УДК 531.38

© *А. В. Борисов*

КОМПЬЮТЕРНАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

В работе рассмотрены вопросы о гамильтонизации и интегрируемости неголономной задачи Суслова и ее обобщения, предложенного Чаплыгиным. Вопросы важны для понимания качественных особенностей динамики этой системы и, в частности, связаны с нетривиальным асимптотическим поведением (то есть некоторой задачей рассеяния). Статья развивает общий подход авторов, основанный на изучении иерархии динамического поведения неголономных систем.

Ключевые слова: гамильтонова система, скобки Пуассона, неголономная связь, инвариантная мера, интегрируемость.

§ 1. Уравнения движения и гамильтонова форма

Уравнения движения, первые интегралы, инвариантная мера. Задача Суслова (впервые введенная в [1]) описывает движение твердого тела с неподвижной точкой, подчиненного неголономной связи

$$(\boldsymbol{\omega},\, \boldsymbol{a}) = 0, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость в «теле», $\boldsymbol{a}$ — (единичный) вектор, неподвижный в теле.

Возможная реализация этой связи при помощи острых колесиков внутри сферической оболочки была предложена Вагнером в работе [13], см. рис. 1. Сам Суслов предложил реализацию

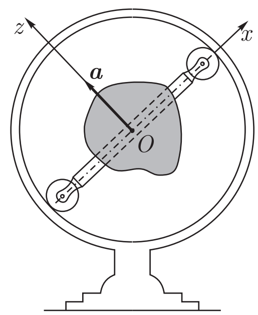

Рис. 1.

связи в виде нескручиваемой нити, соединяя последовательно несколько кардановых шарниров [1]. Однако корректность такой реализации связи (1.1) до сих пор не доказана, несмотря на что она используется даже в современных работах.

Выберем подвижную систему координат $Oxyz$, связанную с телом таким образом, что $Oz \parallel \boldsymbol{a}$, а оси Ox и Oy направим таким образом, что компонента тензора инерции $I_{12} = 0$. Уравнение связи в этом случае имеет вид

$$\omega_3 = 0, \tag{1.2}$$

а уравнения движения, описывающие эволюцию угловой скорости с учетом связи, представляются в форме

$$\begin{gathered} I_{11}\dot\omega_1 = -\omega_2(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) + M_1, \quad I_{22}\dot\omega_2 = \omega_1(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) + M_2,\\ I_{13}\dot\omega_1 + I_{23}\dot\omega_2 = (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + \lambda + M_3, \end{gathered} \tag{1.3}$$

где M_i — компоненты момента внешних сил, а λ — неопределенный множитель Лагранжа. Ясно, что последнее уравнение используется лишь для определения λ и может быть опущено. Положение тела описывается уравнениями Пуассона

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega},$$

где $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ — проекции ортов неподвижных осей на систему координат $Oxyz$, связанную с телом.

Пусть тело движется в осесимметричном потенциальном поле, т. е. можно выбрать неподвижные орты так, чтобы потенциал зависел лишь от одного из них, $U = U(\boldsymbol{\gamma})$. В этом случае $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\gamma} \times \dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}$, и для векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ получаем замкнутую систему

$$\begin{gathered} I_{11}\dot{\omega}_1 = -\omega_2(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) + \gamma_2\frac{\partial U}{\partial \gamma_3} - \gamma_3\frac{\partial U}{\partial \gamma_2}, \\ I_{22}\dot{\omega}_2 = \omega_1(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) + \gamma_3\frac{\partial U}{\partial \gamma_1} - \gamma_1\frac{\partial U}{\partial \gamma_3}, \\ \dot{\gamma}_1 = -\gamma_3\omega_2, \quad \dot{\gamma}_2 = \gamma_3\omega_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Уравнения (1.4) допускают интеграл энергии и геометрический интеграл

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2) + U(\boldsymbol{\gamma}), \quad \boldsymbol{\gamma}^2 = 1. \tag{1.5}$$

Система (1.4) обладает также инвариантной мерой

$$(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2)^{-1}\, d\omega_1\, d\omega_2\, d\gamma, \tag{1.6}$$

которая, однако, является сингулярной. Это препятствует применению геометрического варианта теоремы ЭйлераЯкоби, сформулированного в [2], хотя и позволяет при наличии дополнительного интеграла получить явные квадратуры.

