ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2010. Вып. 1

УДК 517.972.8

© *А. Г. Ченцов, Ю. В. Шапарь*

КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫЕ МЕРЫ И РАСШИРЕНИЯ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА [1]

Рассматривается игровая задача на максимин в условиях последовательного ослабления моментных ограничений. Конструируется расширение в классе конечно-аддитивных мер, реализующее асимптотику значений максимина при нарастающей точности соблюдения ограничений. Установлены эффективно проверяемые достаточные условия устойчивости «по максимину» (при ослаблении моментных ограничений).

Ключевые слова: конечно-аддитивная мера, слабая абсолютная непрерывность, максимин.

Введение

Рассматривается задача на максимин

$$f_0\left(\left(\left(\int_{I_1}\alpha_i u\,d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}}, \left(\int_{I_2}\beta_j v\,d\eta_2\right)_{j\in\overline{1,l}}\right)\right) \to \sup_{v\in\mathcal{V}}\inf_{u\in\mathcal{U}}.$$

Здесь f_0 — непрерывная по совокупности переменных вещественнозначная (в/з) функция на $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^l$, I_1 и I_2 — непустые множества с измеримыми структурами в виде (непустых) семейств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ соответственно; в основной части работы предполагается, что $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — полуалгебры множеств; в частности, допускается, что $(I_1,\mathcal{L}_1)$ и $(I_2,\mathcal{L}_2)$ — стандартные измеримые пространства (ИП). В качестве η_1 и η_2 используются неотрицательные вещественнозначные (в/з) конечно-аддитивные (к.-а.) меры на $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ соответственно; $(\alpha_i)_{i\in\overline{1,k}}$, $(\beta_j)_{j\in\overline{1,l}}$ — два кортежа ярусных, то есть допускающих равномерное приближение ступенчатыми, в/з функций на $(I_1,\mathcal{L}_1)$ и $(I_2,\mathcal{L}_2)$ соответственно. Функции u и v также полагаются ярусными в смысле $(I_1,\mathcal{L}_1)$ и $(I_2,\mathcal{L}_2)$ соответственно, причем допускается их произвольный выбор в пределах заданных множеств U и V («составленных» из ярусных функций) при соблюдении ограничений

$$\left(\int_{I_1}\gamma_i u\,d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,p}}\in Y,\quad \left(\int_{I_2}\omega_j v\,d\eta_2\right)_{j\in\overline{1,q}}\in Z,$$

где Y и Z — непустые компакты в $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно, а $(\gamma_i)_{i\in\overline{1,p}}$ и $(\omega_j)_{j\in\overline{1,q}}$ — суть ярусные в/з функции на $(I_1,\mathcal{L}_1)$ и $(I_2,\mathcal{L}_2)$ соответственно.

В качестве $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ используются (в постановке вышеупомянутой задачи) множества допустимых в смысле соблюдения Y-ограничения и Z-ограничения функций $u\in U$ и $v\in V$ соответственно. Рассматриваемая задача не обладает, как легко видеть на примерах, устойчивостью при ослаблении Y-ограничения и Z-ограничения; упомянутые ослабления ограничений естественны, однако, с точки зрения различных приложений. Поэтому возникает вопрос о представлении асимптотики значений максимина (экстремумы могут не достигаться). Для представления упомянутой асимптотики будет построена конструкция расширения в классе к.-а. мер.

В связи с упомянутой постановкой отметим задачи управления линейными системами с импульсными и моментными ограничениями. Приведем простейший пример такого рода. Рассмотрим материальные точки

$$\dot{y}_1(t)=y_2(t),\ \dot{y}_2(t)=u(t);\quad \dot{z}_1(t)=z_2(t),\ \dot{z}_2(t)=v(t)$$

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Математическая теория управления» и при поддержке РФФИ (проекты 09–01–00436, 08–08–00981).

на промежутке $[0,1]$; полагаем, что $y_1(0)=z_1(0)=y_2(0)=z_2(0)=0$. Программные управления $u=u(\cdot)$ и $v=v(\cdot)$ полагаем сейчас определенными на «стрелке» $[0,1[$, неотрицательными кусочно-постоянными (к.-п.) и непрерывными справа (н. спр.); пусть, кроме того,

$$\int_0^1 u(t)\,dt \leqslant 1, \quad \int_0^1 v(t)\,dt \leqslant 2.$$

Кроме того, выбор u и v стеснен ограничениями

$$\int_0^1 (1-t)u(t)\,dt \leqslant 0, \quad \int_0^1 (1-t)v(t)\,dt \leqslant 0.$$

Иными словами, ограничения на выбор u и v включают импульсную и моментную компоненты; последняя соответствует требованиям $y_1(1)\leqslant 0$, $z_1(1)\leqslant 0$. В силу неотрицательности возможных управлений это означает, что должны выполняться равенства $y_1(1)=z_1(1)=0$. В данном случае полагаем, что $I_1=I_2=[0,1[$, $\mathcal{L}_1=\mathcal{L}_2$ — полуалгебра всех промежутков $[t_1,t_2[$, $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant 1$; $\eta_1=\eta_2$ есть функция длины (след меры Лебега) промежутков упомянутого типа. С точки зрения исходной игровой задачи программного управления при ее сведении к ранее упомянутой абстрактной постановке уместно полагать, что $k=l=p=q=1$, $Y=\{0\}$, $Z=\{0\}$. Пусть f_0 определяется (в данном примере) правилом $f_0(x',x'')=|\,x'-x''|$, где $x'\in\mathbb{R}$ и $x''\in\mathbb{R}$; как обычно, мы отождествляем $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}$. Полагаем, кроме того, что $\alpha_1(t)\equiv 1$ и $\beta_1(t)\equiv 0$. При этих условиях оптимизируется $|\,y_2(1)-z_2(1)|$; таким образом игрок I, распоряжающийся выбором $u=u(\cdot)$, стремится минимизировать, а игрок II, распоряжающийся выбором $v=v(\cdot)$, — максимизировать эту величину; иными словами, игрок I стремится выровнять скорости в момент $t=1$. Рассматриваем задачу о нахождении результата, гарантированного второму игроку, то есть задачу на максимин f_0 при точном или приближенном соблюдении краевых условий. В первом случае (точное соблюдение ограничений) у каждого из игроков имеется единственное (а именно: нулевое) допустимое программное управление; стало быть, максимин терминального функционала, конструируемого посредством f_0, равен нулю. Если же краевые условия соблюдаются приближенно, то есть рассматриваются ограничения

$$\int_0^1 (1-t)u(t)\,dt \leqslant \varepsilon, \quad \int_0^1 (1-t)v(t)\,dt \leqslant \delta,$$

где $\varepsilon\in]0,\infty[$ и $\delta\in]0,\infty[$ малы, то у обоих игроков появляется возможность формирования «больших» прямоугольных импульсов управления, «примыкающих» к моменту $t=1$, при соблюдении вышеупомянутых моментных ограничений. Второй игрок может теперь сформировать, соблюдая δ-ограничение, импульс $v=v(\cdot)$ так, чтобы его интеграл равнялся 2, а наилучший ответ первого игрока сводится к организации парирующего ε-допустимого управления, интеграл которого равен 1. Итак, мы имеем линейную игровую задачу программного управления, не обладающую устойчивостью «по максимину». Соответствующее ослабленным ограничениям значение максимина f_0 совпадает, следовательно, с единицей. В связи с расширением задач импульсного управления отметим общий подход Н. Н. Красовского (см. [1]), связанный с применением аппарата обобщенных функций. Этот подход послужил основой многих исследований в этом направлении.

§ 1. Общие определения и обозначения

Перечислим некоторые сокращения, используемые в дальнейшем: в/з (вещественнозначная), ИП (измеримое пространство), к.-а. (конечно-аддитивная), МП (множество притяжения), ОУ (обобщенное управление), п/м (подмножество), ТП (топологическое пространство). Для более краткой записи высказываний используем далее кванторы и пропозициональные связки; выражение def заменяет фразу «по определению», $\triangleq$ — равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Принимаем аксиому выбора.

Через $\mathcal{P}(E)$ (через $\mathcal{P}'(E)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества E. Если A, B и C — множества, причем $C \in \mathcal{P}'(A)$, то при всяком выборе функции $f : A \to B$

$$(f \mid C) \triangleq (f(x))_{x \in C},$$

$(f \mid C) : C \to B$ есть обычное сужение f на множество C, а $f^1(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$. Как обычно, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; 3; \ldots\}$, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая. Через $\tau_{\mathbb{R}}$ обозначаем обычную топологию $\mathbb{R}$, порожденную метрикой-модулем. Если $m \in \mathbb{N}$, то $\overline{1, m} \triangleq \{i \in \mathbb{N} \mid i \leqslant m\}$ и при всяком выборе множества T обозначаем, как обычно, через T^m множество всех кортежей

$$(t_i)_{i \in \overline{1, m}} : \overline{1, m} \to T,$$

рассматриваемых как отображения из $\overline{1, m}$ в T; в частности, элементы $\mathbb{R}^m$ отождествляются ниже с в/з кортежами «длины» m, то есть с отображениями из $\overline{1, m}$ в $\mathbb{R}$. Линейные операции, умножение и порядок в пространствах в/з функций с общей областью определения в дальнейшем определяются как поточечные.

Элементы топологии. Если (X, τ) — топологическое пространство (ТП) и $A \in \mathcal{P}(X)$, то через $\mathrm{cl}(A, \tau)$ обозначаем замыкание A в (X, τ), а через $\tau|_A$ — топологию A, индуцированную (в A) из (X, τ). Если (X, τ) — ТП и $x \in X$, то $N_\tau^0(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$; тогда $N_\tau(x) \triangleq \{H \in \mathcal{P}(X) \mid \exists G \in N_\tau^0(x) : G \subset H\}$ есть фильтр [2] всех окрестностей точки x в ТП (X, τ). Для любых двух ТП (X, τ_1), $X \neq \varnothing$, и (Y, τ_2), $Y \neq \varnothing$, через $C(X, \tau_1, Y, \tau_2)$ обозначаем множество всех отображений из X в Y, непрерывных в смысле (X, τ_1) и (Y, τ_2); см. [2, 3]. Наконец, для всякого ТП (X, τ) через $(\tau - \mathrm{comp})[X]$ обозначаем семейство всех непустых компактных в (X, τ) п/м множества X. Мы используем обычную сходимость направленностей в ТП (сходимость по Мору–Смиту), следуя, однако, обозначениям [4, с. 189]; в частности, сами направленности обозначаем посредством триплетов (см. также [5, с. 33]). Если $m \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}^m$, то через $\|x\|^{(m)}$ обозначаем наибольший из модулей всех компонент вектора x (в нашей редакции $x = (x_i)_{i \in \overline{1, m}}$, где $x_j \in \mathbb{R} \; \forall j \in \overline{1, m}$;

$$\|x\|^{(m)} = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |x_j| \in [0, \infty[,$$

хотя, разумеется, можно было бы использовать любую другую норму $\mathbb{R}^m$), $\|\cdot\|^{(m)}$ есть правило $x \mapsto \|x\|^{(m)} : \mathbb{R}^m \to [0, \infty[$; через $\tau_{\mathbb{R}}^{(m)}$ обозначаем топологию покоординатной сходимости пространства $\mathbb{R}^m$, порожденную нормой $\| \cdot \|^{(m)}$.

Кроме того, $\forall m \in \mathbb{N} \; \forall S \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^m) \; \forall \zeta \in]0, \infty[$

$$O_\zeta^{(m)}[S] \triangleq \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists s \in S : \|x - s\|^{(m)} < \zeta\} \in \tau_{\mathbb{R}}^{(m)}.$$

Мы ввели открытую ζ-окрестность S; в качестве S можно, конечно, использовать множество из $(\tau_{\mathbb{R}}^{(m)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^m]$.

Конечно-аддитивные меры. В пределах данного подраздела фиксируем непустое множество I и полуалгебру $\mathcal{L}$ п/м I; пара $(I, \mathcal{L})$ есть ИП с полуалгеброй множеств. Через $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ обозначаем множество всех в/з к.-а. мер ограниченной вариации, определенных на $\mathcal{L}$; $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ есть линейное пространство, порожденное конусом $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ всевозможных в/з неотрицательных к.-а. мер на $\mathcal{L}$. Пусть

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \mu] \triangleq \{\nu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \mid \forall L \in \mathcal{L} \; ((\mu(\mathcal{L}) = 0) \Rightarrow (\nu(\mathcal{L}) = 0))\} \; \forall \mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]. \qquad (1.1)$$

В (1.1) введены фактически неотрицательные в/з к.-а. меры, слабо абсолютно непрерывные [6] относительно соответствующей к.-а. меры на $\mathcal{L}$. Если $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, то через $\mathbb{A}_\mu[\mathcal{L}]$ обозначаем множество всех к.-а. мер $\nu_1 - \nu_2$, $\nu_1 \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \mu]$, $\nu_2 \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \mu]$; получаем линейное пространство, порожденное конусом $(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\mu]$ (см. [7]); $\mathbb{A}_\mu[\mathcal{L}] \subset \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и при этом $(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\mu] \subset \mathbb{A}_\mu[\mathcal{L}]$.

