая функция, вариационное исчисление.

§ 1. Регулярно гладкие функции

Если I — это отрезок, интервал или полуинтервал, то через I^2_* будем обозначать множество $\{(\tau,s)\in I^2:\ \tau\neq s\}$, представляющее собой квадрат без «главной» диагонали. Всякая функция $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ порождает функцию двух переменных $X(\tau,s)\doteq\frac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau}$, определенную на множестве $[a,b]^2_*$. Очевидно, $X(\tau,s)=X(s,\tau)$.

Определение 1. Функцию $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ будем называть *регулярно гладкой*, если для любого $t\in(a,b]$ существует конечный двойной предел

$$\lim_{\substack{(\tau,s)\in(a,t]^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}} X(\tau,s) \tag{1.1}$$

и для любого $t\in[a,b)$ существует конечный двойной предел

$$\lim_{\substack{(\tau,s)\in[t,b)^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}} X(\tau,s). \tag{1.2}$$

Заметим, что пределы (1.1) и (1.2) — это пределы по множествам $(a,t]^2_*$ и $[t,b)^2_*$ соответственно, а точка (t,t) — точка прикосновения этих множеств. Линейное пространство регулярно гладких функций, заданных на $[a,b]$, обозначим через $\mathrm{RS}[a,b]$. Легко убедиться, что регулярно гладкие функции непрерывны. Следующие импликации также очевидны:

$$x\in\mathrm{RS}[a,b]\implies x|_{[\alpha,\beta]}\in\mathrm{RS}[\alpha,\beta]\qquad\forall\,[\alpha,\beta]\subseteq[a,b],$$

$$x|_{[a,c]}\in\mathrm{RS}[a,c],\ \ x|_{[c,b]}\in\mathrm{RS}[c,b]\implies x|_{[a,b]}\in\mathrm{RS}[a,b].$$

Из определения 1 следует, что всякая функция $x\in\mathrm{RS}[a,b]$ порождает еще две функции $A_x:(a,b]\to\mathbb{R}$ и $B_x:[a,b)\to\mathbb{R}$ такие, что

$$A_x(t)\doteq\lim_{\substack{(\tau,s)\in(a,t]^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}} X(\tau,s)\quad\text{и}\quad B_x(t)\doteq\lim_{\substack{(\tau,s)\in[t,b)^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}} X(\tau,s). \tag{1.3}$$

Точка (τ,s) в пределах (1.3) может приближаться к точке (t,t) по различным подмножествам множеств $(a,t]^2_*$ и $[t,b)^2_*$. В частности, полагая $\tau=t$ в $(a,t]^2_*$ и $[t,b)^2_*$, получаем

$$A_x(t)=\lim_{\substack{\{s<t\}\\s\to t}} X(t,s)=\lim_{s\to t-0}\frac{x(s)-x(t)}{s-t}\quad\text{и}\quad B_x(t)=\lim_{\substack{\{s>t\}\\s\to t}} X(t,s)=\lim_{s\to t+0}\frac{x(s)-x(t)}{s-t}. \tag{1.4}$$

Это наблюдение означает, что всякая регулярно гладкая функция $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ имеет во всех точках отрезка $[a,b]$ конечные односторонние производные, причем $A_x:(a,b]\to\mathbb{R}$ — это левосторонняя, а $B_x:[a,b)\to\mathbb{R}$ — правосторонняя производные.

Пример 1. Всякая непрерывно дифференцируемая функция $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ является регулярно гладкой, то есть $\mathrm{C}^1[a,b]\subset\mathrm{RS}[a,b]$. Действительно, для любых $t\in(a,b]$ и $(\tau,s)\in(a,t]^2_*$ таких, что $(\tau,s)\to(t,t)$, существует точка ξ, лежащая между τ и s (поэтому $\xi\to t$) такая, что $x(s)-x(\tau)=x'(\xi)\,(s-\tau)$, следовательно,

$$\lim_{\substack{(\tau,s)\in(a,t]^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}}X(\tau,s)=\lim_{\substack{(\tau,s)\in(a,t]^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}}\tfrac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau}=\lim_{\substack{\xi\in(a,t)\\\xi\to t}}x'(\xi)=x'(t).$$

Последнее равенство имеет место в силу непрерывности функции x'. Аналогичная цепочка равенств справедлива и для предела (1.2). Таким образом, для односторонних производных имеем равенства $B_x(a)=x'(a)$, $A_x(t)=B_x(t)=x'(t)$ для всех $t\in(a,b)$ и $A_x(b)=x'(b)$.

Пример 2. Напомним, что функция $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ называется кусочно-гладкой, если существует конечное разбиение $a=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_n=b$ такое, что для всех $k=1,\ldots,n$ сужение функции x на отрезок $[\tau_{k-1},\tau_k]$ есть непрерывно дифференцируемая функция. Поскольку $\mathrm{C}^1[\tau_{k-1},\tau_k]\subset\mathrm{RS}[\tau_{k-1},\tau_k]$ для всех k, то всякая кусочно-гладкая функция является регулярно гладкой, то есть $\mathrm{KC}^1[a,b]\subset\mathrm{RS}[a,b]$. Так, кусочно-гладкая недифференцируемая функция $x=|\,t\,|$, $t\in[-1,1]$ принадлежит $\mathrm{RS}[-1,1]$, что следует из существования пределов

$$\lim_{\substack{(\tau,s)\in(-1,t]^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}}X(\tau,s)=\begin{cases}-1 & \text{при}\quad t\in(-1,0]\\ \ \ 1 & \text{при}\quad t\in(0,1]\end{cases},\qquad \lim_{\substack{(\tau,s)\in[t,1)^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}}X(\tau,s)=\begin{cases}-1 & \text{при}\quad t\in[-1,0)\\ \ \ 1 & \text{при}\quad t\in[0,1)\end{cases}.$$

Как показано ниже в примере 5, функция $x:[0,1]\to\mathbb{R}$ такая, что $x(0)=0$ и $x(t)=|\,t^3\sin\frac{\pi}{t}\,|$ при $t\neq 0$, есть регулярно гладкая функция. Очевидно, она не является кусочно-гладкой.

Пример 3. Дифференцируемая функция с разрывной производной $x:[-1,1]\to\mathbb{R}$ такая, что $x(0)=0$ и $x(t)=t^2\cos\frac{1}{t}$ при $t\neq0$, не является регулярно гладкой. Действительно, две последовательности $(\tau_n,s_n)=\big(\frac{1}{(2n+1)\pi},\frac{1}{2n\pi}\big)\to(0,0)$ и $(\tau'_n,s'_n)=(0,\frac{1}{2n\pi})\to(0,0)$ принадлежат множеству $[0,1)^2_*$ и порождают в точке $t=0$ разные пределы

$$\lim_{(\tau_n,s_n)\to(0,0)}X(\tau_n,s_n)=\tfrac{2}{\pi},\qquad \lim_{(\tau'_n,s'_n)\to(0,0)}X(\tau'_n,s'_n)=0.$$

Наряду с формулами (1.3) и (1.4) справедливы следующие четыре равенства:

$$\begin{aligned}A_x(t)&=\lim_{\substack{\{\tau<0,\ s<0\}\\(\tau,s)\to(0,0)}}X(t+\tau,t+\tau+s)=\lim_{\substack{\{\tau+s<0,\ s>0\}\\(\tau,s)\to(0,0)}}X(t+\tau,t+\tau+s),\\ B_x(t)&=\lim_{\substack{\{\tau>0,\ s>0\}\\(\tau,s)\to(0,0)}}X(t+\tau,t+\tau+s)=\lim_{\substack{\{\tau+s>0,\ s<0\}\\(\tau,s)\to(0,0)}}X(t+\tau,t+\tau+s).\end{aligned}\tag{1.5}$$

Действительно, множество, по которому вычисляется предел (1.1), можно записать в виде $\{\tau\leqslant t,\ s\leqslant t,\ \tau\neq s\}$, поэтому заменив τ на $t+\tau'$, а s — на $t+\tau'+s'$ (после замены переменных штрих не пишем), получаем, что

$$A_x(t)=\lim_{\substack{\{\tau\leqslant0,\ \tau+s\leqslant0,\ s\neq0\}\\(\tau,s)\to(0,0)}}X(t+\tau,t+\tau+s).\tag{1.6}$$

Множества, по которым вычисляются первые два предела (1.5), принадлежат множеству, по которому вычисляется предел (1.6), следовательно, оба эти предела существуют и, более того, они равны $A_x(t)$. В силу (1.2) справедливо симметричное (по отношению к (1.6)) равенство $B_x(t)=\lim\limits_{\substack{\{\tau\geqslant0,\ \tau+s\geqslant0,\ s\neq0\}\\(\tau,s)\to(0,0)}}X(t+\tau,t+\tau+s)$, что и доказывает два последних равенства (1.5).

