МАТЕМАТИКА 2010. Вып. 1

УДК 512.55+519.713.2

© *А. Д. Яшин*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРЁХМЕРНОЙ СИНХРОННОЙ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНОЙ СХЕМЫ

Рассматривается задача управления трёхмерной синхронной переключательной схемой с вертикально-горизонтально-фронтальной синхронизацией и однотипными круговыми переключателями. Даны условия разрешимости задачи в терминах порядка схемы и количества позиций круговых переключателей. Приводится явный вид решения в случае разрешимости задачи.

Ключевые слова: переключательная схема, управление, модуль над кольцом вычетов, полиномиальный алгоритм.

Введение

Трёхмерная переключательная схема — набор из n^3 одинаковых переключателей, расположенных в узлах кубической решётки размера $n \times n \times n$. Каждый переключатель может находиться в одном из m состояний в каждый момент времени. Наглядно будем представлять переключатель как рукоятку, занимающую одно из m положений по кругу (*круговой m-позиционный переключатель*).

Субъект может изменить положение переключателя с номером (ijk) по своему желанию. При этом схема *синхронизирована по вертикали, горизонтали и фронтали*, то есть одновременно таким же образом меняются все переключатели с номерами (ixy), (zjy), (zxk), где $z \neq i$, $x \neq j$, $y \neq k$.

Другая физическая интерпретация — субъект не имеет доступа внутрь схемы, но может воздействовать тремя взаимно перпендикулярными лазерными лучами. Считаем, что переключатель, задетый однократным импульсом, переключается в следующее положение.

Состоянием трёхмерной синхронной переключательной схемы назовём трёхмерный массив порядка n, элементами которого являются положения переключателей. *Управление схемой* заключается в применении указанных воздействий для перевода схемы из некоторого данного состояния в некоторое желаемое. Скажем, что схема *управляема*, если из любого данного состояния она может быть переведена в любое желаемое состояние.

В статье даны ответы на следующие основные вопросы:

— при каком соотношении между m и n указанная схема управляема?

— как найти последовательность воздействий по данному и желаемому состояниям?

Аналогичная задача для двумерной синхронной переключательной схемы решена в [1].

Автор выражает благодарность А. П. Бельтюкову и В. И. Родионову за полезное обсуждение рассматриваемой в работе тематики.

§ 1. Алгебраическая модель задачи

Описанный выше круговой m-позиционный переключатель можно представить как переменную, пробегающую по элементам *кольца*

$$\mathbb{Z}_m \equiv \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$$

вычетов по модулю m [2]. Элементы этого кольца в дальнейшем будем называть *числами*.

Конкретное состояние схемы можно описать трёхмерным массивом чисел $A = (a_{ijk})_{i,j,k=1}^{n}$. Для краткости такие массивы будем называть *кубами*, *матрицами* же будем называть обычные двумерные матрицы (в соответствии с [3]).

В каждом кубе A можно выделять *фронтальные слои* A_{**k}, *вертикальные слои* A_{*j*} и *горизонтальные слои* A_{i**}. Каждый такой слой является обычной квадратной матрицей порядка n.

Множество кубов обозначаем через $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_m)$ или, короче, просто через $\mathcal{M}$.

На $\mathcal{M}$ вводятся операции *поэлементного сложения* кубов

$$(A+B)_{ijk} \equiv (A)_{ijk} + (B)_{ijk}$$

и *поэлементного умножения куба на число*

$$(aA)_{ijk} \equiv a(A)_{ijk}.$$

Относительно этих операций $\mathcal{M}$ является *модулем над кольцом* $\mathbb{Z}_m$, то есть выполняются все необходимые аксиомы теории модулей [4].

Единичное воздействие на переключатель a заключается в прибавлении единицы: $a \mapsto a+1$ (разумеется, в кольце $\mathbb{Z}_m$).

Для описания синхронизации введём кубы E^{pqr} следующим образом:

$$(E^{pqr})_{ijk} = 1 \Leftrightarrow (p=i \wedge q=j) \vee (p=i \wedge r=k) \vee (q=j \wedge r=k),$$

остальные элементы равны нулю.

Единичное воздействие на переключатель (pqr) в схеме, находящейся в состоянии A, заключается в прибавлении к кубу A куба E^{pqr} : $A \mapsto A + E^{pqr}$.

