ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2011. Вып. 1

УДК 517.977 + 517.926

© ***В. А. Зайцев***

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ [1]

Получены новые достаточные условия экспоненциальной стабилизируемости допустимого процесса квазилинейной управляемой системы с неполной обратной связью. Получены следствия для управляемой системы, описываемой квазилинейным дифференциальным уравнением n-го порядка с наблюдателем.

Ключевые слова: экспоненциальная стабилизация, нелинейная управляемая система, линейная управляемая система, обратная связь.

В работе получены достаточные условия экспоненциальной стабилизируемости допустимого процесса квазилинейной управляемой системы с неполной обратной связью. Доказательство основано на результатах об управлении спектром собственных значений линейных стационарных управляемых систем с неполной обратной связью [1–3].

1. Обозначения и определения. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — канонический базис евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с нормой $|\cdot|$, определяемой равенством $|x| = \sqrt{x^* x}$ ($*$ означает транспонирование); $O_\delta(\widehat{x}) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x - \widehat{x}| < \delta\}$; $M_{n,m}$ — пространство вещественных $n \times m$-матриц A с нормой $|A| = \max\limits_{|x|=1} |Ax|$; $M_n := M_{n,n}$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t,x), \qquad t \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty), \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где функция $X(t,x)$ непрерывна по переменной t и непрерывно дифференцируема по x на множестве $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$.

Определение 1. Решение $\eta(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$, ($t_0 \in \mathbb{R}_+$) системы (1) называется *экспоненциально устойчивым с показателем* $\alpha > 0$, если существуют $N > 0$, $\delta > 0$ такие, что для любого $x_0 \in O_\delta(\eta(t_0))$ решение $x(t)$ системы (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ определено на всей полуоси $[t_0, +\infty)$ и удовлетворяет оценке

$$|x(t) - \eta(t)| \leqslant N |x(t_0) - \eta(t_0)| e^{-\alpha(t - t_0)}, \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Решение $\eta(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$ системы (1) называется *экспоненциально устойчивым* [4, гл. IV, § 8], если существует $\alpha > 0$ такое, что решение $\eta(t)$ экспоненциально устойчиво с показателем α.

С помощью стандартной процедуры перехода от системы (1) к системе уравнений возмущенного движения вопрос об устойчивости решения $\eta(t)$ сводится к исследованию устойчивости тривиального решения приведенной системы вида (1), то есть системы, в которой $X(t, 0) \equiv 0$. Поэтому в дальнейшем будем говорить об устойчивости тривиального решения приведенной системы вида (1).

Предположим, что система (1) является квазилинейной [4, гл. IV, § 10], [5, с. 156], её линейная часть постоянна, а возмущение удовлетворяет условию малости порядка выше первого. Другими словами, предположим, что система (1) имеет вид

$$\dot{x} = Ax + \varphi(t,x), \tag{2}$$

[1]Работа поддержана грантом Правительства РФ по государственной поддержке научных исследований (№ 11.G34.31.0039) и грантом РФФИ (№ 11-01-00380).

где A — постоянная матрица, функция $\varphi(t,x)$ непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по x на $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$, причём $\varphi(t,x)=o(|x|)$ при $x\to 0$ равномерно по $t\in\mathbb{R}_+$ (то есть для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что при всех $t\in\mathbb{R}_+$ выполнено неравенство $|\varphi(t,x)|\leqslant\varepsilon|x|$ для всех $x\in O_\delta(0)$).

В этом случае имеет место теорема Ляпунова (см., например, [4, гл. IV, § 10]) об устойчивости по линейному приближению нулевого решения системы (2): *если все собственные значения* $\lambda_i(A)$, $i=1,\ldots,n$ *матрицы* A *имеют отрицательные вещественные части:* $\operatorname{Re}\lambda_i(A)<0$, $i=1,\ldots,n$, *то тривиальное решение* $\widehat{x}(t)\equiv 0$ *системы* (2) *экспоненциально устойчиво.*

2. Управляемые системы. Рассмотрим объект управления

$$\dot{x}=f(t,x,u),\qquad z=h(t,x),\quad t\in\mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Здесь $x\in\mathbb{R}^n$ — это вектор состояния объекта, $u\in\mathbb{R}^m$ — вектор входных воздействий (вектор управления), $z\in\mathbb{R}^k$ — вектор выходных величин (величин, доступных измерению), которые являются функциями состояния объекта. Будем предполагать, что функции f и h непрерывны по t и непрерывно дифференцируемы по остальным переменным на $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$ соответственно.

Функцию $t\to\big(\widehat{x}(t),\widehat{u}(t),\widehat{z}(t)\big)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k$ назовём *допустимым процессом* управляемой системы (3), если она определена на полуоси $[t_0,+\infty)$, $t_0\in\mathbb{R}_+$; функция $t\to\widehat{u}(t)$ измерима, интегрируема по Лебегу на любом отрезке $\Delta\subset[t_0,+\infty)$; функция $\widehat{x}(t)$, $t\in[t_0,+\infty)$ является решением в смысле Каратеодори системы $\dot{x}=f(t,x,\widehat{u}(t))$, и $\widehat{z}(t)\equiv h(t,\widehat{x}(t))$, $t\in[t_0,+\infty)$.

Рассмотрим систему (3). Управление в системе (3) можно строить различными способами. Если на входы системы (3) подаются управления u, зависящие от измеренных сигналов, то есть $u=u(t,z)$, то говорят, что управление в системе (3) строится по принципу обратной связи. Если $z=x$, то есть в каждый момент времени измерению доступны все координаты вектора состояния, то говорят, что управление построено по принципу полной обратной связи. В общем случае, когда $z=h(t,x)$, говорят, что управление строится по принципу неполной обратной связи.

Зафиксируем некоторый *невозмущённый* допустимый процесс

$$\big(\widehat{x}(t),\widehat{u}(t),\widehat{z}(t)\big),\qquad t\in[t_0,+\infty), \tag{4}$$

задав некоторый начальный момент $t_0\in\mathbb{R}_+$. Рассмотрим задачу стабилизации невозмущённого процесса (4) системы (3) по принципу неполной обратной связи.

