УДК 517.53

© *А. С. Ильчуков, А. Ю. Тимофеев*

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ ПОВЕДЕНИЕМ МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Изучается и решается задача Дирихле для голоморфных функций в пространствах, описываемых поведением модуля непрерывности, удовлетворяющего заданными условиями.

Ключевые слова: проблема Дирихле, голоморфные функции, модуль непрерывности.

Введение

Задачей Дирихле для открытого круга $G = \{z : |z| < 1\}$ называют задачу определения функции $u(z)$, гармонической и ограниченной в G, непрерывной в $\overline{G}$ и принимающей наперёд заданные значения на границе $\partial G = \{z : |z| = 1\}$. Доказано (см. напр. [1, 2]), что эта задача всегда имеет решение, причём единственное.

По аналогии задачей Дирихле для голоморфных функций будем называть задачу определения голоморфной в G функции $f(z)$ по предельным значениям её действительной части $u(z)$ на границе ∂G. Для единственности решения задачи в этом случае необходимо предполагать условие нормировки в виде условия на значение мнимой части f в фиксированной точке z_0 круга $\overline{G}$.

При решении этой задачи возникает вопрос: если функция u находится в определённом классе функций, то в каком классе функций будет находиться функция v, сопряжённая к u? В частности, для каких классов функций v находится в том же классе функций, что и u? Известно (см. напр. [3, с. 64–71]), что предельные поведения вещественной и мнимой частей голоморфной функции выражаются с помощью формул преобразования Гильберта

$$\begin{cases} v(e^{i\gamma_0}) = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(e^{i\gamma}) \operatorname{ctg}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\, d\gamma + v_0, \quad v_0 = v(0,0), \\ u(e^{i\gamma_0}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} v(e^{i\gamma}) \operatorname{ctg}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}\, d\gamma + u_0, \quad u_0 = u(0,0). \end{cases} \tag{0.1}$$

Сингулярный интеграл Гильберта, стоящий в правой части (0.1), тесно связан с несобственным интегралом Коши вдоль окружности радиуса 1 с центром в начале координат (см., напр., [4, с. 163]). Таким образом, указанная задача связана с описанием пространств, инвариантных относительно интегральных операторов Гильберта и Коши.

При исследовании краевых задач, связанных с обобщёнными уравнениями Коши-Римана, используется следующий результат [5, с. 131].

Теорема 1. *Если функция g задана на ∂G и непрерывна по Гёльдеру с показателем λ $(0 < \lambda < 1)$ с постоянной H, то существует единственная голоморфная в G функция f, удовлетворяющая условиям*

$$\operatorname{Re} f = g(z), \quad z \in \partial G, \quad \operatorname{Im} f|_{z=z_0} = c,$$

где $z_0 \in \partial G$ — фиксированная точка, причём f является непрерывной по Гёльдеру в $\overline{G}$ с тем же самым показателем λ и постоянной

$$\frac{8 \cdot 2^{\lambda}}{\cos(\lambda\frac{\pi}{2})}\left(\frac{2}{\lambda\pi}(1+2\lambda)+1\right)H.$$

На семинаре по комплексному анализу и дифференциальным уравнениям в Институте математики с ВЦ УНЦ РАН (руководитель — член-корреспондент РАН В. В. Напалков) была высказана гипотеза о справедливости этой теоремы для более общих, чем гёльдеровские пространства, классов функций. В § 2 данной работы доказывается аналог теоремы 1 для пространств, описываемых поведением модуля непрерывности.