Учитывая тождества коммутативности и дистрибутивности в модуле $\mathcal{M}$, а также арифметику кольца $\mathbb{Z}_m$, получаем важный вывод: любая конечная последовательность воздействий на схему, находящуюся в состоянии A, сводится к следующему виду:

$$A \mapsto A + x_{111}E^{111} + x_{112}E^{112} + \ldots + x_{nnn}E^{nnn},$$

где коэффициент x_{pqr} показывает число делений, на которые поворачивается рукоятка с номером (pqr), причём последовательность действий с рукоятками несущественна. Поэтому все коэффициенты можно сгруппировать в куб X и назвать его *кубом воздействий на* A.

Перевод схемы из состояния A в состояние B соответствует уравнению

$$A + x_{111}E^{111} + x_{112}E^{112} + \ldots + x_{nnn}E^{nnn} = B.$$

Переносим A вправо, вводим обозначение $C \equiv B - A$ и получаем *основное уравнение*

$$x_{111}E^{111} + x_{112}E^{112} + \ldots + x_{nnn}E^{nnn} = C,$$

которое надо решить относительно n^3 неизвестных x_{pqr}.

§ 2. Дополнительные операции на модуле $\mathcal{M}$

Введём две дополнительные двухместные операции на множестве кубов.

Фронтально–послойное умножение кубов $Z = X \circ Y$:

$$z_{ijk} \equiv \sum_{p=1}^{n} x_{ipk} y_{pjk}.$$

То есть слой X_{**k} умножается на слой Y_{**k} (как обычные матрицы) и результат этого умножения становится слоем Z_{**k}.

Вертикально–послойное умножение кубов $Z = X \times Y$:

$$z_{ijk} \equiv \sum_{p=1}^{n} x_{ijp} y_{pjk}.$$

То есть слой X_{*j*} умножается на слой Y_{*j*} (как обычные матрицы) и результат этого умножения становится слоем Z_{*j*}.

Легко проверить, что для этих операций верны обычные тождества:
$X \circ (Y \circ Z) = (X \circ Y) \circ Z$,
$(X + Y) \circ Z = X \circ Z + Y \circ Z$,
$X \circ (Y + Z) = X \circ Y + X \circ Z$,
$a(X \circ Y) = (aX) \circ Y = X \circ (aY)$,
$X \times (Y \times Z) = (X \times Y) \times Z$,
$(X + Y) \times Z = X \times Z + Y \times Z$,
$X \times (Y + Z) = X \times Y + X \times Z$,
$a(X \times Y) = (aX) \times Y = X \times (aY)$.

§ 3. О системах линейных уравнений над кольцом вычетов

Традиционная теория определителей и систем линейных уравнений строится над полем. Вместе с тем начальная часть этой теории вплоть до теоремы Крамера для систем с квадратной матрицей может быть проведена и для кольца $\mathbb{Z}_m$, по крайней мере до момента использования деления [5]. При простом m кольцо $\mathbb{Z}_m$ является полем. При составном m это кольцо полем не является, так как в нём существуют необратимые элементы. Напомним, в коммутативном кольце с единицей элемент x называется *обратимым*, если существует y такой, что $xy = 1$.

Предложение 1. *Элемент $k \in \mathbb{Z}_m$ обратим тогда и только тогда, когда k взаимно просто с m.*

Для дальнейшего нам понадобится вариант теоремы Крамера для систем над кольцом вычетов (в матричной форме):

Теорема 1 (Крамер). *Пусть $Ax = b$ — система с квадратной матрицей A.*

Если $\det A$ *обратим в $\mathbb{Z}_m$, то при любой правой части b система имеет* (*единственное*) *решение.*

Если же $\det A$ *необратим в $\mathbb{Z}_m$, то при некотором b система не имеет решений.*

§ 4. Вспомогательные определители

Рассмотрим матрицу порядка $n \times n$:

$$U(x) \equiv \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x \end{pmatrix}$$

Лемма 1. $\det U(x) = (x-1)^{n-1}(x+n-1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это задача 321 в задачнике [6] при $a = 1$. Прибавим к первому столбцу все остальные столбцы:

$$|U(x)| = \begin{vmatrix} x+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x+n-1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ x+n-1 & 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x+n-1 & 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

Вычтем первую строку из всех остальных строк:

$$|U(x)| = \begin{vmatrix} x+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix}.$$

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали $|U(x)| = (x+n-1)(x-1)^{n-1}$. □

Введём в рассмотрение блочную матрицу порядка $n^2 \times n^2$

$$V(x) \equiv \begin{pmatrix} U(x) & E' & E' & \cdots & E' \\ E' & U(x) & E' & \cdots & E' \\ E' & E' & U(x) & \cdots & E' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ E' & E' & E' & \cdots & U(x) \end{pmatrix},$$

где $U(x)$ описана выше, E' — единичная матрица порядка $n \times n$.