Гамильтоново представление. Несмотря на то, что система (1.4) является неголономной, ее можно записать в обобщенной гамильтоновой форме с вырожденной скобкой Пуассона. При этом оказывается, что соответствующая пуассонова структура при определенном выборе потенциала $U(\boldsymbol{\gamma})$ содержит сингулярности, что, в свою очередь, приводит к эффектам, которые не встречаются в «стандартных» гамильтоновых системах.

Рассмотрим сначала случай $U = 0$, когда уравнения для ω_1, ω_2 отделяются и справедливо следующее

Предложение 1. Уравнения, описывающие эволюцию ω_1, ω_2 при $U = 0$, представляются в гамильтоновой форме со скобкой ЛиПуассона на соответствующей двумерной разрешимой алгебре.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Скобка ЛиПуассона двумерной разрешимой алгебры имеет вид

$$\{X, Y\} = Y. \tag{1.7}$$

Сделаем замену переменных

$$X = I_{13}I_{22}\omega_2 - I_{23}I_{11}\omega_1, \qquad Y = I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2. \tag{1.8}$$

Несложно показать, что

$$\begin{gathered} \dot{X} = \{X, H_0\} = Y^2, \qquad \dot{Y} = \{Y, H_0\} = -\frac{1}{I_{11}I_{22}}XY, \\ H_0 = \frac{I_{13}^2 I_{22} + I_{23}^2 I_{11}}{I_{11}I_{22}}\mathcal{E} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{I_{11}I_{22}}X^2 + Y^2\Big). \end{gathered} \tag{1.9}$$

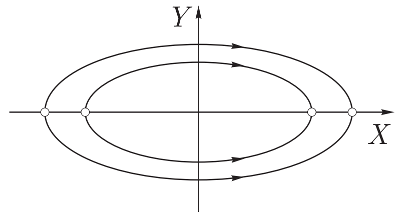

Рис. 2.

□

Напомним, что симплектические листы скобки (1.7) устроены следующим образом: два двумерных листа — верхняя и нижняя полуплоскости ($Y>0$ и $Y<0$), каждая точка прямой $Y=0$ — нульмерный симплектический лист. Траектории системы (1.9) на плоскости X, Y представляют собой дуги эллипса $H_0=\mathrm{const}$ (см. рис. 2) и неподвижные точки на прямой $Y=0$.

Легко видеть, что уравнения (1.9) обладают инвариантной мерой $\rho\,dX\,dY$, плотность которой $\rho=\frac{1}{Y}$ сингулярна на прямой $Y=0$. Расширить пуассонову структуру (1.7) на полную систему (1.4) в явном виде не удается.

Явное интегрирование уравнений (1.9) выполняется в полярных координатах на плоскости X, Y:

$$X=\sqrt{2h_0I_{11}I_{22}}\cos\varphi,\qquad Y=\sqrt{2h_0}\sin\varphi,$$
$$\frac{\varphi}{2}=\operatorname{arctg}e^{-\varkappa(t+t_0)},\qquad \varkappa=\sqrt{\frac{2h_0}{I_{11}I_{22}}},$$

где $H_0=h_0$ — значение постоянной интеграла.

Таким образом, предельное значение угловой скорости тела при $t\to\pm\infty$ определяется соотношениями

$$\omega_1=\mp\frac{\sqrt{2h_0I_{11}I_{22}}I_{23}}{I_{13}^2I_{22}+I_{23}^2I_{11}},\quad \omega_2=\pm\frac{\sqrt{2h_0I_{11}I_{22}}I_{13}}{I_{13}^2I_{22}+I_{23}^2I_{11}}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о гамильтонизации системы (1.4) при наличии потенциала $U(\boldsymbol{\gamma})$. В общем случае этот вопрос практически не изучен. При дополнительном ограничении, что вектор $\boldsymbol{a}$ направлен вдоль главной оси тензора инерции (т. е. нужно положить $I_{13}=I_{23}=0$), система (1.4) обладает стандартной инвариантной мерой $d^2\boldsymbol{\omega}\,d^3\boldsymbol{\gamma}$, и после замены времени $\gamma_3\,dt=d\tau$ на поверхности уровня $\boldsymbol{\gamma}^2=1$ система представляется в форме натуральной лагранжевой системы [4]:

