УДК 517.977

© *Н. И. Желонкина, А. Н. Сесекин, С. П. Сорокин*

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ В МАТРИЦЕ СИСТЕМЫ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

Работа посвящена исследованию свойств асимптотической устойчивости решений линейной системы дифференциальных уравнений с обобщенным воздействием в матрице системы и запаздыванием в фазовых координатах.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием, импульсное возмущение, устойчивость.

Введение

В данной работе изучается свойство экспоненциальной устойчивости решений линейной системы дифференциальных уравнений с матрицей системы, содержащей обобщенное воздействие, и запаздыванием в фазовых координатах. Свойство экспоненциальной устойчивости тривиального решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений с обобщенными функциями в матрице системы в случае отсутствия запаздывания в системе рассматривалось в работе [1], при наличии фиксированного запаздывания в фазовых координатах исследовалось в работе [2]. В отличие от упомянутых работ в данной работе рассматривается неоднородная система, содержащая как фиксированное, так и распределенное запаздывание. Особенностью задачи является то, что в правой части рассматриваемой системы содержится некорректная операция умножения разрывной функции на обобщенную, что приводит к возникновению проблемы формализации понятия решения такой системы. Как и в [1–3], для решения этой проблемы используется подход, основанный на замыкании множества гладких решений в пространстве функций ограниченной вариации. Такой подход естественен с точки зрения теории управления [4], где импульсные управления часто представляют собой идеализированные процессы с большим изменением параметров за короткие промежутки времени. Среди работ, посвященных исследованию устойчивости импульсных систем с запаздыванием, следует отметить работу [5], в которой в отличие от данной работы используется другая формализация понятия решения системы с импульсным воздействием, восходящая к работам А. М. Самойленко, Н. А. Перестюка [6]. Вопросы формализации решения импульсных дифференциальных включений и соответствующую библиографию можно найти, например, в [7–9].

§ 1. Экспоненциальная устойчивость линейной неоднородной системы с обобщенным воздействием и запаздыванием

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(t)x(t) + C(t)x(t-\tau) + \int_{-\tau}^{0} G(t,s)x(t+s)ds + f(t), \quad t \geqslant t_0. \tag{1.1}$$

Здесь $\bar{A}(t) = A(t) + \sum\limits_{j=1}^{m} D_j(t)\dot{v}_i(t)$, $A(t)$ — непрерывная матрица-функция размерности $n \times n$, $C(t), G(t,s), D_j(t), j \in \overline{1,m}$ — непрерывные ограниченные матрицы-функции размерности $n\times n$,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10–01–00356) и Интеграционного проекта УрО и СО РАН 09-С-1-1010.

$D_i(t)$ — взаимно коммутативны, $v_i(t)$ — компоненты вектор-функции ограниченной вариации $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \ldots, v_m(t))^T$, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание, $\varphi(t)$ — начальная функция, являющаяся функцией ограниченной вариации, определенной на $[t_0 - \tau,\, t_0]$, $f(t)$ — n-мерная вектор-функция с суммируемыми элементами.

Особенностью системы (1.1) является то, что в ее правой части содержится некорректная операция умножения разрывной функции на обобщенную. Объясняется это следующим. Если функция $v(t)$ разрывна в некоторый момент времени, то система подвергается в этот момент импульсному воздействию. Следовательно, функция $x(t)$ оказывается разрывной в этот момент, и в слагаемом $\sum\limits_{j=1}^{m} D_j(t)\dot v_i(t)\, x(t)$ возникает некорректная операция умножения обобщенной функции на разрывную, что приводит к возникновению проблемы формализации понятия решения.

Как и в [1–3,10,11] под аппроксимируемым решением системы (1.1) на произвольном конечном промежутке $[t_0, \vartheta]$ будем понимать функцию ограниченной вариации $x(t)$, являющуюся поточечным пределом последовательности абсолютно непрерывных решений $x_k(t)$ этой системы, порожденной последовательностью абсолютно непрерывных функций $v_k(t)$, поточечно сходящейся к вектор-функции ограниченной вариации $v(t)$, если этот предел не зависит от выбора последовательности.