Лемма 2. $\det V(x) = (x-2)^{(n-1)^2}(x+n-2)^{2n-2}(x+2n-2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично доказательству предыдущей леммы. Сначала прибавим к первому блок–столбцу остальные блок–столбцы, затем вычтем первую блок–строку из остальных блок–строк, получим

$$|V(x)| = \begin{vmatrix} U(x)+(n-1)E' & E' & E' & \cdots & E' \\ 0 & U(x)-E' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & U(x)-E' & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & U(x)-E' \end{vmatrix}.$$

Получилась блочно–треугольная матрица, её определитель равен произведению определителей диагональных блоков:

$|V(x)| = |U(x+n-1)| \cdot |U(x-1)|^{n-1} = [(x-2)^{n-1}(x+n-2)]^{(n-1)}(x+n-2)^{n-1}(x+2n-2) = (x-2)^{(n-1)^2}(x+n-2)^{2n-2}(x+2n-2)$. □

§ 5. Критерий управляемости

Основное уравнение в краткой записи имеет вид

$$\sum_{(pqr)} x_{pqr} E^{pqr} = C.$$

Для отыскания критерия управляемости применяем метод *линейной развёртки.*

Упорядочим индексы лексикографически

$$111, 112, \ldots, 11n, 121, \ldots, 12n, \ldots, nn(n-1), nnn$$

и введём в рассмотрение матрицу W порядка $n^3 \times n^3$:

$$W_{(pqr)(ijk)} = \begin{cases} 1, & \text{если } (pqr) \text{ и } (ijk) \text{ различаются не более чем в одной позиции;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Например, для $n = 2$ матрица W имеет порядок 8×8 и выглядит так:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Для дальнейшего нужно вычислить (в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$) определитель матрицы W для произвольного n.

Удобно переписать эту матрицу в блочном виде:

$$W = \begin{pmatrix} V(1) & E & E & \cdots & E \\ E & V(1) & E & \cdots & E \\ E & E & V(1) & \cdots & E \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ E & E & E & \cdots & V(1) \end{pmatrix},$$

где в каждой строке n блоков, блок E — единичная матрица порядка $n^2 \times n^2$, а блок $V(1)$ — матрица порядка $n^2 \times n^2$, имеющая вид

$$V = \begin{pmatrix} U(1) & E' & E' & \cdots & E' \\ E' & U(1) & E' & \cdots & E' \\ E' & E' & U(1) & \cdots & E' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ E' & E' & E' & \cdots & U(1) \end{pmatrix}.$$

Здесь также каждая строка состоит из n подблоков. Подблок E' — единичная матрица порядка $n \times n$, подблок $U(1)$ описан выше.

Лемма 3. $\det W = (-1)^{n-1} 2^{n^3-3n^2+6n-4} (n-2)^{3(n-1)^2} (n-1)^{3(n-1)} (3n-2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для вычисления определителя матрицы W применяем аналогичный ход: сначала прибавляем в первому блок–столбцу все остальные блок-столбцы, затем вычитаем первую блок–строку из всех остальных блок–строк. Получаем

$$|W| = \begin{vmatrix} V(n) & E & E & \cdots & E \\ 0 & V(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & V(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & V(0) \end{vmatrix}.$$

Снова блочно–треугольная матрица. Тогда $|W| = |V(n)| \cdot |V(0)|^{n-1}$. Далее применяется предыдущая лемма. □

Из полученной формулы при $n = 2$ получается $\det W = 0$, поэтому изучаемая трёхмерная схема не является управляемой ни при каком m.

Теорема 2 (Критерий управляемости [7]). *Изучаемая схема является управляемой тогда и только тогда, когда $n > 2$ и m нечётно и взаимно просто с $n-2$, $n-1$, и $3n-2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы Крамера управляемость схемы равносильна обратимости определителя $|W|$ в кольце $\mathbb{Z}_m$. Он представлен в виде множителей, каждый из которых должен быть обратимым. Отметим, что показатель степени у множителя 2 положителен, то есть 2 реально присутствует в указанном разложении. □

Пример 1. Минимальный управляемый случай получается при $m = n = 3$. На его основе можно составить компьютерную головоломку.