Через $B_0(I,\mathcal{L})$ обозначаем линейную оболочку множества всех индикаторов [8, с. 56] множеств из $\mathcal{L}$ ($B_0(I,\mathcal{L})$ — множество всех $\mathcal{L}$-ступенчатых в/з функций на I (см. [5], [7])), а через $B(I,\mathcal{L})$ — замыкание множества $B_0(I,\mathcal{L})$ в (банаховом) пространстве $\mathbb{B}(I)$ всех ограниченных в/з функций на I с традиционной sup-нормой $\|\cdot\|_I$ (см. [9, с. 261]). Линейное пространство $B(I,\mathcal{L})$ с нормой подпространства $(\mathbb{B}(I), \|\cdot\|_I)$ само является банаховым пространством (аналог $B(S,\Sigma)$ [9, гл. IV]), а его топологическое сопряженное $B^*(I,\mathcal{L})$ изометрически изоморфно [10] $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме-вариации (см. [5, (3.4.15)]). В терминах двойственности $(B(I,\mathcal{L}), \mathbb{A}(\mathcal{L}))$ определяется стандартная $*$-слабая топология $\tau_*(\mathcal{L})$ множества $\mathbb{A}(\mathcal{L})$; при этом

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L})) \tag{1.2}$$

есть локально-выпуклый σ-компакт (условия компактности в ТП (1.2) определяются известной теоремой Алаоглу [9, гл. V]). Будем использовать также топологию $\tau_0(\mathcal{L})$ [5];

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_0(\mathcal{L})) \tag{1.3}$$

есть подпространство тихоновской степени $\mathbb{R}$ в дискретной топологии при использовании $\mathcal{L}$ в качестве индексного множества (см. [7, (4.2.9)]). Если f есть в/з функция на I, то через $|f|$ обозначаем функцию $x \mapsto |f(x)| : I \to [0,\infty[$. Через $B_0^+(I,\mathcal{L})$ и $B^+(I,\mathcal{L})$ обозначаем множества всех неотрицательных функций из $B_0(I,\mathcal{L})$ и $B(I,\mathcal{L})$ соответственно. Тогда $|f| \in B_0^+(I,\mathcal{L})$ при $f \in B_0(I,\mathcal{L})$; $|g| \in B^+(I,\mathcal{L})$ при $g \in B(I,\mathcal{L})$. Отметим, кроме того, что

$$fg \in B(I,\mathcal{L}) \quad \forall f \in B(I,\mathcal{L})\ \forall g \in B(I,\mathcal{L}).$$

Если $f \in B(I,\mathcal{L})$ и $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, то через $f{*}\mu$ обозначаем неопределенный μ-интеграл f (см. [7, (3.4.11)], [10, § 3.7]); $f * \mu \in \mathbb{A}_\mu[\mathcal{L}]$. Согласно определению [10, с. 158]

$$\int_I hf\, d\mu = \int_I h\, d(f*\mu) \quad \forall h \in B(I,\mathcal{L}). \tag{1.4}$$

Условимся обозначать при $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ через $\mathbf{v}_\mu$ вариацию μ, рассматриваемую как функцию множеств (см. [7, (3.3.8)], [10, (4.11.7)]). Если $a \in [0,\infty[$, то $\mathbf{B}_*(\mathcal{L},a) \triangleq \{\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid \mathbf{v}_\mu \leqslant a\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$ есть шар с центром в «нуле» и радиусом a, соответствующий оснащению $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ сильной нормой-вариацией.

§ 2. Релаксация игровой задачи на максимин

Пусть I_1 и I_2 — непустые множества, $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — полуалгебры [8] п/м I_1 и I_2 соответственно, $\eta_1 \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}_1]$, $\eta_2 \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}_2]$. Следовательно, $(I_1,\mathcal{L}_1,\eta_1)$ и $(I_2,\mathcal{L}_2,\eta_2)$ — суть пространства с к.-а. мерами, понимаемые в смысле [10]. Фиксируем $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ и $q \in \mathbb{N}$, а также следующие четыре кортежа:

$$(\alpha_i)_{i\in\overline{1,k}} : \overline{1,k} \to B(I_1,\mathcal{L}_1),$$

$$(\beta_j)_{j\in\overline{1,l}} : \overline{1,l} \to B(I_2,\mathcal{L}_2),$$

$$(\gamma_i)_{i\in\overline{1,p}} : \overline{1,p} \to B(I_1,\mathcal{L}_1),$$

$$(\omega_j)_{j\in\overline{1,q}} : \overline{1,q} \to B(I_2,\mathcal{L}_2).$$

Итак, мы имеем четыре набора ярусных функций. Кроме того, фиксируем

$$Y \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(p)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^p], \quad Z \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(q)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^q],$$

получая пару (Y,Z) непустых конечномерных компактов. Наконец, полагаем, что

$$f_0 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$$

есть функция, непрерывная по совокупности переменных. Пусть

$$(U \in \mathcal{P}'(B(I_1, \mathcal{L}_1))) \ \& \ (V \in \mathcal{P}'(B(I_2, \mathcal{L}_2))). \tag{2.1}$$

Функции — элементы U и V — используем в качестве управлений (по сути дела — стратегий) игроков I и II соответственно. Всюду в дальнейшем предполагается, что для некоторых значений $c_U \in [0, \infty[$, $c_V \in [0, \infty[$ выполняются следующие условия:

$$\Big(\int_{I_1} |u| d\eta_1 \leqslant c_U \ \forall\, u \in U\Big) \ \& \ \Big(\int_{I_2} |v| d\eta_2 \leqslant c_V \ \forall\, v \in V\Big). \tag{2.2}$$

Условимся в дальнейшем через Φ обозначать функционал

$$(u, v) \mapsto f_0\bigg(\Big(\int_{I_1} \alpha_i u \, d\eta_1\Big)_{i \in \overline{1,k}}, \Big(\int_{I_2} \beta_j v \, d\eta_2\Big)_{j \in \overline{1,l}}\bigg) : U \times V \to \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Далее Φ используется в качестве критерия игровой задачи.

Напомним, что (см. раздел 1) $\|\cdot\|_{I_1}$ и $\|\cdot\|_{I_2}$ — суть sup-нормы пространств $\mathbb{B}(I_1)$ и $\mathbb{B}(I_2)$ соответственно; $U \subset B(I_1, \mathcal{L}_1) \subset \mathbb{B}(I_1)$, $V \subset B(I_2, \mathcal{L}_2) \subset \mathbb{B}(I_2)$. Выберем и зафиксируем такое число $m_0 \in [0, \infty[$, что $(\|\alpha_i\|_{I_1} \leqslant m_0 \ \forall\, i \in \overline{1,k}) \ \& \ (\|\beta_j\|_{I_2} \leqslant m_0 \ \forall\, j \in \overline{1,l})$. Как следствие, получаем с учетом (2.2) следующие (см. [10, с. 207]) очевидные оценки:

$$\Big|\int_{I_1} \alpha_i u \, d\eta_1\Big| \leqslant \int_{I_1} |\alpha_i u| d\eta_1 \leqslant \int_{I_1} \|\alpha_i\|_{I_1} \cdot |u| d\eta_1 \leqslant m_0 c_U \ \forall\, u \in U \ \forall\, i \in \overline{1,k},$$

$$\Big|\int_{I_2} \beta_j v \, d\eta_2\Big| \leqslant \int_{I_2} |\beta_j v| d\eta_2 \leqslant \int_{I_2} \|\beta_j\|_{I_2} \cdot |v| d\eta_2 \leqslant m_0 c_V \ \forall\, v \in V \ \forall\, j \in \overline{1,l}.$$

Из этих оценок по определению норм $\|\cdot\|^{(k)}$ и $\|\cdot\|^{(l)}$ имеем

$$\bigg(\Big\|\Big(\int_{I_1} \alpha_i u \, d\eta_1\Big)_{i \in \overline{1,k}}\Big\|^{(k)} \leqslant m_0 c_U \ \forall\, u \in U\bigg) \ \& \ \bigg(\Big\|\Big(\int_{I_2} \beta_j v \, d\eta_2\Big)_{j \in \overline{1,l}}\Big\|^{(l)} \leqslant m_0 c_V \ \forall\, v \in V\bigg). \tag{2.4}$$

В связи с (2.3), (2.4) введем в рассмотрение шары

$$\mathbf{K} \triangleq \{y \in \mathbb{R}^k \mid \|y\|^{(k)} \leqslant m_0 c_U\} \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(k)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^k],$$

$$\mathbf{L} \triangleq \{z \in \mathbb{R}^l \mid \|z\|^{(l)} \leqslant m_0 c_V\} \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(l)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^l].$$

С учетом (2.4) получаем теперь, что

$$\bigg(\Big(\int_{I_1} \alpha_i u \, d\eta_1\Big)_{i \in \overline{1,k}} \in \mathbf{K} \ \forall\, u \in U\bigg) \ \& \ \bigg(\Big(\int_{I_2} \beta_j v \, d\eta_2\Big)_{j \in \overline{1,l}} \in \mathbf{L} \ \forall\, v \in V\bigg). \tag{2.5}$$

Для большего удобства оснащаем $\mathbf{K} \times \mathbf{L}$ метрикой $\rho : (\mathbf{K} \times \mathbf{L}) \times (\mathbf{K} \times \mathbf{L}) \to [0, \infty[$, определяемой по следующему правилу: если $x' \in \mathbf{K}$, $y' \in \mathbf{L}$, $x'' \in \mathbf{K}$ и $y'' \in \mathbf{L}$, то

$$\rho((x', y'), (x'', y'')) = \sup(\{\|x' - x''\|^{(k)}; \|y' - y''\|^{(l)}\}).$$

Полагаем, что $\mathbf{f}_0 \triangleq (f_0 \mid \mathbf{K} \times \mathbf{L})$, получая при этом в/з функцию, определенную и непрерывную на ТП

$$(\mathbf{K} \times \mathbf{L}, \tau_\rho^0), \tag{2.6}$$

где τ_ρ^0 есть def топология $\mathbf{K} \times \mathbf{L}$, порожденная метрикой ρ. При этом (2.6) есть, как известно [3], непустой метризуемый компакт, а тогда $\mathbf{f}_0$ равномерно непрерывна на $\mathbf{K} \times \mathbf{L}$. Коль скоро

$\mathbf{f}_0(z) = f_0(z)$ при $z \in \mathbf{K} \times \mathbf{L}$, свойство равномерной непрерывности означает следующее. Именно, $\forall \varepsilon \in]0,\infty[\ \exists \delta \in]0,\infty[\ \forall y' \in \mathbf{K}\ \forall z' \in \mathbf{L}\ \forall y'' \in \mathbf{K}\ \forall z'' \in \mathbf{L}$

$$((\|y' - y''\|^{(k)} < \delta) \ \&\ (\|z' - z''\|^{(l)} < \delta)) \Rightarrow (|f_0(y', z') - f_0(y'', z'')| < \varepsilon). \tag{2.7}$$

С учетом (2.7) и теоремы Вейерштрасса имеем, что при $\mathbf{K}_* \in \mathcal{P}'(\mathbf{K})$ и $z \in \mathbf{L}$ множество $\{f_0(y, z) : y \in \mathbf{K}_*\} = \{\mathbf{f}_0(y, z) : y \in \mathbf{K}_*\}$ непусто и обладает конечной точной нижней гранью, то есть

$$\inf_{y \in \mathbf{K}_*} f_0(y, z) = \inf(\{f_0(y, z) : y \in \mathbf{K}_*\}) \in \mathbb{R}.$$

Если $\mathbf{K}_* \in \mathcal{P}'(\mathbf{K})$ и $\mathbf{L}_* \in \mathcal{P}'(\mathbf{L})$, то функция $z \mapsto \inf\limits_{y \in \mathbf{K}_*} f_0(y, z) : \mathbf{L}_* \to \mathbb{R}$ ограничена (поскольку ограничена функция $\mathbf{f}_0$, так как ТП (2.6) — непустой компакт), а потому определено значение

$$\sup_{z \in \mathbf{L}_*} \inf_{y \in \mathbf{K}_*} f_0(y, z) \in \mathbb{R}.$$