Лемма 1. *Если $x \in \mathrm{RS}[a,b]$, то справедливы равенства*

$$\lim_{\tau\to t-0} A_x(\tau) = \lim_{\tau\to t-0} B_x(\tau) = A_x(t) \quad \forall\, t \in (a,b], \tag{1.7}$$

$$\lim_{\tau\to t+0} A_x(\tau) = \lim_{\tau\to t+0} B_x(\tau) = B_x(t) \quad \forall\, t \in [a,b). \tag{1.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы докажем формулы (1.7), а доказательство формул (1.8) легко осуществляется симметричным образом. В соответствии с первой формулой (1.5)

$$\forall\, t\in(a,b]\ \forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0: \ \big((\tau,s)\in U_\delta \implies |\,X(t+\tau,t+\tau+s)-A_x(t)\,|<\varepsilon\big),$$

где $U_\delta \doteq \{(\tau,s)\in\mathbb{R}^2: -\delta<\tau<0,\ -\delta<s<0\}$ — квадратная область. Зафиксируем $\tau\in(-\delta,0)$. Подставив в первую формулу (1.4) вместо t и s выражения $t+\tau$ и $t+\tau+s$ соответственно, получаем равенство $A_x(t+\tau)=\lim\limits_{\substack{\{s<0\}\\ s\to 0}} X(t+\tau,t+\tau+s)$. Это означает, что найдется s (зависящее от τ) такое, что $(\tau,s)\in U_\delta$ и $|\,X(t+\tau,t+\tau+s)-A_x(t+\tau)\,|<\varepsilon$, поэтому $|\,A_x(t+\tau)-A_x(t)\,|<2\,\varepsilon$ для всех $\tau\in(-\delta,0)$. Таким образом, $\lim\limits_{\tau\to 0-} A_x(t+\tau)=A_x(t)$.

Для произвольного $\delta>0$ множество $V_\delta \doteq \{(\tau,s)\in\mathbb{R}^2: -\delta<\tau<0,\ 0<s<-\tau\}$ — это треугольная область. В силу второй формулы (1.5)

$$\forall\, t\in(a,b]\ \forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0: \ \big((\tau,s)\in V_\delta \implies |\,X(t+\tau,t+\tau+s)-A_x(t)\,|<\varepsilon\big).$$

Зафиксируем $\tau\in(-\delta,0)$. Подставив во вторую формулу (1.4) вместо t выражение $t+\tau$, получаем равенства $B_x(t+\tau)=\lim\limits_{\substack{\{s>t+\tau\}\\ s\to t+\tau}} X(t+\tau,s)=\lim\limits_{\substack{\{t>s>t+\tau\}\\ s\to t+\tau}} X(t+\tau,s)$ (перешли от множества $\{\,s>t+\tau\}$ к подмножеству $\{\,t>s>t+\tau\}$), а подставив вместо переменной s выражение $t+\tau+s$, получаем, что $B_x(t+\tau)=\lim\limits_{\substack{\{\tau+s<0,\ s>0\}\\ s\to 0}} X(t+\tau,t+\tau+s)$. Это означает, что найдется s (зависящее от τ) такое, что $(\tau,s)\in V_\delta$ и $|\,X(t+\tau,t+\tau+s)-B_x(t+\tau)\,|<\varepsilon$, следовательно, $|\,B_x(t+\tau)-A_x(t)\,|<2\,\varepsilon$ для всех $\tau\in(-\delta,0)$. Таким образом, $\lim\limits_{\tau\to 0-} B_x(t+\tau)=A_x(t)$.

Доказательство формул (1.8) опирается на вторую группу равенств (1.5).

Следствие 1. *Если $x\in\mathrm{RS}[a,b]$, то функция $A_x:(a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывна слева, а функция $B_x:[a,b)\to\mathbb{R}$ непрерывна справа.*

Следствие 2. *Пусть $x\in\mathrm{RS}[a,b]$. Функция A_x непрерывна в точке $t\in(a,b)$ тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывна функция B_x. При этом $A_x(t)=B_x(t)$.*

Если, например, A_x непрерывна в точке $t\in(a,b)$, то $\lim\limits_{\tau\to t-0} A_x(\tau)=A_x(t)=\lim\limits_{\tau\to t+0} A_x(\tau)$, и остается лишь сослаться на формулы (1.7), (1.8). □

Наряду с A_x и B_x функция $x\in\mathrm{RS}[a,b]$ порождает функции

$$\hat A_x(t)=\begin{cases} B_x(a), & t=a\\ A_x(t), & t\in(a,b]\end{cases}, \quad \hat B_x(t)=\begin{cases} B_x(t), & t\in[a,b)\\ A_x(b), & t=b\end{cases}, \tag{1.9}$$

определенные на всем отрезке $[a,b]$, причем согласно лемме 1

$$\hat A_x(t-0)=A_x(t-0)=A_x(t)=B_x(t-0)=\hat B_x(t-0) \quad \forall\, t\in(a,b], \tag{1.10}$$

$$\hat A_x(t+0)=A_x(t+0)=B_x(t)=B_x(t+0)=\hat B_x(t+0) \quad \forall\, t\in[a,b). \tag{1.11}$$

Таким образом, функции $\hat A_x$ и $\hat B_x$ имеют односторонние пределы, поэтому $\hat A_x,\hat B_x\in\mathrm{G}[a,b]$, то есть $\hat A_x$ и $\hat B_x$ — это прерывистые функции (о пространствах $\mathrm{G}[a,b],\mathrm{G}_L[a,b],\mathrm{G}_R[a,b]$ и $\mathrm{G}_0[a,b]$ см. § 3 и работы [1]– [3]). Разность $\hat A_x-\hat B_x$ также является прерывистой функцией, следовательно, она имеет не более чем счетное множество точек разрыва. Кроме того, согласно (1.10) $\lim\limits_{\tau\to t-0}(\hat A_x(\tau)-\hat B_x(\tau))=\hat A_x(t-0)-\hat B_x(t-0)=0$ (для всех $t\in(a,b]$), поэтому $\hat A_x-\hat B_x\in\mathrm{G}_0[a,b]$. Таким образом, разность $\hat A_x-\hat B_x$ почти всюду на $[a,b]$ равна нулю, а множество ее точек разрыва не более чем счетно. Тем самым, $A_x(\cdot)=B_x(\cdot)$ всюду на (a,b), за исключением разве что конечного или счетного множества точек.

§ 2. Регулярная производная регулярно гладкой функции

Всякая функция $x \in \mathrm{RS}[a,b]$ порождает функцию двух переменных

$$\dot{x}(t,\lambda) = (1-\lambda)\hat{A}_x(t) + \lambda\hat{B}_x(t), \quad (t,\lambda) \in [a,b]\times[0,1], \tag{2.1}$$

причем если $x \in \mathrm{C}^1[a,b]$, то $\dot{x}(\cdot,\lambda) = x'(\cdot)$ для любого $\lambda \in [0,1]$ (это утверждение справедливо при всех $\lambda \in \mathbb{R}$). Другими словами, если $x \in \mathrm{C}^1[a,b]$, то $\dot{x}(\cdot,\lambda)$ при любом λ совпадает с классической производной $x'(\cdot)$, и это наблюдение приводит нас к следующему определению.

Определение 2. Произвольное сечение $\dot{x}(\cdot,\lambda)$ функции (2.1) при фиксированном значении параметра $\lambda \in [0,1]$ называется *регулярной производной* функции $x \in \mathrm{RS}[a,b]$.

Замечание 1. Регулярной производной функции $x \in \mathrm{RS}[a,b]$ можно было бы называть произвольное сечение выпуклой оболочки функций $\hat{A}_x(t)$ и $\hat{B}_x(t)$, однако мы считаем такой подход избыточным для тех целей и задач, которые решаются в настоящей работе. Условия $\lambda \in [0,1]$ вполне достаточно для того, чтобы рассматривать совокупность графиков всех регулярных производных как компактное множество в плоскости переменных $(t,\dot{x})$ (проверка замкнутости и компактности не составляет труда).

Пример 4. Семейство регулярных производных для функции из примера 2 имеет вид

$$\dot{x}(t,\lambda) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad t \in [-1,0) \\ 2\lambda-1 & \text{при} \quad t = 0 \\ 1 & \text{при} \quad t \in (0,1] \end{cases}, \quad \lambda \in [0,1],$$

а совокупность графиков всех этих функций образует в плоскости переменных $(t,\dot{x})$ множество $\{\,(t,\dot{x}) :\, -1 \leqslant t < 0,\ \dot{x} = -1\,\} \cup \{\,(t,\dot{x}) :\, t = 0,\ -1 \leqslant \dot{x} \leqslant 1\,\} \cup \{\,(t,\dot{x}) :\, 0 < t \leqslant 1,\ \dot{x} = 1\,\}$.

