УДК 517.977

© *Д. В. Сахаров*

ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ СО МНОГИМИ УЧАСТНИКАМИ

Получены условия разрешимости задач преследования и уклонения в дифференциальной игре со многими участниками, обладающими простым движением.

Ключевые слова: дифференциальная игра, простое движение, преследователь, убегающий, групповое преследование.

Введение

Дифференциальным играм простого преследования с равными возможностями всех игроков посвящены многочисленные работы [1–3]. Необходимые и достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего при условии, что множеством допустимых управлений является шар единичного радиуса с центром в нуле дает теорема Б. Н. Пшеничного [1], а в случае, когда множество допустимых управлений — произвольный выпуклый компакт — теорема Н. Л. Григоренко [2].

Естественным обобщением указанной задачи является задача конфликтного взаимодействия с участием двух групп — преследователей и убегающих. Цель группы преследователей — осуществить поимку всех убегающих, цель группы убегающих — предоставить возможность по крайней мере одному из них уклониться от встречи. В работе [3] рассматривалась задача простого преследования группы убегающих группой преследователей в случае, когда множество допустимых управлений всех участников — шар с центром в начале координат. Линейная дифференциальная игра двух групп игроков рассматривалась в [4].

В предлагаемой работе сняты некоторые ограничения на множество допустимых управлений игроков. В терминах начальных позиций и параметров игры получены достаточные условия разрешимости локальной задачи уклонения. Получена оценка минимального числа убегающих, для которых разрешима глобальная задача уклонения от заданного количества преследователей.

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$. Закон движения каждого из преследователей имеет вид

$$\dot{x}_i = u_i, \quad u_i \in U, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Закон движения убегающего E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = v_j, \quad v_j \in U, \quad j = 1, \ldots, m.$$

При $t = 0$ заданы начальные позиции преследователей $x_1^0, \ldots, x_n^0$ и убегающих $y_1^0, \ldots, y_m^0$, причем $x_i^0 \neq y_j^0$ $(i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m)$. Здесь x_i, y_j, u_i, $v_j \in \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^k$ — выпуклый компакт.

Игру с n преследователями, m убегающими и заданными начальными позициями игроков $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ будем обозначать $\Gamma(n, m, z^0)$.

Определение 1. *Стратегией убегающего* E_j будем называть отображение $V_j : [0,\infty) \times \mathbb{R}^{k(n+m)+m} \to U$, ставящее в соответствие величинам

$$\bigl(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), y_1(t), \ldots, y_m(t), \min_{i=1,\ldots,n} \min_{\tau\in[0,t]} \|x_i(\tau) - y_1(\tau)\|, \ldots, \min_{i=1,\ldots,n} \min_{\tau\in[0,t]} \|x_i(\tau) - y_m(\tau)\|\bigr)$$

измеримую функцию $v_j(t)$ такую, что $v_j(t) \in U$ для всех $t \geqslant 0$.

Определение 2. *Стратегией преследователя* P_i называется отображение $U_i : [0,\infty) \times \mathbb{R}^{k(n+2m)+m} \to U$, ставящее в соответствие величинам

$$\bigl(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), y_1(t), \ldots, y_m(t), v_1(t), \ldots, v_m(t),$$
$$\min_{i=1,\ldots,n} \min_{\tau\in[0,t]} \|x_i(\tau) - y_1(\tau)\|, \ldots, \min_{i=1,\ldots,n} \min_{\tau\in[0,t]} \|x_i(\tau) - y_m(\tau)\|\bigr)$$

измеримую функцию $u_i(t)$ такую, что $u_i(t) \in U$ для всех $t \geqslant 0$.

Определение 3. В игре $\Gamma(n, m, z^0)$ *разрешима задача преследования* (*происходит поимка*), если для любых стратегий $V_1, \ldots, V_m$ убегающих $E_1, \ldots, E_m$ существуют стратегии $U_1, \ldots, U_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что существуют моменты времени $\tau_1, \ldots, \tau_m > 0$ и номера $s_1, \ldots, s_m \in \{1, \ldots, n\}$, для которых выполняется $x_{s_i}(\tau_i) = y_i(\tau_i)$, $i = 1, \ldots, m$.

Определение 4. В игре $\Gamma(n, m, z^0)$ из состояния z^0 *разрешима локальная задача уклонения* (*происходит уклонение от встречи*), если существуют стратегии $V_1, \ldots, V_m$ убегающих $E_1, \ldots, E_m$ такие, что для любых допустимых траекторий $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ существует номер $s \in \{1, \ldots, m\}$ такой, что для всех $t > 0$ выполнено $y_s(t) \neq x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$.

Определение 5. В игре $\Gamma(n, m, z^0)$ *разрешима глобальная задача уклонения*, если из любого начального состояния z^0 разрешима локальная задача уклонения.