Определение 2. Невозмущённый допустимый процесс (4) системы (3) называется *экспоненциально стабилизируемым с показателем* $\alpha>0$ *по принципу неполной обратной связи*, если существуют $N>0$, $\delta>0$ и $\gamma>0$ такие, что для любого $x_0\in O_\delta(\widehat{x}(t_0))$ существует допустимое управление, построенное по принципу неполной обратной связи в виде $u=u(t,z)$, $t\in[t_0,+\infty)$ такое, что: а) $u(t,\widehat{z}(t))=\widehat{u}(t)$; б) решение $x(t)$ замкнутой системы

$$\dot{x}=f\Big(t,x,u\big(t,h(t,x)\big)\Big),\qquad t\in[t_0,+\infty) \tag{5}$$

с начальным условием $x(t_0)=x_0$ удовлетворяет оценке $|x(t)-\widehat{x}(t)|\leqslant N|x(t_0)-\widehat{x}(t_0)|e^{-\alpha(t-t_0)}$, $t\in[t_0,+\infty)$, при этом управление удовлетворяет оценке $|u(t,z(t))-\widehat{u}(t)|\leqslant\gamma$, $t\in[t_0,+\infty)$.

Задача стабилизации допустимого процесса (4) сводится к задаче стабилизации тривиального (допустимого) процесса

$$\big(\widehat{x}(t),\widehat{u}(t),\widehat{z}(t)\big)\equiv(0,0,0),\quad t\in[t_0,+\infty) \tag{6}$$

приведенной системы вида (3), то есть системы, в которой $f(t,0,0)\equiv 0$, $h(t,0)\equiv 0$. Поэтому будем говорить о стабилизации тривиального процесса (6) приведённой системы.

Замечание 1. В работе [6] были получены достаточные условия экспоненциальной стабилизации допустимого процесса управляемой системы с полной обратной связью.

3. Стабилизация квазилинейной управляемой системы. Предположим, что система линейного приближения для приведенной системы стационарна. Тогда система (3) имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + Bu + \varphi(t,x,u), \qquad && t \in \mathbb{R}_+, \quad u \in \mathbb{R}^m, \\ &z = C^*x + \psi(t,x), && x \in \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{R}^k, \end{aligned} \tag{7}$$

где функции φ и ψ равномерно (по t) на каждом отрезке $\Delta \subset \mathbb{R}_+$ удовлетворяют условиям

$$\varphi(t,x,u) = o(|x| + |u|) \quad \text{при} \quad |x| + |u| \to 0, \qquad \psi(t,x) = o(|x|) \quad \text{при} \quad |x| \to 0. \tag{8}$$

Будем предполагать, что выполнены следующие условия.

У1. Условия (8) выполнены равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$.

У2. Матрицы A, B, C имеют специальный вид (см. [1–3]):

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ b_{p1} & \dots & b_{pm} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \dots & c_{pk} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix},$$

$$a_{i,i+1} \neq 0, \quad i = \overline{1, n-1}; \qquad a_{ij} = 0, \quad j > i+1; \qquad p \in \{1, \dots, n\}.$$

Теорема 1. *Пусть система* (7) *удовлетворяет условиям* У1–У2. *Предположим, что матрицы*

$$C^*B, \quad C^*AB, \quad \dots, \quad C^*A^{n-1}B \tag{9}$$

линейно независимы. Тогда для любого заданного $\alpha > 0$ тривиальный допустимый процесс (6) *системы* (7) *является экспоненциально стабилизируемым с показателем α по принципу неполной обратной связи, причем управление можно выбрать стационарным по t и линейным по z в виде $u = Qz$.*

Рассмотрим систему линейного приближения для системы (7)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad z = C^*x. \tag{10}$$

Отождествим ее с тройкой (A, B, C). Система (10) называется *согласованной* [7], если «большая система» [8]

$$\dot{q} = (A \otimes I - I \otimes A^*)q + (B \otimes C)w, \quad q \in \mathbb{R}^{n^2}, \quad w \in \mathbb{R}^{mk}$$

вполне управляема. Здесь $I = [e_1, \dots, e_n] \in M_n$ — единичная матрица, $\otimes$ — прямое произведение матриц [9, с. 235]. Определение согласованности (произвольной нестационарной) системы вида (10) было введено в работе [7] и исследовалось в работах [1, 7, 8].

Теорема 2. *Пусть система* (7) *удовлетворяет условиям* У1–У2. *Предположим, что система* (10) *согласованна. Тогда для любого заданного $\alpha > 0$ тривиальный допустимый процесс* (6) *системы* (7) *является экспоненциально стабилизируемым с показателем α по принципу неполной обратной связи, причем управление можно выбрать стационарным по t и линейным по z в виде $u = Qz$.*

Теорема 2 непосредственно вытекает из теоремы 1, поскольку из согласованности системы (10) следует линейная независимость матриц (9) [1, теорема 7].