Всюду в дальнейшем фиксируем (см. Введение) $p \in \mathbb{N}$ и $q \in \mathbb{N}$. Пусть, кроме того, $(Y \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(p)} - \mathrm{comp})\,[\mathbb{R}^p])\ \&\ (Z \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(q)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^q])$. Согласно построениям раздела 1 имеем при $\alpha \in]0,\infty[$ в виде $O_\alpha^{(p)}[Y]$ и $O_\alpha^{(q)}[Z]$ α-окрестности компактов Y и Z в пространствах $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно. В дальнейшем рассматриваем Y-ограничение на выбор $u \in U$ и Z-ограничение на выбор $v \in V$ аналогично тому, как это делалось во Введении. Как показывает пример (см. Введение), задача на максимин Φ с упомянутыми точными ограничениями может оказаться малосодержательной. В этой связи представляет интерес ослабление Y-ограничения и Z-ограничения; полагаем при $\alpha \in]0,\infty[$, что

$$U_\partial[\alpha] \triangleq \left\{u \in U \mid \left(\int_{I_1} \gamma_i u \, d\eta_1\right)_{i \in \overline{1,p}} \in O_\alpha^{(p)}[Y]\right\}, \tag{2.8}$$

$$V_\partial[\alpha] \triangleq \left\{v \in V \mid \left(\int_{I_2} \omega_j v \, d\eta_2\right)_{j \in \overline{1,q}} \in O_\alpha^{(q)}[Z]\right\}. \tag{2.9}$$

В (2.8), (2.9) имеем «обычные» множества допустимых управлений, отвечающих ослабленным ограничениям. По смыслу задачи, обсуждавшейся во Введении, представляет интерес рассмотрение множеств (2.8), (2.9) при $\alpha \approx 0$; кроме того, конкретная степень ослабления точных ограничений в множествах типа (2.8) и (2.9) может быть различной (при $\alpha = \alpha_1 > 0$ в (2.8) и $\alpha = \alpha_2 > 0$ в (2.9)). Переход к случаю $\alpha = 0$ мы сопровождаем расширением исходной задачи, для чего в согласии с (1.4) полагаем

$$\widetilde{U} \triangleq \mathrm{cl}(\{u * \eta_1 : u \in U\}, \tau_*(\mathcal{L}_1)), \tag{2.10}$$

$$\widetilde{V} \triangleq \mathrm{cl}(\{v * \eta_2 : v \in V\}, \tau_*(\mathcal{L}_2)). \tag{2.11}$$

Элементы множеств (2.10) и (2.11) называем обобщенными управлениями (ОУ) игроков I и II соответственно. Тогда

$$\widetilde{U}_\partial \triangleq \left\{\mu \in \widetilde{U} \mid \left(\int_{I_1} \gamma_i \, d\mu\right)_{i \in \overline{1,p}} \in Y\right\}, \tag{2.12}$$

$$\widetilde{V}_\partial \triangleq \left\{\nu \in \widetilde{V} \mid \left(\int_{I_2} \omega_j \, d\nu\right)_{j \in \overline{1,q}} \in Z\right\} \tag{2.13}$$

суть множества допустимых ОУ игроков I и II соответственно. С учетом (2.2) и [5, (3.7.7)] имеем очевидные вложения: $\{u * \eta_1 : u \in U\} \subset \mathbf{B}_*(\mathcal{L}_1, c_U)$, $\{v * \eta_2 : v \in V\} \subset \mathbf{B}_*(\mathcal{L}_2, c_V)$. С учетом (2.10), (2.11) имеем также следующие вложения:

$$(\widetilde{U} \subset \mathbf{B}_*(\mathcal{L}_1, c_U))\ \&\ (\widetilde{V} \subset \mathbf{B}_*(\mathcal{L}_2, c_V)); \tag{2.14}$$

мы учли хорошо известную теорему Алаоглу [9, гл. V] (см. также [5, с. 45, 53]), получая, кстати, из (2.10), (2.11) и (2.14) свойства (см. [5, (3.4.19)]):

$$(\widetilde{U} \in (\tau_*(\mathcal{L}_1) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L}_1)]) \ \& \ (\widetilde{V} \in (\tau_*(\mathcal{L}_2) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L}_2)]). \tag{2.15}$$

Согласно (2.15) $(\widetilde{U}, \widetilde{\tau}^*_U(\mathcal{L}_1))$ и $(\widetilde{V}, \widetilde{\tau}^*_V(\mathcal{L}_2))$, где $(\widetilde{\tau}^*_U(\mathcal{L}_1) \triangleq \tau_*(\mathcal{L}_1)|_{\widetilde{U}})$ & $(\widetilde{\tau}^*_V(\mathcal{L}_2) \triangleq \tau_*(\mathcal{L}_2)|_{\widetilde{V}})$, суть непустые компакты в $\mathbb{A}(\mathcal{L}_1)$ и в $\mathbb{A}(\mathcal{L}_2)$ соответственно. Полезно иметь в виду, что (см. (2.10), (2.11), а также теорему 3.7.4 в [5]) $\widetilde{U} \subset \mathbb{A}_{\eta_1}(\mathcal{L}_1)$, $\widetilde{V} \subset \mathbb{A}_{\eta_2}(\mathcal{L}_2)$. Согласно (2.14) и предложению 3.2.4 в [10] имеем следующие две системы неравенств:

$$\left|\int_{I_1} \alpha_i \, d\mu\right| \leqslant \|\alpha_i\|_{I_1} \cdot \mathbf{v}_\mu(I_1) \leqslant \|\alpha_i\|_{I_1} \cdot c_U \leqslant m_0 c_U \quad \forall \mu \in \widetilde{U} \ \forall i \in \overline{1,k};$$

$$\left|\int_{I_2} \beta_j \, d\nu\right| \leqslant \|\beta_j\|_{I_2} \cdot \mathbf{v}_\mu(I_2) \leqslant \|\beta_j\|_{I_2} \cdot c_V \leqslant m_0 c_V \quad \forall \nu \in \widetilde{V} \ \forall j \in \overline{1,l}.$$

Из этих неравенств вытекает по определению норм $\|\cdot\|^{(k)}$ и $\|\cdot\|^{(l)}$, что

$$\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i \, d\mu\right)_{i \in \overline{1,k}} \in \mathbf{K} \ \forall \mu \in \widetilde{U}\right) \ \& \ \left(\left(\int_{I_2} \beta_j \, d\nu\right)_{j \in \overline{1,l}} \in \mathbf{L} \ \forall \nu \in \widetilde{V}\right). \tag{2.16}$$

Предложение 1. *Эквивалентны следующие два условия:*
1) $\widetilde{U}_\partial \neq \varnothing$; 2) $U_\partial[\varepsilon] \neq \varnothing \ \forall \varepsilon \in]0, \infty[$.

Доказательство непосредственно следует из (2.8), (2.10) и (2.12) с учетом определения $*$-слабой топологии $\tau_*(\mathcal{L}_1)$. Кроме того, следует использовать компактность $\widetilde{U}$ (см. (2.15)) и известное свойство центрированных систем замкнутых множеств в компакте $(\widetilde{U}, \widetilde{\tau}^*_U(\mathcal{L}))$. Аналогичным образом проверяется

Предложение 2. *Эквивалентны следующие два условия:*
1) $\widetilde{V}_\partial \neq \varnothing$; 2) $V_\partial[\delta] \neq \varnothing \ \forall \delta \in]0, \infty[$.

Полагаем до тех пор, пока не оговорено противное, что

$$(U_\partial[\varepsilon] \neq \varnothing \ \forall \varepsilon \in]0, \infty[\,) \ \& \ (V_\partial[\delta] \neq \varnothing \ \forall \delta \in]0, \infty[\,). \tag{2.17}$$

Тогда согласно (2.17) и предложениям 1 и 2 имеем свойства совместности в обобщенном смысле

$$(\widetilde{U}_\partial \neq \varnothing) \ \& \ (\widetilde{V}_\partial \neq \varnothing). \tag{2.18}$$

С учетом ограниченности $\mathbf{f}_0$ на компакте (2.6) имеем, в частности, при $\varepsilon \in]0, \infty[$, $\delta \in]0, \infty[$ и $v \in V_\partial[\delta]$, что множество

$$\{\Phi(u, v) : u \in U_\partial[\varepsilon]\} = \left\{ f_0 \left(\left(\int_{I_1} \alpha_i \, u d\eta_1\right)_{i \in \overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j v \, d\eta_2\right)_{j \in \overline{1,l}} \right) : u \in U_\partial[\varepsilon] \right\}$$

непусто и ограничено, а потому определена его (конечная) точная нижняя грань

$$\inf_{u \in U_\partial[\varepsilon]} \Phi(u, v) = \inf_{u \in U_\partial[\varepsilon]} f_0 \left(\left(\int_{I_1} \alpha_i u \, d\eta_1\right)_{i \in \overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j v \, d\eta_2\right)_{j \in \overline{1,l}} \right) \in \mathbb{R}. \tag{2.19}$$

Снова используя условие ограниченности $\mathbf{f}_0$ на компакте (2.6) получаем также, что при $\varepsilon \in]0, \infty[$ и $\delta \in]0, \infty[$ множество $\left\{ \inf\limits_{u \in U_\partial[\varepsilon]} \Phi(u, v) : v \in V_\partial[\delta] \right\}$ непусто и ограничено, а потому определено значение

$$\mathfrak{V}(\varepsilon, \delta) \triangleq \sup_{v \in V_\partial[\delta]} \inf_{u \in U_\partial[\varepsilon]} \Phi(u, v) =$$

$$= \sup_{v \in V_\partial[\delta]} \inf_{u \in U_\partial[\varepsilon]} f_0\left(\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i u\, d\eta_1\right)_{i \in \overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j v\, d\eta_2\right)_{j \in \overline{1,l}}\right) \in \mathbb{R}, \qquad (2.20)$$

то есть, по сути дела, максимин. Условимся, кроме того, относительно следующих обозначений:

$$\left(G'_\varepsilon \triangleq \left\{\left(\int_{I_1} \alpha_i u\, d\eta_1\right)_{i \in \overline{1,k}} : u \in U_\partial[\varepsilon]\right\}\ \forall\, \varepsilon \in]0,\infty[\right)\ \&$$

$$\&\ \left(G''_\delta \triangleq \left\{\left(\int_{I_2} \beta_j v\, d\eta_2\right)_{j \in \overline{1,l}} : v \in V_\partial[\delta]\right\}\ \forall\, \delta \in]0,\infty[\right). \qquad (2.21)$$

Из (2.5), (2.21) получаем, что $G'_\varepsilon \in \mathcal{P}'(\mathbf{K})$ при $\varepsilon \in]0,\infty[$, $G''_\delta \in \mathcal{P}'(\mathbf{L})$ при $\delta \in]0,\infty[$. Легко видеть, что (см. (2.3), (2.21)) при $\varepsilon \in]0,\infty[$, $\delta \in]0,\infty[$ и $v \in V_\partial[\delta]$

$$\left\{f_0\left(y, \left(\int_{I_2} \beta_j v\, d\eta_2\right)_{j \in \overline{1,l}}\right) : y \in G'_\varepsilon\right\} = \{\Phi(u,v) : u \in U_\partial[\varepsilon]\};$$

как следствие получаем равенство

$$\inf_{y \in G'_\varepsilon} f_0\left(y, \left(\int_{I_2} \beta_j v\, d\eta_2\right)_{j \in \overline{1,l}}\right) = \inf_{u \in U_\partial[\varepsilon]} \Phi(u,v) \in \mathbb{R}.$$

Согласно (2.21) имеем, кроме того, что при $\varepsilon \in]0,\infty[$ и $\delta \in]0,\infty[$

$$\left\{\inf_{y \in G'_\varepsilon} f_0(y,z) : z \in G''_\delta\right\} = \left\{\inf_{u \in U_\partial[\varepsilon]} \Phi(u,v) : v \in V_\partial[\delta]\right\}.$$

Последнее множество, как уже отмечалось, непусто и ограничено, а его точная верхняя грань в силу (2.20) есть

$$\mathfrak{V}(\varepsilon,\delta) = \sup_{z \in G''_\delta} \inf_{y \in G'_\varepsilon} f_0(y,z). \qquad (2.22)$$