§ 2. Достаточные условия разрешимости локальной задачи уклонения

Лемма 1. *Пусть* v_1 *— крайняя точка выпуклого компакта* U *такая, что гиперплоскость с нормалью* v_1*, проходящая через точку* v_1 *не имеет с* U *других общих точек, кроме* v_1*;* H *— гиперплоскость с нормалью* v_1 *такая, что*

1) $v_1 \in H^+$;
2) $x_i^0 \in H^-$ *для всех* $i = \overline{1,n}$;
3) $y_j^0 \in H^+$ *для некоторого* $j = \overline{1,m}$,

где H^+, H^- *— замкнутые полупространства, определяемые* H*. Тогда в игре* $\Gamma(n, m, z^0)$ *происходит уклонение от встречи.*

Доказательство. Докажем, что убегающий E_j сумеет избежать поимки. Полагаем $v_j(t) = v_1$ и предположим, что существуют i, $u_i(t)$ и момент времени τ такие, что $x_i(\tau) = y_j(\tau)$. Так как $y_j(t) = y_j^0 + v_1(t)$, $x_i(t) = x_i^0 + \int_0^t u_i(\tau)\,d\tau$, то $0 = x_i(\tau) - y_j(\tau) = x_i^0 - y_j^0 - v_1\tau + \int_0^\tau u_i(t)\,dt$. Отсюда

$$0 = (x_i^0 - y_j^0, v_1) - (v_1, v_1)\tau + \int_0^\tau (u_i(t), v_1)\,dt. \tag{1}$$

Из предположения относительно v_1 следует, что $(u_i(t), v_1) \leqslant (v_1, v_1)$ для всех t. Поэтому из равенства (1) получаем

$$0 \leqslant (x_i^0 - y_j^0, v_1) - (v_1, v_1)\tau + \int_0^\tau (v_1, v_1)\,dt = (x_i^0 - y_j^0, v_1) \leqslant 0.$$

Последнее неравенство выполнено в силу условий 1)–3) леммы. Значит, $(x_i^0 - y_j^0, v_1) = 0$ и $u_i(t) = v_1$ для всех t. Тогда $x_i(t) = x_i^0 + v_1 t$ и $x_i(t) - y_j(t) = x_i^0 - y_j^0 \neq 0$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2. *Пусть в игре* $\Gamma(n,m,z^0)$ *существуют гиперплоскости* H, G *с нормалями* p, q, *где* p, q *— крайние точки компакта* U *такие, что гиперплоскость с нормалью* p (*соответственно* q), *проходящая через точку* p (*соответственно* q) *не имеет с компактом* U *других общих точек, кроме* p (*соответственно* q), *причем* $(p,q)<0$; *и существуют множества* $I\subset\{1,\dots,n\}$, $J\subset\{1,\dots,m\}$ *такие, что выполнены следующие условия*:

1) $p\in H^+$, $q\in G^+$;

2) $x_i^0\in G^-\cap H^+$, $i\in I$; $x_i^0\in H^-$, $i\notin I$;

3) $y_j^0\in(H^+\cap G^+)\setminus G$, $j\in J$;

4) $|J|\geqslant|I|+1$,

где H^+, H^-, G^+, G^- *— замкнутые полупространства, определяемые гиперплоскостями* H, G. *Тогда в игре* $\Gamma(n,m,z^0)$ *происходит уклонение от встречи.*

Доказательство. Из условия 3) следует, что $y_j^0\notin G$, $j\in J$ и поэтому можно считать, что проекции точек y_j^0, $j\notin J$ на гиперплоскость H попарно различны. Введем обозначения: $J_0=\Big\{j\,\big|\,\rho(y_j^0,H)=\min\limits_{k\in J}\rho(y_k^0,H)\Big\}$, H_0 — гиперплоскость, проходящая через y_j^0 $(j\in J_0)$ параллельно H; $H_0(t)=H_0+tp$, $l_j(t)=y_j^0+tq$, $j\notin J_0$; $\tau_j=\min\{\tau|l_j(\tau)\in H_0(\tau)\}$.