Предложение 2. *Для любого $n > 2$ существует бесконечное множество значений m, таких, что схема оказывается управляемой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При данном $n > 2$ подходит любое m, в каноническое разложение которого не входят простые числа, участвующие в каноническом разложении определителя $|W|$. □

Поскольку в дальнейшем будем рассматривать только управляемый случай схемы, введём обозначения для обратных элементов:

$r_1 := (n-1)^{-1}$, $r_2 := (n-2)^{-1}$, $r_3 := (3n-2)^{-1}$, $e_2 := 2^{-1}$, $e_4 := 4^{-1}$.

Все они существуют в силу критерия управляемости.

§ 6. Операторная форма задачи

Обозначим левую часть основного уравнения через $F(X)$:

$$F(X) \equiv \sum_{(pqr)} x_{pqr} E^{pqr}.$$

Предложение 3. *Выражение F представляет собой линейный оператор на модуле $\mathcal{M}$.*

Доказательство. $F(aX+bY) = \sum_{(pqr)} (ax_{pqr}+by_{pqr})E^{pqr} = \sum_{(pqr)} (ax_{pqr}E^{pqr}+by_{pqr}E^{pqr}) =$

$\sum_{(pqr)} ax_{pqr}E^{pqr} + \sum_{(pqr)} by_{pqr}E^{pqr} = a\sum_{(pqr)} x_{pqr}E^{pqr} + b\sum_{(pqr)} y_{pqr}E^{pqr} = aF(X)+bF(Y)$. □

Рассмотрим куб X воздействий на переключательную схему. Поскольку рассматриваемая схема является синхронной по трём измерениям, то величина воздействия на элемент с индексом (ijk) равна сумме величин воздействий на элементы по вертикали, горизонтали и фронтали. Поэтому суммарное воздействие на (ijk)-й элемент равно

$$f_{ijk} = \sum_{p=1}^{n} x_{pjk} + \sum_{p=1}^{n} x_{ipk} + \sum_{p=1}^{n} x_{ijp} - 2x_{ijk}$$

(слагаемое x_{ijk} участвует во всех трёх суммах, поэтому вычитается $2x_{ijk}$).

Пусть куб V целиком состоит из единиц (*унитарный куб*). Тогда куб суммарного воздействия на переключательную схему, вызванный кубом единичных воздействий X равен

$$F(X) = V \circ X + X \circ V + X \times V - 2X.$$

Это есть краткая форма записи линейного оператора из основного уравнения.

Алгебру линейных операторов на $\mathcal{M}$ обозначим через $LO(\mathcal{M})$. Если ограничиться только сложением операторов и умножением оператора на число, то $LO(\mathcal{M})$ можно рассматривать как модуль над кольцом $\mathbb{Z}_m$.

Оператор F определён выше как отображение из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{M}$. Его можно рассматривать и как линейный оператор на $LO(\mathcal{M})$. Именно, пусть $Y : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ — какой-либо линейный оператор. Тогда $F(Y)$ определяется как

$$F(Y)(X) \equiv V \circ Y(X) + Y(X) \circ V + Y(X) \times V - 2Y(X).$$

§ 7. Операторная форма решения основного уравнения

Лемма 4. *Для унитарного куба V справедливы равенства*

$$V \circ V = V \times V = nV$$

Здесь n — внешнее натуральное число, при умножении оно должно приводиться по модулю m. Это же будет касаться целочисленых коэффициентов, возникающих в дальнейшем при вычислениях в $\mathcal{M}$.

Лемма 5. *Пусть для некоторого натурального s и некоторых чисел $a_0, \ldots, a_{s-1}$ в $LO(\mathcal{M})$ выполнено тождество*

$$X \equiv a_0 F(X) + a_1 F^2(X) + \ldots + a_{s-1} F^s(X).$$

Тогда решение основного уравнения имеет вид

$$X = a_0 C + a_1 F(C) + \ldots + a_{s-1} F^{s-1}(C).$$

Доказательство. $F(X) = F(a_0C + a_1F(C) + \ldots + a_{s-1}F^{s-1}(C)) = a_0F(C) + a_1F^2(C) + \ldots + a_{s-1}F^s(C) = C$ в силу линейности оператора F и указанного в условии тождества. $\square$

Помимо обычных тождеств для операций послойного умножения кубов, упомянутых в разделе 2, выполнены также следующие специфические тождества (напомним, что V — унитарный куб).

