УДК 515.122.536

© *Р. А. Головастов*

ОБ ОДНОМ БИКОМПАКТНОМ РАСШИРЕНИИ СЧЕТНОГО ДИСКРЕТНОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассматривается одна булева алгебра и ее пространство Стоуна как бикомпактное расширение счетного дискретного пространства. Доказаны некоторые свойства этого расширения.

Ключевые слова: бикомпактное расширение, пространство Стоуна булевой алгебры, цепи, антицепи.

Введение

В работе [1] М. Белл построил бикомпактное расширение BN счётного дискретного пространства, нарост которого удовлетворяет условию Суслина, но не сепарабелен. Это расширение построено как пространство Стоуна одной булевой алгебры, состоящей из подмножеств счётного множества.

Мы продолжим построение М. Белла [1] и рассмотрим ещё одну булеву алгебру и порождаемое ею пространство Стоуна.

Пусть $L = \{k_n \colon n \in \omega\}$ — счётное множество и $k_n \in \omega \setminus \{0\}$.

Введем обозначения

$$P(L) = \{f \in \omega^\omega \colon 0 \leqslant f(n) \leqslant k_n \text{ для } n \in \omega\},$$
$$N(L) = \{f|_n \colon f \in P(L),\ n \subset \omega\}.$$

Множество $N(L)$ является множеством всех сужений $f \in P(L)$ на $n \subset \omega$. Здесь и далее буквой n обозначаем, в зависимости от контекста, как натуральное число, так и множество $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

На $N(L)$ естественным образом вводится отношение порядка: $s \leqslant t$, если t является продолжением s. Будем обозначать $s < t$, если $t|_{\mathrm{dom}(s)} = s$ и $t \neq s$.

Далее, обозначим $T(L) = \{\pi \in N(L)^\omega \colon \ \mathrm{dom}\,\pi(n) = n+1 \text{ для } n \in \omega\}$, где $\mathrm{dom}\, s$ — это область определения фунции s.

Для $s \in N(L)$ обозначим $C_s = \{t \in N(L) \colon t|_{\mathrm{dom}\, s} = s\}$.

Для $\pi \in T(L)$ обозначим $C_\pi = \cup\{C_{\pi(n)} \colon n \in \omega\}$. Отметим, что C_π и $N(L) \setminus C_\pi$ бесконечны для всякого $\pi \in T(L)$. Для $\pi \in T(L)$ и $M \subseteq \omega$ положим $C_{\pi|_M} = \cup\{C_{\pi(n)} \colon n \in M\}$.

Пусть $B(L)$ — булева алгебра, порожденная множествами из $B'(L) = \{C_\pi \colon \pi \in T(L)\} \cup \{N(L) \setminus C_\pi \colon \pi \in T(L)\}$. Очевидно, что $\{\{s\} \colon s \in N(L)\} \cup \{C_s \colon s \in N(L)\} \subseteq B(L)$.

Определим $b(N(L), B(L))$ как пространство Стоуна булевой алгебры $B(L)$.

Для расширения BN, рассмотренного М. Беллом [1], в множестве $L = \{k_n \colon n \in \omega\}$ всякое $k_n = n + 1$. В этом случае, следуя [1], соответствующие множества мы будем обозначать P, N, T, B. Расширение Белла изучалось в работах [2, 3, 4].

В данной работе мы рассматриваем случай, когда $k_n = 1$ для всех $k_n \in L$. Соответствующие множества будем обозначать P_2, N_2, T_2, B_2, а пространство Стоуна как $b(N_2, B_2)$. Отметим, что множество N_2 с введенным порядком является канторовым деревом с отброшенным наименьшим элементом. Нарост множества $A \subseteq N_2$ будем обозначать $A^* = [A] \setminus A$.

В работе доказано, что $b(N_2, B_2)$ вкладывается в качестве замкнутого нигде не плотного множества в BN (теорема 1). Показано, что в $b(N_2, B_2) \setminus N_2$ есть изолированные точки и открыто-замкнутые копии $\beta N \setminus N$ (теорема 2). Доказано, что в отличие от BN, удовлетворяющего условию Суслина, в $b(N_2, B_2)$ для всякой окрестности всякой неизолированной точки нароста число Суслина равно 2^ω (следствие 1). Рассмотрены полные цепи в N_2 и их замыкания в $b(N_2, B_2)$ (теорема 4).