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tau}\Big(\frac{\partial L}{\partial\gamma_i'}\Big)-\frac{\partial L}{\partial\gamma_i}=0,\qquad i=1,\,2,\\ L=\frac{1}{2}\Big(I_{22}(\gamma_1')^2+I_{11}(\gamma_2')^2\Big)-\overline{U}_\pm(\gamma_1,\,\gamma_2),\end{gathered}\tag{1.10}$$

где $\gamma_i'=\frac{d\gamma_i}{d\tau}$, $\overline{U}_\pm(\gamma_1,\,\gamma_2)=U(\boldsymbol{\gamma})\big|_{\gamma_3=\pm\sqrt{1-\gamma_1^2-\gamma_2^2}}$, знаки $\pm$ соответствуют верхней и нижней полусферам. Ясно, что после преобразования Лежандра получим гамильтоновы уравнения, где гамильтонианом является интеграл энергии (1.5), после ограничения на сферу $\boldsymbol{\gamma}^2=1$.

Заметим, что как замена времени, так и ограничение на сферу имеют особенности в точках $\gamma_3=0$, поэтому, точнее говоря, уравнения (1.10) описывают две различные системы (соответствующие верхней $\gamma_3>0$ и нижней $\gamma_3<0$ полусферам), которые определены на открытом (некомпактном) подмножестве плоскости $(\gamma_1,\,\gamma_2)$, заданном неравенством $\gamma_1^2+\gamma_2^2<1$. Если функция $U(\boldsymbol{\gamma})$ — четная по γ_3, эти системы идентичны.

В работе [5] поставлен вопрос о гамильтонизации системы (1.4) без замены времени и для потенциала $U(\gamma_3)=\mu\gamma_3$ найдена соответствующая пуассонова структура ранга 4, но гамильтонианом при этом является функция $\boldsymbol{\gamma}^2$.

Если функция $V(\gamma_1,\,\gamma_2)$ не имеет особенностей, то уравнения представляются в гамильтоновой форме во всем фазовом пространстве.

Ранг пуассоновой структуры при $\mu\neq 0$ равен 4, а при $\mu=0$ равен 2. Таким образом, на первый взгляд кажется, что при $\mu=0$ система интегрируема при произвольном потенциале $V(\gamma_1,\,\gamma_2)$, так как может быть ограничена на двумерный симплектический лист и тем самым сведена к системе с одной степенью свободы. Тем не менее, это не так, действительно, достаточно в системе (1.10) положить $I_{11}=I_{22}$ и взять потенциал некоторой неинтегрируемой натуральной системы на плоскости. Поведение такой системы будет хаотическим. Это объясняется тем, что для сложных пуассоновых структур глобальных функций Казимира может не существовать, так как различные обобщения теорем Дарбу на случай вырожденных пуассоновых структур носят локальный характер. Возникающая здесь ситуация аналогична вопросу о существовании первых интегралов: если локально любая система интегрируема по теореме о выпрямлении, то существование глобальных первых интегралов является исключением.

Пусть теперь потенциал $U(\gamma)$ произвольный. Запишем его в виде

$$\begin{gathered}\widetilde{U}_{\pm}(\boldsymbol{\gamma})=\gamma_3+V_{\pm}(\gamma_1,\,\gamma_2),\\ V_{\pm}(\gamma_1,\gamma_2)=U(\boldsymbol{\gamma})\big|_{\gamma_3=\pm\sqrt{1-\gamma_1^2-\gamma_2^2}}\mp\sqrt{1-\gamma_1^2-\gamma_2^2},\end{gathered}\tag{1.11}$$

где верхний знак соответствует $\gamma_3>0$, а нижний — $\gamma_3<0$. Согласно теореме **??** получаем, что уравнения движения представляются в гамильтоновой форме в двух различных (некомпактных) областях фазового пространства $\gamma_3>0$ и $\gamma_3<0$. Поскольку в потенциал $\widetilde{U}_{\pm}$ входит корень, система определена лишь в области $\gamma_1^2+\gamma_2^2\leqslant 1$, при этом в скобке Пуассона (**??**) появляется сингулярность при $\gamma_1^2+\gamma_2^2=1$.