Согласно [3], при сделанных выше предположениях на любом конечном интервале $[t_0, \vartheta]$, $(\vartheta > t_0)$ существует аппроксимируемое решение системы (1.1), удовлетворяющее интегральному уравнению

$$x(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(\xi)x(\xi)d\xi + \sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{t} D_j(\xi)x(\xi)dv_j^c(\xi) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} C(\xi)x(\xi - \tau)d\xi + \int_{t_0}^{t}\int_{-\tau}^{0} G(\xi, s)x(\xi + s)dsd\xi +$$

$$+ \sum_{t_i \leqslant t,\, t_i \in W_-} S(t_i, x(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0)) + \sum_{t_i < t,\, t_i \in W_+} S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i + 0)) + \int_{t_0}^{t} f(\xi)\, d\xi, \qquad (1.2)$$

где

$$S(t, x, \Delta v) = z(1) - z(0), \qquad (1.3)$$

$$\dot z(\xi) = \sum_{j=1}^{m} D_j(t)z(\xi)\, \Delta v_j(t), \qquad z(0) = x, \qquad (1.4)$$

W_- и W_+ соответственно точки левого и правого разрывов вектор-функции $v(t)$, $v_i^c(t)$ — непрерывная составляющая функции ограниченной вариации $v_i(t)$, $\Delta v(t-0) = v(t) - v(t-0)$ и $\Delta v(t+0) = v(t+0) - v(t)$. Заметим, что величина скачка траектории в момент импульсного воздействия, согласно (1.3), определяется с помощью решения вспомогательного дифференциального уравнения (1.4).

Под аппроксимируемым решением уравнения (1.1) на бесконечном интервале будем понимать соответствующее продолжение решения уравнения (1.2) на $[t_0, \infty)$.

Введем следующее обозначение

$$h(t) = \sup_{s \in [t-\tau, t]} ||y(s)||, \qquad (1.5)$$

где $||y||$ — норма вектора y в l_1, то есть $||y|| = \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|$. Далее нами будет использоваться понятие вариации вектор-функции, которая в зависимости от выбора нормы определяется неоднозначно. Здесь мы будем определять вариацию вектор-функции с помощью нормы в l_1.

Приведем один вспомогательный результат:

Лемма 1. *Неравенство*

$$ae^a \leqslant e^{\beta a} - 1 \tag{1.6}$$

справедливо при всех $a \geqslant 0$ *для* $\beta \geqslant e$.

В справедливости леммы нетрудно убедиться, используя разложение экспоненты в ряд и оценивая разности слагаемых с одинаковыми степенями a.

Пусть $\overline{x}(t)$ и $\widehat{x}(t)$ — аппроксимируемые решения уравнения (1.1), порождаемые начальными функциями $\overline{\varphi}(t)$ и $\widehat{\psi}(t)$, заданными на $[t_0-\tau, t_0]$.

Теорема 1. *Пусть фундаментальная матрица* $Y(t,s)$ *системы*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

удовлетворяет оценке

$$\|Y(t,s)\| \leqslant ce^{-\alpha(t-s)}, \tag{1.7}$$

где α *и* c — *некоторые постоянные, удовлетворяющие условиям* $\alpha > 0$, $c \geqslant 1$. *Кроме того, предположим, что справедливы следующие оценки*

$$||D_j(t)|| \leqslant K,\ ||C(t)|| \leqslant K,\ ||G(t,s)|| \leqslant K\ \ \forall t \in [t_0, \infty),\ s \in [t_0, t],\ j \in \overline{1,m}. \tag{1.8}$$

Здесь K — *положительная постоянная. Тогда если справедливо неравенство*

$$\alpha(t-t_0) - Kc((1+\tau)(t-t_0) + \operatorname*{var}_{[t_0,\,t]} v(\cdot)) > 0 \tag{1.9}$$

для всех $t \in [t_0, \infty)$, *то всякое аппроксимируемое решение* $\overline{x}(t)$ *системы* (1.1) *асимптотически устойчиво и справедлива оценка*

$$||\overline{x}(t) - \widehat{x}(t)|| \leqslant e^{-(\alpha(t-t_0) - cKe((1+\tau)(t-t_0) + \operatorname*{var}_{[t_0,\,t]} v(\cdot)))} c \max_{[t_0-\tau, t_0]} ||\overline{\varphi}(t) - \widehat{\psi}(t)||. \tag{1.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аппроксимируемые решения $\overline{x}(t)$ и $\widehat{x}(t)$ уравнения (1.1) с учетом формулы Коши из [10, 11] должны удовлетворять интегральному уравнению