Задаем стратегии убегающих следующим образом: стратегии игроков E_j, $j\notin J$ задаем произвольно, а стратегии V_j убегающих E_j, $j\in J$ имеют вид

$v_j(t)=p$, $j\in J_0$;

$$v_j(t)=\begin{cases}q, & t\in[0,\tau_j)\\ p, & t\in[\tau_j,\infty)\end{cases},\ j\notin J_0.$$

Покажем, что стратегии $V_1,\dots,V_m$ являются стратегиями уклонения. Действительно, преследователи P_i, $i\notin I$ в силу леммы 1 не ловят ни одного из убегающих E_j, $j\in J$. Покажем, что каждый из преследователей P_i, $i\in I$ ловит не более одного убегающего E_j, $j\in J$. Пусть утверждение неверно, то есть существуют $i\in I$, $j_1,j_2\in J$, $t_1>0$, $t_2>0$ такие, что

$$x_i(t_1)=y_{j_1}(t_1),\quad x_i(t_2)=y_{j_2}(t_2) \tag{2}$$

для некоторой траектории $x_i(t)$. Но тогда в момент t_1 преследователь P_i и убегающий E_{j_2} лежат на гиперплоскости $H_0(t_1)$, причем $\rho(E_{j_2},P_i)>0$. В силу леммы 1 убегающий E_{j_2} сумеет избежать поимки, что противоречит (2). Каждый из преследователей P_i, $i\in I$ ловит не более одного убегающего E_j, $j\in J$ и в силу условия 4) в игре $\Gamma(n,m,z^0)$ происходит уклонение от встречи. Лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть в игре* $\Gamma(n,m,z^0)$ *существуют гиперплоскости* $H_1,H_3,\dots,H_{2l-1}$ *с нормалью* q *и гиперплоскости* $H_2,H_4,\dots,H_{2l}$ *с нормалью* p, *где* p, q *— крайние точки компакта* U *такие, что гиперплоскость с нормалью* p (*соответственно* q), *проходящая через точку* p (*соответственно* q) *не имеет с компактом* U *других общих точек, кроме* p (*соответственно* q), *причем* $(p,q)<0$; *и существуют множества* $I_1,\dots,I_l$, $J_1,\dots,J_l$ *такие, что выполнены следующие условия*:

1) $H_j^+\subset H_{j-2}^+$, $j=3,\dots,2l$;

2) $I_s\subset\{1,2,\dots,n\}$, $J_r\subset\{1,2,\dots,m\}$; $s,r=1,\dots,l$;

$I_s\cap I_r=\varnothing$, $s\neq r$; $J_s\cap J_r=\varnothing$, $s\neq r$;

3) $x_i^0\in\overline{H_1^-}$, $i\notin\bigcup\limits_{i=1}^{l}I_i$;

4) $x_i^0\in H_{2r-1}^+\cap\overline{H_{2r}^+}\cap\overline{H_{2r+1}^-}\cap\overline{H_{2r+2}^-}$, $i\in I_r$, $r=1,\dots,l-2$;

$x_i^0\in\overline{H_{2l-2}^+}\cap\overline{H_{2l-1}^-}\cap H_{2l}^-$, $i\in I_{l-1}$;

$x_i^0 \in \overline{H_{2l}^+}, \ \ i \in I_l;$

5) $y_j^0 \in H_1^+ \cap H_2^-, \ \ j \in J_1;$

$y_j^0 \in H_{2r-2}^+ \cap H_{2r-1}^+ \cap H_{2r}^-, \ \ j \in J_r, \ \ r = 2, \ldots, l,$

где $H_1^+, H_1^-, H_2^+, H_2^-, \ldots, H_{2l}^+, H_{2l}^-$ *— открытые полупространства, определяемые гиперплоскостями* $H_1, H_2, \ldots, H_{2l}$*;*

6) $|J_1| + \big[|J_2| - |I_1|\big]^+ + \ldots + \big[|J_l| - (|I_1| + |I_2| + \ldots + |I_{l-1}|)\big]^+ > |I_1| + |I_2| + \ldots + |I_l|,$

где $a^+ = \max\{a, 0\}$*. Тогда в игре* $\Gamma(n, m, z^0)$ *происходит уклонение от встречи.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $I_0 = \bigcup\limits_{p=1}^{l} I_p, \ \ J_0 = \bigcup\limits_{p=1}^{l} J_p$. В силу условия 5) теоремы можно считать, что проекции точек $y_j, \ j \in J_0; \ x_i^0, \ i \in I_0$ на гиперплоскости H_1 и H_2 попарно различны. Пусть вектор p направлен в полупространство H_2^-, вектор q — в полупространство H_1^+, d_j^q — расстояние от точки $y_j^0, \ j \in J_q$ до гиперплоскости H_{2q-1}, $d_q = \min\limits_{j \in J_q} d_j^q$. Пусть $\overline{d}_j^q$ — расстояние от точки $y_j^0, \ j \in J_q$ до гиперплоскости H_{2q}, $\overline{d}_q = \min\limits_{j \in J_q} \overline{d}_j^q$. Положим $H(t) = H_1 + d_1 + qt, \ \ l_j(t) = H_j^0 + pt, \ \ t \geqslant 0, \ \ j \in J_q, \ \ q \geqslant 2$ и $\tau_j = \min\big\{\tau | l_j(\tau) \in H(\tau)\big\}$. Стратегии убегающих $E_j, \ j \notin J_0$ задаем произвольно и полагаем:

$$v_j(t) = \begin{cases} p, & t \in \left[0, \dfrac{d_j^1 - d_1}{\|q\| - \|p\| \cdot \cos(\widehat{p,q})}\right) \\ q, & t \in \left[\dfrac{d_j^1 - d_1}{\|q\| - \|p\| \cdot \cos(\widehat{p,q})}, \infty\right) \end{cases}, \quad j \in J_1,$$

$$v_j(t) = \begin{cases} q, & t \in \left[0, \dfrac{\overline{d}_j^q - \overline{d}_q}{\|p\| - \|q\| \cdot \cos(\widehat{p,q})}\right) \\ p, & t \in \left[\dfrac{\overline{d}_j^q - \overline{d}_q}{\|p\| - \|q\| \cdot \cos(\widehat{p,q})}, \tau_j\right) \\ q, & t \in [\tau_j, \infty) \end{cases}, \quad j \in J_q, \quad q \neq 1.$$

Движение убегающих $E_j, \ j \in J_q, \ q \geqslant 2$ происходит следующим образом: на промежутке $\left[0, \dfrac{\overline{d}_j^q - \overline{d}_q}{\|p\| - \|q\| \cdot \cos(\widehat{p,q})}\right)$ убегающие выравниваются так, чтобы все они находились на некоторой гиперплоскости, параллельной H_2; на промежутке $\left[\dfrac{\overline{d}_j^q - \overline{d}_q}{\|p\| - \|q\| \cdot \cos(\widehat{p,q})}, \tau_j\right)$ убегающие двигаются навстречу гиперплоскости $H(t)$, в момент τ_j убегающий E_j попадает на эту гиперплоскость и остается на ней.

Из леммы 1 вытекает, что для любой траектории $x_i(t), \ i \notin I_0$ имеет место $x_i(t) \neq y_j(t)$, $t \geqslant 0, \ j \in J_1$. Отсюда следует, что $x_i(t) \neq y_j(t), \ t \geqslant 0, \ j \in J_0$.

Покажем, что если $i \in I_p$, то P_i ловит не более $l - p + 1$ убегающего. Из леммы 1 следует, что $x_i(t) \neq y_j(t), \ j \in J_r, \ r \leqslant p, \ t \in [0, \tau_j)$. Кроме того, $y_j(\tau_j) \in H(\tau_j)$ для всех $j \in J_r$, $r \leqslant p$; $y_j\left(\dfrac{\overline{d}_j^s - \overline{d}_s}{\|p\| - \|q\| \cdot \cos(\widehat{p,q})}\right) \in \widetilde{H}_s$ для всех $j \in J_s, \ s > p$, где $\widetilde{H}_s$ — гиперплоскость такая, что $\widetilde{H}_s || H_2$. Далее, если $x_i(t^*) \in H(t^*)$, то на интервале (t^*, ∞) P_i не ловит ни одного из убегающих $E_j, \ j \in J_0$. Если же до момента T $x_i(t) \notin H(t)$, то на интервале $[0, T]$ P_i может поймать не более одного убегающего из $J_s, \ s > p$. Отсюда и получаем, что P_i ловит не более $l - p + 1$ убегающего.

МАТЕМАТИКА 2010. Вып. 1

Продолжим доказательство теоремы. Обозначим через $r_p = \big[|J_p| - (|I_1| + |I_2| + \ldots + |I_{p-1}|)\big]^+$, $p = 2, \ldots, l$. Если $r_p = 0$ для всех $p = 2, \ldots, l$, то теорема следует из леммы 2. Пусть $r_p > 0$ для всех $p = 2, \ldots, l$. В силу предыдущего рассуждения каждый из игроков P_i, $i \in I_p$ ловит не более $l - p + 1$ убегающего. Поэтому все преследователи P_i, $i \in I_0$ могут поймать не более $l|I_1| + (l-1)|I_2| + \ldots + 2|I_{l-1}| + |I_l|$ убегающих, а тогда

$$|J_1| + |J_2| + \ldots + |J_l| - [l|I_1| + (l-1)|I_2| + \ldots + 2|I_{l-1}| + |I_l|] =$$
$$= |J_1| + r_1 + r_2 + \ldots + r_l - (|I_1| + \ldots + |I_l|) > 0.$$

Поэтому в этом случае происходит уклонение от встречи.