В (2.22) имеем значение игровой задачи на максимин с ослабленными ограничениями. В дальнейшем исследуется асимптотика значений (2.20), (2.22) при исчезающе малых значениях $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. Для этого отметим сначала, что в силу компактности $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$, а также свойств множеств (2.21) имеем

$$(\mathrm{cl}(G'_\varepsilon, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}) \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(k)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^k]\ \forall\, \varepsilon \in]0,\infty[)\ \&\ (\mathrm{cl}(G''_\delta, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(l)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^l]\ \forall\, \delta \in]0,\infty[). \qquad (2.23)$$

Здесь учтено также (2.17); заметим, что

$$(\mathrm{cl}(G'_\varepsilon, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}) \subset \mathbf{K}\ \forall\, \varepsilon \in]0,\infty[)\ \&\ (\mathrm{cl}(G''_\delta, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \subset \mathbf{L}\ \forall\, \delta \in]0,\infty[). \qquad (2.24)$$

С учетом непрерывности f_0 и (2.23) имеем при $\varepsilon \in]0,\infty[$ и $z \in \mathbf{L}$, что достигается минимум f_0 на множестве $\mathrm{cl}(G'_\varepsilon, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})$. Более того, в силу равномерной непрерывности $\mathbf{f}_0$ при $\varepsilon \in]0,\infty[$ функция Ψ_ε, определяемая как

$$z \mapsto \min_{y \in \mathrm{cl}(G'_\varepsilon, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})} f_0(y,z) : \mathbf{L} \to \mathbb{R}, \qquad (2.25)$$

непрерывна и, следовательно (см. (2.23)), достигает своего максимума на каждом из множеств $\mathrm{cl}(G''_\delta, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)})$, $\delta \in]0,\infty[$, реализуя максимин

$$\max_{z \in \mathrm{cl}(G''_\delta, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)})} \min_{y \in \mathrm{cl}(G'_\varepsilon, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})} f_0(y,z) \in \mathbb{R}.$$

В связи с этим полезно отметить, что в силу вышеупомянутой непрерывности функций (2.25) справедливо следующее свойство равномерной непрерывности:
$\forall\,\zeta \in]0,\infty[\ \exists\,\delta \in]0,\infty[\ \forall\,z' \in \mathbf{L}\ \forall\,z'' \in \mathbf{L}$

$$(\|z'-z''\|^{(l)} < \delta) \Rightarrow \left(\left| \min_{y \in \mathrm{cl}(G'_\varepsilon, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})} f_0(y,z') - \min_{y \in \mathrm{cl}(G'_\varepsilon, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})} f_0(y,z'') \right| < \zeta\ \forall\,\varepsilon \in]0,\infty[\right). \tag{2.26}$$

С учетом определения функции (2.25) имеем из (2.26), что
$\forall \zeta \in]0,\infty[\ \exists\,\delta \in]0,\infty[\ \ \forall\,z' \in\ \mathbf{L}\ \forall\,z'' \in\ \mathbf{L}$

$$(\|z'-z''\|^{(l)} < \delta) \Rightarrow (|\Psi_\varepsilon(z') - \Psi_\varepsilon(z'')| < \zeta \quad \forall\,\varepsilon \in]0,\infty[). \tag{2.27}$$

Из (2.19) и (2.25) получаем, что $\forall\,\varepsilon \in]0,\infty[\ \forall\,\delta \in]0,\infty[\ \forall\,v \in V_\partial[\delta]$

$$\Psi_\varepsilon\left(\left(\int_{I_2} \beta_j v\, d\eta_2 \right)_{j \in \overline{1,l}} \right) = \inf_{u \in U_\partial[\varepsilon]} \Phi(u,v); \tag{2.28}$$

учитываем также свойство непрерывности $\mathbf{f}_0$ на компакте (2.6). В свою очередь, из (2.21) и (2.28) вытекает, что при $\varepsilon \in]0,\infty[$ и $\delta \in]0,\infty[$

$$\left\{ \Psi_\varepsilon\left(\left(\int_{I_2} \beta_j v\, d\eta_2 \right)_{j \in \overline{1,l}} \right) : v \in V_\partial[\delta] \right\} = \{\Psi_\varepsilon(z) : z \in G''_\delta\} = \left\{ \inf_{u \in U_\partial[\varepsilon]} \Phi(u,v) : v \in V_\partial[\delta] \right\}. \tag{2.29}$$

С учетом (2.20), (2.21) и (2.29) получаем при $\varepsilon \in]0,\infty[$ и $\delta \in]0,\infty[$, что непустое множество (2.29) ограничено сверху значением $\mathfrak{V}(\varepsilon,\delta)$, а потому определена (конечная) точная верхняя грань множества $\{\Psi_\varepsilon(z) : z \in G''_\delta\}$ и, более того, при этом

$$\sup_{z \in G''_\delta} \Psi_\varepsilon(z) = \mathfrak{V}(\varepsilon,\delta). \tag{2.30}$$

Используя (2.21) и (2.23), получаем, однако, что

$$\sup_{z \in G''_\delta} \Psi_\varepsilon(z) = \max_{z \in \mathrm{cl}(G''_\delta, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)})} \Psi_\varepsilon(z) = \max_{z \in \mathrm{cl}(G''_\delta, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)})} \min_{y \in \mathrm{cl}(G'_\varepsilon, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})} f_0(y,z). \tag{2.31}$$

С учетом (2.30) получаем следующее представление: $\forall\,\varepsilon \in]0,\infty[\ \forall\,\delta \in]0,\infty[$

$$\mathfrak{V}(\varepsilon,\delta) = \max_{z \in \mathrm{cl}(G''_\delta, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)})} \Psi_\varepsilon(z) = \max_{z \in \mathrm{cl}(G''_\delta, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)})} \min_{y \in \mathrm{cl}(G'_\varepsilon, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})} f_0(y,z). \tag{2.32}$$

С другой стороны, из (2.12), (2.13), (2.16) и (2.18) вытекает, что

$$\mathbb{G}_U^{(1)} \triangleq \left\{ \left(\int_{I_1} \alpha_i\, d\mu \right)_{i \in \overline{1,k}} : \mu \in \widetilde{U}_\partial \right\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}), \tag{2.33}$$

$$\mathbb{G}_V^{(2)} \triangleq \left\{ \left(\int_{I_2} \beta_j\, d\nu \right)_{j \in \overline{1,l}} : \nu \in \widetilde{V}_\partial \right\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{L}). \tag{2.34}$$

Мы рассматриваем (2.33), (2.34) как множества достижимости в некоторой обобщенной задаче со стандартными ограничениями.

§ 3. Представление множеств притяжения

В настоящем разделе рассмотрим представление (2.33), (2.34) в виде множеств притяжения (МП) [5, (3.3.10)]. С этой целью введем сначала отображение Γ посредством правила

$$\mu \mapsto \left(\int_{I_1} \gamma_i \, d\mu\right)_{i\in\overline{1,p}} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^p \tag{3.1}$$

и, кроме того, следующее отображение Ω :

$$\nu \mapsto \left(\int_{I_2} \omega_j \, d\nu\right)_{j\in\overline{1,q}} : \widetilde{V} \to \mathbb{R}^q. \tag{3.2}$$

Согласно (2.12) и (3.1) имеем очевидное равенство $\widetilde{U}_\partial = \Gamma^{-1}(Y)$; кроме того, из (2.13) и (3.2) вытекает равенство $\widetilde{V}_\partial = \Omega^{-1}(Z)$. Пусть далее $\mathcal{A}$ есть def отображение

$$\mu \mapsto \left(\int_{I_1} \alpha_i \, d\mu\right)_{i\in\overline{1,k}} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^k, \tag{3.3}$$

посредством которого множество (2.33) реализуется в виде

$$\mathbb{G}_U^{(1)} = \mathcal{A}^1(\widetilde{U}_\partial) = \mathcal{A}^1(\Gamma^{-1}(Y)). \tag{3.4}$$

Из (2.18), (2.33) и (3.4) имеем свойство $\mathbb{G}_U^{(1)} \neq \varnothing$. Пусть теперь $\mathcal{B}$ есть def отображение

$$\nu \mapsto \left(\int_{I_2} \beta_j \, d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}} : \widetilde{V} \to \mathbb{R}^l. \tag{3.5}$$

С помощью $\mathcal{B}$ множество (2.34) реализуется следующим образом:

$$\mathbb{G}_V^{(2)} = \mathcal{B}^1(\widetilde{V}_\partial) = \mathcal{B}^1(\Omega^{-1}(Z)). \tag{3.6}$$

Из (2.18), (2.34) и (3.6) вытекает, что $\mathbb{G}_V^{(2)} \neq \varnothing$. Рассмотрим теперь представление (3.4), (3.6) в виде МП, подобных рассматриваемым в разделах 5 и 6 работы [4] (см. также [4, (3.2)]). Сначала приведем нужное представление для $\mathbb{G}_U^{(1)}$ (3.4), конкретизируя соответствующие понятия [4] (отметим, что упомянутые МП использовались в [5,7,11] и во многих других работах, связанных с построением расширений в классе к.-а. мер). Следуя [4, с. 189], введем МП $(\mathbf{as})[\mathbb{R}^k; \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}; \mathbf{h}; \mathcal{E}]$, где $\mathbf{h}$ есть отображение

$$u \mapsto \left(\int_{I_1} \alpha_i u \, d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}} : U \to \mathbb{R}^k,$$

а $\mathcal{E}$ — семейство, определяемое в терминах отображения $\mathbf{s}$ вида

$$u \mapsto \left(\int_{I_1} \gamma_i u \, d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,p}} : U \to \mathbb{R}^p$$

по следующему правилу

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{s}^{-1}(O_\varepsilon^{(p)}[Y]) : \varepsilon \in]0, \infty[\}.$$

Согласно [4, (3.2)] в рассматриваемом случае (см. (3.4))

$$(\mathbf{as})[\mathbb{R}^k; \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}; \mathbf{h}; \mathcal{E}] = \bigcap_{T\in\mathcal{E}} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(T), \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}) =$$

$$= \bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathrm{cl}\left(\left\{\left(\int_{I_1} \alpha_i u \, d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}} : u \in U_\partial[\varepsilon]\right\}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}\right) = \bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathrm{cl}(G'_\varepsilon, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}) = \mathbb{G}_U^{(1)}. \tag{3.7}$$

Заметим, что при обосновании последнего равенства существенно используется конструкция [4, с. 198], реализуемая на основе компактифицируемой модели расширения, в которой погружение обычных управлений из U в пространство ОУ осуществляется по правилу

$$u \mapsto u * \eta_1 : U \to \widetilde{U},$$

расширением отображения $\mathbf{h}$ является $\mathcal{A}$, а расширением $\mathbf{s}$ является Γ. При упомянутых соглашениях (3.7) извлекается из теоремы 6.1 работы [4]. С учетом (2.23) из (3.7) следует (см. (2.24)), что [3, с.197]

$$\forall \zeta \in]0,\infty[\ \exists \varepsilon \in]0,\infty[: \mathbb{G}_U^{(1)} \subset \mathrm{cl}(G'_\varepsilon, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}) \subset O_\zeta^{(k)}[\mathbb{G}_U^{(1)}]. \tag{3.8}$$

Аналогичным образом, устанавливается следующая цепочка равенств

$$\mathcal{B}^1(\Omega^{-1}(Z)) = \bigcap_{\delta \in]0,\infty[} \mathrm{cl}(G''_\delta, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) = \mathbb{G}_V^{(2)} \tag{3.9}$$

(при обосновании (3.9) используются конструкции, подобные (3.7)). С учетом (2.24) и компактности $\mathbf{L}$ из (3.9) вытекает [3, с. 197], что

$$\forall \zeta \in]0,\infty[\ \exists\, \delta \in]0,\infty[: \mathbb{G}_V^{(2)} \subset \mathrm{cl}(G''_\delta, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \subset O_\zeta^{(l)}[\mathbb{G}_V^{(2)}]. \tag{3.10}$$

В (3.8) и (3.10) указано свойство окрестностной реализации обобщенных множеств достижимости (2.33), (2.34), которое в логическом отношении подобно (см. (3.7)) теоремам 6.3.3 и 6.4.4 в [7], а также соотношению [5, (3.10.36)].

