ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2010. Вып. 1

УДК 519.168

© *Е. Е. Иванко*

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО МАРШРУТА В ЗАДАЧЕ КОММИВОЯЖЕРА ПРИ ДОБАВЛЕНИИ НОВОЙ ВЕРШИНЫ И ПРИ УДАЛЕНИИ СУЩЕСТВУЮЩЕЙ

Получены достаточные условия, обеспечивающие сохранение оптимальности маршрута обхода множества вершин при вставке новой вершины между двумя последовательными (в смысле существующего оптимального маршрута) вершинами, а также при удалении вершины с последующим соединением предшествующей и последующей вершин существующего оптимального пути. Проведен ряд экспериментов, демонстрирующих области устойчивости для задачи коммивояжера на плоскости.

Ключевые слова: задача коммивояжера, устойчивость.

Введение

Задача поиска оптимального маршрута обхода вершин заданного множества с заданной матрицей попарных стоимостей перемещения между вершинами (далее — «TSP» от английского «Travelling Salesman Problem») является классической NP-трудной задачей с богатым набором приложений [1–5]. В настоящей работе под аббревиатурой TSP мы везде будем понимать задачу оптимального обхода множества вершин с фиксированным началом и концом маршрута. Это нетрадиционная формулировка, однако в теоретическом смысле она не менее интересна, а в приложениях часто оказыватся более полезна.

Как и во всякой задаче оптимизации, в TSP возникает ряд вопросов, касающихся устойчивости решения. В литературе [6–8] изучен вопрос устойчивости решения при изменениях, вносимых в матрицу попарных расстояний, однако автор не знаком с работами, посвященными устойчивости оптимального решения TSP при изменениях в исходном множестве вершин. В этой связи необходимо упомянуть работу [9], посвященную различным аспектам устойчивости жадного алгоритма. В настоящей работе получены достаточные условия устойчивости оптимального маршрута обхода заданного множества вершин как при добавлении новой вершины, так и при удалении существующей. А именно, изучены достаточные условия сохранения оптимальности маршрута с существующим порядком обхода вершин при размещении новой вершины между двумя последовательными, в смысле существующего маршрута, вершинами, а также при удалении одной из вершин существующего оптимального пути с последующим соединением предшествующей и последующей вершин ребром.

Отметим, что алгоритм проверки полученных достаточных условий обладает полиномиальной вычислительной сложностью, что не только представляет самостоятельный интерес, но и открывает пути к полиномиальному конструированию оптимальных решений масштабных TSP с помощью пошаговой трансформаций множества исходных вершин.

В теоретической части статьи последовательно рассматриваются случаи добавления и удаления вершины. Для каждого из них сначала формулируются и доказываются достаточные условия устойчивости оптимального маршрута. Затем демонстрируется полиномиальность алгоритма проверки сформулированных условий. В завершение рассматривается пример, демонстрирующий существенность полученных достаточных условий устойчивости.

Экспериментальная часть статьи также разбита на две смысловые части и посвящена рассмотрению примеров применения предложенных достаточных условий при добавлении и при удалении вершины в задачах об оптимальном обходе вершин на евклидовой плоскости. В частности, на плоскости строятся области, внутри которых гарантируется устойчивое добавление произвольной новой вершины, а также приводятся примеры проверки вершин исходного множества на возможность устойчивого удаления.

§ 1. Достаточные условия устойчивости

В данном разделе мы предложим достаточные условия устойчивости оптимального маршрута обхода множества вершин как при добавлении новой вершины к исходному множеству, так и при удалении одной вершины из исходного множества. При этом мы считаем, что оптимальный маршрут для исходного множества вершин уже найден и интересуемся полиномиальным алгоритмом, позволяющим определить, при каких условиях добавление или удаление одной вершины не влияет на имеющийся оптимальный порядок обхода вершин.

Пусть X — некоторое множество с заданной функцией стоимости перемещений для каждой упорядоченной пары элементов из X:

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $\mathbb{R}$ — традиционно множество действительных чисел. Мы не требуем симметричности функции $d,$ так же как и выполнения неравенства треугольника и аксиомы тождества. Пусть далее в X выделены n вершин $S = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset X.$ Множество S будем называть далее исходным множеством вершин. Рассмотрим множество $G(n)$ всех перестановок индексов элементов множества S, сохраняющих начальный и конечный индексы:

$$G(n) = \{\gamma : \overline{1,n} \leftrightarrow \overline{1,n}; \quad \gamma(1) = 1,\ \gamma(n) = n\},$$