Пусть функция $\mu(t)$ удовлетворяет условиям $1^\circ - 4^\circ$ из § 1 , тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция g задана на ∂G и удовлетворяет условию*

$$|g(e^{i\theta_1}) - g(e^{i\theta_2})| \leqslant C\mu(|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|), \quad \text{где} \ \ \mu \in \Phi.$$

Тогда существует единственная голоморфная в G функция f, удовлетворяющая условиям

$$\operatorname{Re} f = g(z), \quad z \in \partial G, \quad \operatorname{Im} f|_{z=z_0} = c,$$

где $z_0 \in \partial G$ — фиксированное число, причём f удовлетворяет во всех точках $\overline{G}$ условию

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant A\mu(|z_1 - z_2|).$$

Заметим, что ранее в [6] аналогичный результат получен для пересечения пространств, задаваемых весами вида

$$\mu_{l,\varepsilon} = \frac{1}{(\ln\frac{1}{t})^l \ln\ln\frac{1}{t}\cdots(\ln\ln\ldots\ln\frac{1}{t})^{1+\varepsilon}}, \quad l \geqslant 1, \quad \varepsilon > 0.$$

§ 1. Некоторые пространства функций, описываемые поведением модуля непрерывности

В работе [7] в связи с обобщением теоремы Племеля–Привалова введён следующий класс функций $\varphi(\delta)$, удовлетворяющий условиям:

1) $\varphi(\delta)$ непрерывна и монотонно возрастает на $[0; \frac{l}{2}]$;

2) $\varphi(\delta) \neq 0$ для всех $\delta \in (0; \frac{l}{2}]$, $\varphi(0) = 0$;

3) $\frac{\varphi(\delta)}{\delta}$ почти убывает, то есть существует такое $k > 0$, что при $\delta_1 > \delta_2$ справедливо неравенство $\frac{\varphi(\delta_1)}{\delta_1} < k\frac{\varphi(\delta_2)}{\delta_2}$.

Для замкнутой жордановой спрямляемой кривой Γ и фиксированной функции $\varphi(\delta)$ вводится множество функций H_φ : говорят, что $f \in H_\varphi$, если существует постоянная $c > 0$, что при $\delta \in (0; l_0]$ (l_0 — диаметр кривой Γ) выполнено

$$\omega(f, \delta) \leqslant c\varphi(\delta), \tag{1.1}$$

где $\omega(f, \delta) = \sup\limits_{|t_1 - t_2| \leqslant \delta} |f(t_1) - f(t_2)|$, $\delta \in (0; l_0]$ является модулем непрерывности функции f. Отмечается, что если в H_φ ввести норму

$$\|f\|_{H_\varphi} := \max_{t\in\Gamma} |f(t)| + \sup_{\delta\in(0;l_0]} \frac{\omega(f, \delta)}{\varphi(\delta)}, \tag{1.2}$$

то оно превращается в пространство Банаха.

В работах [7, 4] изучен интегральный опретатор Коши в пространстве H_φ. В частности, получены условия на функцию φ, когда оператор переводит пространство в себя.

В [8] изучаются нелинейные сингулярные интегральные уравнения в пространстве функций, описываемых поведением модуля непрерывности, а именно, рассмотрен класс Φ с более жёсткими, чем условия 1 – 3. Будем говорить, что функция $\mu : (0; l_0] \to \mathbb{R}$ принадлежит классу Φ, если

1°. $\lim\limits_{t\to+0}\mu(t)=0$;

2°. Функция $\mu(t)$ почти возрастает, то есть существует постоянная $c=c_\mu$, что для всех $t_1,t_2\in(0,l_0]:t_1\leqslant t_2$ выполнено $\mu(t_1)\leqslant c\mu(t_2)$;

3°. $\sup\limits_{t>0}\frac{1}{\mu(t)}\displaystyle\int_0^t\frac{\mu(t)}{t}dt=A_\mu<\infty$;

4°. $\sup\limits_{t>0}\frac{t}{\mu(t)}\displaystyle\int_t^{l_0}\frac{\mu(t)}{t^2}dt=B_\mu<\infty$.

Приведём некоторые полезные свойства функций из класса Φ :

1) $\mu(t)\geqslant 0$ для всех $t\in(0;l_0]$;

2) $\frac{\mu(t)}{t}$ почти убывает;

3) для всех $x\in(0;l_0]$ $\displaystyle\int_0^x\frac{\mu(t)}{t}dt\leqslant A_\mu\mu(x)$;

4) для всех $x,b\in(0;l_0]$ $\displaystyle\int_x^b\frac{\mu(t)}{t^2}\leqslant B_\mu\frac{\mu(x)}{x}$;

5) поскольку

$$\frac{2}{\pi}|\theta_1-\theta_2|\leqslant|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|\leqslant 2|\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}|\leqslant|\theta_1-\theta_2|,$$

то существуют $C_1,C_2>0$ такие, что

$$C_1\mu(|\theta_1-\theta_2|)\leqslant\mu(|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|)\leqslant C_2\mu(|\theta_1-\theta_2|)$$

для $|\theta_1-\theta_2|<\pi$.