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Пусть задано произвольное $\alpha > 0$. По теореме 1 [3] (см. также [1, теорема 10]), если выполнено условие У2 и матрицы (9) линейно независимы, то для системы (10), замкнутой по принципу линейной неполной обратной связи управлением $u = Qz$, разрешима задача управления спектром собственных значений. Это значит, что для любого многочлена $r(\lambda) = \lambda^n+\gamma_1\lambda^{n-1}+\ldots+\gamma_n$ с вещественными коэффициентами γ_i найдется матрица $Q \in M_{m,k}$ такая, что характеристический многочлен $\chi(A + BQC^*;\lambda)$ матрицы $A + BQC^*$ совпадает с $r(\lambda)$. Матрица Q находится (см. [3, формула (16)]) из системы линейных уравнений

$$\gamma_i = a_i - \sum_{\nu=0}^{i-1} a_{i-1-\nu}\mathrm{Sp}\,(QC^*A^\nu B), \qquad i = 1,\ldots,n, \tag{11}$$

(здесь $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n := \chi(A;\lambda)$). Система линейных уравнений (11) разрешима относительно коэффициентов матрицы Q, поскольку матрицы (9) линейно независимы. Положим $\beta := \alpha + 1$, $\widehat{r}(\lambda) := \prod\limits_{i=1}^{n}(\lambda + \alpha + i)$ и построим по теореме 1 [3] матрицу Q, обеспечивающую равенство $\chi(A + BQC^*;\lambda) = \widehat{r}(\lambda)$. Тогда матрица $A + BQC^*$ имеет собственные значения $-(\alpha + 1),\ldots,-(\alpha + n)$. Поэтому найдется $\mu > 0$ (зависящее от матриц A, B, Q, C, но не зависящее от $t_0 \in \mathbb{R}_+$) такое, что для всех $t \geqslant t_0$

$$\left|e^{(A+BQC^*)(t-t_0)}\right| \leqslant \mu e^{-\beta(t-t_0)}. \tag{12}$$

Построим в системе (7) управление $u = Qz$ при $t \in [t_0,+\infty)$. Замкнутая система примет вид

$$\dot{x} = (A + BQC^*)x + s(t,x), \qquad t \in [t_0,+\infty), \tag{13}$$

где $s(t,x) = BQ\psi(t,x) + \varphi(t,x,QC^*x + Q\psi(t,x))$. Обозначим $b := |B|$, $c := |C| = |C^*|$, $d := |Q|$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon \in (0,1)$. Положим $\nu := \varepsilon/\mu > 0$. Выберем число $\nu_1 > 0$ так, чтобы $\nu_1 \leqslant \min\{\nu/(2bd), 1/d\}$. (Если $d = 0$, значит $Q = 0$; в этом случае берем в качестве ν_1 произвольное положительное число. Числа b и c не равны нулю в силу того, что матрицы (9) линейно независимы.) Положим $\nu_2 := \nu/(2(2 + dc))$. В силу условия У1 для $\nu_1 > 0$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что $|\psi(t,x)| \leqslant \nu_1|x|$ при $|x| < \delta_1$, $t \in [t_0,+\infty)$; для $\nu_2 > 0$ существует $\delta_2 > 0$ такое, что

$$|\varphi(t,x,u)| \leqslant \nu_2(|x| + |u|) \qquad \text{при} \quad |x| + |u| < \delta_2, \quad t \in [t_0,+\infty). \tag{14}$$

Положим $\delta_3 := \delta_2/(2 + dc)$ и пусть $\delta_4 = \min\{\delta_1,\delta_3\}$. Тогда при $|x| < \delta_4$ для всех $t \in [t_0,+\infty)$ выполнено

$$\begin{aligned}|x| + |QC^*x + Q\psi(t,x)| &\leqslant |x| + dc|x| + d|\psi(t,x)| \leqslant |x| + dc|x| + d\nu_1|x| \leqslant \\ &\leqslant |x| + dc|x| + |x| = (2 + dc)|x| < (2 + dc)\delta_3 = \delta_2.\end{aligned}$$

Поэтому в силу (14) при $|x| < \delta_4$ для всех $t \in [t_0,+\infty)$ выполнено

$$\bigl|\varphi\bigl(t,x,QC^*x + Q\psi(t,x)\bigr)\bigr| \leqslant \nu_2\bigl(|x| + |QC^*x + Q\psi(t,x)|\bigr) \leqslant \nu_2(2 + dc)|x| = \frac{\nu}{2}|x|.$$

Таким образом, при $|x| < \delta_4$ для всех $t \in [t_0,+\infty)$ выполнено неравенство

$$|s(t,x)| \leqslant bd|\psi(t,x)| + \bigl|\varphi\bigl(t,x,QC^*x + Q\psi(t,x)\bigr)\bigr| \leqslant bd\nu_1|x| + \frac{\nu}{2}|x| \leqslant \frac{\nu}{2}|x| + \frac{\nu}{2}|x| = \nu|x|.$$

Положим $N := \mu > 0$, $\delta := \min\{\delta_4,\delta_4/\mu\} > 0$, $\gamma := (dc + 1)\delta_4 > 0$. Выберем произвольное $x_0 \in O_\delta(0)$. Рассмотрим задачу Коши для системы (13) с начальным условием $x(t_0) = x_0$. В силу формулы Коши получим

$$x(t) = e^{(A+BQC^*)(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(A+BQC^*)(t-\tau)}s(\tau,x(\tau))\,d\tau. \tag{15}$$

Обозначим через $T = \sup\{T_1\}$ таких чисел $T_1 > 0$, что решение $x(t)$ интегрального уравнения (15) удовлетворяет неравенству $|x(t)| < \delta_4$ при $t \in [t_0, t_0 + T_1)$. Тогда при всех $t \in [t_0, t_0 + T)$ выполнено неравенство $|s(t, x(t))| < \nu|x(t)| = \varepsilon|x(t)|/\mu$. Следовательно, в силу неравенства (12) при всех $t \in [t_0, t_0 + T)$ имеем

$$|x(t)| \leqslant \mu e^{-\beta(t-t_0)}|x_0| + \int_{t_0}^{t} \mu e^{-\beta(t-\tau)}|s(\tau, x(\tau))|\, d\tau < \mu e^{-\beta(t-t_0)}|x_0| + \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-\tau)}\varepsilon|x(\tau)|\, d\tau.$$

Умножим полученное неравенство на $e^{\beta(t-t_0)}$:

$$|x(t)|e^{\beta(t-t_0)} \leqslant \mu|x_0| + \int_{t_0}^{t} \varepsilon|x(\tau)|e^{\beta(\tau-t_0)}\, d\tau.$$