§ 1. Основные результаты

Прежде всего выясним соотношение пространств BN и $b(N_2, B_2)$.

Лемма 1. *Пусть $B = \{G\}$ — булева алгебра расширения Белла. Тогда семейство $\{G \cap N_2 \colon G \in B\}$ — это булева алгебра B_2.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что семейство $\{G \cap N_2 \colon G \in B\}$ есть булева алгебра на N_2. Покажем, что $\{G \cap N_2 \colon G \in B\} = B_2$. Для этого достаточно заметить, что для всякого $s \in N_2$ выполняется

$$C_s \cap N_2 = \{t \in N \colon t|_{\mathrm{dom}(s)} = s\} \cap N_2 = \{t \in N_2 \colon t|_{\mathrm{dom}(s)} = s\}.$$

Отметим, что для $s \in N \setminus N_2$ справедливо $C_s \cap N_2 = \varnothing$. □

Теорема 1. *Существует гомеоморфизм $\phi\colon [N_2]_{BN} \to b(N_2, B_2)$ такой, что $\phi|_{N_2}$ — тождественное отображение.*

Доказательство. Расмотрим произвольную точку нароста $x \in [N_2]_{BN} \setminus N_2$. Точка $x = \{G \in B \colon x \in [G]\}$ — это ультрафильтр в булевой алгебре B. Тогда $\xi_x = \{G \cap N_2 \colon G \in x\}$ является ультрафильтром в B_2, то есть точкой расширения $b(N_2, B_2)$.

Определим отображение ϕ по правилу: $\phi(x) = \xi_x$ для $x \in [N_2]_{BN} \setminus N_2$, на множестве N_2 ϕ тождественно. Отображение ϕ является отображением «на».

Пусть $\xi = \{G'\}$ — ультрафильтр в B_2. Тогда $|\cap\{[G']_{BN} \colon G' \in \xi\}| = 1$. Действительно, если бы нашлись $x, y \in \cap\{[G']_{BN} : G' \in \xi\}$, $x \neq y$, то нашлись бы и $G_x \in x$, $G_y \in y$ (x и y можно рассматривать как ультрафильтры на B) такие, что $G_x \cap G_y = \varnothing$. В силу того, что $[G_x]_{BN}$ и $[G_y]_{BN}$ — открыто-замкнутые множества, получаем: $G'_x = G_x \cap N_2 \neq \varnothing$ и $G'_y = G_y \cap N_2 \neq \varnothing$, $G'_x, G'_y \in B_2$ и $G'_x, G'_y \in \xi$, что невозможно.

Положим $x = \cap\{[G']_{BN} \colon G' \in \xi\}$. По определению отображения ϕ имеем: $\phi(x) = \xi$.

Аналогично доказывается и взаимная однозначность отображения ϕ. Непрерывность ϕ очевидна. Следовательно, $\phi\colon [N_2]_{BN} \to b(N_2, B_2)$ — искомый гомеоморфизм. □

Таким образом, $b(N_2, B_2)$ вложимо в BN как замкнутое множество. При этом $b(N_2, B_2)$ является нигде не плотным в BN в силу вида базисных окрестностей.

Под цепью в N_2 будем понимать множество $\{s_i \in N_2 \colon i \in M \subseteq \omega\}$, где $s_i < s_j$ для всех $i < j$ и $i, j \in M$. Напомним, что антицепью называется множество $\{s_i \in N_2 \colon i \in M \subseteq \omega\}$, где $s_i \nleq s_j$ для всех $i \neq j$ и $i, j \in M$.

Определение 1. Цепь (антицепь) $\{s_i \in N_2 : i \in \omega\}$ будем называть *полной*, если для любого $n \in \omega \setminus \{0\}$ найдётся $i \in \omega$ такое, что $\mathrm{dom}(s_i) = n$.