Из свойства 3), в частности, следует, что $\mu\in\Phi$ удовлетворяет условию Дини. Заметим, что сингулярный оператор Коши изучался также в [9] для пространств функций, описываемых поведением модуля непрерывности с условием Дини.

Примерами функций $\mu(t)$ из класса Φ являются следующие функции:

1) $\mu(t)=t^\alpha$, $0<\alpha<1$;

2) $\mu(t)=t^\alpha|\ln t|^p$, $\mu(0)=0$, где $0<\alpha<1$, $0<p$, $t\in[0,\frac12]$;

3) $\mu(t)=\begin{cases} t^\alpha, & \text{если } 0\leqslant t\leqslant\frac{l_0}{2},\\ t^\alpha+1, & \text{если } \frac{l_0}{2}<t\leqslant l_0.\end{cases}$

Примером функции, не принадлежащей классу Φ, может послужить функция $x(t)=t$.

Определим теперь для замкнутого ограниченного подмножества $K\subseteq\mathbb{C}$ и $\mu\in\Phi$ класс непрерывных функций $C_\mu(K)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_\mu:=\max\left\{\sup_K|f(t)|,\sup_{z_1\neq z_2}\frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{\mu(|z_1-z_2|)}\right\}<\infty. \tag{1.3}$$

Очевидно, что величина (1.3) удовлетворяет всем аксиомам нормы. Более того, справедлива

Лемма 1. *Пространство* $(C_\mu(K),\|\cdot\|_\mu)$ *является банаховым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим фундаментальную последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ элементов из $C_\mu(K)$, то есть такую, что выполнено

$$\|f_n-f_k\|_\mu<\varepsilon,\quad n,k>n_0, \tag{1.4}$$

где n_0 зависит от ε.

Из (1.4) видно, что

$$|f_n(z)-f_k(z)|<\varepsilon, \tag{1.5}$$

откуда следует равномерная сходимость $\{f_n\}$ в K к некоторой предельной непрерывной функции $f(z)$.

В (1.5) зафиксируем n и устремим k к ∞, тогда получим, что

$$|f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon, \quad n \geqslant n_0. \tag{1.6}$$

Из определения нормы $\|\cdot\|_\mu$ получаем, что для $g \in C_\mu(K)$ выполнено

$$|g(z_2) - g(z_1)| \leqslant \|g\|_\mu \cdot \mu(|z_2 - z_1|), \tag{1.7}$$

поэтому из (1.4) следует, что

$$|(f_n(z_2) - f_k(z_2)) - (f_n(z_1) - f_k(z_1))| < \varepsilon\mu(|z_2 - z_1|).$$

При фиксированном n и $k \to \infty$ получаем отсюда, что

$$|(f_n(z_2) - f(z_2)) - (f_n(z_1) - f(z_1))| \leqslant \varepsilon\mu(|z_2 - z_1|)$$

либо, что то же самое,

$$\frac{|(f_n(z_2) - f(z_2)) - (f_n(z_1) - f(z_1))|}{\mu(|z_2 - z_1|)} \leqslant \varepsilon, \quad n > n_0(\varepsilon). \tag{1.8}$$

Неравенство (1.8) означает, что функция $f_n - f$ (следовательно, и функция $(f - f_n) + f_n$) является элементом пространства $C_\mu(K)$. Таким образом $f \in C_\mu(K)$.

Из неравенств (1.6) и (1.8) следует, что

$$\|f_n(z) - f(z)\|_\mu \leqslant \varepsilon, \quad n \geqslant n_0; \tag{1.9}$$

это означает, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к элементу f из пространства $C_\mu(K)$. Лемма 1 доказана. $\square$

§ 2. Задача Дирихле для голоморфных функций

Докажем основной результат с помощью следующих утверждений.