Если же $r_p > 0$ не для всех p, рассмотрим только те p, для которых $r_p > 0$. Обозначим данные значения p через p_1, p_2, $\ldots$, p_q; $1 \leqslant p_1 < p_2 < \ldots < p_q \leqslant l$. Введем множества $J'_1, \ldots, J'_{q+1}, I'_1, \ldots, I'_{q+1}$ следующим образом:

$$J'_1 = J_1, \quad J'_{s+1} = J_{p_s}, \quad s = 1, 2, \ldots, q,$$

$$I'_1 = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_{p_1-1}, \quad I'_2 = I_{p_1} \cup I_{p_1+1} \cup \ldots \cup I_{p_2-1},$$

$$I'_s = I_{p_{s-1}} \cup I_{p_{s-1}+1} \cup \ldots \cup I_{p_s-1}, \quad s = 3, \ldots, q.$$

Тогда все условия теоремы для множеств $J'_1, \ldots, J'_{q+1}, I'_1, \ldots, I'_{q+1}$ и гиперплоскостей H'_1, $\ldots$, H'_{2q+2} выполнены, причем $r'_s = \big[|J'_s| - (|I'_1| + \ldots + |I'_{s-1}|)\big]^+ > 0$, $s = 2, \ldots, q+1$. Здесь $H'_1 = H_1$, $H'_2 = H_2, \ldots, H'_{2s+1} = H_{2p_s-1}$, $H'_{2s+2} = H_{2p_s}$. Тем самым доказано, что в игре $\Gamma(n, m, z^0)$ происходит уклонение от встречи. Теорема доказана. $\square$

§ 3. Устойчивая разрешимость задачи преследования

Определение 6. Будем говорить, что в игре $\Gamma(n, 1, z^0)$ *устойчиво разрешима задача преследования*, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого z в игре $\Gamma(n, 1, z)$ разрешима задача преследования, где $z = (x_1, \ldots, x_n, y_1)$, $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0)$ и для всех i $\|x_i - x_i^0\| \leqslant \varepsilon$ и $\|y_1 - y_1^0\| \leqslant \varepsilon$. (Это означает, что изменение начальных позиций любых игроков в пределах некоторого шара не влияет на исход игры).

Для данного выпуклого компакта U определим число $a(U) = \min\{n \,|\, \text{существует } z^0 \text{ такое, что в игре } \Gamma(n, 1, z^0) \text{ происходит поимка}\}$ и число $b(U) = \min\{n \,|\, \text{существует } z^0 \text{ такое, что в игре } \Gamma(n, 1, z^0) \text{ устойчиво разрешима задача преследования}\}$.

Лемма 3. *Для любого выпуклого компакта U с непустой внутренностью существует число $b(U)$.*

Доказательство. Пусть u — внутренняя точка компакта U, v — граничная точка U. В силу условия $u \in \operatorname{int} U$ существует шар $D_R(u)$ радиуса R с центром в точке u, лежащий в U. Пусть $\overline{K}(v) = \big\{v + t(D_R(u) - v), t \geqslant 0\big\}$. Рассмотрим сферу единичного радиуса $S_1(v)$ с центром в точке v и пусть $S(v) = S_1(v) \cap \overline{K}(v)$. В силу компактности сферы существует натуральное число m и граничные точки v_i, $i = 1, \ldots, m$ такие, что семейство множеств $\{S(v_i) - v_i\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ покрывает сферу радиуса 1 с центром в начале координат. Полагаем $x_i^0 = \dfrac{u - v_i}{\|u - v_i\|}$, $i = 1, \ldots, m$, а $y^0 = 0$. Тогда по построению с учетом теоремы Н. Л. Григоренко [2, с. 59] существует $\varepsilon > 0$ такое, что в игре $\Gamma(m, 1, \widehat{z}^0)$ разрешима задача преследования, где $\widehat{z}^0 = (\widehat{x}_1^0, \ldots, \widehat{x}_m^0, \widehat{y}^0)$, $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0, y^0)$ и для всех i $\|x_i^0 - \widehat{x}_i^0\| \leqslant \varepsilon$, $\|y^0 - \widehat{y}^0\| \leqslant \varepsilon$, следовательно, в игре $\Gamma(m, 1, z^0)$ устойчиво разрешима задача преследования и $b(U) \leqslant m$. Лемма доказана. $\square$

Следствие 1. *Для любого выпуклого компакта U с непустой внутренностью существует число $a(U)$.*

§ 4. Оценка минимального числа убегающих, уклоняющихся от заданного числа преследователей из любых начальных позиций

Теорема 2. *Для любого выпуклого компакта U с непустой внутренностью и для любого целого неотрицательного числа n существуют начальные позиции игроков z^0 такие, что в игре $\Gamma(a(U)\cdot b(U)^n, b(U)^{n-1}(b(U)+a(U)\cdot n), z^0)$ разрешима задача преследования.*