Определение 2. Цепь (антицепь) $\{s_i \in N_2 : i \in \omega\}$ будем называть *строгой*, если для любых $i, j \in \omega$ и $i \neq j$ выполнено $\mathrm{dom}(s_i) \neq \mathrm{dom}(s_j)$. В дальнейшем для простоты будем считать, что в полных строгих цепях и антицепях $\mathrm{dom}(s_i) = i + 1$.

Нарост бесконечной цепи в пространстве Белла состоит из одной точки [3]. Из построения Белла следует, что для любой точки нароста $x \in BN \setminus N$ нарост любой её окрестности бесконечен. Поэтому замыкание любой бесконечной цепи не является открыто-замкнутым множеством в BN. В расширении Белла для любой бесконечной строгой антицепи A справедливо, что $[A]$ гомеоморфно βN [3]. В силу $c(BN \setminus N) = \omega$ получаем, что $[A] \setminus A$ является нигде не плотным, а значит $[A]$ не открыто-замкнуто в BN. В пространстве $b(N_2, B_2)$ ситуация иная.

Теорема 2. *Для пространства $b(N_2, B_2)$ имеют место следующие утверждения.*

1. *Пусть $A = \{s_i \in N_2 \colon i \in \omega\}$ — полная цепь. Тогда $A \in B_2$, $[A]$ является открыто-замкнутым множеством в $b(N_2, B_2)$ и $[A] \setminus A$ состоит из одной точки.*

2. *Пусть $A = \{f|_n \colon n \in M\}$, где $f \in P_2$ и $M \subset \omega$: $|M| = |\omega \setminus M| = \omega$. Тогда $[A]$ не является открыто-замкнутым множеством в $b(N_2, B_2)$.*

3. *Пусть $A = \{\pi(n) \colon n \in M \subseteq \omega\}$ — строгая антицепь. Тогда $A \in B_2$ и $[A]$ является открыто-замкнутым множеством в $b(N_2, B_2)$ и гомеоморфно βN.*

Доказательство. 1. Покажем, что $A \in B_2$. Для этого построим $\pi_1, \pi_2 \in T_2$ такие, что $A = C_{\pi_1} \setminus C_{\pi_2}$. Определим $\pi_1(i) = s_i$ для всякого $i \in \omega$, $\pi_2(i)|_i = s_{i-1}$, $\pi_2(i)(i) = (s_i(i) + 1) \mod 2$, при $i > 0$ (другими словами, $\pi_2(i)$ — это продолжение s_{i-1} на i отличное от s_i). Положим $\pi_2(0)(0) = (s_0(0) + 1) \mod 2$. Из построения очевидно, что $A = C_{\pi_1} \setminus C_{\pi_2}$. В [3] доказано, что бесконечная цепь из N есть сходящаяся последовательность. Поскольку $b(N_2, B_2)$ вложимо в BN как замкнутое множество в силу теоремы 1, то $[A] \setminus A$ состоит из одной точки. Поскольку $A \in B_2$, то $[A]$ является открыто-замкнутым множеством в $b(N_2, B_2)$.

2. Предположим противное, пусть $[A]$ — открыто-замкнутое множество в $b(N_2, B_2)$. Множества A и $A' = \{f|_n \colon n \in \omega \setminus M\}$ являются подпоследовательностями последовательности $\{f|_n \colon n \in \omega\}$. Отсюда $[A] = A \cup \{x\}$ и $[A'] = A' \cup \{x\}$, где x — предел последовательности $\{f|_n \colon n \in \omega\}$. При этом $A' \subseteq b(N_2, B_2) \setminus [A]$. В силу нашего предположения множество $b(N_2, B_2) \setminus [A]$ замкнуто и, следовательно, $x \cup A' = [A'] \subseteq b(N_2, B_2) \setminus [A]$. С другой стороны, $x \in [A]$. Получили противоречие.