Пример 5. Если $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ такова, что $x(0) = 0$ и $x(t) = |\,t^3 \sin\frac{\pi}{t}|$ при $t \neq 0$, то множество точек, где регулярная производная терпит разрыв, есть счетное множество:

$$\dot{x}(t,\lambda) = \begin{cases} 0 & ,\ t = 0 \\ (-1)^n (t^3 \sin\frac{\pi}{t})' & ,\ t \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \quad ,\ n = 1,2,\ldots \\ \frac{\pi}{n}(2\lambda-1) & ,\ t = \frac{1}{n} \quad ,\ n = 2,3,\ldots \\ -\pi & ,\ t = 1 \end{cases}, \quad \lambda \in [0,1].$$

Лемма 2. *Пусть* $x, y \in \mathrm{RS}[a,b]$, $u = x + y$, $v = xy$ *и* $w = x/y$ (*для функции* y *такой, что* $y(t) \neq 0$ *при всех* $t \in [a,b]$). *Тогда* $u, v, w \in \mathrm{RS}[a,b]$ *и справедливы формулы*

$$\dot{u}(t,\lambda) = \dot{x}(t,\lambda) + \dot{y}(t,\lambda), \quad \dot{v}(t,\lambda) = x(t)\,\dot{y}(t,\lambda) + y(t)\,\dot{x}(t,\lambda), \quad \dot{w}(t,\lambda) = \frac{\dot{x}(t,\lambda)\,y(t) - \dot{y}(t,\lambda)\,x(t)}{y^2(t)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $u \in \mathrm{RS}[a,b]$ очевидно. В силу непрерывности функций x и y при всех $t \in (a,b]$ справедливы цепочки равенств

$$A_v(t) = \lim_{\substack{(\tau,s)\in(a,t]^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}} x(s)\,Y(\tau,s) + \lim_{\substack{(\tau,s)\in(a,t]^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}} y(\tau)\,X(\tau,s) = x(t)A_y(t) + y(t)A_x(t),$$

$$A_w(t) = \lim_{\substack{(\tau,s)\in(a,t]^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}} \frac{1}{y(s)}\,X(\tau,s) - \lim_{\substack{(\tau,s)\in(a,t]^2_*\\(\tau,s)\to(t,t)}} \frac{x(\tau)}{y(s)\,y(\tau)}\,Y(\tau,s) = \frac{A_x(t)\,y(t) - A_y(t)\,x(t)}{y^2(t)}.$$

Использовали обозначения $X(\tau,s) \doteq \frac{x(s)-x(\tau)}{s-\tau}$, $Y(\tau,s) \doteq \frac{y(s)-y(\tau)}{s-\tau}$ и очевидные тождества

$$v(s)-v(\tau) = x(s)\,(y(s)-y(\tau)) + y(\tau)\,(x(s)-x(\tau)), \quad w(s)-w(\tau) = \frac{x(s)-x(\tau)}{y(s)} - \frac{x(\tau)\,(y(s)-y(\tau))}{y(s)\,y(\tau)}.$$

Аналогичные формулы имеют место и для величин $B_v(t)$ и $B_w(t)$ (при $t \in [a,b)$), а формулы для регулярных производных выводятся путем несложных естественных преобразований.

§ 3. Полнота пространства регулярно гладких функций

Напомним некоторые свойства, связанные с алгеброй $\mathrm{G}[a,b]$ $(=\mathrm{G})$ прерывистых на $[a,b]$ функций. Известно, что алгебраические эндоморфизмы $\mathrm{P}:\ \mathrm{G}\to\mathrm{G}$ и $\mathrm{Q}:\ \mathrm{G}\to\mathrm{G}$ такие, что

$$\mathrm{P}:\ x(t)\to x_{L}(t)\doteq\begin{cases}x(a+0), & t=a\\ x(t-0), & t\in(a,b]\end{cases},\qquad \mathrm{Q}:\ x(t)\to x_{R}(t)\doteq\begin{cases}x(t+0), & t\in[a,b)\\ x(b-0), & t=b\end{cases},$$

обладают следующими свойствами (см. [3]):

$$\operatorname{Im}\mathrm{P}=\mathrm{G}_{L},\ \ \operatorname{Ker}\mathrm{P}=\mathrm{G}_{0},\ \ \operatorname{Im}\mathrm{Q}=\mathrm{G}_{R},\ \ \operatorname{Ker}\mathrm{Q}=\mathrm{G}_{0},\ \ \mathrm{P}^2=\mathrm{P},\ \ \mathrm{P}\,\mathrm{Q}=\mathrm{P},\ \ \mathrm{Q}\,\mathrm{P}=\mathrm{Q},\ \ \mathrm{Q}^2=\mathrm{Q}, \tag{3.1}$$

где $\mathrm{G}_{L}=\mathrm{G}_{L}[a,b]$ — это подалгебра в G, состоящая из тех функций x, что $x(a+0)=x(a)$ и $x(t-0)=x(t)$ для всех $t\in(a,b]$, а $\mathrm{G}_{R}=\mathrm{G}_{R}[a,b]$ — это подалгебра в G, состоящая из тех функций x, что $x(t+0)=x(t)$ для всех $t\in[a,b)$ и $x(b-0)=x(b)$. Функции из G_{L} называются непрерывными слева, а функции из G_{R} — непрерывными справа прерывистыми функциями. Напомним еще, что через $\mathrm{G}_0=\mathrm{G}_0[a,b]$ обозначена алгебра таких функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}$, что при любом $\varepsilon>0$ множество $\{t\in[a,b]\ :\ |x(t)|\geqslant\varepsilon\}$ конечно. Известно также, что алгебры G_{L} и G_{R} изоморфны между собой и обе изоморфны фактор-алгебре $\mathrm{G}\,/\,\mathrm{G}_0$ (считаем функции $x,y\in\mathrm{G}$ эквивалентными и пишем $x\sim y$, если $x-y\in\mathrm{G}_0$; отметим также, что $\mathrm{P}\,x\sim\mathrm{Q}\,x$ для всех $x\in\mathrm{G}$). Кроме того, алгебры G_{L} и G_{R} замкнуты в G по норме

$$\|x\|\doteq\sup_{t\in[a,b]}|x(t)|\qquad\forall x\in\mathrm{G}, \tag{3.2}$$

а поскольку G — банахова алгебра относительно этой нормы, то и алгебры G_{L} и G_{R} банаховы. Алгебра G_0 также замкнута в G по норме (3.2), причем $\mathrm{G}=\mathrm{G}_{L}\oplus\mathrm{G}_0$ и $\mathrm{G}=\mathrm{G}_{R}\oplus\mathrm{G}_0$, то есть всякая прерывистая функция $x\in\mathrm{G}$ единственным образом представима в виде $x=x_{L}+x_0$ или $x=x_{R}+x_0$, где $x_{L}\in\mathrm{G}_{L}$, $x_{R}\in\mathrm{G}_{R}$, а $x_0\in\mathrm{G}_0$. Следует также отметить, что проекторы P и Q непрерывны по норме (3.2), что следует из неравенств

$$\|\,\mathrm{P}\,x\|\leqslant\|x\|\quad\text{и}\quad\|\,\mathrm{Q}\,x\|\leqslant\|x\|\qquad\forall x\in\mathrm{G}\,. \tag{3.3}$$

В частности, для всех $x\in\mathrm{G}$ справедливо равенство

$$\|\,\mathrm{P}\,x\|=\|\,\mathrm{Q}\,x\|. \tag{3.4}$$

Действительно, в силу (3.1) и (3.3) $\|\,\mathrm{P}\,x\|=\|\,\mathrm{P}\,\mathrm{Q}\,x\|\leqslant\|\,\mathrm{Q}\,x\|$, и аналогично $\|\,\mathrm{Q}\,x\|\leqslant\|\,\mathrm{P}\,x\|$.

Для любого $\lambda\in[0,1]$ через $\mathrm{G}^{\lambda}=\mathrm{G}^{\lambda}[a,b]$ обозначим подпространство в пространстве G, состоящее из тех x, что $x=(1-\lambda)\,\mathrm{P}\,x+\lambda\,\mathrm{Q}\,x$. Очевидно, $\mathrm{G}^0=\mathrm{G}_{L}$ и $\mathrm{G}^1=\mathrm{G}_{R}$.

Лемма 3. *Любые два пространства из семейства* $\{\mathrm{G}^{\lambda}\}_{\lambda\in[0,1]}$ *изоморфны между собой. Пространство* G^{λ} *банахово по норме* (3.2). *Если* $x\in\mathrm{G}^{\lambda}$, *то* $\|x\|=\|\,\mathrm{P}\,x\|=\|\,\mathrm{Q}\,x\|$.