где γ — взаимно однозначное отображение множества $\overline{1,n}$ на себя. Иными словами, мы считаем вершину старта и вершину финиша заданными и неизменными. С помощью множества $G(n)$ определим множество $T(S)$ всех маршрутов обхода элементов множества S, проходящих через каждую вершину S ровно один раз, начинающихся в вершине a_1 и заканчивающихся в вершине a_n:

$$T(S) = \{(a_{\gamma(1)}, \ldots, a_{\gamma(n)}) : \ \gamma \in G(n)\}.$$

Длиной $D : T(S) \to \mathbb{R}$ маршрута $\alpha = (a_{\gamma(1)}, \ldots, a_{\gamma(n)}) \in T(S)$ будем называть сумму длин переходов между вершинами S в ходе следования маршруту α:

$$D(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} d(a_{\gamma(i)}, a_{\gamma(i+1)}).$$

Пусть $\alpha_0 = (a_{\gamma_0(1)}, \ldots, a_{\gamma_0(n)}) \in T(S)$ — кратчайший (оптимальный) маршрут обхода множества S:

$$D_0 \triangleq D(\alpha_0) = \min_{\alpha \in T(S)} D(\alpha). \tag{2}$$

Теорема 1. *Используя вышеуказанные обозначения, рассмотрим вершину из X, не принадлежащую исходному множеству: $z \in X \setminus S$. Добавим ее к исходным данным, конструируя $S' = S \cup \{z\};$ тогда если выполняется условие*

$$d(a_{\gamma_0(k)}, z) + d(z, a_{\gamma_0(k+1)}) - d(a_{\gamma_0(k)}, a_{\gamma_0(k+1)}) = \min_{b_i, b_j \in S} [d(b_i, z) + d(z, b_j) - d(b_i, b_j)] \tag{3}$$

при $b_i \neq b_j$ для некоторого $k \in \overline{1, n-1}$, то

$$\alpha_0' = (a_{\gamma_0(1)}, \ldots, a_{\gamma_0(k)}, z, a_{\gamma_0(k+1)}, \ldots, a_{\gamma_0(n)}) \tag{4}$$

— кратчайший маршрут обхода множества S'.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть длина маршрута (4) равна D'_0. Рассмотрим произвольный маршрут обхода множества S' : $(b_1,\ldots,b_m,z,b_{m+1},\ldots,b_n)$, где $b_1,\ldots,b_n\in S$; $b_1=a_1$, $b_n=a_n$; $m\in\overline{1,n-1}$. Его длина равна:

$$D'=\sum_{i=1}^{m-1}d(b_i,b_{i+1})+d(b_m,z)+d(z,b_{m+1})+\sum_{i=m+1}^{n-1}d(b_i,b_{i+1}).$$

При этом естественным образом считаем $\sum_i^j d(b_i,b_{i+1})=0$, если $i>j$. Исключим из этого маршрута вершину z и соединим вершины b_m и b_{m+1} напрямую. Получим маршрут обхода множества $S:(b_1,\ldots,b_m,b_{m+1},\ldots,b_n)$, длина которого составит

$$D=\sum_{i=1}^{n-1}d(b_i,b_{i+1}).$$

По определению (2) D_0 — длина кратчайшего маршрута обхода множества S, следовательно, $D_0\leqslant D$:

$$\sum_{i=1}^{n-1}d(a_{\gamma_0(i)},a_{\gamma_0(i+1)})\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}d(b_i,b_{i+1}).\tag{5}$$

Добавим к обеим частям полученного неравенства слагаемое $d(a_{\gamma_0(k)},z)+d(z,a_{\gamma_0(k+1)})-d(a_{\gamma_0(k)},a_{\gamma_0(k+1)})$ и воспользуемся условием (3). В левой части (5) имеем

$$\sum_{i=1}^{n-1}d(a_{\gamma_0(i)},a_{\gamma_0(i+1)})+d(a_{\gamma_0(k)},z)+d(z,a_{\gamma_0(k+1)})-d(a_{\gamma_0(k)},a_{\gamma_0(k+1)})=$$
$$=\sum_{i=1}^{k-1}d(a_{\gamma_0(i)},a_{\gamma_0(i+1)})+d(a_{\gamma_0(k)},z)+d(z,a_{\gamma_0(k+1)})+\sum_{i=k+1}^{n-1}d(a_{\gamma_0(i)},a_{\gamma_0(i+1)})=D'_0.$$

В правой части получим выражение

$$\sum_{i=1}^{n-1}d(b_i,b_{i+1})+d(a_{\gamma_0(k)},z)+d(z,a_{\gamma_0(k+1)})-d(a_{\gamma_0(k)},a_{\gamma_0(k+1)}),$$

которое по условию (3) ограничено сверху следующим выражением:

$$\sum_{i=1}^{n-1}d(b_i,b_{i+1})+d(b_m,z)+d(z,b_{m+1})-d(b_m,b_{m+1})=$$
$$=\sum_{i=1}^{m-1}d(b_i,b_{i+1})+d(b_m,z)+d(z,b_{m+1})+\sum_{i=m+1}^{n-1}d(b_i,b_{i+1})=D'.$$

Учитывая сказанное, получим неравенство

$$D'_0\leqslant D',$$

справедливое для произвольного маршрута обхода множества S', что гарантирует оптимальность маршрута (4). Теорема доказана. □

Оценим вычислительную сложность алгоритма проверки достаточных условий, сформулированных в теореме 1.