§ 4. Абстрактная игровая задача управления и ее расширение

Свойства (3.7) и (3.10) дополняются свойством равномерной непрерывности функций Ψ_ε, $\varepsilon \in]0,\infty[$. Отметим здесь же, что $\mathbb{G}_U^{(1)}$ есть непустое замкнутое п/м $\mathbf{K}$ (см. (2.33)), а тогда (в силу компактности $\mathbf{K}$)

$$\mathbb{G}_U^{(1)} \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(k)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^k]. \tag{4.1}$$

Аналогичным образом (см. (2.34), (3.9))

$$\mathbb{G}_V^{(2)} \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(l)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^l]. \tag{4.2}$$

Из (2.33), (2.34), (4.1) и (4.2) следует, в частности, свойство

$$\mathbb{G}_U^{(1)} \times \mathbb{G}_V^{(2)} \in \mathcal{P}'(\mathbf{K} \times \mathbf{L}). \tag{4.3}$$

В силу непрерывности f_0 имеем, что при всяком $z \in \mathbf{L}$

$$\mathbf{f}_0(\cdot, z) \triangleq (\mathbf{f}_0(y,z))_{y \in \mathbf{K}} = (f_0(y,z))_{y \in \mathbf{K}} \in C(\mathbf{K}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}|_{\mathbf{K}}, \mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}). \tag{4.4}$$

С учетом (4.4) и компактности пространства

$$\left(\mathbf{K}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}|_{\mathbf{K}}\right) \tag{4.5}$$

получаем по теореме Вейерштрасса, что функции $\mathbf{f}_0(\cdot, z)$, $z \in \mathbf{K}$ ограничены и достигают своего минимума на $\mathbb{G}_U^{(1)}$ (см. (2.33)). Введем в/з функцию

$$\Psi : \mathbf{L} \to \mathbb{R} \tag{4.6}$$

посредством правила: если $z \in \mathbf{L}$, то

$$\Psi(z) \triangleq \min_{y \in \mathbb{G}_U^{(1)}} \mathbf{f}_0(y,z) = \min_{y \in \mathbb{G}_U^{(1)}} f_0(y,z) \quad \forall\, z \in \mathbf{L}. \tag{4.7}$$

С учетом (2.33) и (4.7) имеем теперь, что при $z \in \mathbf{L}$

$$\Psi(z) = \min_{\mu \in \widetilde{U}_\partial} f_0\left(\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i \, d\mu\right)_{i \in \overline{1,k}}, z\right)\right). \tag{4.8}$$

Предложение 3. *Функция* Ψ (4.6) *непрерывна:* $\Psi \in C(\mathbf{L}, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}|_{\mathbf{L}}, \mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$.

Доказательство следует из свойства равномерной непрерывности функции $\mathbf{f}_0$.

С учетом предложения 3 и компактности множества $\mathbb{G}_V^{(2)}$ получаем по теореме Вейерштраса, что функция Ψ достигает максимума на множестве $\mathbb{G}_V^{(2)}$:

$$\mathbf{V} \triangleq \max_{z \in \mathbb{G}_V^{(2)}} \Psi(z) = \max_{\nu \in \widetilde{V}_\partial} \Psi\left(\left(\int_{I_2} \beta_j \, d\nu\right)_{j \in \overline{1,l}}\right) \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Из (4.7) и (4.9) вытекает следующее равенство:

$$\mathbf{V} = \max_{z \in \mathbb{G}_V^{(2)}} \min_{y \in \mathbb{G}_U^{(1)}} f_0(y, z). \tag{4.10}$$

Кроме того, из (4.8) и (4.9) имеем (см. (2.34)), что

$$\mathbf{V} = \max_{\nu \in \widetilde{V}_\partial} \min_{\mu \in \widetilde{U}_\partial} f_0\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i \, d\mu\right)_{i \in \overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j \, d\nu\right)_{j \in \overline{1,l}}\right). \tag{4.11}$$

Напомним также, что (см. (2.25)) $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \forall z \in \mathbf{L}$

$$\Psi_\varepsilon(z) = \min_{y \in \mathrm{cl}(G'_\varepsilon, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})} f_0(y, z). \tag{4.12}$$

Предложение 4. *Справедливо следующее свойство аппроксимативной реализации функции* Ψ; *именно*

$$\forall \zeta \in]0, \infty[\ \exists \delta_\zeta \in]0, \infty[: \ \Psi(z) \in [\Psi_\varepsilon(z), \Psi_\varepsilon(z) + \zeta[\ \ \forall \varepsilon \in]0, \delta_\zeta[\ \ \forall z \in \boldsymbol{L}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\zeta \in]0, \infty[$. С учетом (2.7) подберем $\overline{\delta} \in]0, \infty[$ так, что при этом $\forall y' \in \mathbf{K} \ \forall z' \in \mathbf{L} \ \forall y'' \in \mathbf{K} \ \forall z'' \in \mathbf{L}$

$$((\|y' - y''\|^{(k)} < \overline{\delta}) \ \& \ (\|z' - z''\|^{(l)} < \overline{\delta})) \Rightarrow (|f_0(y', z') - f_0(y'', z'')| < \zeta). \tag{4.13}$$

Из (3.7) следует, что при некотором $\overline{\varepsilon} \in]0, \infty[$

$$\mathbb{G}_U^{(1)} \subset \mathrm{cl}(G'_{\overline{\varepsilon}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}) \subset O_{\overline{\delta}}^{(k)}[\mathbb{G}_U^{(1)}]. \tag{4.14}$$

Выберем произвольно $\text{æ} \in]0, \overline{\varepsilon}[$ и $z_* \in \mathbf{L}$. С учетом (4.13) имеем $\forall y' \in \mathbf{K} \ \forall y'' \in \mathbf{K}$

$$(\|y' - y''\|^{(k)} < \overline{\delta}) \Rightarrow (|f_0(y', z_*) - f_0(y'', z_*)| < \zeta). \tag{4.15}$$

Из (4.7) и (4.12) следуют равенства

$$\Psi_{\text{æ}}(z_*) = \min_{y \in \mathrm{cl}(G'_{\text{æ}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})} f_0(y, z_*), \tag{4.16}$$

$$\Psi(z_*) = \min_{y \in \mathbb{G}_U^{(1)}} f_0(y, z_*). \tag{4.17}$$

Из (2.8) вытекает очевидное вложение $U_\partial[\text{æ}] \subset U_\partial[\overline{\varepsilon}]$. Наконец, с учетом (2.21) и последнего вложения получаем, что $G'_{\text{æ}} \subset G'_{\overline{\varepsilon}}$ и, следовательно, $\mathrm{cl}(G'_{\text{æ}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}) \subset \mathrm{cl}(G'_{\overline{\varepsilon}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})$. С учетом (4.14) получаем также вложение

$$\mathrm{cl}(G'_{\text{æ}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}) \subset O_{\overline{\delta}}^{(k)}[\mathbb{G}_U^{(1)}]. \tag{4.18}$$

Из (3.7) имеем, коль скоро $\text{æ} \in]0, \infty[$, вложение $\mathbb{G}_U^{(1)} \subset \mathrm{cl}(G'_{\text{æ}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})$. С учетом (4.18) получаем теперь цепочку вложений

$$\mathbb{G}_U^{(1)} \subset \mathrm{cl}(G'_{\text{æ}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}) \subset O_{\overline{\delta}}^{(k)}[\mathbb{G}_U^{(1)}]. \tag{4.19}$$

Из (4.16), (4.17) и (4.19) вытекает очевидное неравенство

$$\Psi_{æ}(z_*) \leqslant \Psi(z_*). \tag{4.20}$$

Кроме того, с учетом (4.16) подбираем

$$y_* \in \mathrm{cl}(G'_{æ}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}) \tag{4.21}$$

так, что при этом выполняется равенство

$$\Psi_{æ}(z_*) = f_0(y_*, z_*). \tag{4.22}$$

С учетом (4.18) и (4.21) получаем следующее включение:

$$y_* \in O_{\overline{\delta}}^{(k)}[\mathbb{G}_U^{(1)}]. \tag{4.23}$$

Из (4.23) вытекает (см. определения раздела 1), что для некоторого $y^* \in \mathbb{G}_U^{(1)}$

$$\|y_* - y^*\|^{(k)} < \overline{\delta}. \tag{4.24}$$

При этом (см. (2.24), (2.33), (4.21)) $y_* \in \mathbf{K}$ и $y^* \in \mathbf{K}$. Поэтому согласно (4.15)

$$(\|y_* - y^*\|^{(k)} < \overline{\delta}) \Rightarrow (|f_0(y_*, z_*) - f_0(y^*, z_*)| < \zeta). \tag{4.25}$$

Из (4.24) и (4.25) получаем следующее неравенство:

$$|f_0(y_*, z_*) - f_0(y^*, z_*)| < \zeta. \tag{4.26}$$

Кроме того, из (4.17) имеем по выбору y^* неравенство

$$\Psi(z_*) \leqslant f_0(y^*, z_*). \tag{4.27}$$

С учетом (4.22), (4.26) и (4.27) получаем следующую оценку:

$$\Psi(z_*) < f_0(y_*, z_*) + \zeta = \Psi_{æ}(z_*) + \zeta.$$

Из (4.20) и последнего соотношения следует, что

$$\Psi(z_*) \in [\Psi_{æ}(z_*), \Psi_{æ}(z_*) + \zeta[. \tag{4.28}$$

Поскольку $æ$ и z_* выбирались произвольно, имеем из (4.28), что $\overline{\varepsilon} \in]0, \infty[$ обладает свойством $\Psi(z) \in [\Psi_\varepsilon(z), \Psi_\varepsilon(z) + \zeta[\ \ \forall \varepsilon \in]0, \overline{\varepsilon}[\ \ \forall z \in \mathbf{L}$. В частности, установлено, что $\exists\, \delta_\zeta \in]0, \infty[$:

$$\Psi(z) \in [\Psi_\varepsilon(z), \Psi_\varepsilon(z) + \zeta[\ \ \forall \varepsilon \in]0, \delta_\zeta[\ \ \forall z \in \mathbf{L}.$$

Поскольку ζ выбиралось произвольно, предложение доказано. □

Теорема 1. *Если* $\zeta \in]0, \infty[$, *то* $\exists\, \theta_\zeta \in]0, \infty[$: $|\mathfrak{V}(\varepsilon, \delta) - \mathbf{V}| < \zeta\ \ \forall \varepsilon \in]0, \theta_\zeta[\ \ \forall \delta \in]0, \theta_\zeta[$.

Доказательство. С учетом предложения 4 и (2.24) имеем, что $\forall \xi \in]0, \infty[\ \exists\, \delta_\xi \in]0, \infty[$:

$$\Psi(z) \in [\Psi_\varepsilon(z), \Psi_\varepsilon(z) + \xi[\ \ \forall \varepsilon \in]0, \delta_\xi[\ \ \forall \delta \in]0, \infty[\ \ \forall z \in \mathrm{cl}(G''_\delta, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}).$$

С другой стороны, из (2.34) и предложения 4 вытекает, что $\forall \xi \in]0, \infty[\ \exists\, \delta_\xi \in]0, \infty[$:

$$\Psi(z) \in [\Psi_\varepsilon(z), \Psi_\varepsilon(z) + \xi[\ \ \forall \varepsilon \in]0, \delta_\xi[\ \ \forall z \in \mathbb{G}_V^{(2)}. \tag{4.29}$$

С учетом (4.9) выберем и зафиксируем точку

$$z_0 \in \mathbb{G}_V^{(2)} \tag{4.30}$$

так, что при этом справедливо равенство

$$\mathbf{V} = \Psi(z_0). \tag{4.31}$$

Пусть $æ \in]0, \infty[$. С учетом (4.29) подберем $\delta_1^* \in]0, \infty[$ так, что

$$\Psi(z) \in [\Psi_\varepsilon(z), \Psi_\varepsilon(z) + æ[\ \ \forall \varepsilon \in]0, \delta_1^*[\ \ \forall z \in \mathbb{G}_V^{(2)}. \tag{4.32}$$

Из (4.30) и (4.32) получаем, что $\Psi(z_0) \in [\Psi_\varepsilon(z_0), \Psi_\varepsilon(z_0) + æ[\ \ \forall \varepsilon \in]0, \delta_1^*[$. С учетом (4.31) получаем, как следствие, утверждение

$$\mathbf{V} \in [\Psi_\varepsilon(z_0), \Psi_\varepsilon(z_0) + æ[\ \ \forall \varepsilon \in]0, \delta_1^*[. \tag{4.33}$$

Из (4.33) следует очевидная система неравенств:

$$\mathbf{V} < \Psi_\varepsilon(z_0) + æ \ \ \forall \varepsilon \in]0, \delta_1^*[. \tag{4.34}$$

С учетом (4.30) и (4.34) получаем, что

$$\mathbf{V} < æ + \max_{z \in \mathbb{G}_V^{(2)}} \Psi_\varepsilon(z) \ \ \forall \varepsilon \in]0, \delta_1^*[; \tag{4.35}$$