Доказательство. Включение $\mathrm{P}(\mathrm{G}^{\lambda})\subseteq\mathrm{G}^0$ $(=\mathrm{G}_{L})$ имеет место в силу (3.1). Пусть $y\in\mathrm{G}^0$, $z\doteq Qy$ и $x\doteq\mu y+\lambda z$, где $\lambda\in[0,1]$, а $\mu\doteq 1-\lambda$. Согласно (3.1) справедливо

$$\mathrm{Q}\,x=\mu\,\mathrm{Q}\,y+\lambda\,\mathrm{Q}\,z=\mu\,\mathrm{Q}\,y+\lambda\mathrm{Q}^2y=\mu\,\mathrm{Q}\,y+\lambda\,\mathrm{Q}\,y=\mathrm{Q}\,y=z,$$

$$\mathrm{P}\,x=\mu\,\mathrm{P}\,y+\lambda\,\mathrm{P}\,z=\mu\,\mathrm{P}\,y+\lambda\,\mathrm{P}\,\mathrm{Q}\,y=\mu\,\mathrm{P}\,y+\lambda\,\mathrm{P}\,y=\mathrm{P}\,y=y.$$

Равенство $\mathrm{P}\,y=y$ имеет место в силу включения $y\in\mathrm{G}^0$ $(=\mathrm{G}_{L})$. Таким образом, справедливо $x=\mu y+\lambda z=\mu\,\mathrm{P}\,x+\lambda\,\mathrm{Q}\,x$, то есть $x\in\mathrm{G}^{\lambda}$, причем $\mathrm{P}\,x=y$, а это означает, что $\mathrm{P}(\mathrm{G}^{\lambda})=\mathrm{G}^0$.

Пусть $x\in\mathrm{G}^{\lambda}$, и предположим, что $\mathrm{P}\,x=0$, то есть $x\in\operatorname{Ker}\mathrm{P}$. Согласно (3.1) $x\in\mathrm{G}_0$ и $x\in\operatorname{Ker}\mathrm{Q}$, поэтому $\mathrm{Q}\,x=0$, а поскольку $x\in\mathrm{G}^{\lambda}$, то $x=\mu\,\mathrm{P}\,x+\lambda\,\mathrm{Q}\,x=0$. Таким образом, пространства G^{λ} и G^0 изоморфны, каково бы ни было $\lambda\in[0,1]$.

Пусть последовательность $\{x_n\}$, $x_n\in\mathrm{G}^{\lambda}$ фундаментальна, то есть для любого $\varepsilon>0$ существует N такое, что $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$ для всех $n,m>N$. Элементы последовательности

$\{\mathrm{P}\,x_n\}$ принадлежат банахову пространству G^0, а элементы последовательности $\{\mathrm{Q}\,x_n\}$ принадлежат банахову пространству G^1, причем в силу (3.3) $\|\mathrm{P}\,x_n-\mathrm{P}\,x_m\|\leqslant\|x_n-x_m\|<\varepsilon$ и $\|\mathrm{Q}\,x_n-\mathrm{Q}\,x_m\|\leqslant\|x_n-x_m\|<\varepsilon$. Следовательно, существуют пределы $y\doteq\lim\mathrm{P}\,x_n$ и $z\doteq\lim\mathrm{Q}\,x_n$, причем $y\in\mathrm{G}^0$ и $z\in\mathrm{G}^1$, а значит, $\mathrm{P}\,y=y$ и $\mathrm{Q}\,z=z$. Так как проекторы P и Q непрерывны, то в соответствии с (3.1) имеем

$$\mathrm{Q}\,x_n=\mathrm{Q}\,\mathrm{P}\,x_n=\mathrm{Q}\,(\mathrm{P}\,x_n)\to\mathrm{Q}\,y\quad\text{и}\quad\mathrm{P}\,x_n=\mathrm{P}\,\mathrm{Q}\,x_n=\mathrm{P}\,(\mathrm{Q}\,x_n)\to\mathrm{P}\,z.$$

Тем самым, $\mathrm{Q}\,y=z$ и $\mathrm{P}\,z=y$. Пусть $x\doteq\mu y+\lambda z$. В силу включения $x_n\in\mathrm{G}^\lambda$ справедливо $x_n=\mu\,\mathrm{P}\,x_n+\lambda\,\mathrm{Q}\,x_n\to\mu y+\lambda z=x$, причем имеем $\mathrm{P}\,x=\mu\,\mathrm{P}\,y+\lambda\,\mathrm{P}\,z=\mu y+\lambda y=y$ и $\mathrm{Q}\,x=\mu\,\mathrm{Q}\,y+\lambda\,\mathrm{Q}\,z=\mu z+\lambda z=z$, следовательно, $x=\mu y+\lambda z=\mu\,\mathrm{P}\,x+\lambda\,\mathrm{Q}\,x$, то есть $x\in\mathrm{G}^\lambda$. Таким образом, G^λ — банахово пространство.

Поскольку $\lambda,\mu\geqslant 0$, то в соответствии с (3.4) и (3.3) для любого $x\in\mathrm{G}^\lambda$ справедливы соотношения $\|x\|\leqslant\mu\|\mathrm{P}\,x\|+\lambda\|\mathrm{Q}\,x\|=\|\mathrm{P}\,x\|=\|\mathrm{Q}\,x\|\leqslant\|x\|$.

Замечание 2. Если $x\in\mathrm{RS}[a,b]$, то в соответствии с формулами (1.9)–(1.11) имеем

$$\mathrm{P}(\hat{A}_x)=\begin{cases}\hat{A}_x(a+0), & t=a\\ \hat{A}_x(t-0), & t\in(a,b]\end{cases}=\begin{cases}B_x(a), & t=a\\ A_x(t), & t\in(a,b]\end{cases}=\begin{cases}\hat{B}_x(a+0), & t=a\\ \hat{B}_x(t-0), & t\in(a,b]\end{cases}=\mathrm{P}(\hat{B}_x),$$

$$\mathrm{Q}(\hat{A}_x)=\begin{cases}\hat{A}_x(t+0), & t\in[a,b)\\ \hat{A}_x(b-0), & t=b\end{cases}=\begin{cases}B_x(t), & t\in[a,b)\\ A_x(b), & t=b\end{cases}=\begin{cases}\hat{B}_x(t+0), & t\in[a,b)\\ \hat{B}_x(b-0), & t=b\end{cases}=\mathrm{Q}(\hat{B}_x),$$

поэтому $\mathrm{P}(\hat{A}_x)=\hat{A}_x=\mathrm{P}(\hat{B}_x)$ и $\mathrm{Q}(\hat{A}_x)=\hat{B}_x=\mathrm{Q}(\hat{B}_x)$, следовательно, $\hat{A}_x\in\mathrm{G}^0$, а $\hat{B}_x\in\mathrm{G}^1$. Если $\lambda\in[0,1]$, $\mu\doteq 1-\lambda$ и $y\doteq\dot{x}(\cdot,\lambda)$, то $y=\mu\hat{A}_x+\lambda\hat{B}_x$,

$$\mathrm{P}\,y=\mu\,\mathrm{P}(\hat{A}_x)+\lambda\,\mathrm{P}(\hat{B}_x)=\mu\hat{A}_x+\lambda\hat{A}_x=\hat{A}_x\quad\text{и}\quad\mathrm{Q}\,y=\mu\,\mathrm{Q}(\hat{A}_x)+\lambda\,\mathrm{Q}(\hat{B}_x)=\mu\hat{B}_x+\lambda\hat{B}_x=\hat{B}_x,$$

следовательно, $y=\dot{x}(\cdot,\lambda)=\mu\hat{A}_x+\lambda\hat{B}_x=\mu\,\mathrm{P}\,y+\lambda\,\mathrm{Q}\,y$, поэтому $y\in\mathrm{G}^\lambda$. *Таким образом,* $\dot{x}(\cdot,\lambda)\in\mathrm{G}^\lambda[a,b]$ *при любом* $\lambda\in[0,1]$. *Другими словами, всякая регулярная производная* $\dot{x}(\cdot,\lambda)$ *функции* $x\in\mathrm{RS}[a,b]$ *принадлежит соответствующему банахову пространству* G^λ, *причем для любых* $\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$ *имеет место равенство* $\|\dot{x}(\cdot,\lambda_1)\|=\|\dot{x}(\cdot,\lambda_2)\|$.

При любом $\lambda\in[0,1]$ гомоморфизм линейных пространств $\Phi_\lambda:\mathrm{RS}[a,b]\to\mathbb{R}\times\mathrm{G}^\lambda[a,b]$ такой, что $x\to(x(a),\dot{x}(\cdot,\lambda))$, инъективен. Действительно, равенство $\Phi_\lambda(x)=0$ означает, что $x(a)=0$ и $\dot{x}(t,\lambda)=0$ для всех $t\in[a,b]$, поэтому $\dot{x}(\cdot,\lambda)$ (будучи всюду равной нулю) является непрерывной функцией и совпадает с классической производной $x'(\cdot)$. Тем самым $x(t)\equiv 0$ и, следовательно, $\operatorname{Ker}\Phi_\lambda=\{0\}$. Доказательству сюръективности Φ_λ предшествует следующая

Теорема 1. *Пусть* $y\in\mathrm{G}[a,b]$, $c\in\mathbb{R}$. *Если* $x(t)=c+\displaystyle\int_a^t y(\xi)\,d\xi$, *то* $x\in\mathrm{RS}[a,b]$.