$$x(t) = Y(t,t_0)\varphi(t_0) + \sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t} Y(t,\xi)D_i(\xi)x(\xi)\,dv_i^c(\xi) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} Y(t,\xi)C(\xi)x(\xi-\tau)\,d\xi + \int_{t_0}^{t}\int_{-\tau}^{0} Y(t,\xi)G(\xi,s)x(\xi+s)\,ds\,d\xi +$$

$$+ \sum_{t_i \leqslant t,\, t_i \in W_-} Y(t,t_i)S(t_i, x(t_i-0), \Delta v(t_i-0)) +$$

$$+ \sum_{t_i < t,\, t_i \in W_+} Y(t,t_i)S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i+0)) + \int_{t_0}^{t} Y(t,\xi)f(\xi)\,d\xi. \tag{1.11}$$

Согласно (1.11) разность $\overline{x}(t) - \widehat{x}(t)$ будет удовлетворять интегральному уравнению

$$\overline{x}(t) - \widehat{x}(t) = Y(t,t_0)\varphi(t_0) + \sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t} Y(t,\xi)D_i(\xi)(\overline{x}(\xi) - \widehat{x}(\xi))\,dv_i^c(\xi) +$$

$$+\int_{t_0}^{t} Y(t,\xi)C(\xi)(\overline{x}(\xi-\tau)-\widehat{x}(\xi-\tau))\,d\xi+\int_{t_0}^{t}\int_{-\tau}^{0} Y(t,\xi)G(\xi,s)(\overline{x}(\xi+s)-\widehat{x}(\xi+s))\,dsd\xi+$$

$$+\sum_{t_i\leqslant t,\, t_i\in W_-} Y(t,t_i)(S(t_i,\overline{x}(t_i-0),\Delta v(t_i-0))-S(t_i,\widehat{x}(t_i-0),\Delta v(t_i-0)))+$$

$$+\sum_{t_i< t,\, t_i\in W_+} Y(t,t_i)(S(t_i,\overline{x}(t_i),\Delta v(t_i+0))-S(t_i,\widehat{x}(t_i),\Delta v(t_i+0))). \qquad (1.12)$$

Для разности $S(t,\overline{x}(t),\Delta v(t))-S(t,\widehat{x}(t),\Delta v(t)$, согласно (1.3), (1.4), имеет место представление

$$S(t,\overline{x}(t),\Delta v(t))-S(t,\widehat{x}(t),\Delta v(t))=\overline{z}(1)-\overline{x}(t)-(\widehat{z}(1)-\widehat{x}(t))=$$

$$=\int_0^1\sum_{j=1}^{m} D_j(t)(\overline{z}(\xi)-\widehat{z}(\xi))\Delta v_j\,d\xi. \qquad (1.13)$$

Добавляя и вычитая под интегралом в правой части (1.13) $\overline{x}(t)-\widehat{x}(t)$ и вычисляя затем нормы от левой и правой частей последнего равенства с учетом сделанных ранее предположений, имеем

$$||(\overline{z}(1)-\overline{x}(t))-(\widehat{z}(1)-\widehat{x}(t))||\leqslant \qquad (1.14)$$
$$\leqslant K||\Delta v||\,||\overline{x}(t)-\widehat{x}(t)||+\int_0^1 K||\Delta v||\,||\overline{z}(\xi)-\overline{x}(t)-(\widehat{z}(\xi)-\widehat{x}(t)||.$$

Применяя к (1.14) лемму Гронуолла [12], получим

$$||(\overline{z}(1)-\overline{x}(t))-(\widehat{z}(1)-\widehat{x}(t))||\leqslant K||\Delta v||\,||\overline{x}(t)-\widehat{x}(t)||e^{K||\Delta v||}. \qquad (1.15)$$

Согласно лемме 1 из (1.15) следует неравенство

$$||(\overline{z}(1)-\overline{x}(t))-(\widehat{z}(1)-\widehat{x}(t))||\leqslant ||\overline{x}(t)-\widehat{x}(t)||(e^{Ke||\Delta v||}-1). \qquad (1.16)$$