$\mathbb{G}_V^{(2)} \subset \mathrm{cl}(G''_\delta, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \ \forall \delta \in]0, \infty[$. Поэтому из (4.35) следует, в частности, система неравенств:

$$\mathbf{V} < æ + \max_{z \in \mathrm{cl}(G''_\delta, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)})} \Psi_\varepsilon(z) \ \ \forall \varepsilon \in]0, \delta_1^*[\ \ \forall \delta \in]0, \infty[\tag{4.36}$$

(см. в этой связи (2.31)). Из (2.32) и (4.36) вытекает система неравенств:

$$\mathbf{V} - \mathfrak{V}(\varepsilon, \delta) < æ \ \ \forall \varepsilon \in]0, \delta_1^*[\ \ \forall \delta \in]0, \infty[. \tag{4.37}$$

С учетом (2.7) подберем $\delta_2^* \in]0, \infty[$ такое, что $\forall y' \in \mathbf{K} \ \forall z' \in \mathbf{L} \ \forall y'' \in \mathbf{K} \ \forall z'' \in \mathbf{L}$

$$((\|y' - y''\|^{(k)} < \delta_2^*) \ \& \ (\|z' - z''\|^{(l)} < \delta_2^*)) \Rightarrow (|f_0(y', z') - f_0(y'', z'')| < æ). \tag{4.38}$$

Подберем $\delta_3^* \in]0, \infty[$ так, что при этом

$$\mathrm{cl}(G''_{\delta_3^*}, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \subset O_{\delta_2^*}^{(l)}[\mathbb{G}_V^{(2)}]. \tag{4.39}$$

Из (2.9) вытекает следующая система вложений:

$$V_\partial[\delta] \subset V_\partial[\delta_3^*] \ \ \forall \delta \in]0, \delta_3^*[. \tag{4.40}$$

С учетом (2.21) и (4.40) получаем свойство $G''_\delta \subset G''_{\delta_3^*} \ \ \forall \delta \in]0, \delta_3^*[$. Последнее означает, конечно, что

$$\mathrm{cl}(G''_\delta, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \subset \mathrm{cl}(G''_{\delta_3^*}, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \ \ \forall \delta \in]0, \delta_3^*[. \tag{4.41}$$

Комбинируя (4.39) и (4.41), получаем систему вложений:

$$\mathrm{cl}(G''_\delta, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \subset O_{\delta_2^*}^{(l)}[\mathbb{G}_V^{(2)}] \ \ \forall \delta \in]0, \delta_3^*[. \tag{4.42}$$

Полагаем теперь число δ^0, $\delta^0 \in]0, \infty[$ таким, что

$$\delta^0 \triangleq \inf(\{\delta_i^* : i \in \overline{1, 3}\}). \tag{4.43}$$

Выберем произвольные значения

$$(\varepsilon_0 \in]0, \delta^0[\,) \;\&\; (\delta_0 \in]0, \delta^0[\,). \qquad (4.44)$$

Из (4.43) и (4.44) имеем, в частности, что $\varepsilon_0 \in]0, \delta_1^*[$, а потому согласно (4.37)

$$\mathbf{V} - \mathfrak{V}(\varepsilon_0, \delta_0) < æ. \qquad (4.45)$$

С другой стороны, $\delta^0 \leqslant \delta_2^*$, поэтому в силу (4.38) $\forall\, y' \in \mathbf{K}\ \forall\, z' \in \mathbf{L}\ \forall\, y'' \in \mathbf{K}\ \forall\, z'' \in \mathbf{L}$

$$((\|y' - y''\|^{(k)} < \delta^0) \;\&\; (\|z' - z''\|^{(l)} < \delta^0)) \Rightarrow (|f_0(y', z') - f_0(y'', z'')| < æ). \qquad (4.46)$$

Напомним, что согласно (2.32) и (4.44) справедливо равенство

$$\mathfrak{V}(\varepsilon_0, \delta_0) = \max_{z \in \mathrm{cl}(G''_{\delta_0}, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)})} \Psi_{\varepsilon_0}(z). \qquad (4.47)$$

С учетом (4.47) подберем теперь элемент

$$\widehat{z} \in \mathrm{cl}(G''_{\delta_0}, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}), \qquad (4.48)$$

для которого имеет место равенство

$$\mathfrak{V}(\varepsilon_0, \delta_0) = \Psi_{\varepsilon_0}(\widehat{z}). \qquad (4.49)$$

Поскольку согласно (4.43) $\delta^0 \leqslant \delta_3^*$, то $\delta_0 \in]0, \delta_3^*[$ и согласно (4.42)

$$\mathrm{cl}(G''_{\delta_0}, \tau_{\mathbb{R}}^{(l)}) \subset O_{\delta_2^*}^{(l)}[\mathbb{G}_V^{(2)}]. \qquad (4.50)$$

С учетом (4.48), (4.50) и определений раздела 1 вытекает, что для некоторого $z^0 \in \mathbb{G}_V^{(2)}$ справедливо неравенство

$$\|\widehat{z} - z^0\|^{(l)} < \delta_2^*. \qquad (4.51)$$

Из (4.48), (2.24) имеем, в частности, что $\widehat{z} \in \mathbf{L}$. Согласно (2.34) $z^0 \in \mathbf{L}$. С учетом (4.38), (4.51) получаем систему неравенств

$$|f_0(y, \widehat{z}\,) - f_0(y, z^0)| < æ \;\; \forall\, y \in \mathbf{K}. \qquad (4.52)$$

Напомним, что (см. (2.25), (4.49))

$$\mathfrak{V}(\varepsilon_0, \delta_0) = \min_{y \in \mathrm{cl}(G'_{\varepsilon_0}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})} f_0(y, \widehat{z}\,). \qquad (4.53)$$

С другой стороны, из (4.44) вытекает очевидное вложение

$$\mathbb{G}_U^{(1)} \subset \mathrm{cl}(G'_{\varepsilon_0}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)}). \qquad (4.54)$$

Поэтому согласно (4.53), (4.54) справедлива оценка

$$\mathfrak{V}(\varepsilon_0, \delta_0) = \min_{y \in \mathrm{cl}(G'_{\varepsilon_0}, \tau_{\mathbb{R}}^{(k)})} f_0(y, \widehat{z}\,) \leqslant \min_{y \in \mathbb{G}_U^{(1)}} f_0(y, \widehat{z}\,). \qquad (4.55)$$

С учетом (4.7) имеем из (4.55) следующее неравенство:

$$\mathfrak{V}(\varepsilon_0, \delta_0) \leqslant \Psi(\widehat{z}\,). \qquad (4.56)$$

Кроме того, из (4.7) вытекает равенство

$$\Psi(z^0) = \min_{y \in \mathbb{G}_U^{(1)}} f_0(y, z^0). \qquad (4.57)$$

Пусть (см. (4.57)) теперь точка $y^0 \in \mathbb{G}_U^{(1)}$ обладает свойством

$$\Psi(z^0) = f_0(y^0, z^0). \tag{4.58}$$

С другой стороны, согласно (4.55) справедливо неравенство

$$\mathfrak{V}(\varepsilon_0, \delta_0) \leqslant f_0(y^0, \widehat{z}\ ). \tag{4.59}$$

Из (2.33) имеем, в частности, включение $y^0 \in \mathbf{K}$. Поэтому согласно (4.52) справедливо неравенство

$$|f_0(y^0, \widehat{z}\ ) - f_0(y^0, z^0)| < æ. \tag{4.60}$$

В частности, $f_0(y^0, \widehat{z}\ ) < f_0(y^0, z^0) + æ$ и согласно (4.59)

$$\mathfrak{V}(\varepsilon_0, \delta_0) < f_0(y^0, z^0) + æ.$$

Учитывая (4.58), приходим к неравенству

$$\mathfrak{V}(\varepsilon_0, \delta_0) < \Psi(z^0) + æ. \tag{4.61}$$

Из (4.9) непосредственно следует, что $\Psi(z^0) \leqslant \mathbf{V}$, а тогда согласно (4.61)

$$\mathfrak{V}(\varepsilon_0, \delta_0) - \mathbf{V} < æ. \tag{4.62}$$

С учетом (4.45) и (4.62) имеем неравенство

$$|\mathfrak{V}(\varepsilon_0, \delta_0) - \mathbf{V}| < æ. \tag{4.63}$$

Поскольку выбор ε_0 и δ_0 был произвольным, установлено, что

$$|\mathfrak{V}(\varepsilon, \delta) - \mathbf{V}| < æ \quad \forall\, \varepsilon \in]0, \delta^0[\ \ \forall\, \delta \in]0, \delta^0[;$$

напомним также, что $\delta^0 \in]0, \infty[$. Поскольку æ также выбиралось произвольно, установлено, что $\forall\, \zeta \in]0, \infty[\ \exists\, \theta_\zeta \in]0, \infty[: |\mathfrak{V}(\varepsilon, \delta) - \mathbf{V}| < \zeta \ \ \forall\, \varepsilon \in]0, \theta_\zeta[\ \forall\, \delta \in]0, \theta_\zeta[$. □

В заключении раздела приведем ряд конкретных примеров упорядоченных пар $(U, \widetilde{U})$ и $(V, \widetilde{V})$, удовлетворяющих условиям (2.10) и (2.11) соответственно. Итак, пара $(U, \widetilde{U})$ допускает, в частности, следующие конкретизации:

1′) $U = \left\{ u \in B_0(I_1, \mathcal{L}_1) \mid \int_{I_1} |u|\, d\eta_1 \leqslant b_1 \right\}$ и $\widetilde{U} = \{\mu \in \mathbb{A}_{\eta_1}[\mathcal{L}_1] \mid \mathbf{v}_\mu(I_1) \leqslant b_1\}$, $b_1 \in [0, \infty[$;

2′) $U = \left\{ u \in B_0^+(I_1, \mathcal{L}_1) \mid \int_{I_1} u\, d\eta_1 \leqslant b_1 \right\}$ и $\widetilde{U} = \{\mu \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}_1; \eta_1] \mid \mu(I_1) \leqslant b_1\}$, $b_1 \in [0, \infty[$;

3′) $U = \left\{ u \in B_0^+(I_1, \mathcal{L}_1) \mid \int_{I_1} u\, d\eta_1 = b_1 \right\}$ и $\widetilde{U} = \{\mu \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}_1; \eta_1] \mid \mu(I_1) = b_1\}$, $b_1 \in [0, \infty[$;

4′) если $r \in \mathbb{N}$, $(L_i)_{i \in \overline{1,r}} : \overline{1,r} \to \mathcal{L}_1$, $(c_i)_{i \in \overline{1,r}} : \overline{1,r} \to [0, \infty[$ и при этом $I_1 = \bigcup_{i=1}^{r} L_i$, то можно полагать, что $U = \left\{ u \in B_0(I_1, \mathcal{L}_1) \mid \int_{L_k} |u|\, d\eta_1 \leqslant c_k \ \forall\, k \in \overline{1,r} \right\}$, $\widetilde{U} = \{\mu \in \mathbb{A}_{\eta_1}[\mathcal{L}_1] \mid \mathbf{v}_\mu(L_k) \leqslant c_k \ \forall\, k \in \overline{1,r}\}$.

Аналогичным образом $(V, \widetilde{V})$ можно конкретизировать, в частности, одним из следующих способов:

1″) $V = \left\{ v \in B_0(I_2, \mathcal{L}_2) \mid \int_{I_2} |v|\, d\eta_2 \leqslant b_2 \right\}$ и $\widetilde{V} = \{\nu \in \mathbb{A}_{\eta_2}[\mathcal{L}_2] \mid \mathbf{v}_\nu(I_2) \leqslant b_2\}$, $b_2 \in [0, \infty[$;

2″) $V = \left\{ v \in B_0^+(I_2, \mathcal{L}_2) \mid \int_{I_2} v\, d\eta_2 \leqslant b_2 \right\}$ и $\widetilde{V} = \{\nu \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}_2; \eta_2] \mid \nu(I_2) \leqslant b_2\}$, $b_2 \in [0, \infty[$;

3″) $V = \left\{ v \in B_0^+(I_2, \mathcal{L}_2) \mid \int_{I_2} v\, d\eta_2 = b_2 \right\}$ и $\widetilde{V} = \{\nu \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}_2; \eta_2] \mid \nu(I_2) = b_2\}$, $b_2 \in [0, \infty[$;

4$''$) если $s \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{L}_i)_{i \in \overline{1,s}} : \overline{1,s} \to \mathcal{L}_2$, $(\widetilde{c}_i)_{i \in \overline{1,s}} : \overline{1,s} \to [0, \infty[$ и при этом $I_2 = \bigcup_{i=1}^{s} \mathbb{L}_i$, то можно полагать, что $V = \left\{ v \in B_0(I_2, \mathcal{L}_2) \mid \int_{\mathbb{L}_k} |v| \, d\eta_2 \leqslant \widetilde{c}_k \ \forall\, k \in \overline{1,r} \right\}$, $\widetilde{V} = \{\nu \in \mathbb{A}_{\eta_2}[\mathcal{L}_2] \mid \mathbf{v}_\nu(\mathbb{L}_k) \leqslant \widetilde{c}_k \ \forall\, k \in \overline{1,r}\}$.