Лемма 2. *Пусть* $f \in H(G)$, *где* $G = \{z : |z| < 1\}$, $\mu \in \Phi$. *Тогда условия, что* $f \in C(\overline{G})$ *и*

$$|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})| \leqslant A\mu(|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|) \tag{2.1}$$

эквивалентны тому, что

$$|f'(\zeta)| \leqslant B\frac{\mu(1-r)}{1-r}, \tag{2.2}$$

где $|\zeta| = r < 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Используя формулу Коши для производной голоморфной функции, получаем для $\zeta \in G$

$$f'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^2}\, dz. \tag{2.3}$$

Пусть $\zeta = re^{i\theta}, z = e^{i\varphi}, \zeta_1 = e^{i\theta}$. Тогда

$$f'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{f(z) - f(\zeta_1)}{(z-\zeta)^2}\, dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\varphi}) - f(e^{i\theta})}{(e^{i\varphi} - re^{i\theta})^2} e^{i\varphi}\, d\varphi.$$

Отсюда

$$|f'(\zeta)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(e^{i\varphi}) - f(e^{i\theta})|}{|1 - re^{i(\theta-\varphi)}|^2}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(e^{i(t+\varphi)}) - f(e^{i\theta})|}{(1 - 2r\cos t + r^2)}\, dt.$$

Поскольку $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то

$$1-2r\cos t+r^2=(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}>(1-r)^2+\frac{4r}{\pi^2}t^2,$$

что при использовании свойств μ и условия теоремы даёт следующую оценку:

$$|f'(\zeta)|\leqslant\frac{A}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mu(|t|)}{(1-r)^2+\frac{4r}{\pi^2}t^2}\,dt=\frac{A}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\mu(t)}{(1-r)^2+\frac{4r}{\pi^2}t^2}\,dt=$$

$$=\frac{A}{\pi}\left[\underbrace{\int_0^{1-r}(\ldots)\,dt}_{J_1(r)}+\underbrace{\int_{1-r}^{\pi}(\ldots)\,dt}_{J_2(r)}\right].$$

Предположим сначала, что $r\geqslant\frac{1}{2}$. Используя свойство 2° функции μ, имеем для первого интеграла, что

$$J_1(r)\leqslant A_1\mu(1-r)\int_0^{1-r}\frac{1}{(1-r)^2+\frac{4r}{\pi^2}t^2}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant A_1\mu(1-r)\left[\int_0^{\frac{2\sqrt{r}}{\pi}}\frac{dx}{1+x^2}\right]\frac{\pi(1-r)}{2\sqrt{r}}\frac{1}{(1-r)^2}<A_2\frac{\mu(1-r)}{1-r}.$$

Аналогично, для второго интеграла получаем оценку

$$J_2(r)\leqslant\frac{\pi^2}{4r}\int_{1-r}^{\pi}\frac{\mu(t)}{t^2}\,dt\leqslant B_1\frac{\pi^2}{4r}\frac{\mu(1-r)}{1-r}=B_2\frac{\mu(1-r)}{1-r}.$$

Таким образом, если $|\zeta|=r\geqslant\frac{1}{2}$, то

$$|f'(\zeta)|\leqslant B\frac{\mu(1-r)}{1-r}. \tag{2.4}$$

Если теперь в качестве B возьмём величину, бóльшую, чем верхняя грань $\frac{f'(\zeta)(1-r)}{\mu(1-r)}$ для $|\zeta|<\frac{1}{2}$, то получаем, что неравенство (2.4) справедливо для всех $\zeta:|\zeta|<1$.