Доказательство. Существование чисел $a(U)$ и $b(U)$ для компакта с непустой внутренностью было доказано ранее. Доказывать утверждение будем методом математической индукции по n. Пусть $n=0$. В соответствии с определением числа $a(U)$ существуют начальные позиции игроков z^0 такие, что в игре $\Gamma(a(U),1,z^0)$ разрешима задача преследования, следовательно, утверждение в этом случае справедливо. База индукции верна. Аналогично существуют начальные позиции $\widehat{z}^0$ такие, что в игре $\Gamma(b(U),1,\widehat{z}^0)$ задача преследования будет устойчиво разрешимой. Обозначим данные начальные позиции преследователей $\widehat{x}_1,\ldots,\widehat{x}_{b(U)}$, убегающего — $\widehat{y}$. Предположим, что утверждение имеет место для всех $n\leqslant p$. В частности, существует z^0 такой, что в игре $\Gamma(a(U)\cdot b(U)^p, b(U)^{p-1}(b(U)+a(U)\cdot p), z^0)$ происходит поимка не позднее момента T. Зафиксируем данные начальные позиции.

Покажем, что утверждение выполняется при $n=p+1$. Пусть A — множество данных начальных позиций, R — радиус шара с центром в начале координат, который содержит все положения игроков в игре $\Gamma(a(U)\cdot b(U)^p, b(U)^{p-1}(b(U)+a(U)\cdot p), z^0)$ до момента T. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^k$ симплекс с вершинами $\beta\widehat{x}_1,\ldots,\beta\widehat{x}_{b(U)}$. Сделаем трансляцию множества A на каждый из векторов $\beta\widehat{x}_s$, $s=1,\ldots,b(U)$ и рассмотрим все точки вида $\beta\widehat{x}_s+x_i^0$, где x_i^0 — начальное положение преследователя P_i в игре $\Gamma(a(U)\cdot b(U)^p, b(U)^{p-1}(b(U)+a(U)\cdot p), z^0)$, $\widehat{x}_s$ — один из векторов $\widehat{x}_1,\ldots,\widehat{x}_{b(U)}$. В каждую из точек данного вида поместим по преследователю, получим $a(U)\cdot b(U)^{p+1}$ преследователей.

В каждую точку вида $y_j^0+\beta\widehat{x}_s$, где y_j^0 — начальное положение убегающего E_j в игре $\Gamma(a(U)\cdot b(U)^p, b(U)^{p-1}(b(U)+a(U)\cdot p), z^0)$, $\widehat{x}_s$ — один из векторов $\widehat{x}_1,\ldots,\widehat{x}_{b(U)}$, поместим по убегающему, получим $b(U)^p(b(U)+a(U)\cdot p)$ убегающих. Еще $a(U)\cdot b(U)^p$ убегающих поместим вовнутрь шара D^0 единичного радиуса с центром в точке $\widehat{y}$. Тогда общее число убегающих будет $b(U)^p(b(U)+a(U)\cdot(p+1))$.

Рассмотрим получившуюся игру $\Gamma(a(U)\cdot b(U)^{p+1}, b(U)^p(b(U)+a(U)\cdot(p+1)), z^0))$ и покажем, что β можно выбрать так, чтобы в данной игре произошла поимка. В силу определения числа $b(U)$ в игре $\Gamma(b(U),1,z^0)$ разрешима задача преследования, где $z^0=(x_1,\ldots,x_{b(U)},y)$ и для всех i выполнено $\|x_i-\widehat{x}_i\|\leqslant\varepsilon$, $\|\widehat{y}-y\|\leqslant\varepsilon$. Понятно, что в игре $\Gamma(b(U),1,z^0)$ будет разрешима задача преследования, где $z^0=(x_1,\ldots,x_{b(U)},y)$ и для всех i $\|x_i-\beta\widehat{x}_i\|\leqslant\beta\varepsilon$, $\|\beta\widehat{y}-y\|\leqslant\beta\varepsilon$. Выберем β так, чтобы $\beta\geqslant\dfrac{1}{\varepsilon}\max\{R,1+u^*T\}$, где $u^*=\max\limits_{u\in U}\|u\|$. Покажем, что такой выбор β гарантирует поимку в игре $\Gamma(a(U)\cdot b(U)^{p+1}, b(U)^p(b(U)+a(U)\cdot(p+1)), z^0))$.