В силу леммы Гроноулла–Беллмана [4, с. 108–109] получим оценку

$$|x(t)|e^{\beta(t-t_0)} \leqslant \mu|x_0|e^{\varepsilon(t-t_0)},$$

поэтому при всех $t \in [t_0, t_0 + T)$

$$|x(t)| \leqslant \mu|x_0|e^{-(\beta-\varepsilon)(t-t_0)} \leqslant \mu|x_0|e^{-\alpha(t-t_0)}. \tag{16}$$

Поскольку $|x_0| < \delta$, то $\mu|x_0| < \delta_4$, а поскольку $e^{-\alpha(t-t_0)} < 1$, $t \in (t_0, +\infty)$, следовательно, $|x(t)| < \delta_4$ для всех $t \in [t_0, +\infty)$, поэтому $T = +\infty$. Учитывая, что $\mu = N$, из неравенства (16) получаем для всех $t \in [t_0, +\infty)$ оценку $|x(t)| \leqslant N|x(t_0)|e^{-\alpha(t-t_0)}$, что и требовалось доказать.

Покажем, что построенное управление u удовлетворяет требуемым условиям. На нулевом допустимом решении $\widehat{x}(t) \equiv 0$ системы (7) имеем $\widehat{z}(t) \equiv 0$, поэтому $u(t, \widehat{z}(t)) = Q\widehat{z}(t) \equiv 0$ совпадает с $\widehat{u}(t) \equiv 0$. Далее $|u(t, z(t)) - \widehat{u}(t)| = |Qz(t)| \leqslant |Q||z(t)| \leqslant d\big(|C^*x(t)| + |\psi(t, x(t))|\big)$. При $t \in [t_0, +\infty)$ выполнены неравенства $|x(t)| < \delta_4$ и $|\psi(t, x(t))| \leqslant \nu_1|x(t)| \leqslant \delta_4/d$, поэтому $|u(t, z(t)) - \widehat{u}(t)| \leqslant d(c\delta_4 + \delta_4/d) = (dc + 1)\delta_4 = \gamma$. Теорема доказана. □

Замечание 2. Заметим, что построенные константы N, δ, γ не зависят от начального момента t_0, поэтому на самом деле в теореме 1 доказана *равномерная* (по $t \in \mathbb{R}_+$) экспоненциальная стабилизируемость с показателем α.

4. Следствия. Рассмотрим систему управления, которая описывается дифференциальным уравнением n-го порядка, на вход которой подается m сигналов и их производных до порядка $(n - p)$ включительно, а измерению доступны k компонент, зависящих от состояния системы и его производных до порядка $(p - 1)$ включительно:

$$\begin{aligned} x^{(n)} &= F(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}, u_1, \ldots, u_m, \ldots, u_1^{(n-p)}, \ldots, u_m^{(n-p)}), \\ z_j &= H_j(t, x, x', \ldots, x^{(p-1)}), \quad j = 1, \ldots, k, \quad p \in \{1, \ldots, n\}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}$ — состояние объекта, $\mathbf{u} = \operatorname{col}(u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления, $\mathbf{z} = \operatorname{col}(z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{R}^k$ — вектор выходных величин. Предположим, что выполнены следующие условия.

У3. Функция F непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по остальным координатам на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n+m(n-p+1)}$.

У4. Функции H_j, $j = \overline{1, k}$ на множестве $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p$ имеют непрерывные частные производные по всем аргументам до порядка $(n - p)$ включительно, то есть для любого мультииндекса $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{p+1})$, такого что $\nu_1, \ldots, \nu_{p+1} \geqslant 0$ и $|\nu| := \nu_1 + \ldots + \nu_{p+1} \leqslant n - p$, функция $\frac{\partial^{|\nu|} H_j(\xi_1, \ldots, \xi_{p+1})}{\partial\xi_1^{\nu_1}\partial\xi_2^{\nu_2}\ldots\partial\xi_{p+1}^{\nu_{p+1}}}$ непрерывна при $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p+1}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p$.

У5. $F(t, 0) \equiv 0$, $H_j(t, 0) \equiv 0$, $j = \overline{1, k}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Таким образом, из условия У5 следует, что $\Big(\big(\widehat{x}(t), \widehat{x}'(t), \ldots, \widehat{x}^{(n-1)}(t)\big), \widehat{\mathbf{u}}(t), \widehat{\mathbf{z}}(t)\Big) \equiv (0, 0, 0)$, $t \in \mathbb{R}_+$ — допустимый процесс системы (17).

Предположим, что система линейного приближения для системы (17) на тривиальном допустимом процессе стационарна. Тогда система (17) имеет вид

$$x^{(n)} = -a_1x^{(n-1)} - a_2x^{(n-2)} - \ldots - a_nx + b_{p1}u_1^{(n-p)} + b_{p+1,1}u_1^{(n-p-1)} + \ldots + b_{n1}u_1 + \ldots$$
$$\ldots + b_{pm}u_m^{(n-p)} + \ldots + b_{nm}u_m + \varphi(t, X, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ldots, \mathbf{u}^{(n-p)}), \quad p \in \{1, \ldots, n\}, \tag{18}$$
$$z_j = c_{1j}x + \ldots + c_{pj}x^{(p-1)} + \psi_j(t, \overline{X}), \quad j = 1, \ldots, k, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{19}$$
$$X = (X_1, \ldots, X_n) := (x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n, \quad \overline{X} := (x, x', \ldots, x^{(p-1)}) \in \mathbb{R}^p.$$

Предполагаем, что нелинейные возмущения удовлетворяют следующим условиям малости: равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$ выполнены условия

$$\varphi(t, X, \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}^{(n-p)}) = o\bigl(|X| + |\mathbf{u}| + \ldots + |\mathbf{u}^{(n-p)}|\bigr) \text{ при } |X| + |\mathbf{u}| + \ldots + |\mathbf{u}^{(n-p)}| \to 0, \tag{20}$$
$$\forall\, s = \overline{0, n-p} \quad \forall j = \overline{1, k} \quad \Bigl(\frac{d}{dt}\Bigr)^s \psi_j(t, \overline{X}) = o\bigl(|(X_1, \ldots, X_{p+s})|\bigr) \text{ при } |(X_1, \ldots, X_{p+s})| \to 0. \tag{21}$$