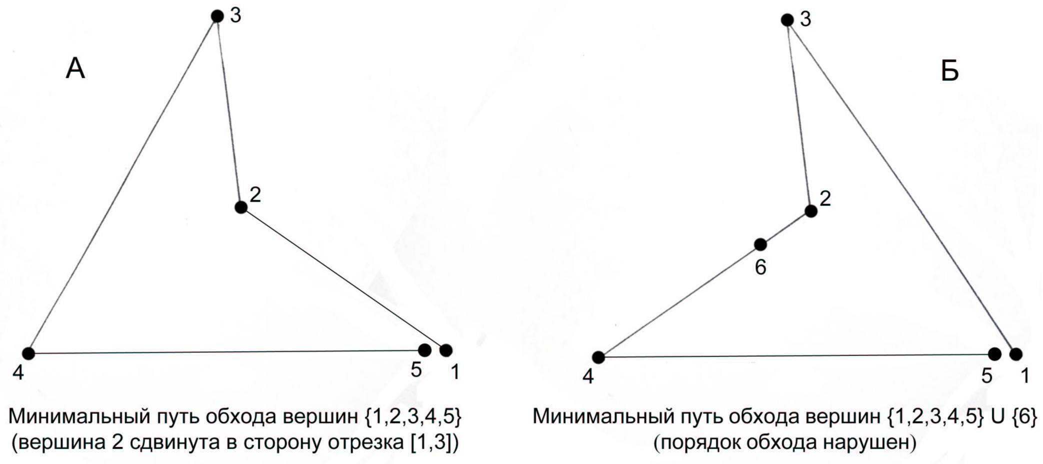

Рис. 1. Пример, демонстрирующий существенность достаточных условий теорем 1 и 2. На рисунке *А* изображен оптимальный путь обхода вершин {1,2,3,4,5}, начиная с вершины 1 и заканчивая вершиной 5. (Вершина 2 несколько сдвинута в сторону отрезка [1,3].) При добавлении вершины 6 оптимальный путь обхода множества вершин {1,2,3,4,5,6}, начиная с 1 и заканчивая 5, не может быть получен вставкой новой вершины между некими двумя последовательными вершинами оптимального пути рисунка *А*. На рисунке *Б* видно, что в оптимальном пути обхода множества вершин {1,2,3,4,5,6} порядок, отраженный на рисунке *А*, нарушается. Совмещением вершин 1 и 5 можно получить пример невозможности вставки новой вершины с сохранением оптимальности для замкнутой задачи коммивояжера.

Предложение 1. *Пусть задано множество исходных вершин* $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *и некая вершина* $z \notin S$ *; тогда верхнюю асимптотическую оценку вычислительной сложности алгоритма проверки достаточных условий теоремы* 1 *устойчивости оптимального маршрута обхода множества* S *при добавлении вершины* z *можно записать в виде* $O(n^3)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим, может ли новая вершина z быть вставлена в существующий оптимальный маршрут обхода множества S без потери порядка согласно схеме теоремы 1. Для этого необходимо перебрать все пары последовательных вершин существующего оптимального маршрута, всего $n-1$ пару. Для того чтобы проверить, можно ли вставить вершину z между конкретными двумя последовательными вершинами согласно (3), требуется рассчитать минимум, выполнив $O(n^2)$ операций. Таким образом, для произвольной вершины $z \notin S$ проверка возможности ее включения в существующий оптимальный маршрут по схеме теоремы 1 без потери оптимальности нового маршрута потребует $O(n^3)$ операций. □

Сформулированные достаточные условия существенны. На рис. 1 приведен пример ситуации, когда при добавлении новой вершины оптимальный путь обхода нового множества не может быть получен при помощи размещения добавленной вершины между какими-либо двумя последовательными вершинами существующего пути.

Рассмотрим теперь достаточные условия, позволяющие гарантировать оптимальность маршрута, получающегося из существующего оптимального удалением одной вершины и соединением соседних (в смысле существующего оптимального маршрута) вершин напрямую. Для начала докажем простое утверждение, гарантирующее оптимальность маршрута, получающегося в результате удаления любого количества последовательных (в смысле существующего оптимального маршрута) вершин, начиная с начала либо с конца оптимального маршрута.