3. Можно показать так же, как показано в [3] для пространства Белла, что для любых $\pi \in T_2$ и $M \subseteq \omega$ найдутся $\pi', \pi'' \in T_2$ такие, что $C_{\pi|_M} = C_{\pi'} \cap C_{\pi''}$. Таким образом, $C_{\pi|_M} \in B_2$. Положим $M' = \{n+1 \colon n \in M\}$. Построим $\pi_0, \pi_1 \in T_2$ такие, что $A = C_{\pi|_M} \setminus (C_{\pi_0|_{M'}} \cup C_{\pi_1|_{M'}})$. Для $n \in M$ положим $\pi_0(n+1)|_{n+1} = \pi_1(n+1)|_{n+1} = \pi(n)$ и $\pi_0(n+1)(n+1) = 0$, $\pi_1(n+1)(n+1) = 1$. Другими словами, $\pi_0(n+1)$ и $\pi_1(n+1)$ — это два различных продолжения $\pi(n)$ на следующий шаг. В точках $n \notin M'$ $\pi_0(n)$ и $\pi_1(n)$ выбираем произвольно. Требуемое равенство выполнено в силу построения, так как $C_{\pi_0|_{M'}} \cup C_{\pi_1|_{M'}}$ вырезает из $C_{\pi|_M}$ все продолжения элементов антицепи, оставляя только сами элементы. В [3] доказано, что замыкание бесконечной строгой антицепи из N гомеоморфно βN. Отсюда и из теоремы 1 следует, что $[A]$ гомеоморфно βN. Поскольку $A \in B_2$, то $[A]$ является открыто-замкнутым множеством в $b(N_2, B_2)$. $\square$

Одним из важных свойств расширения Белла является, что его нарост обладает счетным числом Суслина, но не сепарабелен [1]. В рассматриваемом нами расширении $b(N_2, B_2)$ ситуация иная. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3. *В любой окрестности Ox произвольной неизолированной точки из нароста $x \in b(N_2, B_2) \setminus N_2$ содержится открыто-замкнутая копия βN.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную базисную окрестность неизолированной точки нароста $Ox = [C_{\pi|_M} \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}]$. Докажем, что найдется бесконечная строгая антицепь $\{s_i \colon i \in \omega\} \subseteq C_{\pi|_M} \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i} = G$.

Поскольку x — точка нароста, то $|G| = \omega$. Введем обозначение: $s + 1$ — это множество продолжений s на $\operatorname{dom}(s) + 1$, то есть $s + 1 = \{t \in N_2 \colon t|_{\operatorname{dom} s} = s,\ \operatorname{dom} t = \operatorname{dom}(s) + 1\}$. Разобьем $G = I_{Ox} \cup V_{Ox} \cup U_{Ox}$, где $I_{Ox} = \{s \in G \colon |s+1 \cap G| = 0\}$, $V_{Ox} = \{s \in G \colon |s+1 \cap G| = 2\}$, $U_{Ox} = \{s \in G \colon |s + 1 \cap G| = 1\}$.

Докажем, что если $|I_{Ox}| = \omega$, то теорема верна. Заметим, что $N_2^n = \{t \in N_2 \colon \operatorname{dom} t = n\}$ конечно для всех $n \in \omega$. Тогда найдется бесконечное $M \subseteq \omega$: $I_{Ox} \cap N_2^n \neq \varnothing$ для всех $n \in M$. Обозначим $M = \{n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots\}$. В качестве s_i выбираем произвольный элемент из $I_{Ox} \cap N_2^{n_i}$. В итоге получаем бесконечную строгую антицепь $\{s_i \colon i \in \omega\} \subseteq I_{Ox} \subseteq G$. Далее будем считать, что I_{Ox} конечно.

Теперь рассмотрим V_{Ox}. Если $|V_{Ox}| < \omega$, то $|U_{Ox}| = \omega$ и найдется n_0 такое, что $\operatorname{dom} s < n_0$ для всех $s \in I_{Ox} \cup V_{Ox}$. Тогда для всех $m > n_0$ выполнено $N_2^m \cap G = N_2^m \cap U_{Ox}$. Рассмотрим произвольное $s \in N_2^m \cap G$, при $m > n_0$. Поскольку $s \in U_{Ox}$, то $s + 1 = \{s', s''\}$, где $s' \in U_{Ox}$ и $s'' \in \bigcup\limits_{i \leqslant n} C_{\pi_i}$. Так как $s \in G$ и $s'' \notin G$, то найдется $i \leqslant n \colon s'' = \pi_i(m + 1)$. Заметим, что для различных $s_1, s_2 \in N_2^m \cap G$ при $m > n_0$ найдутся различные $i_1, i_2 \leqslant n \colon s_1 < \pi_{i_1}(m + 1)$ и $s_2 < \pi_{i_2}(m + 1)$, то есть $|N_2^m \cap G| \leqslant n$ для всех $m > n_0$. При этом для любого $s \in N_2^m \cap G$ при $m > n_0$ найдется $s' \in N_2^{m+1} \cap G$, которое является его продолжением. Таким образом, $G \setminus \{s \in G \colon \operatorname{dom} s \leqslant n_0\}$ представляет собой не более n бесконечных цепей. Согласно пункту 1 теоремы 2 нарост G состоит из конечного числа изолированных точек. Это противоречит тому, что x не изолированная точка.