Замечание 3. Соотношение (21) выполнено, к примеру, если ψ_j не зависят от t. Покажем это. Рассмотрим функцию $\psi_j(\overline{X})$. Обозначим ее $\psi(\overline{X})$. По формуле Тейлора имеем

$$\psi(\overline{X}) = \sum_{i,j=1}^{p} \varkappa_{ij}X_iX_j + \sum_{i,j,\nu=1}^{p} \varkappa_{ij\nu}X_iX_jX_\nu + \ldots + \sum_{i_1,\ldots,i_{n-p}=1}^{p} \varkappa_{i_1\ldots i_{n-p}}X_{i_1}\ldots X_{i_{n-p}} + o(|\overline{X}|^{n-p}).$$

Рассмотрим первую сумму (квадратичную форму) $\sigma(\overline{X}) = \sum\limits_{i,j=1}^{p} \varkappa_{ij}X_iX_j$. Очевидно, $\sigma(\overline{X}) = o(|\overline{X}|)$ при $\overline{X} \to 0$. Далее,

$$\frac{d\bigl(\sigma(\overline{X})\bigr)}{dt} = \sum_{i,j=1}^{p} \varkappa_{ij}(X_i'X_j + X_iX_j') = \sum_{i,j=1}^{p} \varkappa_{ij}(X_{i+1}X_j + X_iX_{j+1}) = \sum_{i,j=1}^{p+1} \widetilde{\varkappa}_{ij}X_iX_j,$$

следовательно, $(\frac{d}{dt})\sigma(\overline{X}) = o\bigl(|(X_1, \ldots, X_{p+1})|\bigr)$ при $|(X_1, \ldots, X_{p+1})| \to 0$ и так далее, $(\frac{d}{dt})^s\sigma(\overline{X}) = o\bigl(|(X_1, \ldots, X_{p+s})|\bigr)$ при $|(X_1, \ldots, X_{p+s})| \to 0$. Аналогичные соотношения доказываются для остальных форм (до порядка $(n-p)$).

Рассмотрим задачу экспоненциальной стабилизации тривиального допустимого процесса системы (18), (19) с показателем $\alpha > 0$ по принципу неполной обратной связи. Требуется для заданного $\alpha > 0$ построить управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{z})$, $t \in [t_0, +\infty)$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$ (такое, что $\mathbf{u}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$) в системе (18), (19) так, чтобы тривиальное решение $X(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$ замкнутой управлением $\mathbf{u}(t, \mathbf{z})$ системы (18), (19) было экспоненциально устойчиво с показателем α.

Обозначим $a_0 := 1$, $J = \sum\limits_{i=1}^{n-1} e_ie_{i+1}^* \in M_n$ — первый единичный косой ряд, $J_j := J^j$, $j = \overline{0, n-1}$. Построим по системе (18), (19) матрицы $A, G \in M_n$, $B, R \in M_{n,m}$, $C \in M_{n,k}$

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{Vmatrix}, \quad G := \sum_{i=0}^{n-1} a_iJ_i^* = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \ldots & a_1 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{22}$$

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \\ b_{p1} & \ldots & b_{pm} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nm} \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \ldots & c_{pk} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}, \quad R := G^{-1}B = \begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \\ r_{p1} & \ldots & r_{pm} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & \ldots & r_{nm} \end{Vmatrix}. \tag{23}$$

Матрица $R = \{r_{ij}\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ имеет такой же вид, как и матрица B (то есть $r_{ij} = 0$, $i = \overline{1,p-1}$, $j = \overline{1,m}$) в силу того, что матрица G нижняя треугольная с ненулевыми диагональными элементами, и следовательно, G^{-1} также нижняя треугольная матрица. Далее, $G = \{g_{\nu i}\}_{\nu,i=1}^{n}$, $g_{\nu i} = \{0,\ i > \nu;\ a_{\nu-i},\ i \leqslant \nu\}$, поэтому так как $B = GR$, то $b_{\nu j} = \sum\limits_{i=1}^{n} g_{\nu i} r_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{\nu} a_{\nu-i} r_{ij} = \sum\limits_{i=p}^{\nu} a_{\nu-i} r_{ij}$, $\nu \geqslant p$; $b_{\nu j} = 0$, $\nu < p$, $j = \overline{1,m}$.

Положим $\mathbf{x}_1 = x$. Пусть $\mathbf{x} = \operatorname{col}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}^n$. Покажем, что систему (18), (19) можно записать в виде (7).

Утверждение 1. *Система управления* (18), (19) *равносильна системе управления, записанной в векторном виде*

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + R\mathbf{u} + \overline{\varphi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{24}$$

$$\mathbf{z} = C^*\mathbf{x} + \overline{\psi}(t, \mathbf{x}), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{25}$$

здесь матрицы A, R, C системы определены равенствами (22), (23);

$$\overline{\varphi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \operatorname{col}\big(0, \ldots, 0, \varphi(t, X, \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}^{(n-p)})\big) \in \mathbb{R}^n, \quad \overline{\psi}(t, \mathbf{x}) = \operatorname{col}\big(\psi_1(t, \overline{X}), \ldots, \psi_k(t, \overline{X})\big) \in \mathbb{R}^k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из системы (24) имеем