Утверждение 1. *Пусть, как и прежде,* $\alpha_0 = (a_{\gamma_0(1)}, \ldots, a_{\gamma_0(n)}) \in T(S)$ — *кратчайший путь обхода множества* $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$. *Тогда при* $k < n$ *маршрут* $\beta_0 = (a_{\gamma_0(1)}, \ldots, a_{\gamma_0(k)})$

будет являться оптимальным маршрутом обхода множества $\{a_{\gamma_0(1)},\ldots,a_{\gamma_0(k)}\}$ *среди всех маршрутов, начинающихся в* $a_{\gamma_0(1)}$ *и заканчивающихся в* $a_{\gamma_0(k)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, пусть маршрут β_0 не является кратчайшим; тогда существует маршрут $\beta_1=(a_{\gamma_1(\gamma_0(1))},\ldots,a_{\gamma_1(\gamma_0(k))})$, где $\gamma_1:\overline{1,k}\leftrightarrow\overline{1,k}$; $\gamma_1(\gamma_0(1))=\gamma_0(1),\gamma_1(\gamma_0(k))=\gamma_0(k)$, отличный от β_0 и обладающий меньшей длиной. В этом случае мы можем составить маршрут обхода всего множества S следующим образом:

$$\alpha_1=(a_{\gamma_1(\gamma_0(1))},\ldots,a_{\gamma_1(\gamma_0(k))},a_{\gamma_0(k+1)},\ldots,a_{\gamma_0(n)}).$$

Очевидно, что маршрут α_1 обладает меньшей длиной, чем α_0, так как первая его часть вплоть до $a_{\gamma_1(\gamma_0(k))}=a_{\gamma_0(k)}$ короче соответствующей части маршрута α_0 , а вторые части совпадают. Однако это противоречит условию (2), согласно которому α_0 – кратчайший маршрут обхода S. Утверждение доказано. $\square$

Аналогичным образом можно показать, что удаление набора последовательных вершин из начала оптимального пути сохранит оптимальность оставшегося участка. Теперь сформулируем схожие с (3) достаточные условия устойчивости оптимального маршрута при удалении «внутренней» вершины. Доказательство проведем аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 2. *Воспользуемся прежними обозначениями: пусть* $\alpha_0=(a_{\gamma_0(1)},\ldots,a_{\gamma_0(n)})\in T(S)$ *— оптимальный путь обхода исходного множества* $S=\{a_1,\ldots,a_n\}$. *Рассмотрим вершину, принадлежащую исходному множеству* $a_{\gamma_0(k)}\in S$ *и не являющуюся ни начальной, ни конечной, иными словами,* $k\notin\{1,n\}$. *Удалим ее из исходных данных, конструируя* $S'=S\setminus\{a_{\gamma_0(k)}\}$; *тогда если выполняется одно из условий*

$$d(a_{\gamma_0(k-1)},a_{\gamma_0(k+1)})-d(a_{\gamma_0(k-1)},a_{\gamma_0(k)})-d(a_{\gamma_0(k)},a_{\gamma_0(k+1)})\leqslant \\ \leqslant\min_{b_i\in S'\setminus\{a_1\}}[d(a_1,b_i)-d(a_1,a_{\gamma_0(k)})-d(a_{\gamma_0(k)},b_i)], \tag{6}$$

$$d(a_{\gamma_0(k-1)},a_{\gamma_0(k+1)})-d(a_{\gamma_0(k-1)},a_{\gamma_0(k)})-d(a_{\gamma_0(k)},a_{\gamma_0(k+1)})\leqslant \\ \leqslant\min_{b_i\in S'\setminus\{a_n\}}[d(b_i,a_n)-d(b_i,a_{\gamma_0(k)})-d(a_{\gamma_0(k)},a_n)], \tag{7}$$

то

$$\alpha_0'=(a_{\gamma_0(1)},\ldots,a_{\gamma_0(k-1)},a_{\gamma_0(k+1)},\ldots,a_{\gamma_0(n)}) \tag{8}$$

— кратчайший маршрут обхода множества S'.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, как и прежде, длина маршрута (8) равна D_0' . Рассмотрим произвольный маршрут обхода множества $S':(b_1,\ldots,b_{n-1})$, где $b_1,\ldots,b_{n-1}\in S'$; $b_1=a_1$, $b_{n-1}=a_n$. Его длина равна

$$D'=\sum_{i=1}^{n-2}d(b_i,b_{i+1}).$$

Если выполняется условие (6), то добавим к этому маршруту вершину $a_{\gamma_0(k)}$ между вершинами b_1 и b_2. Получим следующий маршрут обхода множества $S:(b_1,a_{\gamma_0(k)},b_2,\ldots,b_{n-1})$. Если же выполняется условие (7), то добавим вершину $a_{\gamma_0(k)}$ между b_{n-2} и b_{n-1} и для S получим маршрут $(b_1,\ldots,b_{n-2},a_{\gamma_0(k)},b_{n-1})$. Пусть без ограничения общности справедливо условие (6), тогда длина получившегося после вставки вершины маршрута составит

$$D=d(b_1,a_{\gamma_0(k)})+d(a_{\gamma_0(k)},b_2)+\sum_{i=2}^{n-2}d(b_i,b_{i+1}).$$