§ 5. Вопросы устойчивости

Мы отказываемся до тех пор, пока не будет оговорено противное, от предположения (2.17). Полагаем, что
$$\mathcal{U} \triangleq \left\{ u \in U \mid \left(\int_{I_1} \gamma_i u \, d\eta_1 \right)_{i \in \overline{1,p}} \in Y \right\}, \tag{5.1}$$
$$\mathcal{V} \triangleq \left\{ v \in V \mid \left(\int_{I_2} \omega_j v \, d\eta_2 \right)_{j \in \overline{1,q}} \in Z \right\}; \tag{5.2}$$
элементы (5.1) и (5.2) можно рассматривать в качестве точных решений (управлений) в смысле, подобном [12, гл. III]. Заметим, что (см. (2.8), (5.1))
$$\mathcal{U} \subset U_\partial[\varepsilon] \quad \forall\, \varepsilon \in]0, \infty[. \tag{5.3}$$
Аналогичным образом имеем (см. (2.9), (5.2)) систему вложений
$$\mathcal{V} \subset V_\partial[\delta] \quad \forall\, \delta \in]0, \infty[. \tag{5.4}$$
Всюду в дальнейшем полагаем, что множества U и V таковы, что (см. (1.3)):
$$\widetilde{U} = \mathrm{cl}(\{u * \eta_1 : u \in U\}, \tau_0(\mathcal{L}_1)); \tag{5.5}$$
$$\widetilde{V} = \mathrm{cl}(\{v * \eta_2 : v \in V\}, \tau_0(\mathcal{L}_2)). \tag{5.6}$$
Наконец, всюду в дальнейшем полагаем, что
$$(\gamma_i \in B_0(I_1, \mathcal{L}_1) \quad \forall\, i \in \overline{1,p}) \ \& \ (\omega_j \in B_0(I_2, \mathcal{L}_2) \quad \forall\, j \in \overline{1,q}). \tag{5.7}$$
Условия, подобные (5.7), часто использовались в задачах асимптотического анализа, связанных с достижимостью в условиях приближенного соблюдения ограничений (см. [5, 7, 11] и др.). Отметим, что каждый из конкретных вариантов пар $(U, \widetilde{U})$, упомянутых в заключении предыдущего раздела, удовлетворяет (5.5). Аналогичным образом каждый из вариантов $(V, \widetilde{V})$, упомянутых в заключении раздела 4, удовлетворяет (5.6).

Предложение 5. *Справедливо равенство*
$$\widetilde{U}_\partial = \mathrm{cl}(\{u * \eta_1 : u \in \mathcal{U}\}, \tau_*(\mathcal{L}_1)). \tag{5.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что (см. (2.12), (5.1) и [7, (3.4.11)])
$$\widetilde{\mathcal{U}} \triangleq \{u * \eta_1 : u \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{P}(\widetilde{U}_\partial). \tag{5.9}$$
В силу замкнутости Y имеем из (2.12) по определению $*$-слабой топологии (см. (1.2)), что множество $\widetilde{U}_\partial$ замкнуто в топологии $\tau_*(\mathcal{L}_1)$; мы учитываем здесь также (2.10). Следовательно (см. (5.9)),
$$\mathrm{cl}(\widetilde{\mathcal{U}}, \tau_*(\mathcal{L})) \subset \widetilde{U}_\partial.$$
Осталось установить противоположное вложение. Пусть $\mu_0 \in \widetilde{U}_\partial$. С учетом (2.10), (2.12) и (5.5) подберем (см. [3, с. 89]) направленность $(D, \preceq, h)$ в U со свойством
$$(D, \preceq, (h(\delta) * \eta_1)_{\delta \in D}) \xrightarrow{\tau_0(\mathcal{L})} \mu_0 \tag{5.10}$$

(см. обозначения [4, с. 189]). Из (5.10) и определения элементарного интеграла [10, с. 123] вытекает (см. [7, (3.4.11)]), что $\exists\,\delta_1 \in D\ \forall\,\delta_2 \in D$

$$(\delta_1 \preceq \delta_2) \Rightarrow \left(\left(\int_{I_1} \gamma_i h(\delta_2)\,d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,p}} = \left(\int_{I_1} \gamma_i\,d\mu_0\right)_{i\in\overline{1,p}}\right); \tag{5.11}$$

используются также аксиомы направленного множества [3, с. 27]. По выбору μ_0 (см. (2.12)) имеем из (5.11) свойство

$$\left(\int_{I_1} \gamma_i h(\delta)\,d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,p}} \in Y \tag{5.12}$$

с некоторого момента. Это означает, что направленность $(D, \preceq, h)$ содержится в $\mathcal{U}$ (5.1) с некоторого момента.

Отметим, что направленность в левой части (5.10) принимает значения в $\mathbf{B}_*(\mathcal{L}_1, c_U)$ (см. раздел 2) и, кроме того, $\mu_0 \in \mathbf{B}_*(\mathcal{L}_1, c_U)$ согласно (2.14). Топологии

$$\tau_U^* \triangleq \tau_*(\mathcal{L}_1)\,|_{\mathbf{B}_*(\mathcal{L}_1,\ c_U)}, \quad \tau_U^0 \triangleq \tau_0(\mathcal{L}_1)\,|_{\mathbf{B}_*(\mathcal{L}_1,\ c_U)}$$

порождают сравнимые [5, (3.5.6)] ТП

$$(\mathbf{B}_*(\mathcal{L}_1, c_U), \tau_U^*), \quad (\mathbf{B}_*(\mathcal{L}_1, c_U), \tau_U^0); \quad \tau_U^* \subset \tau_U^0. \tag{5.13}$$

Из (5.10) следует по выбору $(D, \preceq, h)$ сходимость

$$(D, \preceq, (h(\delta) * \eta_1)_{\delta\in D}) \xrightarrow{\tau_U^0} \mu_0$$

(см. [11, (2.3.9)]). С учетом вышеупомянутой сравнимости ТП в (5.13) это означает, в частности, сходимость

$$(D, \preceq, (h(\delta) * \eta_1)_{\delta\in D}) \xrightarrow{\tau_U^*} \mu_0.$$

Вновь используя [11, (2.3.9)], получаем свойство

$$(D, \preceq, (h(\delta) * \eta_1)_{\delta\in D}) \xrightarrow{\tau_*(\mathcal{L}_1)} \mu_0. \tag{5.14}$$

С другой стороны, направленность в левой части (5.14) принимает значения в $\widetilde{\mathcal{U}}$ с некоторого момента (см. (5.12)), а тогда из (5.14) вытекает [3, с. 89] , что $\mu_0 \in \mathrm{cl}(\widetilde{\mathcal{U}}, \tau_*(\mathcal{L}_1))$, чем завершается обоснование вложения $\widetilde{U}_\partial \subset \mathrm{cl}(\widetilde{\mathcal{U}}, \tau_*(\mathcal{L}_1))$. □

Предложение 6. *Справедливо равенство*

$$\widetilde{V}_\partial = \mathrm{cl}(\{v * \eta_2 : v \in \mathcal{V}\}, \tau_*(\mathcal{L}_2)). \tag{5.15}$$

Доказательство аналогично обоснованию предыдущего предложения.

Из предложения 5 вытекает эквиваленция

$$(\mathcal{U} \neq \varnothing) \Leftrightarrow (\widetilde{U}_\partial \neq \varnothing). \tag{5.16}$$

Аналогичным образом из предложения 6 имеем, что

$$(\mathcal{V} \neq \varnothing) \Leftrightarrow (\widetilde{V}_\partial \neq \varnothing). \tag{5.17}$$

Всюду в дальнейшем постулируем, что

$$(\mathcal{U} \neq \varnothing)\ \&\ (\mathcal{V} \neq \varnothing). \tag{5.18}$$

Как следствие, из (5.16)–(5.18) получаем, что

$$(\widetilde{U}_\partial \neq \varnothing)\ \&\ (\widetilde{V}_\partial \neq \varnothing) \tag{5.19}$$

(обобщенная задача совместна). Из предложений 1 и 2 имеем (см. (5.19)), что

$$(U_\partial[\varepsilon] \neq \varnothing \ \forall\, \varepsilon \in]0, \infty[\,)\ \&\ (V_\partial[\delta] \neq \varnothing \ \forall\, \delta \in]0, \infty[\,). \tag{5.20}$$

С учетом (2.13), (2.16), (4.8) и [7, (3.4.11)] получаем, что при $\nu \in \widetilde{V}_\partial$ и $u \in \mathcal{U}$

$$\psi_\nu \triangleq \Psi\left(\left(\int_{I_2} \beta_j\, d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right) \leqslant f_0\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i\, d(u * \eta_1)\right)_{i\in\overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j\, d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right) =$$

$$= f_0\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i u\, d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j\, d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right). \tag{5.21}$$

В силу (5.18) получаем, что определена (конечная) точная нижняя грань

$$\inf_{u\in\mathcal{U}} f_0\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i u\, d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j\, d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right) =$$

$$= \inf\left(\left\{f_0\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i u\, d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j\, d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right) : u \in \mathcal{U}\right\}\right) \in [\psi_\nu, \infty[. \tag{5.22}$$

Предложение 7. *Если $\nu \in \widetilde{V}_\partial$, то справедливо следующее равенство*

$$\Psi\left(\left(\int_{I_2} \beta_j\, d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right) = \inf_{u\in\mathcal{U}} f_0\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i u\, d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j\, d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right). \tag{5.23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем ниже соглашение (5.9). С учетом (5.9) и (5.18) получаем, что $\widetilde{\mathcal{U}} \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}(\mathcal{L}_1))$. Из предложения 5 вытекает равенство

$$\widetilde{U}_\partial = \mathrm{cl}(\widetilde{\mathcal{U}}, \tau_*(\mathcal{L}_1)). \tag{5.24}$$

С учетом (5.20) и (4.8) имеем для некоторого ОУ

$$\mu_0 \in \widetilde{U}_\partial \tag{5.25}$$

следующее равенство:

$$\Psi\left(\left(\int_{I_2} \beta_j\, d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right) = f_0\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i\, d\mu_0\right)_{i\in\overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j\, d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right). \tag{5.26}$$

Из (5.9) вытекает, что $\forall\, \mu \in \widetilde{\mathcal{U}}\ \ \exists\, u \in \mathcal{U} : \mu = u * \eta_1$. С учетом (5.24), (5.25) и аксиомы выбора следует, что для некоторой направленности $(D, \preceq, h)$ в $\mathcal{U}$ имеет место сходимость

$$(D, \preceq, (h(d) * \eta_1)_{d\in D}) \xrightarrow{\tau_*(\mathcal{L}_1)} \mu_0 \tag{5.27}$$

(используем теорему Биркгофа; см. также [5, (3.3.7)]). По определению $*$-слабой топологии имеем с учетом [7, (3.4.11)] следующее свойство сходимости:

$$\left(D, \preceq, \left(\left(\int_{I_1} \alpha_i h(\delta)\, d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}}\right)_{\delta\in D}\right) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}^{(k)}} \left(\int_{I_1} \alpha_i\, d\mu_0\right)_{i\in\overline{1,k}}. \tag{5.28}$$

С учетом непрерывности f_0 имеем из (5.28) сходимость

$$\left(D, \preceq, \left(f_0\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i h(\delta)\, d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j\, d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right)\right)_{\delta\in D}\right) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}}$$

$$\xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}} f_0\left(\left(\left(\int_{I_1}\alpha_i\,d\mu_0\right)_{i\in\overline{1,k}},\left(\int_{I_2}\beta_j\,d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right)\right). \tag{5.29}$$

Из (5.26) и (5.29) получаем, что

$$\left(D,\preceq,\left(f_0\left(\left(\left(\int_{I_1}\alpha_i h(\delta)\,d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}},\left(\int_{I_2}\beta_j\,d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right)\right)\right)_{\delta\in D}\right)\xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}}\Psi\left(\left(\int_{I_2}\beta_j\,d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right). \tag{5.30}$$

Пусть $æ\in]0,\infty[$. С учетом (5.30) подберем $\delta_0\in D$ так, что при этом $\forall\,\delta\in D$

$$(\delta_0\preceq\delta)\Rightarrow\left(\left|f_0\left(\left(\left(\int_{I_1}\alpha_i h(\delta)\,d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}},\left(\int_{I_2}\beta_j\,d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right)\right)-\Psi\left(\left(\left(\int_{I_2}\beta_j\,d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right)\right)\right|<æ\right). \tag{5.31}$$