Достаточность. Пусть

$$|f'(\zeta)|\leqslant B\frac{\mu(1-r)}{1-r},\quad |\zeta|=r<1.$$

Тогда

$$\left|\int_0^1 f'(re^{i\theta})\,dr\right|\leqslant\int_0^1|f'(re^{i\theta})|\,dr\leqslant B\int_0^1\frac{\mu(1-r)}{1-r}\,dr=B\int_0^1\frac{\mu(r)}{r}\,dr=B_1<\infty.$$

Значит, интеграл $\displaystyle\int_0^1 f'(re^{i\theta})dr$ сходится для всех θ, следовательно, для всех θ существует $\lim\limits_{r\to1}f(re^{i\theta})=f(e^{i\theta})$. Проинтегрировав обе части неравенства (2.2) по $r\in(0;1)$, получаем, что f ограничена в G, а значит, представима в виде интеграла Пуассона через свои предельные значения $f(e^{i\theta})$ (см. [2, с. 381]). Покажем, что верна оценка

$$|f(e^{i\theta_1})-f(e^{i\theta_2})|\leqslant A\mu(|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|), \tag{2.5}$$

откуда будет следовать, что $f\in C(\overline{G})$ (см. [2, с. 369]). Можно считать, что $|\theta_1-\theta_2|<1$. Имеем

$$f(e^{i\theta_1})-f(e^{i\theta_2})=\int_l f'(\zeta)\,d\zeta, \tag{2.6}$$

где замкнутая кривая l состоит из отрезков $\overline{e^{i\theta_1}, he^{i\theta_1}}$, $\overline{e^{i\theta_2}, he^{i\theta_2}}$ и дуги окружности $(he^{i\theta_1}, he^{i\theta_2})$, причём $h = 1 - |\theta_1 - \theta_2|$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})| \leqslant \\
&\leqslant \int_h^1 |f'(re^{i\theta_1})|\,dr + \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} h|f'(he^{it})|\,dt\right| + \int_h^1 |f'(re^{i\theta_2})|\,dr \leqslant \\
&\leqslant 2A_1 \int_h^1 \frac{\mu(1-r)}{1-r}\,dr + A_2 \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} h\frac{\mu(1-h)}{1-h}\,dt\right| \leqslant \\
&\leqslant 2A_1 \int_0^{|\theta_1-\theta_2|} \frac{\mu(r)}{r}\,dr + A_2 \frac{\mu(|\theta_1-\theta_2|)}{|\theta_1-\theta_2|}\left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} dt\right| \leqslant \\
&\leqslant 2A_3\mu(|\theta_1-\theta_2|) + A_2\frac{\mu(|\theta_1-\theta_2|)}{|\theta_1-\theta_2|}|\theta_1-\theta_2| = \\
&= A_4\mu(|\theta_1-\theta_2|) \leqslant A\mu(|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|).
\end{aligned}
$$

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть* $f \in H(G) \cap C(\overline{G})$, *где* $G = \{z : |z| < 1\}$, $\mu \in \Phi$. *Тогда из условия* (2.1)

$$|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})| \leqslant A\mu(|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|)$$

следует, что

$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leqslant C\mu(|\zeta_1 - \zeta_2|), \quad \zeta_1, \zeta_2 \in \overline{G}. \tag{2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Результат немедленно получится, если докажем, что для всех точек $\zeta_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $\zeta' = r_1 e^{i\theta_2}$, $\zeta_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ из $\overline{G}$ выполняются следующие неравенства:

$$|f(r_1e^{i\theta_1}) - f(r_1e^{i\theta_2})| \leqslant \hat{C}\mu(|r_1e^{i\theta_1} - r_1e^{i\theta_2}|), \tag{2.8}$$

$$|f(r_1e^{i\theta_2}) - f(r_2e^{i\theta_2})| \leqslant \hat{C}\mu(|r_1e^{i\theta_2} - r_2e^{i\theta_2}|). \tag{2.9}$$

Действительно, используя, что $|\zeta_1 - \zeta'| \leqslant |\zeta_1 - \zeta_2|$, $|\zeta' - \zeta_2| \leqslant |\zeta_1 - \zeta_2|$ и свойство почти возрастания μ, получаем

$$
\begin{aligned}
&|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leqslant |f(\zeta_1) - f(\zeta')| + |f(\zeta') - f(\zeta_2)| \leqslant \\
&\leqslant \hat{C}(\mu(|\zeta_1 - \zeta'|) + \mu(|\zeta' - \zeta_2|)) \leqslant C\mu(|\zeta_1 - \zeta_2|).
\end{aligned}
$$

При этом можно предполагать, что $\zeta_1 \neq \zeta_2$ и $r_1 \neq 0$.