Обозначим через $A_j=A+\beta\widehat{x}_j$, $j=1,\ldots,b(U)$; $\mu=a(U)\cdot b(U)^p$, $\nu=b(U)^{p-1}(b(U)+a(U)\cdot p)$, $P_1^i,\ldots,P_\mu^i$ — преследователи, начальные позиции которых при $t=0$ находятся в A_i; $E_1^i,\ldots,E_\nu^i$ — убегающие, начальные позиции которых при $t=0$ находятся в A_i, $i=1,\ldots,b(U)$; $\overline{E}_1,\ldots,\overline{E}_\mu$ — убегающие, начальные позиции которых при $t=0$ лежат в шаре D^0; $x_1^i(T),\ldots,x_\mu^i(T)$ — положения преследователей $P_1^i,\ldots,P_\mu^i$ в момент $t=T$; $\overline{y}_1(T),\ldots,\overline{y}_\mu(T)$ — положения убегающих $\overline{E}_1,\ldots,\overline{E}_\mu$ в момент $t=T$. Преследователи строят свои стратегии следующим образом: сначала преследователи $P_1^i,\ldots,P_\mu^i$ ловят убегающих $E_1^i,\ldots,E_\nu^i$, $i=1,\ldots,b(U)$. В силу индукционного предположения поимка указанных убегающих произойдет не позднее момента T, в момент $t=T$ преследователи $P_i^1,\ldots,P_i^{b(U)}$ начинают ловить убегающих $\overline{E}_i$, $i=1,\ldots,\mu$. В силу выбора β имеем $R\leqslant\beta\varepsilon$ и $1+u^*T\leqslant\beta\varepsilon$, откуда для всех $i=1,\ldots,\mu$ и для всех $j=1,\ldots,b(U)$ выполнено $\|x_i^j(T)-\beta\widehat{x}_j\|\leqslant\beta\varepsilon$ и $\|\overline{y}_i(T)-\beta\widehat{y}\|\leqslant\beta\varepsilon$. Из последних неравенств и устойчивой разрешимости задачи преследования в игре $\Gamma(b(U),1,\hat{z}^0)$ следует возможность поимки убегающих $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_\mu$. В игре $\Gamma(a(U) \cdot b(U)^{p+1}, b(U)^p(b(U) + a(U) \cdot (p + 1)), z^0))$ происходит поимка. Теорема доказана. $\square$

В работе [3] вводится функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ следующим образом: $f(n) = \min\{m \,|\,$ в игре $\Gamma(n, m, z^0)$ разрешима глобальная задача уклонения$\}$.

Следствие 2. *Для любого выпуклого компакта U с непустой внутренностью существует число $C(U) > 0$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ справедливо неравенство $f(n) \geqslant C(U) \cdot n \ln n$.*

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что $f(a(U) \cdot b(U)^p) > b(U)^{p-1} \cdot (b(U) + a(U) \cdot p)$ для всех $p \in \mathbb{Z}$, $p \geqslant 0$. Учитывая неравенство $a(U) \leqslant b(U)$, получаем $f(b(U)^p) \geqslant p \cdot a(U)^{p-1}$ для $p \in \mathbb{N}$. Пусть n — произвольное натуральное число $(n \geqslant b(U))$, p — натуральное число такое, что $b(U)^p \leqslant n$ и $b(U)^{p+1} > n$. Тогда $f(n) \geqslant f(b(U)^p) \geqslant p \cdot a(U)^{p-1}$. Учитывая, что $p = [\log_{b(U)} n]$, получаем требуемую оценку. $\square$

§ 5. Построение стратегии убегающего, обеспечивающей его одновременную поимку несколькими преследователями

Будем рассматривать игру $\Gamma(n, 1, z^0)$. Обозначим $z_i = x_i - y$, $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 3. *Для любого z^0, удовлетворяющего условию разрешимости задачи преследования группой преследователей одного убегающего существует позиционное управление убегающего, при котором в момент окончания игры его ловят не менее чем $a(U)$ преследователей, то есть если T — момент окончания игры, то $z_i(T) = 0$, $i = 1, \ldots, a(U)$ и $z_i(t) \neq 0$ для всех i и $t \in [0, T)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную числовую последовательность l_j, $j = 1, 2, \ldots,$ $l_j > 0$ и $l_j \to 0$ при $j \to \infty$. Опишем итерационный процесс выбора управления убегающего для каждого l_j. Возьмем l_1. По условию задачи $z_i(0) \neq 0$ для всех i. Если для всех $a(U)$ номеров i справедливо включение $z_i(0) \in S_{l_1}(0)$, то переходим к следующему числу l_2. В противном случае для номеров $i_1, \ldots, i_k$, $k < a(U)$ выполнено включение $z_{i_\xi}(0) \in S_{l_1}(0)$, $\xi = 1, \ldots, k$ и $z_{i_\xi}(0) \notin S_{l_1}(0)$ для $\xi \neq 1, \ldots, k$.