Доказательство. Функция $y_{{}_L}=\mathrm{P}\,y$ непрерывна слева во всех точках $t\in(a,b]$ и $y-y_{{}_L}\in\mathrm{G}_0[a,b]$. В силу последнего включения для любых $\tau,s\in[a,b]$ справедливо равенство $\displaystyle\int_\tau^s[\,y(\xi)-y_{{}_L}(\xi)\,]\,d\xi=0$, поэтому для любых $t\in(a,b]$ и $\tau,s\in(a,t]$ имеет место цепочка

$$\int_\tau^s y(\xi)\,d\xi-y_{{}_L}(t)(s-\tau)=\int_\tau^s[\,y(\xi)-y_{{}_L}(t)\,]\,d\xi=\int_\tau^s[\,y_{{}_L}(\xi)-y_{{}_L}(t)\,]\,d\xi.$$

Так как $y_{{}_L}$ непрерывна слева, то для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что при всех $\xi\in(t-\delta,t\,]$ выполнено $|\,y_{{}_L}(\xi)-y_{{}_L}(t)\,|<\varepsilon$. Следовательно, неравенства $t-\delta<\tau<s\leqslant t$ влекут за собой оценку $|\,X(\tau,s)-y(t-0)\,|<\varepsilon$, поскольку $y(t-0)=y_{{}_L}(t)$ и

$$\big|\,x(s)-x(\tau)-y(t-0)(s-\tau)\,\big|=\left|\,\int_\tau^s y(\xi)\,d\xi-y_{{}_L}(t)(s-\tau)\right|=\left|\,\int_\tau^s[\,y_{{}_L}(\xi)-y_{{}_L}(t)\,]\,d\xi\,\right|<\varepsilon\,|s-\tau|.$$

Таким образом, у функции x для любого $t \in (a,b]$ существует предел (1.1) и $A_x(t) = y(t-0)$. Аналогично, для любого $t \in [a,b)$ существует предел (1.2) и $B_x(t) = y(t+0)$. $\square$

Зафиксируем $\lambda \in [0,1]$. Согласно теореме 1 пара $(c,y) \in \mathbb{R} \times \mathrm{G}^\lambda[a,b]$ порождает регулярно гладкую функцию $x(t) = c + \int_a^t y(\xi)\,d\xi$, $t \in [a,b]$. Покажем, что x — это прообраз элемента (c,y) при действии гомоморфизма Φ_λ. Равенство $x(a) = c$ очевидно. Так как $x \in \mathrm{RS}[a,b]$, то определено сечение $\dot{x}(\cdot,\lambda)$. Если $\mu \doteq 1-\lambda$ и $t \in (a,b)$, то в силу включения $y \in \mathrm{G}^\lambda[a,b]$

$$\dot{x}(t,\lambda) = \mu\hat{A}_x(t) + \lambda\hat{B}_x(t) = \mu A_x(t) + \lambda B_x(t) = \mu y(t-0) + \lambda y(t+0) = \mu\,(\mathrm{P}\,y)(t) + \lambda\,(\mathrm{Q}\,y)(t) = y(t).$$

Аналогично имеем $\dot{x}(a,\lambda) = \mu\hat{A}_x(a) + \lambda\hat{B}_x(a) = B_x(a) = y(a+0) = y(a)$ и $\dot{x}(b,\lambda) = y(b)$. Таким образом, $\dot{x}(t,\lambda) = y(t)$ для всех $t \in [a,b]$, поэтому $\operatorname{Im}\Phi_\lambda = \mathbb{R} \times \mathrm{G}^\lambda[a,b]$ и, следовательно,

$$\mathrm{RS}[a,b] \approx \mathbb{R} \times \mathrm{G}^\lambda[a,b] \qquad \forall\,\lambda \in [0,1]. \tag{3.5}$$

Теорема 2. *Пространство* $\mathrm{RS}[a,b]$ *банахово по норме* (*не зависящей от* $\lambda \in [0,1]$)

$$\|x\|_{\mathrm{RS}} \doteq |x(a)| + \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\| = |x(a)| + \sup_{t\in[a,b]} |\dot{x}(t,\lambda)| \qquad \forall x \in \mathrm{RS}[a,b]. \tag{3.6}$$

Доказательство немедленно следует из изоморфизма (3.5) и полноты пространств $\mathbb{R}$ и $\mathrm{G}^\lambda[a,b]$ по соответствующим нормам. Независимость от λ следует из замечания 2.

Следствие 3. *Если* $x \in \mathrm{RS}[a,b]$, *то справедливо тождество*

$$x(t) = x(a) + \int_a^t \dot{x}(s,\lambda)\,ds \qquad \forall\,(t,\lambda) \in [a,b] \times [0,1]. \tag{3.7}$$

Таким образом, всякая регулярно гладкая функция абсолютно непрерывна, однако $\mathrm{RS}[a,b]$ не замкнуто в $\mathrm{AC}[a,b]$ по норме $\|x\|_{\mathrm{AC}} \doteq |x(a)| + \int_a^b |\dot{x}(s,\lambda)|\,ds$. Например, последовательность функций $x_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ такая, что $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ при $t \in [0,\frac{1}{n}]$ и $x_n(t) = \sqrt{t}$ при $t \in [\frac{1}{n},1]$, сходится по норме $\|\cdot\|_{\mathrm{AC}}$ к функции $x(t) = \sqrt{t}$. Имеем $x_n \in \mathrm{RS}[0,1]$, но $x \notin \mathrm{RS}[0,1]$.

Следствие 4. *Если* $x \in \mathrm{RS}[a,b]$, *то* x — *липшицева функция, то есть* $x \in \mathrm{Lip}[a,b]$, *и, следовательно,* $\mathrm{C}^1[a,b] \subset \mathrm{KC}^1[a,b] \subset \mathrm{RS}[a,b] \subset \mathrm{Lip}[a,b] \subset \mathrm{AC}[a,b]$.

Для любых $\tau, s \in [a,b]$ имеем $|\,x(s) - x(\tau)\,| = \left|\int_\tau^s \dot{x}(t,\lambda)\,dt\right| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |\dot{x}(t,\lambda)| \cdot |\,s-\tau\,|$, откуда и следует включение $\mathrm{RS} \subset \mathrm{Lip}$. Это включение строгое, так как, например, функция из примера 3 липшицева (имеет ограниченную производную), но не является регулярно гладкой.

Пространство $\mathrm{Lip}[a,b]$ совпадает с пространством функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ таких, что $\sup_{(\tau,s)\in[a,b]^2_*} \bigl|\,X(\tau,s)\,\bigr| < \infty$, и легко проверить, что функционал $\|x\|_{\mathrm{Lip}} \doteq |x(a)| + \sup_{(\tau,s)\in[a,b]^2_*} \bigl|\,X(\tau,s)\,\bigr|$ является нормой, причем $\langle\,\mathrm{Lip}[a,b], \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}\rangle$ — полное пространство [4, с. 51].

§ 4. Эквивалентные нормы в пространстве регулярно гладких функций

В пространстве $\mathrm{RS}[a,b]$, кроме норм (3.6) и $\|x\|_{\mathrm{Lip}}$, определены, по крайней мере, еще четыре:

$$\|x\|_1 \doteq \max\{|x(a)|,\ \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|\}, \quad \|x\|_2 \doteq \max\{\|x\|_{\mathrm{C}},\ \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|\},$$
$$\|x\|_3 \doteq \max\{\|x\|_{\mathrm{BV}},\ \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|\}, \quad \|x\|_4 \doteq \sqrt{\|x\|^2_{\mathrm{C}} + \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|^2}\,,$$

и все перечисленные нормы эквивалентны. Более того, как мы выясним ниже, справедливо равенство $\|x\|_{\mathrm{RS}} = \|x\|_{\mathrm{Lip}}$. Неравенства $\|x\|_1 \leqslant \|x\|_{\mathrm{RS}} \leqslant 2\,\|x\|_1$ и $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_4 \leqslant \sqrt{2}\,\|x\|_2$

очевидны. Так как $|x(a)| \leqslant \|x\|_{\mathrm{C}}$, то $\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2$. В случае, если $\|x\|_{\mathrm{C}} \leqslant \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|$, имеем $\|x\|_2 = \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\| \leqslant \|x\|_1$. Если же $\|x\|_{\mathrm{C}} \geqslant \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|$, то $\|x\|_2 = \|x\|_{\mathrm{C}}$. В этом случае для всех $t \in [a,b]$ справедливо равенство (3.7), следовательно,

$$|x(t)| \leqslant |x(a)| + (b-a)\,\|\dot{x}(\cdot,\lambda)\| \leqslant (1+b-a)\,\|x\|_1 \quad \forall\, t \in [a,b],$$

поэтому $\|x\|_2 = \|x\|_{\mathrm{C}} \leqslant (1+b-a)\,\|x\|_1$, и, окончательно, $\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant (1+b-a)\,\|x\|_1$.