По определению (2) D_0 — длина кратчайшего маршрута обхода множества S, следовательно, $D_0 \leqslant D$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} d(a_{\gamma_0(i)}, a_{\gamma_0(i+1)}) \leqslant d(b_1, a_{\gamma_0(k)}) + d(a_{\gamma_0(k)}, b_2) + \sum_{i=2}^{n-2} d(b_i, b_{i+1}). \tag{9}$$

Добавим к обеим частям полученного неравенства слагаемое $d(b_1, b_2) - d(b_1, a_{\gamma_0(k)}) - d(a_{\gamma_0(k)}, b_2)$ и воспользуемся условием (6). В левой части (9) имеем

$$\sum_{i=1}^{n-1} d(a_{\gamma_0(i)}, a_{\gamma_0(i+1)}) + d(b_1, b_2) - d(b_1, a_{\gamma_0(k)}) - d(a_{\gamma_0(k)}, b_2),$$

которое по условию (6) не менее выражения

$$\sum_{i=1}^{n-1} d(a_{\gamma_0(i)}, a_{\gamma_0(i+1)}) + d(a_{\gamma_0(k-1)}, a_{\gamma_0(k+1)}) - d(a_{\gamma_0(k-1)}, a_{\gamma_0(k)}) - d(a_{\gamma_0(k)}, a_{\gamma_0(k+1)}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-2} d(a_{\gamma_0(i)}, a_{\gamma_0(i+1)}) + d(a_{\gamma_0(k-1)}, a_{\gamma_0(k+1)}) + \sum_{i=k+1}^{n-1} d(a_{\gamma_0(i)}, a_{\gamma_0(i+1)}) = D'_0.$$

В правой части (9) после добавления получим выражение

$$d(b_1, b_2) + \sum_{i=2}^{n-2} d(b_i, b_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n-2} d(b_i, b_{i+1}) = D'.$$

Учитывая сказанное, получим неравенство

$$D'_0 \leqslant D',$$

справедливое для произвольного маршрута обхода множества S', что гарантирует оптимальность маршрута (8). Доказательство в случае выполнения условий (7) проводится аналогично. Теорема доказана. □

По аналогии с предложением 1 для случая добавления вершины рассмотрим вычислительную сложность алгоритма проверки достаточных условий, сформулированных в теореме 2.

Предложение 2. *Пусть задано множество исходных вершин* $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *и вершина* $z \in S \setminus \{a_1, a_n\}$ *; тогда верхнюю асимптотическую оценку вычислительной сложности алгоритма проверки достаточных условий теоремы* 2 *устойчивости оптимального маршрута обхода множества* S *при удалении вершины* z *можно записать в виде* $O(n)$.

Доказательство. При проверке каждого из условий (6) и (7) потребуется $n - 2$ операции сравнения. Таким образом, общее количество операций сравнения составит $2(n-2)$ и верхняя асимптотическая оценка сложности проверки условий теоремы 2 может быть записана как $O(n)$. □

Существенность условий теоремы 2 вновь демонстрируется примером на рис. 1. Так, при удалении вершины 6 оптимальный путь нельзя получить соединением предшествующей и последующей вершин 2 и 4 в виде $(1, 3, 2, 4, 5)$.

Перейдем теперь к экспериментальной части. Для начала рассмотрим метод синтеза областей устойчивости при добавлении вершины в метрическом пространстве, основанный на переборе позиций добавляемой вершины в перекрестиях целочисленной решетки. Двумерный вариант этого метода использован в настоящей статье для получения иллюстраций.

§ 2. Эксперименты

Пусть задано множество вершин S в конечномерном линейном пространстве $\mathbb{R}^N$, каждая вершина множества S обладает конечным набором целочисленных координат, а функция d из (1) для каждой пары вершин равна расстоянию между данными вершинами в смысле заданной в пространстве метрики. Пусть известен оптимальный маршрут $\alpha_0 = (a_{\gamma_0(1)}, \ldots, a_{\gamma_0(n)})$ обхода множества S, где, как и прежде, $\gamma_0 : \overline{1,n} \leftrightarrow \overline{1,n}$. Пусть, кроме того, каждому ребру α_0 взаимно однозначно соответствует свой «цвет». Рассмотрим множество точек с целочисленными координатами, принадлежащих N-мерному кубу:

$$Q = \prod_{i=1}^{N} L_i, \quad L_i = \{x \in \mathbb{Z} : \ q_i \leqslant x \leqslant q_i + l; \ q_i, l \in \mathbb{R}\}$$

с ребром длины l. Пусть исходное множество вершин S содержится в кубе Q: $S \subset Q$.