Осталось рассмотреть случай, когда $|V_{Ox}| = \omega$. Возможны два варианта:

1) $|C_s \cap V_{Ox}| < \omega$ для всех $s \in V' \subseteq V_{Ox}$, где $|V'| = \omega$. В качестве s_1 берем произвольный $s \in V'$, при этом $|V' \setminus C_{s_1}| = \omega$. В качестве s_2 берем $s \in V' \setminus C_{s_1}$: $\operatorname{dom} s_2 > \operatorname{dom} s_1$. На k-м шаге получаем $\{s_i : i \leqslant k\}$ — строгая антицепь и $|V' \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant k} C_{s_i}| = \omega$. После счетного числа шагов получим бесконечную строгую антицепь $\{s_i : i \in \omega\} \subseteq V' \subseteq V_{Ox} \subseteq G$;

2) найдется $s_0 \in V_{Ox}$: $|C_{s_0} \cap V_{Ox}| = \omega$. Построим бесконечную цепь $\{t_i : i \in \omega\} \subseteq V_{Ox}$. В качестве t_1 возьмем s_0. Если для всех $s \in C_{t_1} \cap V_{Ox}$ выполнено $|C_s \cap V_{Ox}| < \omega$, то переходим к пункту 1, где $V' = C_{t_1} \cap V_{Ox}$. В противном случае найдется $t_2 \in C_{t_1} \cap V_{Ox}$: $|C_{t_2} \cap V_{Ox}| = \omega$. Для t_2 повторяем те же рассуждения, что и для t_1, и так далее. В итоге либо будет построена бесконечная строгая цепь $\{t_i : i \in \omega\} \subseteq V_{Ox}$, либо на конечном шаге мы обратимся к пункту 1 и построим искомую антицепь.

В качестве s_i будем брать то продолжение t_i на $\operatorname{dom} t_i + 1$, которое не равно $t_{i+1}|_{\operatorname{dom} t_i}$. В итоге получим бесконечную строгую антицепь $\{s_i : i \in \omega\} \subseteq V_{Ox} \subseteq G$.

Согласно пункту 3 теоремы 2 $[\{s_i : i \in \omega\}]$ гомеоморфно βN. □

Следствие 1. *Для любой неизолированной точки нароста $x \in b(N_2, B_2) \setminus N_2$ и произвольной её окрестности Ox справедливо $c(Ox) = 2^\omega$.*

Следующая теорема показывает тесную связь полных цепей и полных антицепей в N_2.

Теорема 4. *Для пространства $b(N_2, B_2)$ имеют место следующие утверждения.*

1. *Если $\{\pi(n) : n \in \omega\}$ — полная строгая антицепь, то множество $N_2 \setminus C_\pi = \{t_n : n \in \omega\}$ — полная строгая цепь и $t_n = \pi(n+1)|_{n+1}$ для всех $n \in \omega$.*

2. *Пусть $N_2^n = \{t \in N_2 : \operatorname{dom} t = n+1\}$ для всех $n \in \omega$. Если $\{\pi(n) : n \in M\}$ таково, что $|N_2^n \setminus C_{\pi|_M}| = 1$ для всех $n \in \omega$, то $\{\pi(n) : n \in M\}$ — полная строгая антицепь.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть $N_2^n = \{t \in N_2 : \operatorname{dom} t = n+1\}$ для всех $n \in \omega$. Покажем, что $|N_2^n \setminus C_\pi| = 1$ для всякого $n \in \omega$ и $N_2 \setminus C_\pi = \cup\{N_2^n : n \in \omega\} \setminus C_\pi$ — полная строгая цепь.