Неравенство $\|x\|_1 \leqslant \|x\|_3$ очевидно. Если $\|x\|_{\mathrm{BV}} \leqslant \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|$, то $\|x\|_3 = \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\| \leqslant \|x\|_1$. Пусть $\|x\|_{\mathrm{BV}} \geqslant \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|$, тогда $\|x\|_3 = \|x\|_{\mathrm{BV}}$, и в соответствии с (3.7) для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$ такое, что

$$\operatorname*{Var}_{[a,b]} x < \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} |\,x(\tau_k) - x(\tau_{k-1})\,| = \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} \Big|\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \dot{x}(s,\lambda)\,ds\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} (\tau_k - \tau_{k-1}) \sup_{t\in[\tau_{k-1},\tau_k]} |\dot{x}(t,\lambda)| \leqslant \varepsilon + (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |\dot{x}(t,\lambda)|.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\operatorname*{Var}_{[a,b]} x \leqslant (b-a)\,\|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|$,

$$\|x\|_{\mathrm{BV}} = |x(a)| + \operatorname*{Var}_{[a,b]} x \leqslant |x(a)| + (b-a)\,\|\dot{x}(\cdot,\lambda)\| \leqslant (1+b-a)\,\|x\|_1, \quad \|x\|_1 \leqslant \|x\|_3 \leqslant (1+b-a)\,\|x\|_1.$$

Лемма 4. *Если $x \in \mathrm{RS}[a,b]$, то $\|x\|_{\mathrm{RS}} = \|x\|_{\mathrm{Lip}}$. Другими словами,*

$$\|x\|_{\mathrm{RS}} = |x(a)| + \sup_{(\tau,s)\in[a,b]^2_*} \big|\,X(\tau,s)\,\big| \quad \text{или} \quad \sup_{t\in[a,b]} |\dot{x}(t,\lambda)| = \sup_{(\tau,s)\in[a,b]^2_*} \big|\,X(\tau,s)\,\big|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $a \leqslant \tau < s \leqslant b$, то в соответствии с (3.7) справедливо

$$|\,x(s) - x(\tau)\,| = \Big|\int_{\tau}^{s} \dot{x}(t,\lambda)\,dt\Big| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |\dot{x}(t,\lambda)|\cdot(s-\tau), \quad \ell(x) \doteq \sup_{(\tau,s)\in[a,b]^2_*} \big|\,X(\tau,s)\,\big| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |\dot{x}(t,\lambda)|.$$

Докажем противоположное неравенство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для любого $t \in (a,b]$ найдутся $\tau, s \in (a,t]$ такие, что $\tau \neq s$ и $\big|\,X(\tau,s) - A_x(t)\,\big| < \varepsilon$, поэтому $|\,A_x(t)\,| < \varepsilon + \ell(x)$. Аналогично $|\,B_x(t)\,| < \varepsilon + \ell(x)$ для любого $t \in [a,b)$. Таким образом, для всех $(t,\lambda) \in [a,b] \times [0,1]$ имеет место оценка $|\,\dot{x}(t,\lambda)\,| = |\,(1-\lambda)\hat{A}_x(t) + \lambda\hat{B}_x(t)\,| < \varepsilon + \ell(x)$, а в силу произвольности $\varepsilon > 0$ для всех $t \in [a,b]$ имеем $|\dot{x}(t,\lambda)| \leqslant \ell(x)$.

Замечание 3. Аналогичным образом можно показать, что для любой функции $x \in \mathrm{C}^1[a,b]$

$$\|x\|_{\mathrm{C}^1} \doteq |x(a)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| = |x(a)| + \sup_{(\tau,s)\in[a,b]^2_*} \big|\,X(\tau,s)\,\big| = \|x\|_{\mathrm{Lip}}.$$

Эта норма эквивалентна общеупотребительной норме $\|x\| = \max\big(\max_{t\in[a,b]} |x(t)|,\ \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|\,\big)$. Таким образом, полные пространства (каждое по своей норме) $\mathrm{C}^1[a,b]$ и $\mathrm{RS}[a,b]$ замкнуты в пространстве $\mathrm{Lip}[a,b]$ по норме $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$, которая, на самом деле, является для них общей.

§ 5. Аппроксимация регулярно гладких функций ломаными функциями

Функция $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *ломаной функцией* (*или кусочно-линейной функцией*), если существует конечное разбиение $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$ и числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ такие, что для всех $k = 1,\ldots,n$ и для всех $\tau, s \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$ справедливо равенство $x(s) - x(\tau) = c_k(s-\tau)$. Множество всех ломаных, определенных на отрезке $[a,b]$, является линейным пространством. Очевидно также, что всякая ломаная является регулярно гладкой функцией (поэтому она липшицева, непрерывна и имеет ограниченное изменение). В частности, для всякой ломаной функции справедливо равенство $\|x\|_{\mathrm{RS}} = |x(a)| + \max\{|c_1|, |c_2|, \ldots, |c_n|\}$.

Теорема 3. *Функция $x \in \mathrm{RS}[a,b]$ тогда и только тогда, когда существует последовательность ломаных функций $\{x_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $\|x_n - x\|_{\mathrm{Lip}} \to 0$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathrm{RS}[a,b]$, и зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для любого $t \in (a,b)$ существует $\delta_t > 0$ такое, что $t-\delta_t \geqslant a,\ t+\delta_t \leqslant b$,

$$\sup |\, X(\tau,s) - X(\tau',s')\,| \leqslant \varepsilon \quad \text{по всем} \quad (\tau,s),(\tau',s') \in (t-\delta_t, t\,]^2_*,$$
$$\sup |\, X(\tau,s) - X(\tau',s')\,| \leqslant \varepsilon \quad \text{по всем} \quad (\tau,s),(\tau',s') \in [\,t, t+\delta_t)^2_*.$$

Другими словами, колебание функции $X(\tau,s)$ на каждом из множеств $(t-\delta_t, t\,]^2_*$ и $[\,t,t+\delta_t)^2_*$ не превосходит ε. Аналогично существуют $\delta_a > 0$ и $\delta_b > 0$ такие, что колебание функции $X(\tau,s)$ на множествах $[\,a,a+\delta_a)^2_*$ и $(b-\delta_b, b\,]^2_*$ также не превосходит ε. Семейство квадратов

$$[\,a,a+\delta_a)^2,\ \big\{\,(t-\delta_t,t\,]^2,\ [\,t,t+\delta_t)^2\big\}_{t\in(a,b)},\ (b-\delta_b,b\,]^2$$

образует бесконечную систему множеств, покрывающую главную диагональ квадрата $[a,b]^2$, являющуюся компактным множеством в $\mathbb{R}^2$. Следовательно, из этого семейства можно выделить конечное подпокрытие (в котором $a = s_0 < s_1 < \ldots < s_m < s_{m+1} = b$)

$$[\,a,a+\delta_a)^2,\ (s_1-\delta_{s_1}, s_1\,]^2,\ [\,s_1,s_1+\delta_{s_1})^2,\ (s_2-\delta_{s_2},s_2\,]^2,\ [\,s_2,s_2+\delta_{s_2})^2,$$
$$\ldots,\ (s_m-\delta_{s_m}, s_m\,]^2,\ [\,s_m,s_m+\delta_{s_m})^2,\ (b-\delta_b,b\,]^2,$$

порождающее конечное разбиение $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$ такое, что

$$\tau_0 = a,\ \ \tau_1 \in (s_1-\delta_{s_1}, a+\delta_a),\ \ \tau_2 = s_1,\ \ \tau_3 \in (s_2-\delta_{s_2}, s_1+\delta_{s_1}),\ \ \ldots$$

$\ldots\ ,\tau_{2k-1} \in (s_k-\delta_{s_k}, s_{k-1}+\delta_{s_{k-1}}),\ \ \tau_{2k} = s_k, \ldots\ ,\tau_{2m} = s_m,\ \ \tau_{2m+1} \in (b-\delta_b, s_m+\delta_{s_m}),\ \ \tau_{2m+2} = b.$
(Здесь $n = 2m+2$, а точки вида τ_{2k-1} произвольны.) Семейство квадратов $\{\,[\tau_{k-1},\tau_k]^2\}_{k=1}^n$ покрывает главную диагональ квадрата $[a,b]^2$, и на каждом множестве $[\tau_{k-1},\tau_k]^2_*$ колебание функции $X(\tau,s)$ не превосходит ε, поэтому справедлива оценка $|\,X(\tau,s)-X(\tau',s')\,| \leqslant \varepsilon$, как только $(\tau,s),(\tau',s') \in [\tau_{k-1},\tau_k]^2_*$.