Заметим, что такое представление в гамильтоновой форме в различных открытых областях фазового пространства не противоречит существованию у системы в целом особенностей, не характерных для гамильтоновых систем со скобкой Пуассона без сингулярностей. Так, в работе [6] приведены потенциалы $U=U(\gamma_1,\,\gamma_2)$, для которых система (1.4) интегрируема, а поверхность уровня первых интегралов диффеоморфна ориентируемому двумерному многообразию рода $g\geqslant 2$ (т. е. сфере с двумя и более ручками). В то же время в каноническом гамильтоновом случае, согласно теореме ЛиувилляÂрнольда, возможны лишь торы (т. е. $g=1$). Это кажущееся противоречие (которое рассматривалось Я. В. Татариновым как реальное отличие интегрируемых неголономных систем от гамильтоновых) связано с сингулярностями пуассоновой структуры и неприменимостью канонической версии теоремы ЛиувилляÂрнольда для системы в целом. В частности, для рассматриваемых в работе [6] систем на общей поверхности уровня первых интегралов векторное поле обращается в нуль.

Задача Суслова с гиростатом. Возможно гиростатическое обобщение уравнений (1.4) [7, 8]. Если гиростатический момент равен $\boldsymbol{k}=(k_1,\,k_2,\,k_3)$, уравнения движения представляются в виде

$$\begin{gathered}I_{11}\dot\omega_1=-\omega_2(I_{13}\omega_1+I_{23}\omega_2+k_3)+\gamma_2\frac{\partial U}{\partial\gamma_3}-\gamma_3\frac{\partial U}{\partial\gamma_2},\\ I_{22}\dot\omega_2=\omega_1(I_{13}\omega_1+I_{23}\omega_2+k_3)+\gamma_3\frac{\partial U}{\partial\gamma_1}-\gamma_1\frac{\partial U}{\partial\gamma_3},\\ \dot\gamma_1=-\gamma_3\omega_2,\qquad \dot\gamma_2=\gamma_3\omega_1,\qquad \dot\gamma_3=\gamma_1\omega_2-\gamma_2\omega_1,\end{gathered}$$

при этом форма первых интегралов (1.5) не меняется.

После замены времени $\gamma_3 dt{=}d\tau$ и ограничения на сферу $\overline{U}_{\pm}(\gamma_1,\gamma_2){=}U(\boldsymbol{\gamma})\big|_{\gamma_3=\pm\sqrt{1-\gamma_1^2-\gamma_2^2}}$ получим уравнения

$$\begin{gathered}I_{22}\gamma_1''=-\frac{\partial\overline{U}_{\pm}}{\partial\gamma_1}\pm\gamma_2'\frac{(I_{13}\gamma_2'-I_{23}\gamma_1'+k_3)}{\sqrt{1-\gamma_1^2-\gamma_2^2}},\\ I_{11}\gamma_2''=-\frac{\partial\overline{U}_{\pm}}{\partial\gamma_2}\mp\gamma_1'\frac{(I_{13}\gamma_2'-I_{23}\gamma_1'+k_3)}{\sqrt{1-\gamma_1^2-\gamma_2^2}}.\end{gathered}\tag{1.12}$$

§ 2. Показатели Ковалевской и дополнительный интеграл

Показатели Ковалевской. Запишем уравнения (1.4) при $U = 0$ в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \tag{2.1}$$

где введены обозначения $\mathbf{x} = (\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, а $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ — правые части уравнений (1.4). Вследствие однородности (в общем случае — квазиоднородности), уравнения допускают частное решение в виде

$$x_\mu = c_\mu t^{-\alpha_\mu}, \qquad \mu = 1\ldots 5, \tag{2.2}$$

где постоянные коэффициенты c_μ удовлетворяют алгебраической системе уравнений

$$v_\mu(c_1, \ldots, c_5) = -\alpha_\mu c_\mu, \quad \mu = 1\ldots 5, \tag{2.3}$$