1. Доказательство (2.8). Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi_{\theta_1,\theta_2}(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta e^{i\theta_1}) - f(\zeta e^{i\theta_2})}{\zeta}, & \zeta \in \overline{G}\backslash\{0\}, \\ f'(0), & \zeta = 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

при этом считаем, что $|\theta_1 - \theta_2| < \pi$. Можно проверить путём разложения функции $\varphi_{\theta_1,\theta_2}(\zeta)$ в ряд Тейлора в окрестности начала координат, что $\varphi_{\theta_1,\theta_2}(\zeta) \in H(G) \cap C(\overline{G})$. Применяя принцип максимума модуля голоморфной функции и условие теоремы, получаем, что для точек ζ таких, что $|\zeta| = r_1 < 1$, справедливо неравенство

$$
\begin{aligned}
&\frac{|f(r_1e^{i\theta_1}) - f(r_1e^{i\theta_2})|}{r_1} \leqslant \max_{|\zeta| \leqslant r_1} |\varphi_{\theta_1,\theta_2}(\zeta)| \leqslant \max_{|\zeta| = r_1} |\varphi_{\theta_1,\theta_2}(\zeta)| = \\
&= \frac{\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant \pi} |f(r_1e^{i(t+\theta_1)}) - f(r_1e^{i(t+\theta_2)})|}{r_1} \leqslant \frac{A\mu(r_1|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|)}{r_1}.
\end{aligned}
$$

Отсюда
$$|f(r_1e^{i\theta_1})-f(r_1e^{i\theta_2})|\leqslant A\mu(r_1|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|).$$

2. Доказательство (2.9). Не уменьшая общности, можно считать, что $0\leqslant r_1<r_2<1$. Тогда из леммы 2 следует, что

$$|f(r_1e^{i\theta_2})-f(r_2e^{i\theta_2})|\leqslant\int_{r_1}^{r_2}|f'(te^{i\theta_2})|\,dt\leqslant$$
$$\leqslant A_2\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mu(1-t)}{1-t}\,dt=\int_{1-r_2}^{1-r_1}\frac{\mu(x)}{x}\,dx=A_2I(r_1,r_2).$$

Рассмотрим два случая:

а) $r_2<\frac{1+r_1}{2}$, что эквивалентно неравенству $r_2-r_1<1-r_2$. Из свойств функции $\frac{\mu(x)}{x}$ следует, что
$$I(r_1,r_2)\leqslant\frac{C\mu(r_2-r_1)}{r_2-r_1}\int_{r_1}^{r_2}dx=C\mu(r_2-r_1).$$

б) $r_2\geqslant\frac{1+r_1}{2}$. Тогда $r_2-r_1\geqslant 1-r_2$, а значит, используя свойства функции $\mu(t)$, интеграл $I(r_1,r_2)$ можно оценить следующим образом:

$$I(r_1,r_2)=\int_{1-r_2}^{r_2-r_1}\frac{\mu(x)}{x}\,dx+\int_{r_2-r_1}^{1-r_1}\frac{\mu(x)}{x}\,dx\leqslant$$
$$\leqslant A_3\mu(r_2-r_1)+A_4\frac{\mu(r_2-r_1)}{r_2-r_1}\int_{r_2-r_1}^{1-r_1}dx=$$
$$=A_3\mu(r_2-r_1)+A_4\mu(r_2-r_1)\frac{1-r_2}{r_2-r_1}\leqslant$$
$$\leqslant A_3\mu(r_2-r_1)+A_4\mu(r_2-r_1)=\check{C}\mu(r_2-r_1).$$

Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Пусть* $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)\in H(G)$, *где* $G=\{z:|z|<1\}$. *Пусть далее* $u(r,\theta)\in C(\overline{G})$ *и на* $\partial G=\{z:|z|=1\}$ *удовлетворяет условию*
$$|u(e^{i\theta_1})-u(e^{i\theta_2})|\leqslant A\mu(|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}|),\tag{2.11}$$
где $\mu\in\Phi$. *Тогда для f выполняется условие* (2.7), *то есть*
$$|f(\zeta_1)-f(\zeta_2)|\leqslant C\mu(|\zeta_1-\zeta_2|),\quad \zeta_1,\zeta_2\in\overline{G}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что в G функцию $f(z)$ можно представить по формуле Шварца следующим образом:
$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{it})\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt+iC.\tag{2.12}$$

Отсюда
$$f'(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2u(e^{it})e^{it}}{(e^{it}-z)^2}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(e^{it})-u(e^{i\theta})}{(e^{it}-z)^2}e^{it}dt.\tag{2.13}$$

Повторяя рассуждения доказательства леммы 2, получим, что для $f'(z)$ выполнено (2.2). Но тогда по лемме 2 следует, что для f выполнено (2.1), что является условием леммы 3. Значит, для f верно (2.7), что и требовалось доказать. Лемма 4 доказана. □

Перейдём к доказательству теоремы 2. В качестве $f(z)$ возьмём следующую функцию:
$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(e^{it})\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt+ic.\tag{2.14}$$

Известно, что f является голоморфной в G функцией, причём $u = \operatorname{Re} f$ является непрерывной в G (см. напр. [10, с. 125–126]). Построим теперь функцию $v(r,\theta)$, гармонически сопряжённую с функцией $u(r,\theta)$ в круге G. Тогда по лемме 4 функция $f(z)$ удовлетворяет условию (2.7). Теорема 2 доказана. $\square$

Замечание 1. Интерес представляет вопрос, насколько существенным является условие, что $\mu \in \Phi$: насколько изменятся утверждения лемм 2– 4 и основное утверждение при более слабых ограничениях на функцию μ.

Авторы выражают благодарность профессору М. Райссигу и доценту С. В. Рогозину за полезные обсуждения и рекомендации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. — М.: ГИТТЛ, 1950. — 338 с.
2. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966. — 630 с.
3. Монахов. В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. — Новосибирск: Наука, 1977. — 424 с.
4. Интегральные уравнения / Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я. — М.: Наука, 1968. — 448 с.
5. Tutschke W. Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. Klassische, funktionalanalytische und komplexe Methoden. — Leipzig: Teubner-Texte zur Mathematik, 1978. — 193 s.
6. Райссиг М., Тимофеев А. Ю. Об эквивалентности функциональных пространств в граничной задаче Дирихле для голоморфных функций // Поэт, учёный, педагог: Материалы Всерос. конф., посвящ. Н. А. Фролову. Сыктывкар: СГУ, 2009. — С. 153–155.
7. Бабаев А. А., Салаев В. В. Об одном аналоге теоремы Племеля–Привалова в случае негладких кривых и её приложения // Доклады АН СССР. 1965. — Т. 161. — С. 267–269.
8. Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1980. — 416 с.
9. Michlin S. G., Prößdorf S. Singuläre Integraloperatoren. Berlin: Akademie-Verlag, 1980. — 514 s.
10. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1969. — 240 с.
11. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.

Поступила в редакцию 01.09.09

A. S. Ilchukov, A. Y. Timofeev

Dirichlet problem for holomorphic functions in spaces described by modulus of continuity.

We study and solve the Dirichlet problem for holomorphic functions in spaces, described by modulus of continuity with predefined conditions.

Keywords: Dirichlet problem, holomorphic functions, modulus of continuity.

Mathematical Subject Classifications: 30E25

Ильчуков Александр Сергеевич, магистрант, математический факультет, Сыктывкарский государственный университет, 167001, г. Сыктывкар, Октябрьский проспект, 55,
Тимофеев Алексей Юрьевич, к. ф.-м. н., доцент, проректор по учебной работе СыктГУ, Сыктывкарский государственный университет, 167001, г. Сыктывкар, Октябрьский проспект, 55, E-mail: tim@syktsu.ru