Произвольные точки $(\xi_k,\eta_k) \in [\tau_{k-1},\tau_k]^2_*$ (по одной точке из каждого множества $[\tau_{k-1},\tau_k]^2_*$) порождают ломаную $y:[a,b]\to\mathbb{R}$ такую, что $y(a) = x(a)$ и $y(s)-y(\tau) = X(\xi_k,\eta_k)\,(s-\tau)$ для всех $k = 1,\ldots,n$ и для всех $\tau,s \in [\tau_{k-1},\tau_k]$. Поскольку $x(s)-x(\tau) = X(\tau,s)\,(s-\tau)$ для всех $(\tau,s) \in [a,b]^2_*$, то для разности $z \doteq y-x$ при всех $(\tau,s) \in [\tau_{k-1},\tau_k]^2_*$ справедливо $z(a) = 0$,

$$z(s)-z(\tau) = \big(\,X(\xi_k,\eta_k) - X(\tau,s)\big)\,(s-\tau) \quad \text{и} \quad |\,z(s)-z(\tau)\,| \leqslant \varepsilon\,|\,s-\tau\,|. \tag{5.1}$$

Поскольку $x,y \in \mathrm{RS}[a,b]$, то $z \in \mathrm{RS}[a,b]$ и определены две функции $A_z:(a,b]\to\mathbb{R}$ и $B_z:[a,b)\to\mathbb{R}$. Пусть $t \in (a,b]$. Существует $\delta > 0$ такое, что

$$\Big|\,\frac{z(s)-z(\tau)}{s-\tau} - A_z(t)\,\Big| < \varepsilon \quad \forall\,(\tau,s) \in (t-\delta,t\,]^2_*, \tag{5.2}$$

и существует k такое, что $t \in (\tau_{k-1},\tau_k]$, следовательно, для любых $(\tau,s) \in (t-\delta,t\,]^2_* \cap (\tau_{k-1},\tau_k]^2_*$ справедливы соотношения (5.1) и (5.2). Таким образом, для любого $t \in (a,b]$ имеет место оценка $|\,A_z(t)\,| < \varepsilon + \big|\,\frac{z(s)-z(\tau)}{s-\tau}\,\big| \leqslant 2\,\varepsilon$. Аналогично можно показать, что $|\,B_z(t)\,| < 2\,\varepsilon$ для всех $t \in [a,b)$, поэтому $|\dot z(t,\lambda)| < 2\,\varepsilon$ для всех $(t,\lambda) \in [a,b]\times[0,1]$ и, следовательно, $\|z\|_{\mathrm{RS}} < 2\,\varepsilon$.

Обратное утверждение теоремы следует из полноты пространства $\mathrm{RS}[a,b]$ по норме $\|\cdot\|_{\mathrm{RS}}$.

Следствие 5. $\mathrm{RS}[a,b]$ *является замыканием по норме* $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ *пространства ломаных, определенных на отрезке* $[a,b]$.

Следствие 6. $\mathrm{RS}[a,b]$ *является замыканием пространства* $\mathrm{KC}^1[a,b]$ *по норме* $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$.

Следствие 7. *Если* $x \in \mathrm{RS}[a,b]$, *то существует последовательность ломаных функций* $\{x_n:[a,b]\to\mathbb{R}\}_{n=1}^\infty$ *такая, что* $\|x_n-x\|_{\mathrm{BV}} \to 0$ *и* $\|x_n-x\|_{\mathrm{C}} \to 0$ (*то есть последовательность* $\{x_n(t)\}_{n=1}^\infty$ *сходится к функции* $x(t)$ *равномерно на* $[a,b]$).

Утверждение следует из неравенств $\|x\|_{\mathrm{BV}} \leqslant \|x\|_3$ и $\|x\|_{\mathrm{C}} \leqslant \|x\|_2$. Следует также отметить, что вторая часть следствия согласуется с известным утверждением об аппроксимации любой непрерывной функции ломаными функциями в топологии равномерной сходимости.

§ 6. О пространстве сплайнов

Функция $x \in \mathrm{C}^m \doteq \mathrm{C}^m[a,b]$ называется *сплайном порядка* m, если существует конечное разбиение $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$ и числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ такие, что для всех $k = 1, \ldots, n$ и для всех $\tau, s \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$ справедливо равенство $x^{(m)}(s) - x^{(m)}(\tau) = c_k\,(s-\tau)$. Множество всех сплайнов порядка m, определенных на $[a,b]$, является линейным пространством. Легко показать, что производная от сплайна порядка m (при $m > 0$) есть сплайн порядка $m-1$, а сплайнами нулевого порядка являются ломаные функции.

Через RS^m (см. [5, 6]) обозначим подпространство в C^m, состоящее из тех функций x, что $x^{(m)} \in \mathrm{RS}$. В этом пространстве определена норма $\|x\|_{(m)} = \max\bigl\{\|x\|_{\mathrm{C}^m}, \|x^{(m)}\|_{\mathrm{Lip}}\bigr\}$, относительно которой пространство RS^m является полным. Пространство RS^m является замыканием по норме $\|\cdot\|_{(m)}$ пространства сплайнов порядка m, определенных на $[a,b]$.

§ 7. Аналог уравнения Эйлера для простейшей вариационной задачи в пространстве регулярно гладких функций

Пусть непрерывная по совокупности переменных функция $L \doteq L(t,x,y)$ определена на множестве $\Omega \doteq [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и имеет непрерывные по совокупности переменных частные производные $L_x(t,x,y)$ и $L_y(t,x,y)$. Если $(t,x,y) \in \Omega$, то $(t, x+h, y+g) \in \Omega$ для любых $h, g \in \mathbb{R}$ и

$$L(t,x+h,y+g) - L(t,x,y) = h\,L_x(t,x,y) + g\,L_y(t,x,y) + \varepsilon(t,x,y;h,g)\sqrt{h^2+g^2},$$

где $\lim \varepsilon(t,x,y;h,g) = 0$ при $\sqrt{h^2+g^2} \to 0$. Более того, если множество $S \subset \Omega$ компактно, то $\varepsilon(t,x,y;h,g) \to 0$ равномерно по всем $(t,x,y) \in S$. Другими словами,

$$\forall\,\varepsilon_0 > 0\ \exists\,\delta > 0: \quad \Bigl(\sqrt{h^2+g^2} < \delta \quad \Longrightarrow \sup_{(t,x,y)\in S} \bigl|\varepsilon(t,x,y;h,g)\bigr| < \varepsilon_0\Bigr).$$

Через $\mathcal{P}$ обозначим банахово пространство, состоящее из $x \in \mathrm{RS}[a,b]$ таких, что $x(a) = x(b) = 0$. Полнота $\mathcal{P}$ имеет место в силу его замкнутости в RS, а в качестве нормы можно брать любую из перечисленных выше шести эквивалентных норм. В настоящем параграфе применяем норму $\|x\| \doteq \|x\|_4$.

Зафиксируем $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, и пусть $\mathcal{P}_{\alpha\beta} \doteq \{\, x \in \mathrm{RS}[a,b] : x(a) = \alpha,\ x(b) = \beta \,\}$. Введенные объекты порождают функционал $J(x(\cdot)) = \displaystyle\int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t,\lambda))\,dt$, действующий из $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ в $\mathbb{R}$, понятие локального экстремума этого функционала и вариационную задачу

$$\begin{cases} J(x(\cdot)) \to \inf \\ x \in \mathcal{P}_{\alpha\beta} \end{cases} \tag{7.1}$$

Определение 3. Функция $x_0 \in \mathcal{P}_{\alpha\beta}$ называется *точкой слабого локального экстремума* задачи (7.1), если существует $\delta > 0$ такое, что для всех $h \in \mathcal{P}$ таких, что $\|h\| < \delta$, выполнено неравенство $J(x_0(\cdot) + h(\cdot)) \geqslant J(x_0(\cdot))$.

Теорема 4. *Если функция $x_0 \in \mathcal{P}_{\alpha\beta}$ является точкой слабого локального экстремума задачи* (7.1), *то при любом $\lambda \in [0,1]$ имеет место соотношение*

$$L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t,\lambda)) - \int_a^t L_x(s, x_0(s), \dot{x}_0(s,\lambda))\,ds \sim \mathrm{const}, \quad t \in [a,b]. \tag{7.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $h \in \mathcal{P}$ и $x = x_0 + h$ (очевидно, $x \in \mathcal{P}_{\alpha\beta}$). Тогда

$$\sigma \doteq J(x(\cdot)) - J(x_0(\cdot)) = \int_a^b \bigl[\, L(t, x_0(t)+h(t), \dot{x}_0(t,\lambda)+\dot{h}(t,\lambda)) - L(t, x_0(t), \dot{x}_0(t,\lambda)) \,\bigr]\,dt =$$

$$= \int_a^b h(t)\, L_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t,\lambda))\, dt + \sigma_1 + \sigma_2, \quad \text{где} \quad \sigma_1 \doteq \int_a^b \dot{h}(t,\lambda)\, L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t,\lambda))\, dt,$$

$$\sigma_2 \doteq \int_a^b R_h(t)\, dt, \qquad R_h(t) \doteq \varepsilon(t, x_0(t), \dot{x}_0(t,\lambda); h(t), \dot{h}(t,\lambda))\, \sqrt{h^2(t) + \dot{h}^2(t,\lambda)}.$$

Величина σ_1 представима в виде интеграла Римана-Стилтьеса

$$\sigma_1 = \int_a^b L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t,\lambda))\, dh(t) = -\int_a^b h(t)\, dL_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t,\lambda)).$$

Воспользовались формулой интегрирования по частям и равенствами $h(a) = h(b) = 0$. Таким образом, $\sigma = \sigma_2 - \int_a^b h(t)\, d\,\big[\, L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t,\lambda)) - \int_a^t L_x(s, x_0(s), \dot{x}_0(s,\lambda))\, ds\,\big]$. Функцию, стоящую в квадратных скобках, обозначим через $Q(t)$.