Доказательство проведем по индукции. Для $n = 0$ утверждение верно. Пусть утверждение верно для $n \leqslant \tilde{n}$, то есть $\{t_n\} = N_2^n \setminus C_\pi$ для всех $n \in \{0, \ldots, \widetilde{n}\}$ и они образуют цепь. Рассмотрим $N_2^{\widetilde{n}+1} = \{t \in N_2 : \operatorname{dom} t = \widetilde{n} + 2\}$. Для любого $s \in N_2^n \setminus \{t_n\}$ $(n \leqslant \widetilde{n})$ выполнено $s \in C_\pi$. Тогда всякий элемент $t \in N_2^{\widetilde{n}+1} \setminus C_{t_{\widetilde{n}}}$ является продолжением некоторого $s \in N_2^{\widetilde{n}} \setminus \{t_{\widetilde{n}}\} \subset C_\pi$, и поэтому он не равен $\pi(\widetilde{n}+1)$, так как $\{\pi(n) : n \in \omega\}$ есть антицепь. Следовательно, $\pi(\widetilde{n}+1)$ есть одно из продолжений элемента $t_{\widetilde{n}}$ на $\tilde{n}+1$, то есть $\pi(\widetilde{n}+1)|_{\widetilde{n}+1} = t_{\widetilde{n}}$. Тогда другое продолжение $t_{\widetilde{n}}$ на $\widetilde{n}+1$ и есть элемент $t_{\widetilde{n}+1}$, и $\{t_{\widetilde{n}+1}\} = N_2^{\widetilde{n}+1} \setminus C_\pi$.

Построенное таким образом множество $\{t_n : n \in \omega\} = N_2 \setminus C_\pi$ и есть искомая полная цепь.

2. Обозначим $M_n = \omega \cap \{0, 1, \ldots, n\}$ для всех $n \in \omega$. Заметим, что $N_2^n \setminus C_{\pi|_M} = N_2^n \setminus C_{\pi|_{M_n}}$. Предположим, что $\{\pi(n) : n \in M\}$ не является полной строгой цепью. Тогда найдётся $n' = \min\{n : n \notin M$ или $(n \in M$ и $\pi(n) \in C_{\pi|_{M_{n-1}}})\}$. В случае если $n' = 0$, получаем $C_{\pi|_{M_0}} = \varnothing$, чего быть не может. Имеем $C_{\pi|_{M_{n'}}} = C_{\pi|_{M_{n'-1}}}$. По условию теоремы $N_2^{n'-1} \setminus C_{\pi|_{M_{n'-1}}} = \{t'\}$, тогда $N_2^{n'} \setminus C_{\pi|_{M_{n'}}} = N_2^{n'} \setminus C_{\pi|_{M_{n'-1}}} = N_2^{n'} \cap C_{t'}$ состоит из двух продолжений t' на n', а это противоречит условию $|N_2^{n'} \setminus C_{\pi|_{M_{n'}}}| = 1$. Таким образом, наше предположение неверно и $\{\pi(n) : n \in M\}$ является полной строгой антицепью. □

Следствие 2. *Для всякой полной антицепи $A = \{s_n : n \in \omega\}$ найдется $f \in P_2$ такое, что $[A] \setminus A \subset F_f$, где $F_f = \bigcap\limits_{n \in \omega} [C_{f|_n}]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу доказанной теоремы для полной антицепи A найдется полная цепь $\{t_n : n \in \omega\} = N_2 \setminus (\cup\{C_{s_n} : s_n \in A\})$. При этом для всех $n \in \omega$ справедливо $t_n < s_{n+1}$. Данная полная цепь и определяет искомое $f \in P_2$ $(f|_{n+1} = t_n$ для всех $n \in \omega)$. Получаем, что $A \cap C_{f|_n} = \{s_i : i > n\}$, то есть $C_{f|_{n+1}} = C_{t_n}$ содержит все элементы нашей антицепи, начиная с некоторого. Но $[C_{f|_{n+1}}]$ открыто-замкнуто в $b(N_2, B_2)$ и $\{(C_{f|_{n+1}})^* : n \in \omega\}$ образуют базу F_f в $b(N_2, B_2) \setminus N_2$. Отсюда следует, что $[A] \setminus A \subseteq F_f$. □

Предложение 1. *Для всякой полной цепи* $A = \{\pi(n)\colon n \in \omega\}$ *найдётся полная антицепь* $\{\pi'(n)\colon n \in \omega\}$ *такая, что* $A = N_2 \setminus C_{\pi'}$.