Для любой точки $z \in Q \setminus S$ с помощью достаточных условий (3) проверим возможность включения этой точки в качестве новой вершины в оптимальный маршрут α_0. Если точка z может быть включена в маршрут α_0 между вершинами $a_{\gamma_0(i)}$ и $a_{\gamma_0(i+1)}$ без потери оптимальности нового маршрута, то «окрасим» ее в «цвет», соответствующий ребру $(a_{\gamma_0(i)}, a_{\gamma_0(i+1)})$ оптимального маршрута α_0.

Рассмотрим частный случай сформулированного метода. Пусть 15 вершин множества S обладают целочисленными координатами и располагаются на евклидовой плоскости внутри квадрата $(1, 400) \times (1, 400)$. Стоимостью перемещения между двумя вершинами является евклидово расстояние между этими вершинами. С помощью метода динамического программирования [2] построим оптимальный путь обхода множества S. Для того чтобы соседние области визуально разделялись, каждому четному из 9 ребер оптимального маршрута поставим в соответствие светло-серый цвет, каждому нечетому — темно-серый. Для всякой новой вершины $z = (i, j) \in \overline{1, 400} \times \overline{1, 400} \setminus S$ проверим достаточные условия (3) включения ее в существующий оптимальный маршрут обхода множества S без потери оптимальности маршрута обхода нового множества $S \cup \{z\}$. Если такое включение возможно на i-м ребре, то окрасим точку $z = (i, j)$ в цвет, соответствующий этому ребру. Результаты шести экспериментов, проведенных согласно описанной выше процедуре, представлены в таблице 1.

Так же как и эксперименты по добавлению новой вершины, эксперименты по удалению существующей вершины из оптимального маршрута проводились для 15 исходных вершин на плоскости с евклидовым расстоянием. Результаты шести таких экспериментов приведены в таблице 2. Для обозначения вершин, удовлетворяющих условиям теоремы 2, использовался выколотый кружок, остальные вершины по прежнему обозначены заштрихованным кружком.

Заключение

В настоящей работе изучены условия, в которых добавление новой вершины к оптимальному маршруту или удаление вершины из существующего оптимального маршрута обхода n вершин не нарушает его оптимальности. При этом, если достаточные условия выполнены, то в случае добавления новый оптимальный маршрут обхода $n+1$ вершины получается из существующего вставкой новой вершины между некоторыми двумя последовательными вершинами существующего оптимального маршрута обхода n вершин; в случае удаления вершины новый оптимальный маршрут обхода $n-1$ вершины получается из существующего заменой двух ребер, инцидентных удаленной вершине на одно, соединяющее предшествующую удаленной и следующую за удаленной вершины напрямую (в порядке следования, диктуемом существующим оптимальным маршрутом). Следует отметить полиномиальную вычислительную сложность методов проверки полученных достаточных условий. Полученные результаты не только представляют самостоятельный теоретический и прикладной интерес, но и являются отправным пунктом для нового исследования. Так, обладая условиями устойчивого добавления и удаления вершины, можно говорить о перемещении вершины внутри пересечения областей устойчивого добавления и удаления. В качестве развития настоящей работы планируется изучить возможность композиции перемещений вершин, приводящей к последовательной трансформации произвольной задачи комивояжера к одной из стандартных форм, например сведение к правильному многоугольнику в случае плоской метрической задачи. Отдельный интерес представляет исследование необходимых условий устойчивости оптимального маршрута обхода множества при изменениях в составе вершин этого множества. Автор благодарит А. Г. Ченцова за плодотворные дискуссии, стимулирующие развитие данных исследований.