Так как x_0 — точка локального минимума задачи (7.1), то существует $\delta_1 > 0$ такое, что $\sigma \geqslant 0$ для всех $h \in \mathcal{P}$ таких, что $\|h\| < \delta_1$. Следовательно,

$$\int_a^b R_h(t)\, dt - \int_a^b h(t)\, dQ(t) \geqslant 0 \qquad \forall\, h \in \mathcal{P} :\, \|h\| < \delta_1,$$

$$\int_a^b h(t)\, dQ(t) \leqslant \int_a^b R_h(t)\, dt \leqslant \int_a^b \big|R_h(t)\big|\, dt \leqslant (b-a)\cdot \|h\| \cdot \sup_{t\in[a,b]} \big|\, \varepsilon(t, x_0(t), \dot{x}_0(t,\lambda); h(t), \dot{h}(t,\lambda))\big|.$$

Поскольку $x_0 \in \mathrm{RS}[a,b]$, то множество $M \doteq \big\{\, (t, x_0(t), \dot{x}_0(t,\lambda)) \in \Omega \,:\, (t,\lambda) \in [a,b] \times [0,1]\,\big\}$ является компактным в Ω, следовательно, для любого $\varepsilon_0 > 0$ существует $\delta_2 > 0$ такое, что $\sup_{t\in[a,b]} \big|\, \varepsilon(t, x_0(t), \dot{x}_0(t,\lambda); h(t), \dot{h}(t,\lambda))\big| < \varepsilon_0$, как только $\sqrt{h(t)^2 + \dot{h}(t,\lambda)^2} < \delta_2$.

Таким образом, если $\delta \doteq \min\{\,\delta_1, \delta_2\}$, то $\int_a^b h(t)\, dQ(t) \leqslant \varepsilon_0\,(b-a)\,\|h\|$ для всех $h \in \mathcal{P}$ таких, что $\|h\| < \delta$. Заменив h на $-h$, получаем оценки

$$-\int_a^b h(t)\, dQ(t) \leqslant \varepsilon_0\,(b-a)\,\|h\| \quad \text{и} \quad \Big|\int_a^b h(t)\, dQ(t)\Big| \leqslant \varepsilon_0\,(b-a)\,\|h\|,$$

$$\sup_{h\in\mathcal{P}:\ 0<\|h\|<\delta} \frac{1}{\|h\|}\,\Big|\int_a^b h(t)\, dQ(t)\Big| \leqslant \varepsilon_0\,(b-a), \qquad q \doteq \sup_{\xi\in\mathcal{P}:\ \|\xi\|=1} \Big|\int_a^b \xi(t)\, dQ(t)\Big| \leqslant \varepsilon_0\,(b-a),$$

а в силу произвольности $\varepsilon_0 > 0$ справедливо равенство $q = 0$. Таким образом,

$$\int_a^b \xi(t)\, dQ(t) = 0 \quad \forall\, \xi \in \mathcal{P} :\, \|\xi\| = 1 \quad \text{и} \quad \int_a^b h(t)\, dQ(t) = 0 \quad \forall\, h \in \mathcal{P},$$

поэтому $Q(t) \sim \mathrm{const}$ при $t \in [a,b]$, что и требовалось доказать.

Пример 6. Пусть функция $\varphi :\, [0,1] \to \mathbb{R}$ такова, что $\varphi(t) = \frac{1}{2} - \{\frac{1}{t}\}$ при $t \neq 0$ и $\varphi(0) = 0$ (где $\{\frac{1}{t}\}$ — дробная часть числа $\frac{1}{t}$). Если $k = 1, 2, \ldots$ и $t \in (\,\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\,]$, то $k \leqslant \frac{1}{t} < k+1$, поэтому для целой части числа $\frac{1}{t}$ имеет место равенство $[\,\frac{1}{t}\,] = k$, значит, $\{\frac{1}{t}\} = \frac{1}{t} - k$ и $\varphi(t) = k + \frac{1}{2} - \frac{1}{t}$. Функция φ непрерывна всюду, кроме нуля, и точек вида $t = \frac{1}{k}$ (предел $\varphi(0+)$ не существует; $\frac{1}{2} = \varphi(\frac{1}{k} - 0) = \varphi(\frac{1}{k}) \neq \varphi(\frac{1}{k} + 0) = -\frac{1}{2}$), а $\dot{\varphi}(t) = 1/t^2$ для любого $t \in (\,\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\,)$. Функция $|\varphi(t)|$ непрерывна всюду, кроме нуля, причем $|\varphi(t)| = (-1)^m\,(\,[\frac{m}{2}] + \frac{1}{2} - \frac{1}{t}\,)$ на отрезках $t \in [\,\frac{2}{m+1}, \frac{2}{m}\,]$, $m = 2, 3, \ldots$, а функция $\xi(t) \doteq t^3\,|\varphi(t)|$ — регулярно гладкая:

$$\dot{\xi}(t,\lambda) = 3\,t^2\,|\varphi(t)| + \left\{ \begin{array}{ccll} 0 & , & t = 0 & \\ (-1)^m\, t & , & t \in (\,\frac{2}{m+1}, \frac{2}{m}\,) & , \quad m = 2, 3, \ldots \\ (-1)^m\, \frac{2}{m}\,(1-2\lambda) & , & t = \frac{2}{m} & , \quad m = 3, 4, \ldots \\ 1 & , & t = 1 & \end{array} \right. , \quad \lambda \in [0,1].$$

Пусть, далее, функция $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ такова, что $f(t) = t^2 \sin^2 \frac{2\pi}{t}$ при $t \neq 0$ и $f(0) = 0$. Легко проверить, что f — дифференцируемая функция с ограниченной производной ($f \notin C^1[0,1]$), а произведение $F(t,\lambda) \doteq f(t)\,\dot{\xi}(t,\lambda)$ — непрерывно дифференцируемая функция, причем F не зависит от λ, то есть $F = F(t)$. Функция $g(t) \doteq F'(t)$ — непрерывная.

Если $t \in [0,1]$, $L(t,x,\dot{x}) = f(t)\,\dot{x}^2 + 2\,g(t)\,x$ — лагранжиан, $x_0 \in \mathcal{P}_{\alpha\beta}$ — экстремаль задачи (7.1), удовлетворяющая соотношению (7.2), а $h \in \mathcal{P}$ — произвольная функция, то в обозначениях теоремы 4 имеем $R_h(t) = f(t)\,\dot{h}^2(t,\lambda)$ и $\sigma \geqslant 0$. В силу построений регулярно гладкая функция $x_0 \doteq \xi(t) = t^3\,|\varphi(t)|$ является экстремалью, удовлетворяющей соотношению (7.2), и точкой локального минимума задачи (7.1), в которой $\alpha = 0$ и $\beta = \frac{1}{2}$.

Замечание 4. Пусть J_1, J_2, J_3 — инфимум функционала $J(x(\cdot))$ в пространствах RS, KC^1 и C^1 соответственно. Тогда $J_1 = J_2 = J_3$: в силу следствия 6 пространство KC^1 всюду плотно в RS, откуда следует первое равенство, а второе — хорошо известно [7, с. 69].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hönig Ch. S. Volterra-Stieltjes integral equations. Mathematics Studies 16. — Amsterdam: North-Holland, 1975. — 152 p.
2. Tvrdý M. Regulated functions and the Perron-Stieltjes integral // Časopis pěst. mat. — 1989. — № 114. — P. 187–209.
3. Родионов В. И. Об одном семействе подпространств пространства прерывистых функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Вып. 4. — С. 7–24.
4. Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975. — 448 с.
5. Родионов В. И. О пространстве регулярно дифференцируемых функций // Известия Института математики и информатики. УдГУ. Ижевск, 2004. — Вып. 1 (29). — С. 3–32.
6. Романов Е. Л. О замыкании пространства сплайнов порядка m по специальной норме // Вестник Удмуртского университета. Математика. — 2006. — № 1. — С. 107–110.
7. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление: учеб. пособие для вузов. — М.: Наука, 1979. — 432 с.

Поступила в редакцию 29.01.10

V. I. Rodionov
On the space of regular smooth functions

The concept of regular smooth function is defined. Any piecewise smooth function is regular smooth function, and any regular smooth function is Lipschitzian. Any regular smooth function has finite one-sided derivatives: the left-side derivative is continuous at the left and the right-side derivative is continuous on the right. One-sided derivatives generate concept of a regular derivative. The space of regular smooth functions is the closure of the space of piecewise linear functions on norm of space Lipschitzian functions. The space of piecewise smooth functions is everywhere dense in space of regular smooth functions. The analogue of the equation of Euler for the elementary variational problem in space of regular smooth functions is proved.

Keywords: one-sided derivative, piecewise smooth function, Lipschitzian function, regulated function, calculus of variations.

Mathematical Subject Classifications: 26A16, 49J52

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., декан факультета информационных технологий и вычислительной техники, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: rodionov@uni.udm.ru