Лемма 6.
1. $(V \circ X) \times V \equiv V \circ (X \times V)$;
2. $(X \times V) \circ V \equiv (X \circ V) \times V$;
3. $(V \circ X \circ V) \times V \equiv \chi(X)V$. *Здесь* $\chi(X) = \sum_{(ijk)} x_{ijk}$ *— сумма всех элементов*[1] *куба* X.

Доказательство. Докажем первое тождество. Элемент левой части с индексом (ijk) выглядит так (границы пробега индексов опущены):

$((V \circ X) \times V)_{ijk} = \sum\limits_p (V \circ X)_{ijp} V_{pjk} = \sum\limits_p (V \circ X)_{ijp} = \sum\limits_p \sum\limits_s V_{isk} X_{sjp} = \sum\limits_p \sum\limits_s X_{sjp}$ — сумма элементов слоя X_{*j*} куба X.

Вычисляем элемент правой части с индексом (ijk):

$(V \circ (X \times V))_{ijk} = \sum\limits_p V_{ipk} (X \times V)_{pjk} = \sum\limits_p (X \times V)_{pjk} = \sum\limits_p \sum\limits_s X_{pjs}$ — сумма элементов слоя X_{*j*}. $\square$

Введём обозначения для трёх линейных операторов из $LO(\mathcal{M})$:

$P = P(X) := V \circ X + X \circ V + X \times V$,
$Q = Q(X) := V \circ X \circ V + (V \circ X) \times V + (X \circ V) \times V$,
$R = R(X) := \chi(X)V$.

Лемма 7. *Подмодуль* $\langle P, Q, R \rangle$ *модуля* $LO(\mathcal{M})$ *инвариантен относительно оператора* F. *Точнее,*

$F(P) = (n-2)P + 2Q, \;\; F(Q) = 2(n-1)Q + 3R, \;\; F(R) = (3n-2)R.$

Доказательство. Прямой подсчёт с использованием леммы 6.

$$\begin{gathered}
1. \;\; F(P) = F(V \circ X + X \circ V + X \times V) = -2(V \circ X + X \circ V + X \times V) + \\
+ V \circ (V \circ X + X \circ V + X \times V) + (V \circ X + X \circ V + X \times V) \circ V + \\
+ (V \circ X + X \circ V + X \times V) \times V = -2(V \circ X + X \circ V + X \times V) + V \circ V \circ X + V \circ X \circ V + \\
+ V \circ (X \times V)^{\#} + V \circ X \circ V + X \circ V \circ V + (X \times V) \circ V^{\%} + (V \circ X) \times V^{\#} + (X \circ V) \times V^{\%} + \\
+ X \times V \times V = -2(V \circ X + X \circ V + X \times V) + nV \circ X + nX \circ V + nX \times V + 2V \circ X \circ V + \\
+ 2V \circ (X \times V) + 2(X \times V) \circ V = (n-2)P + 2Q.
\end{gathered}$$

(Слагаемые, отмеченные $\#$, равны по лемме 6; слагаемые, отмеченные $\%$, также равны).

2. $F(Q) = -2Q + V \circ Q + Q \circ V + Q \times V$. Три последних слагаемых вычислим по отдельности.

$$\begin{gathered}
V \circ Q = V \circ (V \circ X \circ V + (V \circ X) \times V + (X \circ V) \times V) = \\
= V \circ V \circ X \circ V + V((V \circ X) \times V) + V \circ ((X \circ V) \times V) = \\
= nV \circ X \circ V + V \circ V \circ (X \times V) + V \circ ((X \circ V) \times V) = \\
= nV \circ X \circ V + nV \circ (X \times V) + \chi V.
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
Q \circ V = (V \circ X \circ V + (V \circ X) \times V + (X \circ V) \times V) \circ V = \\
= V \circ X \circ V \circ V + ((V \circ X) \times V) \circ V + ((X \circ V) \times V) \circ V = \\
= nV \circ X \circ V + (V \circ X \circ V) \times V + (X \times V) \circ V \circ V = \\
= nV \circ X \circ V + \chi V + n(X \times V) \circ V.
\end{gathered}$$

[1] Пример *линейного функционала* на $\mathcal{M}$.