Вычисляя нормы левой и правой части в (1.12), принимая во внимание неравенства (1.7), (1.8), (1.16) и равенство (1.13), используя обозначение

$$y(t)=\overline{x}(t)-\overline{x}(t), \qquad (1.17)$$

имеем

$$||y(t)||\leqslant c\Big[e^{-\alpha(t-t_0)}||\overline{\varphi}(t_0)-\widehat{\varphi}(t_0)||+K\int_{t_0}^{t}e^{-\alpha(t-\xi)}||y(\xi)||\,d\sum_{j=1}^{m}\operatorname*{var}_{[t_0,\,\xi]}v_j^c(\cdot)+$$

$$+K\int_{t_0}^{t}e^{-\alpha(t-\xi)}||y(\xi-\tau)||\,d\xi+K\int_{t_0}^{t}e^{-\alpha(t-\xi)}\int_{-\tau}^{0}||y(\xi+s)||\,d\xi ds\Big]+$$

$$+c\sum_{t_i\leqslant t, t_i\in W_-}e^{-\alpha(t-t_i)}(e^{Ke||\Delta v(t_i-0)||}-1)||y(t_i-0)||+$$

$$+c\sum_{t_i<t, t_i\in W_+}e^{-\alpha(t-t_i)}(e^{Ke||\Delta v(t_i+0)||}-1)||y(t_i)||. \qquad (1.18)$$

Учитывая оценку ($c\geqslant 1$)

$$c(e^a-1)<e^{ca}-1,$$

в справедливости которой нетрудно убедиться, воспользовавшись разложением экспоненты в ряд, неравенство (1.18) можно записать в виде

$$||y(t)|| \leqslant c\Big[e^{-\alpha(t-t_0)}||\overline{\varphi}(t_0)-\widehat{\varphi}(t_0)|| + K\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\xi)}||y(\xi)||\,d\sum_{j=1}^{m}\operatorname*{var}_{[t_0,\,\xi]} v_j^c(\cdot)+$$

$$+K\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\xi)}||y(\xi-\tau)||\,d\xi + K\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\xi)}\int_{-\tau}^{0}||y(\xi+s)||\,d\xi ds\Big]+$$

$$+\sum_{t_i\leqslant t, t_i\in W_-} e^{-\alpha(t-t_i)}(e^{cKe||\Delta v(t_i-0)||}-1)||y(t_i-0)||+$$

$$+\sum_{t_i< t, t_i\in W_+} e^{-\alpha(t-t_i)}(e^{cKe||\Delta v(t_i+0)||}-1)||y(t_i)||. \tag{1.19}$$

Учитывая обозначение (1.5) из (1.19), нетрудно получить следующее неравенство

$$h(t) \leqslant c\Big[e^{-\alpha(t-t_0)}h(t_0) + K\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\xi)}h(\xi)\,d\sum_{j=1}^{m}\operatorname*{var}_{[t_0,\,\xi]} v_j^c(\cdot)+$$

$$+K\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\xi)}h(\xi)\,d\xi + K\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\xi)}\tau h(\xi)\,d\xi\Big]+$$

$$+\sum_{t_i\leqslant t, t_i\in W_-} e^{-\alpha(t-t_i)}(e^{cKe||\Delta v(t_i-0)||}-1)h(t_i-0)+$$

$$+\sum_{t_i< t, t_i\in W_+} e^{-\alpha(t-t_i)}(e^{cKe||\Delta v(t_i+0)||}-1)h(t_i). \tag{1.20}$$

Умножим (1.20) на $e^{\alpha(t-t_0)}$. Введем обозначение

$$q(t) = e^{\alpha(t-t_0)}h(t). \tag{1.21}$$

В результате получим

$$q(t) \leqslant ch(t_0) + cK\int_{t_0}^{t} q(\xi)\,d((1+\tau)\xi + \sum_{j=1}^{m}\operatorname*{var}_{[t_0,\,\xi]} v_j^c(\cdot))+$$

$$+\sum_{t_i\leqslant t, t_i\in W_-}(e^{cKe||\Delta v(t_i-0)||}-1)q(t_i-0) + \sum_{t_i< t, t_i\in W_+}(e^{cKe||\Delta v(t_i+0)||}-1)q(t_i).$$

Умножим в последнем неравенстве интеграл на e. От этого неравенство только усилится. В результате имеем

$$q(t) \leqslant ch(t_0) + cKe\int_{t_0}^{t} q(\xi)\,d((1+\tau)\xi + \sum_{j=1}^{m}\operatorname*{var}_{[t_0,\,\xi]} v_j^c(\cdot))+$$

$$+\sum_{t_i\leqslant t, t_i\in W_-}(e^{cKe||\Delta v(t_i-0)||}-1)q(t_i-0) + \sum_{t_i< t, t_i\in W_+}(e^{cKe||\Delta v(t_i+0)||}-1)q(t_i). \tag{1.22}$$