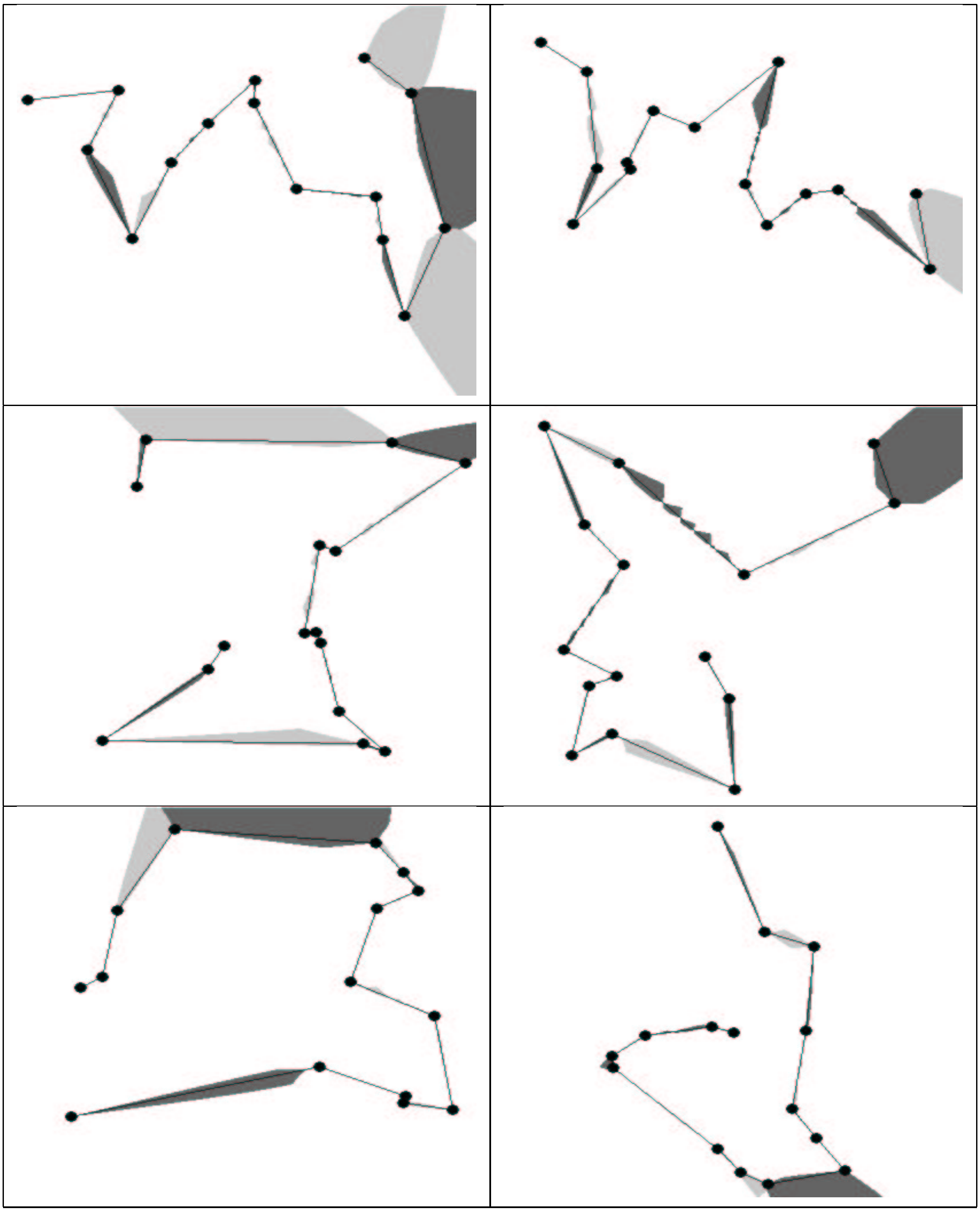

Таблица 1. Примеры областей устойчивости при добавлении новой вершины к 15 вершинам на евклидовой плоскости. Добавление новой вершины внутрь любой из областей, отмеченных серым цветом, позволяет включить добавленную вершину между вершинами, инцидентными соответствующему области ребру без потери оптимальности нового маршрута