$$Q \times V = (V \circ X \circ V + (V \circ X) \times V + (X \circ V) \times V) \times V =$$
$$= (V \circ X \circ V) \times V + (V \circ X) \times V \times V + (X \circ V) \times V \times V =$$
$$= \chi V + n(V \circ X) \times V + n(X \circ V) \times V.$$

Отсюда $F(Q) = (2n-2)Q + 3R$.

$$3.\ \ F(R) = -2R + V \circ R + R \circ V + R \times V = -2R + V \circ \chi V + \chi V \circ V + \chi V \times V =$$
$$= -2R + n\chi V + \chi n V + \chi n V = (3n-2)V.$$

Лемма доказана. □

Предложение 4. *Подмодуль в* $LO(\mathcal{M})$, *порожденный степенями* $F^i(X)$ $(i \leqslant 4)$, *имеет систему образующих* $\{id, P, Q, R\}$ (*здесь* id — *тождественный оператор*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что все степени оператора F до четвёртой включительно являются линейными комбинациями указанных образующих. При этом будут явно вычислены коэффициенты этих комбинаций.

$$F(X) = -2X + V \circ X + X \circ V + X \times V = -2X + P.$$
$$F^2(X) = F(F(X)) = F(-2X + P) = -2F(X) + F(P) =$$
$$= -2(-2X + P) + (n-2)P + 2Q = 4X + (n-4)P + 2Q.$$
$$F^3(X) = F(F^2(X)) = F(4X + (n-4)P + 2Q) = 4F(X) + (n-4)F(P) + 2F(Q) =$$
$$= 4(-2X + P) + (n-4)((n-2)P + 2Q) + 2(2(n-1)Q + 3R) =$$
$$= -8X + (n^2 - 6n + 12)P + (6n - 12)Q + 3R.$$
$$F^4(X) = F(F^3(X)) = F(-8X + (n^2 - 6n + 12)P + (6n-12)Q + 3R) =$$
$$= -8F(X) + (n^2 - 6n + 12)F(P) + (6n - 12)F(Q) + 6F(R) =$$
$$= -8(-2X + P) + (n^2 - 6n + 12)((n-2)P + 2Q) + (6n - 12)((2n-2)Q + 3R) + 6(3n-2)R =$$
$$= 16X + (n^3 - 8n^2 + 24n - 32)P + (14n^2 - 48n + 48)Q + (36n - 48)R.$$

□

Будем искать коэффициенты соотношения

$$X \equiv a_0 F(X) + a_1 F^2(X) + a_2 F^3(X) + a_3 F^4(X), \qquad (*)$$

записывая степени оператора F в образующих $\{id, P, Q, R\}$. При этом получается система из четырёх линейных уравнений с четырьмя неизвестными a_0, a_1, a_2, a_3 над кольцом $\mathbb{Z}_m$. Расширенная матрица этой системы имеет следующий вид (элементы взяты из предложения 4):

$$\left(\begin{array}{llll|l} -2 & 4 & -8 & 16 & 1 \\ 1 & n-4 & n^2 - 6n + 12 & n^3 - 8n^2 + 24n - 32 & 0 \\ 0 & 2 & 6(n-2) & 14n^2 - 48n + 48 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 36n - 48 & 0 \end{array}\right).$$

Будем решать эту систему по методу Гаусса. Через S_i обозначим i-ю строку расширенной матрицы. Метод Гаусса заключается в выполнении действий следующих трёх типов: $S_i \leftrightarrow S_j$ (поменять местами строки), $S_i := S_i + xS_j$ (к i-й строке прибавить поэлементно j-ю строку, умноженную на x; $i \neq j$), $S_i := xS_i$ (умножение строки на x, при этом x должен быть обратимым элементом[2] кольца $\mathbb{Z}_m$) в целях получения слева единичной матрицы. Решения будут в правом столбце. По ходу гауссовых преобразований строки будут умножаться на числа r_1, r_2, r_3, e_2, e_4, упомянутые в разделе .

[2]В поле все ненулевые элементы обратимы.

1 шаг. $S_1 := -e_2 S_1,\ \ S_2 := S_2 - S_1$.

$$\left(\begin{array}{llll|l} 1 & -2 & 4 & -8 & -e_2 \\ 0 & n-2 & n^2-6n+8 & n^3-8n^2+24n-24 & e_2 \\ 0 & 2 & 6(n-2) & 14n^2-48n+48 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 36n-48 & 0 \end{array}\right).$$

Заметим, что $n^2-6n+8=(n-2)(n-4)$, $n^3-8n^2+24n-24=(n-2)(n^2-6n+12)$.