$$\begin{aligned}
&X_1 = x = \mathbf{x}_1,\\
&X_2 = \dot{x} = \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2,\\
&X_3 = \ddot{x} = \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&X_p = x^{(p-1)} = \dot{\mathbf{x}}_{p-1} = \mathbf{x}_p,\\
&X_{p+1} = x^{(p)} = \dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{x}_{p+1} + \sum_{j=1}^{m} r_{pj} u_j,\\
&X_{p+2} = x^{(p+1)} = \dot{\mathbf{x}}_{p+1} + \sum_{j=1}^{m} r_{pj} \dot{u}_j = \mathbf{x}_{p+2} + \sum_{j=1}^{m} r_{p+1,j} u_j + \sum_{j=1}^{m} r_{pj} \dot{u}_j,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&X_{s+1} = x^{(s)} = \mathbf{x}_{s+1} + \sum_{i=p}^{s} \sum_{j=1}^{m} r_{ij} u_j^{(s-i)},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&X_n = x^{(n-1)} = \mathbf{x}_n + \sum_{i=p}^{n-1} \sum_{j=1}^{m} r_{ij} u_j^{(n-1-i)},\\
&\dot{X}_n = x^{(n)} = -a_1\mathbf{x}_n - a_2\mathbf{x}_{n-1} - \ldots - a_n\mathbf{x}_1 + \sum_{i=p}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_{ij} u_j^{(n-i)} + \varphi(t, X, \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}^{(n-p)}).
\end{aligned} \tag{26}$$

Выразим $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$ из первых n уравнений и подставим в последнее, получим

$$x^{(n)} = -a_1 x^{(n-1)} - \cdots - a_n x + \sum_{s=p}^{n} a_{n-s} \sum_{i=p}^{s} \sum_{j=1}^{m} r_{ij} u_j^{(s-i)} + \varphi(t, X, \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}^{(n-p)}). \tag{27}$$

Обозначим $\varkappa = \sum\limits_{s=p}^{n} a_{n-s} \sum\limits_{i=p}^{s} \sum\limits_{j=1}^{m} r_{ij} u_j^{(s-i)}$. Поменяем в $\varkappa$ порядок суммирования $\sum\limits_{s=p}^{n}\sum\limits_{i=p}^{s}$ на $\sum\limits_{i=p}^{n}\sum\limits_{s=i}^{n}$, получим $\varkappa = \sum\limits_{i=p}^{n}\sum\limits_{s=i}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{n-s} r_{ij} u_j^{(s-i)}$. Сделаем замену индекса $\nu = n - (s - i)$, тогда

$\varkappa = \sum\limits_{i=p}^{n}\sum\limits_{\nu=i}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{\nu-i} r_{ij} u_j^{(n-\nu)}$. Снова поменяв порядок суммирования $\sum\limits_{i=p}^{n}\sum\limits_{\nu=i}^{n}$ на $\sum\limits_{\nu=p}^{n}\sum\limits_{i=p}^{\nu}$, получим

$$\varkappa = \sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=p}^{n}\sum_{i=p}^{\nu} a_{\nu-i} r_{ij} u_j^{(n-\nu)} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=p}^{n} b_{\nu j} u_j^{(n-\nu)}.$$

Подставляя это выражение в правую часть равенства (27), получим, что правая часть равенства (27) совпадает с правой частью равенства (18). Равенства (19), очевидно, равносильны уравнению (25). Утверждение доказано. □

Построим в системе (24), (25) управление в виде

$$\mathbf{u} = Q\mathbf{z}, \tag{28}$$

получим замкнутую систему

$$\dot{\mathbf{x}} = (A + RQC^*)\mathbf{x} + s(t,\mathbf{x}), \qquad t \in [t_0, +\infty), \tag{29}$$

где $s(t,\mathbf{x}) = RQ\overline{\psi}(t,\mathbf{x}) + \overline{\varphi}\big(t,\mathbf{x}, QC^*\mathbf{x} + Q\overline{\psi}(t,\mathbf{x})\big)$. Построим соответствующее управление (28) в системе (18), (19) (фактически — в системе (17)), замкнутая система примет вид

$$x^{(n)} = F\Big(t, X, QH(t,\overline{X}), \ldots, \big(QH(t,\overline{X})\big)^{(n-p)}\Big), \quad t \in [t_0, +\infty), \quad H = \operatorname{col}(H_1, \ldots, H_k). \tag{30}$$

В системах (29) и (30) в качестве управляющих воздействий, влияющих на поведение решений, выступают коэффициенты матрицы Q.

Утверждение 2. *Если управление Q из* (28) *экспоненциально стабилизирует с показателем $\alpha > 0$ тривиальное решение $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ системы* (29)*, то это управление экспоненциально стабилизирует с показателем α тривиальное решение $X(t) \equiv 0$ системы* (30)*, и наоборот.*

Докажем предварительно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Решение $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ системы* (29) *и соответствующее решение $X = (X_1, \ldots, X_n)$ системы* (30) *связаны соотношениями: для каждого $\nu = 1, \ldots, n$*

$$\text{а)}\ \ \mathbf{x}_\nu = O\big(|(X_1, \ldots, X_\nu)|\big) \quad \text{при} \quad (X_1, \ldots, X_\nu) \to 0;$$
$$\text{б)}\ \ X_\nu = O\big(|(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_\nu)|\big) \quad \text{при} \quad (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_\nu) \to 0.$$

Следствие 1.

$$|\mathbf{x}| = O\big(|X|\big) \quad \text{при} \quad X \to 0; \quad |X| = O\big(|\mathbf{x}|\big) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \to 0. \tag{31}$$

Доказательство леммы 1. Решения систем (29) и (30) связаны равенствами (26), где $\mathbf{u}$ определено равенством (28). Имеем $X_1 = \mathbf{x}_1, \ldots, X_p = \mathbf{x}_p$, поэтому утверждения а) и б), очевидно, справедливы для всех $\nu = \overline{1,p}$.