и в общем случае могут быть комплексными. В рассматриваемом случае частное решение (2.2) имеет вид

$$\begin{gathered}\alpha_\mu = 1, \qquad \mu = 1\ldots 5,\\ c_1 = \frac{-I_{11}I_{22}I_{23} \pm i\sqrt{I_{11}I_{22}}I_{13}I_{21}}{I_{13}^2I_{22} + I_{23}^2I_{11}}, \quad c_2 = \frac{I_{11}I_{22}I_{13} \pm i\sqrt{I_{11}I_{22}}I_{23}I_{11}}{I_{13}^2I_{22} + I_{23}^2I_{11}},\\ c_3 = c_4 = c_5 = 0.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Для решения (2.4) вычислим показатели Ковалевской [11], которые являются собственными числами матрицы $\left\|\frac{v}{x}(\mathbf{c}) + \alpha\right\|$, $\alpha = \mathbf{diag}(\alpha_1 \ldots \alpha_5)$ получаем

$$\begin{gathered}\rho_1 = -1, \quad \rho_2 = 2, \quad \rho_3 = 1,\\ \rho_{4,5} = 1 \pm \frac{\sqrt{(I_{11}I_{23}^2 - I_{22}I_{13}^2 \pm 2i\sqrt{I_{11}I_{22}}I_{13}I_{23})(I_{11} - I_{22})I_{11}I_{22}}}{I_{13}^2I_{22} + I_{23}^2I_{11}}.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Для того чтобы система (1.4) обладала дополнительным интегралом движения, согласно методу Ковалевской–Ляпунова необходимо предположить, чтобы показатели (2.5) являлись целыми действительными числами (более строгий тест Ковалевской–Ляпунова требует еще и их неотрицательности, см. подробнее [11]). Это условие выполняется при следующих ограничениях на моменты инерции системы:

$$\begin{aligned}&1)\ I_{13} = 0, \quad I_{11} = I_{22} + \frac{I_{23}^2}{I_{22}}k^2 \ \Rightarrow\ \rho_{4,5} = 1 \pm k, \quad k \in \mathbb{Z},\\ &2)\ I_{23} = 0, \quad I_{22} = I_{11} + \frac{I_{13}^2}{I_{11}}k^2 \ \Rightarrow\ \rho_{4,5} = 1 \pm k, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Далее мы будем рассматривать только первый случай в (2.6), т. к. второй легко получается из него путем замены индексов 1 и 2.

Алгебраический первый интеграл. Условие (2.6) является необходимым для существования дополнительного интеграла движения. Докажем теперь достаточность этих условий для нечетных k.

Теорема 1. При выполнении условий (2.6) при $I_{13} = 0$ для нечетных $k = 2n + 1$ система (1.4) обладает дополнительным алгебраическим интегралом движения степени $k = 2n + 1$ по импульсам

$$F_n = \omega_1\gamma_1 f_1^{(n)} + \omega_2\gamma_2 f_2^{(n)} + I_{23}\omega_2\gamma_3 f_3^{(n)}, \tag{2.7}$$

где $\mathbf{f_n} = (\mathbf{f_1^{(n)}}, \mathbf{f_2^{(n)}}, \mathbf{f_3^{(n)}}) = \left(\prod\limits_{\mathbf{i=0}}^{\mathbf{n-1}} \mathbf{A_k^{-1}U}\right)\widehat{\mathbf{f}}_\mathbf{n}$,

$$\mathbf{U} = diag(\omega_1^2,\, \omega_2^2,\, I_{23}^2\omega_2^2), \quad \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_0 - 2k\mathbf{C},$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_{11}} & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{I_{22}} & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{I_{23}^2}{I_{22}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{I_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_{23}^2}{I_{22}} \end{pmatrix},$$

а $\widehat{\mathbf{f}}_n$ является собственным вектором матрицы $\mathbf{A}_n$ с нулевым собственным значением, т.е. $\mathbf{A}_n\widehat{\mathbf{f}}_n = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства воспользуемся алгоритмом, развитом в работах [9, 10], который для наших целей необходимо модернизировать. Сделаем замену переменных и времени

$$u_1 = \omega_1^2, \quad u_2 = \omega_2^2, \quad u_3 = I_{23}^2\omega_2^2,$$
$$s_1 = \frac{\gamma_1}{I_{23}\omega_2}, \quad s_2 = \frac{\gamma_2}{I_{23}\omega_1}, \quad s_3 = \frac{\gamma_3}{I_{23}\omega_2}, \tag{2.8}$$
$$\frac{d\tau}{dt} = \omega_1\omega_2^2 I_{23}.$$