Шаг 2. $S_2 := r_1 S_2,\ \ S_1 := S_1 + 2S_2,\ \ S_3 := S_3 - 2S_2$.

$$\left(\begin{array}{llll|l} 1 & 0 & 2n-4 & 2n^2-12n+16 & -e_2+r_1 \\ 0 & 1 & n-4 & n^2-6n+12 & e_2 r_1 \\ 0 & 0 & 4(n-1) & 12n^2-36n+24 & -r_1 \\ 0 & 0 & 6 & 36n-48 & 0 \end{array}\right).$$

Заметим, что $12n^2-36n+24=4(n-1)3(n-2)$.

Шаг 3. $S_3 := e_4 r_2,\ \ S_1 := S_1 - 2(n-2)S_3,\ \ S_2 = S_2 - (n-4)S_3$.

$$\left(\begin{array}{llll|l} 1 & 0 & 0 & -4n^2+12n-8 & -e_2+r_1+2e_4r_2 \\ 0 & 1 & 0 & -2n^2+12n-12 & e_2r_1+e_4r_2-2r_1e_4r_2 \\ 0 & 0 & 1 & 3(n-2) & -r_1e_4r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 3n-2 & r_1e_4r_2 \end{array}\right).$$

Шаг 4. $S_4 := r_3 S_4,\ \ S_3 := S_3 - 3(n-2)S_4,\ \ S_2 := S_2 - (2n^2+12n-12)S_4,\ \ S_1 := S_1 - (4n^2 + 12n-8)S_4$.

$$\left(\begin{array}{llll|l} 1 & 0 & 0 & 0 & -e_2+r_1+2e_4r_2+r_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & e_2r_1+e_2r_3+e_4r_2-e_2r_1r_2-3e_2r_2r_3-r_1r_2r_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -r_1e_4r_2-3e_4r_2r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_1e_4r_2r_3 \end{array}\right).$$

Таким образом, коэффициенты в соотношении $(*)$ имеют вид
$a_0 = -e_2 + r_1 + 2e_2r_2 + r_3$,
$a_1 = e_2r_1 + e_2r_3 + e_4r_2 - e_2r_1r_2 - 3e_2r_2r_3 - r_1r_2r_3$,
$a_2 = -e_4r_1r_2 - 3e_4r_2r_3$,
$a_3 = e_4r_1r_2r_3$
(явная формула решения в операторном виде приведена в [8]).

С использованием операторов P, Q, R искомый куб воздействий можно записать следующим образом

$$X = b_0C + b_1P(C) + b_2Q(C) + b_3R(C), \qquad (**)$$

где $b_0 = a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3$, $b_1 = a_1 + (n-4)a_2 + (n^2-6n+12)a_3$, $b_2 = 2a_2 + (6n-12)a_3$, $b_3 = 6a_3$.

§ 8. О вычислительной трудоёмкости решения основного уравнения

Поскольку модуль $\mathcal{M}$ при фиксированных m и n является конечным объектом, то наивный алгоритм перебора всех кубов $X \in \mathcal{M}$ позволит найти решение за конечное число шагов. Примем за элементарные операции сложение, умножение и сравнение в кольце $\mathbb{Z}_m$ и оценим сложность поиска искомого куба методом прямого перебора. Напомним основное уравнение в исходном виде:

$$\sum_{(pqr)} x_{pqr} E^{pqr} = C.$$

Для вычисления одного слагаемого в этой сумме требуется n^3 умножений. Всего n^3 слагаемых, поэтому умножений надо n^6. Далее требуется выполнить n^3-1 сложений по каждому

(pqr), то есть ещё $n^6 - n^3$ сложений. Всего кубов m^{n^3}, поэтому для полного перебора требуется $n^6 m^{n^3}$ умножений и $(n^6 - n^3)m^{n^3}$ сложений. При этом надо учесть, что процедура сравнения полученного куба с правой частью основного уравнения требует n^3 элементарных актов сравнения. Полный перебор даёт ещё n^6 сравнений.

Теперь перейдём к явной формуле решения. Операция послойного умножения кубов (как $\circ$, так и $\times$), в общем случае предполагает вычисление n^3 элементов, каждый из которых есть сумма n произведений. Однако в нашем случае в явной формуле решения послойные умножения производятся только на унитарный куб, целиком состоящий из единиц. Тогда умножения фактически не нужны, и речь идёт только о сложении. Именно, послойное умножение куба V на куб X требует $n-1$ сложение для вычисления каждого из n^3 элементов, итого $n^3(n-1)$ сложений.