Дифференцируя равенства (19) s раз ($s = \overline{0, n-p}$) по t и используя условия (21), получим, что имеют место предельные соотношения

$$\mathbf{z}^{(s)} = O\big(|(X_1, \ldots, X_{p+s})|\big) + o\big(|(X_1, \ldots, X_{p+s})|\big) = O\big(|(X_1, \ldots, X_{p+s})|\big), \tag{32}$$

при $(X_1, \ldots, X_{p+s}) \to 0$, выполненные (здесь и всюду далее) равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$. Таким образом, $\mathbf{u}^{(s)} = Q\mathbf{z}^{(s)} = O\big(|(X_1, \ldots, X_{p+s})|\big)$ при $(X_1, \ldots, X_{p+s}) \to 0$ для всех $s = \overline{0, n-p}$. Пусть $\nu \in \{p+1, \ldots, n\}$ и пусть $(X_1, \ldots, X_\nu) \to 0$. Из ν-й строки в (26) имеем

$$\mathbf{x}_\nu = X_\nu - \Big(\sum_{j=1}^{m} r_{\nu-1,j} u_j + \sum_{j=1}^{m} r_{\nu-2,j} \dot{u}_j + \ldots + \sum_{j=1}^{m} r_{pj} u_j^{(\nu-1-p)}\Big) =$$
$$X_\nu + O\big(|(X_1, \ldots, X_p)|\big) + O\big(|(X_1, \ldots, X_{p+1})|\big) + \ldots + O\big(|(X_1, \ldots, X_{\nu-1})|\big) = O\big(|(X_1, \ldots, X_\nu)|\big).$$

Утверждение а) доказано.

Докажем утверждение б). Докажем по индукции, что для любого $\nu \in \{p+1, \dots, n\}$

$$X_\nu = O\big(|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\nu)|\big) \quad \text{при} \quad (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\nu) \to 0 \quad \text{и}$$
$$\mathbf{u}^{(\nu-p-1)} = O\big(|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\nu-1})|\big) \quad \text{при} \quad (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\nu-1}) \to 0. \tag{33}$$

Пусть $\nu = p+1$. Пусть $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{p+1}) \to 0$. Тогда $(X_1, \dots, X_p) = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) \to 0$. Тогда в силу (32) $\mathbf{z} = O(|\overline{X}|) = O\big(|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)|\big)$ при $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) \to 0$. Таким образом, $\mathbf{u} = O\big(|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)|\big)$, $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) \to 0$. Тогда из $(p+1)$-го уравнения в (26) имеем

$$X_{p+1} = \mathbf{x}_{p+1} + \sum_{j=1}^{m} r_{pj} u_j = \mathbf{x}_{p+1} + O\big(|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)|\big) = O\big(|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{p+1})|\big).$$

База доказана. Пусть утверждение б) верно для всех $\nu = 1, \dots, p+s$, где $1 \leqslant s < n-p$. Докажем утверждение б) для $\nu = p+s+1$. Пусть $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{p+s+1}) \to 0$. Тогда $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i) \to 0$ для всех $i \in \{1, \dots, p+s\}$. По предположению индукции $X_i = O\big(|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i)|\big)$ (в частности, $X_i \to 0$) при $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i) \to 0$ для всех $i \in \{1, \dots, p+s\}$, а также $\mathbf{u}^{(\ell-1)} = O\big(|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{p+\ell-1})|\big)$ при $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{p+\ell-1}) \to 0$ для всех $\ell = \overline{1, s}$. В силу (32) и предположения индукции получим, что $\mathbf{z}^{(s)} = O\big(|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{p+s})|\big)$, и следовательно, $\mathbf{u}^{(s)} = O\big(|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{p+s})|\big)$ при $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{p+s}) \to 0$. Из этого факта, из предположения индукции (для $\mathbf{u}$) и из $p+s+1$-го уравнения в (26) получаем, что при $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{p+s+1}) \to 0$

$$X_{p+s+1} = \mathbf{x}_{p+s+1} + \sum_{j=1}^{m} r_{p+s,j} u_j + \sum_{j=1}^{m} r_{p+s-1,j} \dot{u}_j + \ldots + \sum_{j=1}^{m} r_{p+1,j} u_j^{(s-1)} + \sum_{j=1}^{m} r_{pj} u_j^{(s)} =$$
$$= \mathbf{x}_{p+s+1} + O\big(|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)|\big) + O\big(|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{p+1})|\big) + \ldots$$
$$\ldots + O\big(|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{p+s-1})|\big) + O\big(|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{p+s})|\big) = O\big(|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{p+s+1})|\big).$$

Доказательство по индукции завершено. Таким образом, утверждение б) справедливо для всех $\nu = \overline{1, n}$. Лемма 1 доказана. □

Следствие 1 очевидным образом вытекает из леммы 1. Из следствия 1 теперь очевидным образом вытекает утверждение 2. Таким образом, для стабилизации (с показателем $\alpha > 0$) тривиального допустимого процесса системы (18), (19) с помощью управления (28) необходимо и достаточно стабилизировать с показателем α тривиальное решение системы (29) с помощью управления Q из (28).

Найдем условия, при которых существует управление Q в (28), стабилизирующее тривиальное решение системы (29). Для этого воспользуемся теоремами 1, 2. В силу (31) и (32) при $\mathbf{x} \to 0$ имеем $\mathbf{z}^{(n-p)} = O(|X|) = O(|\mathbf{x}|)$, следовательно, $\mathbf{u}^{(n-p)} = O(|\mathbf{x}|)$. В силу доказанных соотношений (33) получим, что $\mathbf{u}^{(s)} = O(|\mathbf{x}|)$ при $\mathbf{x} \to 0$ для всех $s = \overline{0, n-p}$. Отсюда и из (31) получаем, что $|X| + |\mathbf{u}| + \ldots + |\mathbf{u}^{(n-p)}| = O(|\mathbf{x}|)$ при $\mathbf{x} \to 0$. Обратное соотношение

$$|\mathbf{x}| = O\big(|X| + |\mathbf{u}| + \ldots + |\mathbf{u}^{(n-p)}|\big) \quad \text{при} \quad |X| + |\mathbf{u}| + \ldots + |\mathbf{u}^{(n-p)}| \to 0$$

также имеет место; это очевидно следует из формул (26). В силу условий (20) отсюда следует, что для управления $\mathbf{u}$ вида (28) выполнено соотношение

$$\big|\overline{\varphi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\big| = \big|\varphi(t, X, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(n-p)})\big| = o(|\mathbf{x}|) \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \to 0.$$

Поскольку $\psi_j(t, \overline{X}) = o(|\overline{X}|)$, $j = \overline{1, k}$ при $|\overline{X}| \to 0$, то $\overline{\psi}(t, \mathbf{x}) = o\big(|\mathbf{x}|\big)$ при $\mathbf{x} \to 0$. Все предельные соотношения выполнены равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$. Таким образом, получаем, что $s(t, \mathbf{x}) = o(|\mathbf{x}|)$ при $\mathbf{x} \to 0$ равномерно по $t \in [t_0, +\infty)$ (то есть нелинейное возмущение удовлетворяет условиям, требуемым в теореме Ляпунова об устойчивости по линейному приближению). Кроме этого, матрицы системы (29), которые имеют вид (22), (23), удовлетворяют условию У2.