В новых переменных уравнения движения принимают вид

$$u_1' = \frac{2}{I_{11}}, \quad u_2' = \frac{2}{I_{22}}, \quad \mathbf{s}' = \mathbf{U^{-1}A_0s}, \tag{2.9}$$

где $\mathbf{s} = (\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}, \mathbf{s_3})$, а штрих означает дифференцирование по новому времени τ. Интеграл системы (2.9) будем искать в форме

$$F_n = \sum_{i=1}^{3} u_i s_i f_i^{(n)}(u). \tag{2.10}$$

Из условия сохранения интеграла (2.10) получим уравнение для вектор-функции $\mathbf{f}_n$

$$2\mathbf{U}\widehat{D}\mathbf{f_n} = \mathbf{A_0 f_n}, \tag{2.11}$$

где введен дифференциальный оператор $\widehat{D} = -\frac{1}{J_{11}}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{1}{J_{22}}\frac{\partial}{\partial u_2}$.

Очевидным решением уравнения (2.11) является постоянный вектор $\mathbf{f_0}$, такой, что $\mathbf{A}_0\mathbf{f_0} = \mathbf{0}$. Причем условие существования этого вектора $\det \mathbf{A}_0 = 0$ совпадает с условием (2.6) для $k = 1$; таким образом, для $n = 0$ ($k = 1$) теорема доказана.

Для доказательства теоремы при произвольном n заметим, что при замене

$$\mathbf{f_1} = \mathbf{A_0^{-1}U}\widehat{\mathbf{f}}_\mathbf{1} \tag{2.12}$$

уравнения для $\widehat{\mathbf{f}}_1$ примут вид, аналогичный (2.11):

$$2\mathbf{U}\widehat{D}\widehat{\mathbf{f}}_1 = \mathbf{A}_1\widehat{\mathbf{f}}_1, \qquad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0 - 2\mathbf{C}. \tag{2.13}$$

Решением уравнения (2.13) является собственный вектор матрицы $\mathbf{A}_1$ с нулевым собственным значением.

Последовательно применяя замену (2.12) $(n-1)$ раз с матрицами $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{n-1}$, снова получим уравнение вида (2.11), решение которого может быть найдено из уравнения $\mathbf{A}_n\widehat{\mathbf{f}}_n = 0$, а условие его существования в точности совпадает с условием (2.6) при нечетных $k = 2n+1$. □

Вопрос о существовании дополнительного алгебраического интеграла при четных k остается открытым.

Абсолютная динамика. Как уже было сказано выше, движение в абсолютном пространстве (т. е. движение тела относительно неподвижных осей) представляет собой переход от одного стационарного вращения (при $t \to -\infty$) к другому (при $t \to -\infty$). Ось вращения в системе координат, связанной с телом, при этом меняет направление на обратное, а в неподвижной системе координат происходит поворот оси вращения на некоторый угол. Таким образом, вопрос об абсолютном движении в задаче Суслова можно интерпретировать как некоторую задачу рассеяния. Для частного случая $I_{13} = 0$ (либо, соответственно, $I_{23} = 0$) явное аналитическое выражение для угла поворота оси найдено в недавней работе [12].

Было показано, что угол $\Delta\Psi$ между осями предельных стационарных вращений не зависит от энергии и при $I_{13} = 0$ определяется соотношением

$$\begin{gathered}\cos\frac{\Delta\Psi}{2} = \cos\Big(\frac{\pi k}{2}\Big)\Big/\operatorname{ch}\Big(\frac{\pi k}{2d}\Big),\\ k = \frac{\sqrt{I_{22}(I_{11} - I_{22})}}{I_{23}}, \quad d = \sqrt{\frac{I_{11} - I_{22}}{I_{22}}}.\end{gathered} \tag{2.14}$$

Как видно из (2.14), при нечетных k (т. е. когда имеется указанный выше интеграл) правая часть обращается в нуль, поэтому ось вращения в абсолютной системе координат, так же как и в связанной с телом, меняет направление на обратное, т. е. $\Delta\Psi = \pm\pi$. Вопрос о значении угла поворота оси вращения в общем случае $I_{23}, I_{13} \neq 0$ пока остается открытым.