В частности, поскольку $h(\delta_0)\in\mathcal{U}$, имеем следующую цепочку неравенств (см. (5.22))

$$\inf_{u\in\mathcal{U}} f_0\left(\left(\left(\int_{I_1}\alpha_i u\,d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}},\left(\int_{I_2}\beta_j\,d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right)\right)\leqslant f_0\left(\left(\left(\int_{I_1}\alpha_i h(\delta_0)\,d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}},\left(\int_{I_2}\beta_j\,d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right)\right)<$$

$$<\Psi\left(\left(\left(\int_{I_2}\beta_j\,d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right)\right)+æ.$$

Поскольку выбор æ был произвольным, установлено неравенство

$$\inf_{u\in\mathcal{U}} f_0\left(\left(\left(\int_{I_1}\alpha_i u\,d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}},\left(\int_{I_2}\beta_j\,d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right)\right)\leqslant\Psi\left(\left(\left(\int_{I_2}\beta_j\,d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right)\right). \tag{5.32}$$

Из (5.22) следует, однако, что

$$\Psi\left(\left(\left(\int_{I_2}\beta_j\,d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right)\right)\leqslant\inf_{u\in\mathcal{U}} f_0\left(\left(\left(\int_{I_1}\alpha_i u\,d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}},\left(\int_{I_2}\beta_j\,d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right)\right). \tag{5.33}$$

Из (5.32) и (5.33) вытекает (5.23). □

Из предложения 6 следует, в частности, что

$$v*\eta_2\in\widetilde{V}_\partial\quad\forall\,v\in\mathcal{V}. \tag{5.34}$$

Из (2.5), (5.34), предложения 7 и [7, (3.4.11)] вытекает при $v\in\mathcal{V}$ свойство

$$\inf_{u\in\mathcal{U}} f_0\left(\left(\left(\int_{I_1}\alpha_i u\,d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}},\left(\int_{I_2}\beta_j v\,d\eta_2\right)_{j\in\overline{1,l}}\right)\right)=\Psi\left(\left(\left(\int_{I_2}\beta_j v\,d\eta_2\right)_{j\in\overline{1,l}}\right)\right). \tag{5.35}$$

Отметим, что (см. (5.34)) $\Psi\left(\left(\left(\int\limits_{I_2}\beta_j d(v*\eta_2)\right)_{j\in\overline{1,l}}\right)\right)\leqslant\mathbf{V}\quad\forall\,v\in\mathcal{V}$. С учетом [7, (3.4.11)] и последнего свойства получаем, что справедлива система неравенств

$$\Psi\left(\left(\left(\int_{I_2}\beta_j v\,d\eta_2\right)_{j\in\overline{1,l}}\right)\right)\leqslant\mathbf{V}\quad\forall\,v\in\mathcal{V}. \tag{5.36}$$

Поэтому из (5.18) и (5.36) вытекает, что

$$\left\{\Psi\left(\left(\left(\int_{I_2}\beta_j v\,d\eta_2\right)_{j\in\overline{1,l}}\right)\right):v\in\mathcal{V}\right\}$$

есть непустое п/м полубесконечного промежутка $]-\infty, \mathbf{V}]$. Тогда для точной верхней грани последнего множества имеем оценку

$$\sup_{v\in\mathcal{V}} \Psi\left(\left(\int_{I_2} \beta_j v\, d\eta_2\right)_{j\in\overline{1,l}}\right) = \sup\left(\left\{\Psi\left(\left(\int_{I_2} \beta_j v\, d\eta_2\right)_{j\in\overline{1,l}}\right) : v\in\mathcal{V}\right\}\right) \leqslant \mathbf{V}. \tag{5.37}$$

Из (5.35), (5.37) вытекает справедливость неравенства

$$\sup_{v\in\mathcal{V}} \inf_{u\in\mathcal{U}} f_0\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i u d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j v\, d\eta_2\right)_{j\in\overline{1,l}}\right) \leqslant \mathbf{V}. \tag{5.38}$$

На самом же деле (5.38) обращается в равенство, что вытекает из следующего предложения.

Предложение 8. *Обобщенный максимин* $\boldsymbol{V}$ *совпадает с максимином в классе обычных управлений:*

$$\mathbf{V} = \sup_{v\in\mathcal{V}} \inf_{u\in\mathcal{U}} f_0\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i u\, d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j v\, d\eta_2\right)_{j\in\overline{1,l}}\right). \tag{5.39}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом (4.9) подберем $\nu_0 \in \widetilde{V}_\partial$ так, что при этом

$$\mathbf{V} = \Psi\left(\left(\int_{I_2} \beta_j\, d\nu_0\right)_{j\in\overline{1,l}}\right). \tag{5.40}$$

Из (2.34) имеем по выбору ν_0 включение $y_0 \triangleq \left(\int_{I_2} \beta_j\, d\nu_0\right)_{j\in\overline{1,l}} \in \mathbb{G}_V^{(2)}$, из которого следует, в частности, что $y_0 \in \mathbf{L}$. Напомним, что (см. предложение 6) согласно теореме Биркгофа, для некоторой направленности $(D, \preceq, h)$ в $\mathcal{V}$ имеет место сходимость

$$(D, \preceq, (h(d) * \eta_2)_{d\in D}) \xrightarrow{\tau_*(\mathcal{L}_2)} \nu_0. \tag{5.41}$$

Заметим, что (см. (5.2)), в частности,

$$h(\delta) \in V \quad \forall\, \delta \in D. \tag{5.42}$$

С учетом (2.5) и (5.42) получаем очевидные включения

$$\left(\int_{I_2} \beta_j h(\delta)\, d\eta_2\right)_{j\in\overline{1,l}} \in \mathbf{L} \quad \forall\, \delta \in D. \tag{5.43}$$

Следовательно, определено отображение

$$\mathfrak{B} : D \to \mathbf{L}, \tag{5.44}$$

для которого (согласно (5.43)) $\forall\, \delta \in D$

$$\mathfrak{B}(\delta) \triangleq \left(\int_{I_2} \beta_j h(\delta)\, d\eta_2\right)_{j\in\overline{1,l}}. \tag{5.45}$$

Тогда $(D, \preceq, \mathfrak{B})$ есть направленность в $\mathbf{L}$. С учетом [7, (3.4.11)] и (5.45) получаем систему равенств

$$\mathfrak{B}(\delta) = \left(\int_{I_2} \beta_j\, d(h(\delta) * \eta_2)\right)_{j\in\overline{1,l}} \quad \forall\, \delta \in D. \tag{5.46}$$

Из (5.41) и (5.46) по определению $*$-слабой топологии имеем очевидную сходимость

$$(D, \preceq, \mathfrak{B}) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}^{(l)}} y_0. \tag{5.47}$$

Поэтому из (5.44) и (5.47) получаем, что [11, (2.3.9)]

$$(D, \preceq, \mathfrak{B}) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}^{(l)}|_{\mathbf{L}}} y_0. \tag{5.48}$$

В силу (5.48) и предложения 3 реализуется сходимость

$$(D, \preceq, \Psi \circ \mathfrak{B}) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}} \Psi(y_0).$$

Это означает, что $\forall\, \zeta \in]0, \infty[\ \ \exists\, \mathbf{d} \in D\ \ \forall\, d \in D$

$$(\mathbf{d} \preceq d) \Rightarrow (|\Psi(\mathfrak{B}(d)) - \Psi(y_0)| < \zeta). \tag{5.49}$$

Из (5.40) по определению y_0 следует равенство

$$\Psi(y_0) = \mathbf{V}. \tag{5.50}$$

Тогда из (5.49), (5.50) имеем свойство $\forall\, \zeta \in]0, \infty[\ \ \exists\, \mathbf{d} \in D\ \ \forall\, d \in D$

$$(\mathbf{d} \preceq d) \Rightarrow (\mathbf{V} - \zeta < \Psi(\mathfrak{B}(d))). \tag{5.51}$$

С другой стороны, согласно (5.45)

$$\Psi(\mathfrak{B}(\delta)) = \Psi\left(\left(\int_{I_2} \beta_j h(\delta)\, d\eta_2\right)_{j \in \overline{1,l}}\right) \quad \forall\, \delta \in D. \tag{5.52}$$

По выбору $(D, \preceq, h)$ имеем, однако, что $h(\delta) \in \mathcal{V}\ \ \forall\, \delta \in D$. Из (5.33), (5.35) и предложения 7 следует поэтому, что $\forall\, \delta \in D$

$$\Psi(\mathfrak{B}(\delta)) = \inf_{u \in \mathcal{U}} f_0\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i u\, d\eta_1\right)_{i \in \overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j h(\delta)\, d\eta_2\right)_{j \in \overline{1,l}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{v \in \mathcal{V}} \inf_{u \in \mathcal{U}} f_0\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i u\, d\eta_1\right)_{i \in \overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j v\, d\eta_2\right)_{j \in \overline{1,l}}\right). \tag{5.53}$$

Из (5.51) следует, в частности, что $\forall\, \zeta \in]0, \infty[\ \ \exists\, \delta \in D:\ \mathbf{V} - \zeta < \Psi(\mathfrak{B}(\delta))$. С учетом (5.53) мы получаем, что

$$\mathbf{V} - \zeta < \sup_{v \in \mathcal{V}} \inf_{u \in \mathcal{U}} f_0\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i u\, d\eta_1\right)_{i \in \overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j v\, d\eta_2\right)_{j \in \overline{1,l}}\right) \quad \forall \zeta \in]0, \infty[.$$

Тогда, как следствие, реализуется неравенство

$$\mathbf{V} \leqslant \sup_{v \in \mathcal{V}} \inf_{u \in \mathcal{U}} f_0\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i u\, d\eta_1\right)_{i \in \overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j v\, d\eta_2\right)_{j \in \overline{1,l}}\right). \tag{5.54}$$

Из (5.38) и (5.54) вытекает, что

$$\mathbf{V} = \sup_{v \in \mathcal{V}} \inf_{u \in \mathcal{U}} f_0\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i u\, d\eta_1\right)_{i \in \overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j v\, d\eta_2\right)_{j \in \overline{1,l}}\right).$$

$\square$

Имеет место устойчивость по максимину: справедливо

Следствие 5.1 $\forall\, \zeta \in]0, \infty[\ \exists\, \theta_\zeta \in]0, \infty[$:

$$\left|\mathfrak{V}(\varepsilon, \delta) - \sup_{v \in \mathcal{V}} \inf_{u \in \mathcal{U}} f_0\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i u\, d\eta_1\right)_{i \in \overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j v\, d\eta_2\right)_{j \in \overline{1,l}}\right)\right| < \zeta \quad \forall\, \varepsilon \in]0, \theta_\zeta[\ \forall\, \delta \in]0, \theta_\zeta[.$$

Доказательство сводится к непосредственной комбинации теоремы 1 и предложения 8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 475 с.
2. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. — М.: Наука, 1968. — 272 с.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 751 с.
4. Ченцов А. Г. Расширения абстрактных задач о достижимости: несеквенциальная версия // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2007. — Т. 13, № 2. — С. 184–217.
5. Chentsov A. G. Asymptotic attainability. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1997. — 322 p.
6. Rao K. P. S. B., Rao M. B. Theory of charges. A Study of finitely additive measures. — New York; Acad. Press, 1983. — 253 p.
7. Chentsov A. G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. — New York; London; Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. — 244 p.
8. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. — М.: Мир, 1969. — 309 с.
9. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: Издательство иностранной литературы, 1962. — 895 с.
10. Ченцов А. Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры. I. — Екатеринбург: РИО УГТУ–УПИ, 2008. — 388 с.
11. Chentsov A. G., Morina S. I. Extensions and Relaxations. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 408 p.
12. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977. — 624 с.

Поступила в редакцию 15.07.09

A. G. Chentsov, Ju. V. Shapar

Finitely additive measures and extensions of the game problems with constraints of asymptotic character

The maximin game problem under sequential weakening of moment constraints is considered. The extension in the class of finitely additive measures realizing the asymptotic of maximin is constructed. The effectively verifiable sufficient conditions of stability «by maximin» is established.

Keywords: finitely additive measure, weak absolute continuity, maximin.

Mathematical Subject Classifications: 28A33

Ченцов Александр Георгиевич, член-корреспондент РАН, заведующий отделом управляемых систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, д. 16, E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Шапарь Юлия Викторовна, главный программист, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, д. 16, E-mail: shaparuv@mail.ru