Таким образом, к системе (29) применимы рассуждения, которые были проведены для системы (13) при доказательстве теоремы 1. Применяя к системе (29) теоремы 1, 2 и учитывая утверждение 2, получаем следующие результаты.

Теорема 3. *Пусть задана система управления* (17) *такая, что выполнены условия* У3, У4, У5. *Предположим, что система линейного приближения* (*в нуле*) *стационарна, а нелинейные возмущения удовлетворяют условиям малости* (20), (21).

Пусть выполнено одно из следующих условий.

1. *Система линейного приближения* (A, R, C) *согласованна.*
2. *Матрицы* C^*R, C^*AR, $\ldots$, $C^*A^{n-1}R$ *линейно независимы.*
3. *Матрицы* C^*B, C^*JB, $\ldots$, $C^*J^{n-1}B$ *линейно независимы.*
4. *Система* (J, B, C) *согласованна.*

Тогда для любого заданного $\alpha > 0$ *существует управление* (28) *такое, что тривиальное решение замкнутой системы* (30) *равномерно* (*относительно* $t \in \mathbb{R}_+$) *экспоненциально устойчиво с показателем* α.

Замечание 4. Условия теоремы 3 связаны следующей цепочкой импликаций: $1 \Longrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3 \Longleftrightarrow 4$. Условие 2 (в силу теоремы 1) обеспечивает заключение теоремы 3, поэтому условия 1, 3, 4 также обеспечивают заключение теоремы 3. Утверждение $1 \Longrightarrow 2$ доказано в работе [1, теорема 7]. Далее, из леммы 2 [3] (см. также [1, лемма 4]) следует, что если матрицы A, B, C, R имеют вид (22), (23), то для любой матрицы Q имеют место равенства

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sp}\,(QC^*B) &= a_0\mathrm{Sp}\,(QC^*R),\\
\mathrm{Sp}\,(QC^*JB) &= a_1\mathrm{Sp}\,(QC^*R) + a_0\mathrm{Sp}\,(QC^*AR),\\
\mathrm{Sp}\,(QC^*J^2B) &= a_2\mathrm{Sp}\,(QC^*R) + a_1\mathrm{Sp}\,(QC^*AR) + a_0\mathrm{Sp}\,(QC^*A^2R),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathrm{Sp}\,(QC^*J^{n-1}B) &= a_{n-1}\mathrm{Sp}\,(QC^*R) + a_{n-2}\mathrm{Sp}\,(QC^*AR) + \ldots + a_0\mathrm{Sp}\,(QC^*A^{n-1}R).
\end{aligned} \tag{34}$$

Отсюда следует справедливость утверждения $2 \Longleftrightarrow 3$. Эквивалентность $3 \Longleftrightarrow 4$ доказана в работе [1, теорема 9]. Из условия 3 (или 4) теоремы 3 следует, что возможность стабилизации системы (18), (19) не зависит от значений коэффициентов a_1, $\ldots$, a_n (хотя само управление, конечно, зависит от этих коэффициентов). Матрица Q, которая приводит характеристический многочлен $\chi(A+RQC^*)$ матрицы $A+RQC^*$ к наперед заданному полиному $p(\lambda) = \lambda^n+\gamma_1\lambda^{n-1}+\ldots+\gamma_n$, находится из системы уравнений

$$\gamma_i = a_i - \mathrm{Sp}\,(QC^*J^{i-1}B), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

или из равносильной ей (в силу равенств (34)) системы

$$\gamma_i = a_i - \sum_{\nu=0}^{i-1} a_{i-1-\nu}\mathrm{Sp}\,(QC^*A^{\nu}R), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Условие 2 (или 3) обеспечивает разрешимость этих систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зайцев В. А. Согласованность и управление спектром в линейных системах с наблюдателем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Вып. 3. — С. 50–80.
2. Зайцев В. А. Управление спектром в линейных системах с неполной обратной связью // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 9. — С. 1320–1328.
3. Зайцев В. А. Необходимые и достаточные условия в задаче управления спектром // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 12. — С. 1789–1793.
4. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. 472 с.
5. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова. — М.: Наука, 1966. 576 с.

6. Зайцев В. А., Попова С. Н., Тонков Е. Л. Экспоненциальная стабилизируемость нелинейных управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2010. — Вып. 3. — С. 25–29.

7. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I // Дифференциальные уравнения. — 1994. — Т. 30, № 10. — С. 1687–1696.

8. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференциальные уравнения. — 1997. — Т. 33, № 2. — С. 226–235.

9. Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Наука, 1978. 280 с.

Поступила в редакцию 10.10.10

V. A. Zaitsev

Exponential stabilization of quasi-linear control systems with incomplete feedback

New sufficient conditions of exponential stabilization of quasilinear control system with incomplete feedback are received. Consequences for the control system described by quasilinear differential equation of n-th order with the observer are obtained.

Keywords: exponential stabilization, nonlinear control system, linear control system, feedback.

Mathematical Subject Classifications: 34H15, 93D15

Зайцев Василий Александрович, к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений Удмуртского государственного университета, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4).
E-mail: verba@udm.ru