§ 3. Качение динамически несимметричного шара по плоскости при добавлении связи Суслова

Уравнения движения системы при наличии двух связей в системе координат, жестко связанной с шаром, имеют вид

$$\begin{gathered}\widehat{\mathbf{I}}\begin{pmatrix}\dot\omega_1\\ \dot\omega_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2)\omega_2\\ (I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2)\omega_1\end{pmatrix},\\ \dot\gamma = \gamma\times\omega,\end{gathered} \tag{3.1}$$

где γ — вектор нормали к плоскости, $\omega = (\omega_{\mathbf{1}}, \omega_{\mathbf{2}}, \mathbf{0})$ — угловая скорость шара, $\widehat{\mathbf{I}}$ — тензор инерции относительно точки контакта

$$\widehat{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_{11} + mR^2(\gamma_2^2 + \gamma_3^2) & -mR^2\gamma_1\gamma_2\\ -mR^2\gamma_1\gamma_2 & I_{22} + mR^2(\gamma_1^2 + \gamma_3^2)\end{pmatrix},$$

m, R — соответственно, масса и радиус шара, I_{ij} — компоненты тензора инерции относительно центра масс, причем оси системы координат выбраны так, что $I_{12} = 0$.

Уравнения (3.1) обладают очевидными интегралами движения

$$\begin{gathered}H = \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{I}}\widehat{\omega}, \widehat{\omega}) \text{ — энергия},\\ (\gamma, \gamma) = \mathbf{1} \text{ — геометрический интеграл},\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $\widehat{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$.

Для интегрируемости по Эйлеру–Якоби не хватает еще одного дополнительного интеграла и инвариантной меры. Однако ни инвариантная мера (пусть даже сингулярная), ни первые интегралы, указанные в предыдущем пункте, непосредственно не обобщаются на систему (3.1), в которой, в отличие от предыдущего случая, уравнения для угловых скоростей уже не отделяются.

Совместный уровень первых интегралов (3.2) $\mathcal{M}_h = \big\{\,\widehat{\omega}, \widehat{\gamma} \mid H = h,\ \gamma^2 = 1\,\big\}$ в общем случае представляет собой трехмерное многообразие, которое проецируется на плоскость угловых скоростей (ω_1, ω_2) внутрь полосы, ограниченной двумя эллипсами (см. рис. 3):

$$\sigma_1\colon 2h = I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2, \qquad \sigma_2\colon 2h = (I_{11} + mR^2)\omega_1^2 + (I_{22} + mR^2)\omega_2^2.$$

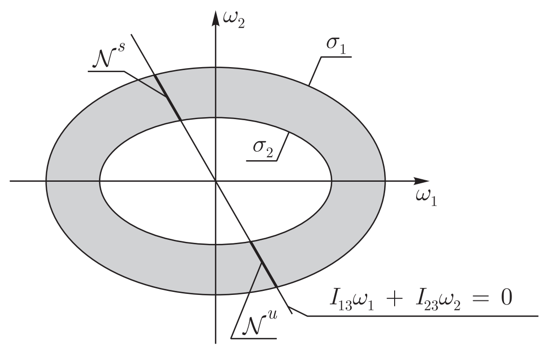

Рис. 3. Область возможных движений при фиксированном значении энергии.

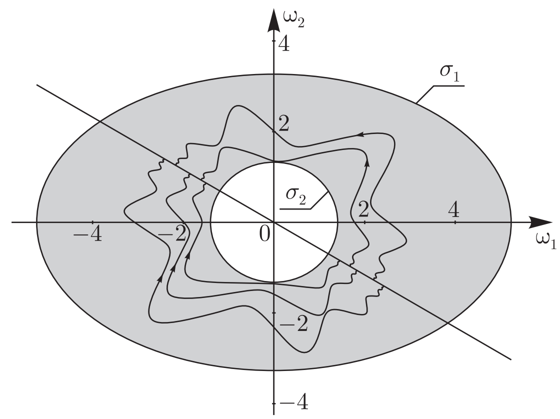

Рис. 4. Характерный вид проекций траекторий на плоскость (ω_1, ω_2) при $I_{11} = 1$, $I_{22} = 1.5$, $I_{13} = 0.7$, $I_{23} = 1.2$, $m = 10$, $R = 1$, $h = 10$.