Доказательство. Определим $\pi' \in T_2$ следующим образом: $\pi'(n)|_n = \pi(n-1)$ для всякого $n \in \omega \setminus \{0\}$ и $\pi'(n)(n) = (\pi(n)(n)+1) \mod 2$ для всех $n \in \omega$.

Таким образом, $\pi'(n+1)$ является продолжением $\pi(n)$ на $n+1$, отличным от $\pi(n+1)$ для всех $n \in \omega$, а значит $\{\pi'(n)\colon n \in \omega\}$ является полной антицепью. Заметим, что $A \cap C_{\pi'} = \varnothing$ и в силу теоремы 4 имеем $A = N_2 \setminus C_{\pi'}$. $\square$

Следствие 3. *Пусть* $A = \{\pi(n)\colon n \in M \subseteq \omega\}$ *— строгая антицепь. Тогда* A *можно дополнить до полной антицепи в том и только в том случае, когда* $B = \{\pi(n)|_n\colon n \in M \setminus \{0\}\}$ *образует цепь.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $A' = \{\pi(n)\colon n \in \omega\}$ — полная антицепь и $A \subseteq A'$. Тогда в силу теоремы 4 получаем, что $B' = N_2 \setminus C_\pi = \{t_n = \pi(n+1)|_{n+1}\colon n \in \omega\}$ есть полная цепь. Очевидно, что $B \subseteq B'$, а значит B является цепью.

Докажем достаточность. Найдется полная цепь $B' = \{\pi_1(n)\colon n \in \omega\}$ такая, что $B \subseteq B'$ и $A \cap B' = \varnothing$. Тогда по предложению 1 найдется π_2 такое, что $B' = N_2 \setminus C_{\pi_2}$ и $A' = \{\pi_2(n)\colon n \in \omega\}$ является полной антицепью. Поскольку $\pi(n)|_n = \pi_1(n-1) = \pi_2(n)|_n$ для всех $n \in M \setminus \{0\}$ и A, A' — антицепи, то $\pi(n)(n) \neq \pi_1(n)(n) \neq \pi_2(n)(n)$ для всех $n \in M$. Тогда $\pi(M) = \pi_2(M)$, то есть $A \subseteq A'$ $\square$

В заключение приведем пример строгой антицепи, которую нельзя продолжить до полной антицепи.

Пример 1. Для начала пронумеруем произвольным образом элементы N_2, то есть $N_2 = \{s_n\colon n \in \omega\}$. Будем строить антицепь $A = \{t_n\colon n \in \omega\}$ по индукции. Положим $s_{n_1} = s_1$, в качестве t_1 берем произвольное собственное продолжение s_{n_1}. Пусть выбраны $s_{n_1}, \ldots, s_{n_k}$ и их собственные продолжения $t_1, \ldots, t_k$ такие, что $\mathrm{dom}(t_1) < \ldots < \mathrm{dom}(t_k)$ и $\{t_i\colon i \leqslant k\}$ — антицепь. Тогда положим $n_{k+1} = \min\{n\colon s_n \nleqslant t_i$ и $t_i \nleqslant s_n$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k\}$. В качестве t_{k+1} берем собственное продолжение $s_{n_{k+1}}$: $\mathrm{dom}(t_k) < \mathrm{dom}(t_{k+1})$. В силу выбора n_{k+1} множество $\{t_i\colon i \leqslant k+1\}$ — строгая антицепь. Этот процесс продолжается до бесконечности. В итоге получим строгую антицепь $A = \{t_n\colon n \in \omega\}$.

Докажем следующие свойства полученной антицепи.

1) Для любого $s \notin \bigcup\limits_{t_n \in A} C_{t_n}$ найдется номер $k \in \omega$ такой, что $s < t_k$.