Теперь нетрудно подсчитать количество умножений для вычисления X по явной формуле $(**)$.

$$P(C) = V \circ C + C \circ V + C \times V$$

требует $3(n^4 - n^3) + 2n^3 = 3n^4 - n^3$ сложений.

$$Q(C) = V \circ C \circ V + (V \circ C) \times V + (C \circ V) \times V$$

требует тоже $3n^4 - n^3$ сложений (на этом шаге можно использовать послойные произведения, полученные при вычислении $P(C)$).

$$R(C) = \chi(C)V$$

требует $n^3 - 1$ сложений для нахождения суммы всех элементов куба C.

Подсчёт по формуле $(*)$ потребует ещё $4n^3$ умножений (на коэффициенты b_0, b_1, b_2, b_3) и $3n^3$ сложений.

Итого $4n^3$ умножений и $6n^4 + n^3 - 1$ сложений: получаем алгоритм отыскания решения основного уравнения полиномиальной временной сложности.

Заключение

Задача об управлении двумерной синхронной прямоугольной схемой с двухпозиционными переключателями была рассмотрена в журнале «Квант» № 9 за 1981 г. (с. 23–24, задача М665, Н.Васильев).

Двумерный вариант задачи ($m = 2$, $n = 4$) был использован в виде головоломки в популярной компьютерной игре «Братья пилоты».

Дальнейшее развитие темы может идти в разных направлениях.

Во-первых, возможно изучение других типов синхронизации на схемах с круговыми переключателями.

Во-вторых, интересно изучение схем с другими типами переключателей. Например, назовём *переключателем* неупорядоченное множество индексов

$$\{1, 2, \ldots, m\}.$$

Состоянием переключателя назовем перестановку

$$(i_1, i_2, \ldots, i_m).$$

Существует $m!$ различных состояний. Воздействие на переключатель осуществляется *подстановкой*, то есть элементом группы подстановок S_m [2]. Например, при воздействии подстановкой $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ переключатель из состояния $(3\,2\,1)$ переходит в состояние $(1\,3\,2)$.

Какие модели переключателей и какие схемы синхронизации надо рассматривать? Ответ на этот вопрос следует получить у физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яшин А. Д. Двумерные синхронные переключательные схемы // Моделирование и анализ данных: Труды факультета информационных технологий МГППУ. — М.: Русавиа, — 2005. — Вып.2. — С. 79–87.
2. Кострикин А. И. Введение в алгебру. — М.: Наука, 2002.
3. Соколов Н. П. Пространственные матрицы и их приложения. — М.: Физматлит, 1960.
4. Шафаревич И. Р. Основные понятия алгебры. — М.: Наука, 1999.
5. Родосский К А. Алгоритм Евклида. — М.: Наука, 1988.
6. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Задачи по высшей алгебре: Учебное пособие. 15-е изд., стереотип. — СПб. Лань, 2005.
7. Яшин А. Д. Об одной синхронной трёхмерной переключательной схеме // Математическое моделирование в образовании, науке и производстве: Тез. докл. V Междунар. конф. Тирасполь, 2007. — С. 61–62.
8. Яшин А. Д., Кравченко Н. В. Алгебраическая модель одной трёхмерной синхронной переключательной схемы // Труды I Междунар. конф. «Трёхмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Кластерные технологии моделирования» (Ижевск, 4–6 февраля 2009 г.) / УдГУ. Ижевск. — С. 108–111.

Поступила в редакцию 23.11.09

A. D. Yashin
An algebraic mogel of three-dimensional synchronized switch scheme

We consider the handling problem for a three dimensional synchronized switch scheme consisting on the same circle switches with vertical, horizontal and frontal synchronization. The solvability condition is given in terms of the dimension of the scheme and the number of positions of the switches. The explicit solution is given provided that the problem is solvable.

Keywords: switch scheme, handling, modulus over the ring of remainders, polynomial algorithm.

Mathematical Subject Classifications: 15A24, 93A30

Яшин Александр Данилович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра прикладной математики, Московский городской психолого-педагогический университет, 127051, Россия, г. Москва, ул. Сретенка, 29, E-mail: yashin.alexandr@yandex.ru