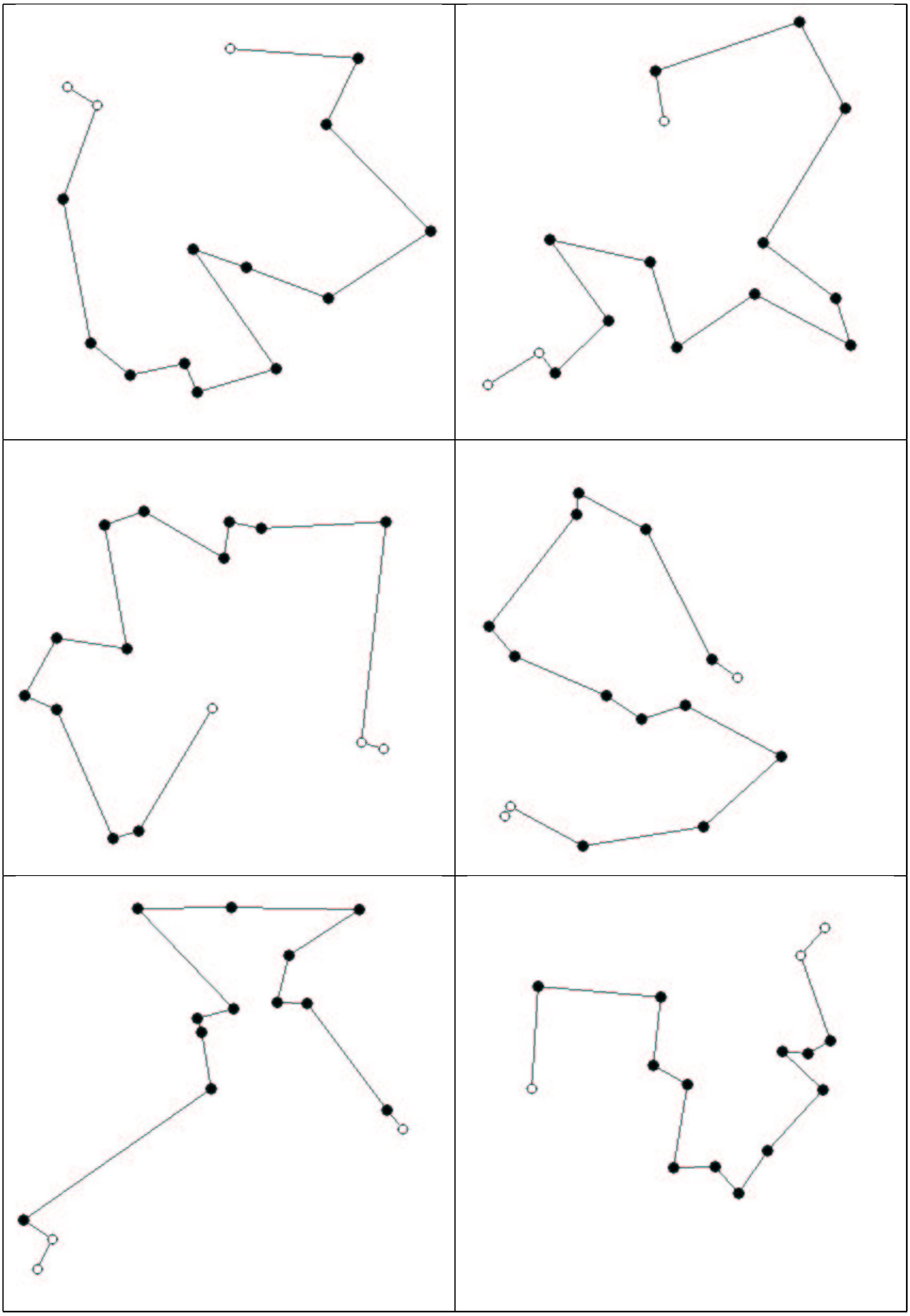

Таблица 2. Примеры выполнения достаточных условий устойчивости маршрута обхода 15 вершин на евклидовой плоскости при удалении одной вершины. Вершины, удовлетворяющие данным условиям, обозначены выколотыми кружками. Согласно утверждению 1 начальная и конечная вершины также могут быть изъяты без потери оптимальности

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gutin G., Punnen A. P. The Travelling Salesman Problem and Its Variations. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2007. — 830 p.
2. Ченцов А. Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. — Москва; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2008. — 238 с.
3. Avner P. et al. A Radiation Hybrid Transcript May of the Mouse Genome // Nature Genetics. — 2001. — Vol. 29. — P. 194–200.
4. Agarwala R. et al. A Fast and Scalable Radiation Hybrid Map Construction and Integration Strategy // Genome Research. — 2000. — Vol. 10. — P. 350–364.
5. Baily C., McLain T., Beard R. Fuel Saving Strategies for Separated Spacecraft Interferometry // Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. Denver, Colorado, 2000.
6. Poort E. S. Aspects of sensitivity analysis for the traveling salesman problem: PhD dissertation, University of Groningen. — Groningen, 1997. — 191 p.
7. Libura M. Sensitivity analysis for minimum Hamiltonian path and traveling salesman problems // Discrete Applied Mathematics. — 1991. — Vol. 30, Iss. 2-3. — P. 197–211.
8. Bökenhauer H.-J., Hromkovic J., Klasing R., Seibert S., Unger W. Towards the Notion of Stability of Approximation for hard Optimization Tasks and the Traveling Salesman Problem // Computer Science. — 1999. — Vol. 285. — P. 3–24.
9. Буслаева Л. Т. Об устойчивости алгоритма «иди в ближайший» // Сб. научн. трудов «Маршрутно-распределительные задачи». — Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 1995. — С.21-32.

Поступила в редакцию 01.12.09

E. E. Ivanko

Sufficient conditions of the stability of optimal route in the Travelling Salesman Problem in cases of a single vertex addition or substraction

The sufficient conditions for the stability of optimal travelling salesman route in case of the insertion of a new vertex between two consequent vertices and in case of the substraction of one vertex are deduced. Number of experiments, demonstrating stability areas and vertices are suggested for the Euclidean plane.

Keywords: travelling salesman problem, stability.

Mathematical Subject Classifications: 90C27

Иванко Евгений Евгеньевич, к. ф.-м. н., научный сотрудник отдела управляемых систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16, E-mail: ivanko@ural.ru