Согласно лемме 3.4 из [10] всякое решение неравенства (1.22) удовлетворяет оценке

$$q(t) \leqslant e^{cKe((1+\tau)(t-t_0)+\operatorname*{var}_{[t_0,\,t]} v(\cdot))}ch(t_0), \tag{1.23}$$

где

$$\underset{[t_0,\,t]}{\mathrm{var}}\, v(\cdot) = \sum_{j=1}^{m} \underset{[t_0,\,t]}{\mathrm{var}}\, v_i^c(\cdot) + \sum_{t_i \leqslant t, t_i \in W_-} ||\Delta v(t_i - 0)|| + \sum_{t_i < t, t_i \in W_+} ||\Delta v(t_i + 0)||.$$

Умножая неравенство (1.23) на $e^{-\alpha(t-t_0)}$ и учитывая (1.21), имеем оценку

$$h(t) \leqslant e^{-(\alpha(t-t_0) - cKe((1+\tau)(t-t_0) + \underset{[t_0,\,t]}{\mathrm{var}}\, v(\cdot)))} ch(t_0), \tag{1.24}$$

из которой, в частности, следует оценка (1.10). □

Замечание 1. Для произвольного аппроксимируемого решения однородной системы (системы (1.1) с $f(t) \equiv 0$) имеет место оценка

$$||x(t)|| \leqslant e^{-(\alpha(t-t_0) - cKe((1+\tau)(t-t_0) + \underset{[t_0,\,t]}{\mathrm{var}}\, v(\cdot)))} c \max_{[t_0-\tau, t_0]} ||\varphi(t)||. \tag{1.25}$$

Справедливость оценки (1.25) следует из теоремы 1, если в качестве $\overline{x}(t)$ взять функцию $\overline{x}(t) \equiv 0$, которая является решением однородного уравнения при $\overline{\varphi}(t) \equiv 0$ для $t \in [t_0 - \tau, t_0]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корнилов И. А., Сесекин А. Н. Об устойчивости линейных систем с матрицей, содержащей обобщенные функции // Вестник УГТУ–УПИ, 2004. — №3 (33). — С. 386–388.

2. Фетисова Ю. В. Об устойчивости разрывных решений линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Труды 38-й Регион. молодеж. конф. — Екатеринбург, 2007. — С. 229–233.

3. Сесекин А. Н., Фетисова Ю. В. Функционально-дифференциальные уравнения в пространстве функций ограниченной вариации // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2009. — Т. 15, № 4. — С. 226–233.

4. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. — М.: Наука, 1968. — 476 с.

5. Anohin A., Berezansky L., Braverman E. Exponential stability of linear delay impulsive differential equations // Journal of mathematical analysis and applications. — 1995. — Vol. 193(3) — С. 923–941.

6. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Виша шк., 1987. — 288 с.

7. Filippova T. F. Sensitivity problems for impulsive differential inclusions // Proc. of the 6th WSEAS Conference on Applied Mathematics, Corfu, Greece, 2004. — P. 1–6.

8. Филиппова Т. Ф. Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением // Труды Института математики и механики УрО РАН. — Екатеринбург, 2009. — Т. 15. № 4. — С. 262–269.

9. Булгаков А. И., Филиппова О. В. О продолжаемости обобщенных решений функционально-дифференциального включения с вольтерровым оператором и импульсными воздействиями // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2009. — Т. 14. № 4. — С. 676–680.

10. Завалищин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсные процессы: Модели и приложения. — М.: Наука, 1991. — 256 с.

11. Сесекин А. Н. Динамические системы с нелинейной импульсной структурой // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2000. — Т. 6, № 2. —С. 497–514.

12. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

Поступила в редакцию 27.08.10

N. I. Zhelonkina, A. N. Sesekin, S. P. Sorokin

On stability of linear systems with impulsive actions at the matrix of system and delay

The article devoted to the study of asymptotic stability properties of solutions of linear system of differential equations with generalized action in the matrix system and delay in the phase coordinates.

Keywords: differentials equation with delay, impulsive perturbation, stability.

Mathematical Subject Classifications: 34K40, 34K45

Желонкина Наталья Игоревна, аспирант, кафедра прикладной математики, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19, E-mail: kpm@mail.ustu.ru

Сесекин Александр Николаевич, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, E-mail: sesekin@list.ru

Сорокин Степан Павлович, аспирант, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664000, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, E-mail: sorsp@mail.ru