2) Для всякого $f \in P_2' = \{f \in P_2\colon f|_n \notin \bigcup\limits_{t \in A} C_t$ для всех $n \in \omega\}$ выполнено $A^* \cap F_f \neq \varnothing$.

3) Существует ультрафильтр $\xi \in A^*$ такой, что для любой строгой полной антицепи D найдётся $A' \in \xi$ такое, что $A' \cap D = \varnothing$.

1) Предположим противное. Пусть нашелся $s_{\widetilde{n}}$ такой, что $s_{\widetilde{n}} \notin \bigcup\limits_{t_n \in A} C_{t_n}$ и $s_{\widetilde{n}} \not< t_k$ для всех $k \in \omega$. Но тогда для $n_k > \widetilde{n}$ (такое n_k найдётся в силу бесконечности $\{s_{n_k}\colon k \in \omega\}$) получаем противоречие с выбором n_k в силу построения, поскольку роль n_k должен был играть $\widetilde{n}$.

2) Достаточно доказать, что для любого $f \in P_2'$ и $n \in \omega$ выполнено $|C_{f|_n} \cap A| = \omega$. Предположим противное $|C_{f|_n} \cap A| < \omega$. Данное пересечение не пусто, поскольку $f \in P_2'$. Пусть $C_{f|_n} \cap A = \{t_{k_1}, \ldots, t_{k_m}\}$. В силу $\mathrm{dom}(f|_n) < \mathrm{dom}(t_{k_1}) < \ldots < \mathrm{dom}(t_{k_m})$ получаем $|C_{f|_n} \setminus \bigcup\limits_{i=1,\ldots,m} C_{t_{k_i}}| = \omega$. Следовательно, найдется s: $f|_n < s$, $\mathrm{dom}\, s > \mathrm{dom}\, t_m$ и $s \in C_{f|_n} \setminus \bigcup\limits_{i=1,\ldots,m} C_{t_{k_i}}$. Значит, $s \notin \bigcup\limits_{t_n \in A} C_{t_n}$. Тогда из построения A следует, что найдется $k \notin \{k_1, \ldots, k_m\}$: $s < t_k$. Получаем $t_k \in C_{f|_n} \cap A$. Что противоречит предположению.

Множество P_2' бесконечно. Из следствия 2 и того факта, что нарост A пересекается со многими F_f, следует, что A нельзя продолжить до полной антицепи.

3) Рассмотрим систему $\gamma = \{A^* \setminus D^*\colon D$ — строгая полная антицепь$\}$. По следствию 2 для любой строгой полной антицепи D найдётся $f \in P_2$ такое, что $D^* \subseteq F_f$. В силу доказанного

свойства 2, имеем $A^* \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant n} D_i^* \neq \varnothing$. Тогда система γ центрирована и её элементы замкнуты, в силу пункта 3 теоремы 2. В бикомпактном расширении $b(N_2, B_2)$ пересечение центрированной системы замкнутых множеств не пусто, а значит найдется $\xi \in \cap\{U : U \in \gamma\}$. Тогда ξ и есть искомый ультрафильтр $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bell M. G. Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. — 1980. — Vol. 5. — P. 11–25.
2. Грызлов А. А. О бикомпактых расширениях дискретных пространств // Фундаментальная и прикладная математика. — 1996. — Т. 2, № 3. — С. 803–848.
3. Gryzlov A. A., Bastrykov E. S., Golovastov R. A. On Bell's compactification of N // Topology Proceedings. — 2010. — Vol. 35. — P. 177–185.
4. Грызлов А. А., Бастрыков Е. С., Головастов Р. А. О точках одного бикомпактного расширения N // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки. — 2010. — Вып. 3. — С. 10–17.

Поступила в редакцию 11.08.10

R. A. Golovastov
About one compactifications of countable discrete space

We consider one Boolean algebra and its Stone space as a compactification of a countable discrete space. Some properties of the compactification are proved.

Keywords: compactification, Stone space of Boolean algebra, chain, antichain.

Mathematical Subject Classifications: 54D35

Головастов Роман Александрович, ассистент, кафедра алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426000, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: rpa4@bk.ru