Обозначим $\{K_i\} = \{K(v_0) = \{t(v_0 - U), t \geqslant 0\} \,|\, v_0$ — крайняя точка компакта U, $z_i^0 \in K(v_0)\}$, где $i = i_1, \ldots, i_k$. Выберем $v(s) = v_1$, $v_1 \in \partial U$, $v_1 \notin \{K_i\}$ для $i = i_1, \ldots, i_k$ и $v_1 \in K$, где K — некоторый конус $K(v_0)$ такой, что $z_{i_\xi}(0) \in K$ для некоторого $\xi \neq 1, \ldots, k$. При таком управлении в силу теоремы Н. Л. Григоренко [2, с. 59] ни один из преследователей с номером $i = i_1, \ldots, i_k$ убегающего не ловит. Покажем, что такое управление v_1 существует. Отметим, что существует крайняя точка $\widehat{v}$ компакта U такая, что конус $K(\widehat{v}) \notin \{K_i\}$ (в противном случае было бы выполнено условие разрешимости задачи преследования, то есть $a(U) \leqslant k$ — противоречие). С другой стороны, по условию теоремы из позиции z^0 разрешима задача преследования, а значит, конус $K(\widehat{v})$ содержит z_{i_ξ} для некоторого $\xi \neq 1, \ldots, k$. Управление $\widehat{v}$ является искомым.

Пусть убегающий придерживается такого управления при $s \in [0, t_1]$, где момент t_1 определяется соотношениями $z_{i_\nu}(s) \notin S_{l_1}(0)$ при $s < t_1$, а $z_{i_\nu}(t_1) \in S_{l_1}(0)$, где ν — некоторый номер такой, что $\nu \neq 1, \ldots, k$. Таким образом, t_1 — первый момент времени, когда преследующий игрок с номером i_ν окажется в шаре $S_{l_1}(0)$. Если найдется преследователь с номером i_μ, для которого $z_{i_\mu}(t_1) \notin S_{l_1}(0)$, то аналогично v_1 выбираем v_2 для $s \in [t_1, t_2]$, где момент t_2 определяется соотношениями $z_{i_\mu}(s) \notin S_{l_1}(0)$ при $t_1 \leqslant s < t_2$, а $z_{i_\mu}(t_2) \in S_{l_1}(0)$. Выбирая далее аналогичным образом управления v_3, v_4 и так далее, убегающий соберет в $S_{l_1}(0)$ $a(U)$ преследователей, иначе он не будет пойман. Заметим, что на протяжении этого процесса $z_i(t) \neq 0$ для всех игроков.

Повторим этот процесс для l_2, l_3 и так далее. Выбранное управление убегания для любого l_j обеспечивает существование такого момента времени $t(l_j)$, что одновременно выполняются соотношения $z_j(t(l_j)) \in S_{l_j}$, $z_i(s) \neq 0$, $s \leqslant t(l_j)$, $i = 1, \ldots, a(U)$. Покажем, что такое управление убегающего обеспечивает результат, сформулированный в теореме. Предположим противное: поимка состоялась, но не все $a(U)$ преследователей поймали убегающего, то есть существует момент времени T, для которого $z_{i_\xi}(T) = 0$, $\xi = 1, \ldots, a(U) - m$, где $a(U) > m \geqslant 1$, причем для $t < T$ справедливо $z_i(t) \neq 0$ для $i = 1, \ldots, a(U)$. Выберем $l > 0$ так, чтобы

$$l < \min\bigl\{\|z_{i_k}\|,\ t \leqslant T,\ k = a(U) - m + 1, \ldots, a(U)\bigr\}.$$

Тогда при $t \leqslant T$ существуют номера i, для которых $z_i(t) \notin S_l(0)$, например, $i_{a(U)-m+1}$, $\ldots$, $i_{a(U)}$, а при $t > T$ существуют номера i, например $i_1, \ldots, i_m$, для которых $z_i(t) = 0$. Таким образом, $v(t)$ таково, что существует $l > 0$ такое, что для любого t не выполняются одновременно условия $z_i(t) \neq 0$ и $z_i(t) \in S_l(0)$, $i = 1, \ldots, a(U)$, что противоречит выбору управления убегающего. Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. — 1976. — № 3. — С. 145–146.
2. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1990. — 197 с.
3. Петров Н. Н., Петров Н. Никандр. О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. 19, № 8. — С. 1366–1374.
4. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. — Киев: Наукова думка, 1992. — 240 с.

Поступила в редакцию 20.11.09

D. V. Sakharov
About one differential game of pursuit with many persons

The solvability conditions of problems of pursuit and evasion in differential game with many persons possessing simple motion have been obtained.

Keywords: differential game, simple motion, pursuer, evader, group pursuit.

Mathematical Subject Classifications: 49N70, 91A23

Сахаров Денис Валентинович, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4),
E-mail: drden@e-izhevsk.ru