Согласно (3.1), вследствие положительной определенности $\widehat{\mathbf{I}}$ при условии

$$I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2 = 0 \tag{3.3}$$

угловые скорости остаются постоянными, $\omega_1, \omega_2 = const$, (при этом, как известно, угловая скорость постоянна в неподвижной системе координат). Уравнение (3.3) (как видно из рис. 3) определяет внутри $\mathcal{M}_h$ пару инвариантных двумерных подмногообразий $\mathcal{N}^u, \mathcal{N}^s$, диффеоморфных сфере. Вычисляя производную величины $I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2$ в окрестности этих многообразий, можно показать, что подмногообразие $\mathcal{N}^u$ неустойчиво, а $\mathcal{N}^s$ устойчиво.

Характерный вид проекций траекторий системы на плоскость (ω_1, ω_2) приведен на рис. 4.

Несложно понять, что инвариантные многообразия $\mathcal{N}^u$, $\mathcal{N}^s$ заполнены периодическими траекториями, для которых вектор ω постоянен, а вектор γ описывает окружности на сфере вокруг оси, задаваемой вектором $\mathbf{a} = (\mathbf{I_{23}}, -\mathbf{I_{13}}, \mathbf{0})$ (параллельным ω).

Таким образом, для всякой траектории системы $\sigma(t) = \big(\omega(\mathbf{t}), \gamma(\mathbf{t})\big)$ пределы $\cos\theta_+ = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\gamma(\mathbf{t}), \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right)$ и $\cos\theta_- = \lim\limits_{t\to-\infty}\left(\gamma(\mathbf{t}), \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right)$, где θ_+, θ_- суть некоторые константы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Суслов Г. К. Теоретическая механика. М.–Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
2. Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики, 1985, т. 8, № 3, с. 85–101.
3. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во УдГУ, 1995. 432 с.
4. Харламова-Забелина Е. И. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки при наложении неголономной связи // Тр. Донецк. индустр. ин-та, 1957, т. 20, вып. 1, с. 69–75.

5. Borisov A. V., Dudoladov S. L. Kovalevskaya exponents and Poissonian structures // Regul. Chaotic Dyn., 1999, vol. 4, no. 3, pp. 13–20.

6. Татаринов Я. В. Разделяющие переменные и новые топологические явления в голономных и неголономных системах // Труды семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1988, вып. 23, с. 160–174.

7. Харламова Е. И. Движение по инерции гиростата, подчиненного неголономной связи // МТТ, 1971, вып. 3, с. 130–132.

8. Харламов П. В. Гиростат с неголономной связью // МТТ, 1971, вып. 3, с. 120–130.

9. Борисов А. В., Цыгвинцев А. В. Показатели Ковалевской и интегрируемые системы классической динамики: I, II // Регулярная и хаотическая динамика, 1996, т. 1, № 1, с. 15–37.

10. Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2005. 576 с.

11. Козлов В. В., Фурта С. Д. Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1996. 244 с.

12. Fedorov Yu. N., Maciejewski A. J., Przybylska M. Suslov problem: integrability, meromorphic and hypergeometric solutions // Nonlinearity, 2009, vol. 22, pp. 2231–2259.

13. Вагнер Г. Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // Труды семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1941, вып. 5, с. 301–327.

14. Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The rolling motion of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 201–219.

15. Fuller F. B. The writhing number of a space curve // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1971, vol. 68, no. 4, pp. 815–819.

16. Козлова З. П. К задаче Суслова // Изв. АН СССР, МТТ, 1989, вып. 1, с. 13–16.

17. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике: Ч. 2. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Инст. компьютер. исслед., 2009. 548 с.

Поступила в редакцию 23.11.09

A. V. Borisov

Computer visualization of nonholonomic systems motion

We consider the problems of Hamiltonian representation and integrability of the nonholonomic Suslov system and its generalization suggested by S. A. Chaplygin. These aspects are very important for understanding the dynamics and qualitative analysis of the system. In particular, they are related to the nontrivial asymptotic behaviour (i. e. to some scattering problem). The paper presents a general approach based on the study of the hierarchy of dynamical behaviour of nonholonomic systems.

Keywords: Hamiltonian system, Poisson bracket, nonholonomic constraint, invariant measure, integrability.

Mathematical Subject Classifications: 34D20, 70E40, 37J35

Борисов Алексей Владимирович, д. ф.-м. н., Институт компьютерных исследований, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: borisov@ics.org.ru