МАТЕМАТИКА 2010. Вып. 1

УДК 517.988.6, 517.977.1

© *Е. О. Бурлаков, Е. С. Жуковский*

О КОРРЕКТНОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ОТ ПАРАМЕТРОВ[1]

Для общей краевой задачи функционально-дифференциального уравнения получены условия непрерывной зависимости решения от параметров. Результаты применены к исследованию корректности линейной общей краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом и непрерывной зависимости периодических решений управляемых систем от значений управления и отклонения аргумента.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, краевые задачи, непрерывная зависимость решения от параметров, периодические решения управляемых систем.

Введение

Утверждения о корректности краевых задач, то есть условия непрерывной зависимости их решений от параметров имеют широкое применение в задачах управления и оптимизации, в математическом моделировании, численных методах. Тем не менее, работы по данной тематике немногочисленны. Для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений непрерывная зависимость от параметров решений краевых задач подробно рассмотрена В. П. Максимовым [1, гл. 5]. Это исследование базируется на условиях непрерывной зависимости от параметров решений нелинейных операторных уравнений. Основными из этих условий являются совокупная компактность и непрерывная сходимость последовательности операторов (см. обзор Г. М. Вайнико [2] и статью Ц. Артштейна [3]). Подобные условия применялись и другими авторами, например, при исследовании корректности интегральных и функциональных уравнений. Отметим, что такой подход обычно предполагает наличие решений у всех рассматриваемых уравнений и задач (поскольку далеко не всегда позволяет установить их разрешимость).

Предлагаемое исследование корректности краевых задач функционально-дифференциальных уравнений основывается на классической теореме о неявной функции. Такая методика позволяет доказать и существование решений краевых задач, близких некоторой фиксированной разрешимой задаче, и непрерывность решений от параметров. Полученные результаты применены к исследованию непрерывной зависимости периодических решений управляемых систем с отклоняющимся аргументом (от величины управления и отклонения аргумента). Доказаны утверждения, аналогичные известным теоремам Е. Л. Тонкова [4, 5] о зависимости от управления периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Обозначения

Пусть R^n — пространство векторов, имеющих n действительных компонент, с нормой $|\cdot|$ и частичным порядком

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \ \Leftrightarrow\ x_j \geqslant y_j,\ j = 1, 2, \ldots, n;$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке научной программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1./1131) и РФФИ (гранты 07–01–00305, 09–01–97503).

$C([a,b],R^n)$ — пространство непрерывных функций $x:[a,b]\to R^n$ с нормой $\|x\|_C=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$; μ — мера Лебега на $[a,b]$; $L_\infty([a,b],\mu,R^n)$ — пространство измеримых существенно ограниченных функций $y:[a,b]\to R^n$ с нормой $\|y\|_{L_\infty}=\operatorname*{vraisup}\limits_{t\in[a,b]}|y(t)|$; $L([a,b],\mu,R^n)$ — пространство измеримых суммируемых функций $y:[a,b]\to R^n$ с нормой $\|y\|_L=\int\limits_a^b|y(s)|\,ds$; $DL([a,b],\mu,R^n)$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x:[a,b]\to R^n$, производная которых суммируема, $\dot x\in L([a,b],\mu,R^n)$, с нормой $\|x\|_{DL}=|x(a)|+\|\dot x\|_L$. В перечисленных обозначениях будем опускать индекс $n=1$ и там, где это не вызовет недоразумений, не будем указывать, где определены и в каких множествах принимают значения рассматриваемые функции. Для обозначения сходимости по мере последовательности измеримых функций $y_i:[a,b]\to R^n$ к функции $y:[a,b]\to R^n$ используем обозначение $y_i\xrightarrow{\mu}y$. Для произвольных банахова пространства E, элемента $e_0\in E$ и числа $r>0$ открытый шар в пространстве E обозначим $B_E(e_0,r)=\{e\in E\mid\|e-e_0\|_E<r\}$. Пусть далее, $A\subset E$, тогда $\overline{A}$ означает замыкание множества A в пространстве E.

§ 1. Общая краевая задача

Предположим, что банахово пространство $M=M([a,b],\mu,R^n)$ вложено [6, с. 9] в пространство $L=L([a,b],\mu,R^n)$, то есть элементами пространства M являются суммируемые функции $y:[a,b]\to R^n$, и существует такое число c_1, что для произвольного $y\in M$ выполнено неравенство $\|y\|_L\leqslant c_1\|y\|_M$ (конечно, не исключается равенство $M=L$). Определим банахово пространство $DM=DM([a,b],\mu,R^n)$ таких абсолютно непрерывных функций $x:[a,b]\to R^n$, что $\dot x\in M$, с нормой $\|x\|_{DM}=|x(a)|+\|\dot x\|_M$. Очевидно, имеет место следующая цепочка вложений банаховых пространств $DM\subset DL\subset C$, и найдется такое c_2, что для произвольного $x\in DM$ выполнены неравенства $\|x\|_C\leqslant\|x\|_{DL}\leqslant c_2\|x\|_{DM}$. Пусть Λ — некоторое банахово пространство. Рассмотрим краевую задачу с параметром $\lambda\in\Lambda$ для функцинально-дифференциального уравнения

$$\dot x=F(x,\lambda),\quad \varphi(x,\lambda)=0; \tag{1}$$

где $F:DM\times\Lambda\to M$, $\varphi:DM\times\Lambda\to R^m$ — заданные отображения.

Предположим, что при $\lambda=\lambda_0\in\Lambda$ задача (1) имеет решение $x=x_0\in DM$. Применительно к краевой задаче (1) теорема о неявной функции [7, с. 332] имеет вид:

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) *существуют такие $\delta_0>0$, $\sigma_0>0$, что операторы F, φ непрерывны и имеют непрерывные производные Фреше F'_x, φ'_x при всех $(x,\lambda)\in B_{DM}(x_0,\sigma_0)\times B_\Lambda(\lambda_0,\delta_0)$;*
2) *определяемый равенством $\mathcal{L}z=\dot z-F'_x(x_0,\lambda_0)z$ оператор $\mathcal{L}:DM\to M$ сюръективен и $\dim(\ker\mathcal{L})=m$;*
3) *задача*

$$\mathcal{L}z=0,\quad lz=0,$$

где $l=\varphi'_x(x_0,\lambda_0)$, $l:DM\to R^m$, имеет только тривиальное решение $z=0\in DM$.

Тогда найдутся такие числа $\delta>0$, $\sigma>0$, что для любого параметра λ, принадлежащего шару $B_\Lambda(\lambda_0,\delta)$, в шаре $B_{DM}(x_0,\sigma)$ существует единственное решение $x=x(\lambda)$ задачи (1), причем отображение $x(\cdot):B_\Lambda(\lambda_0,\delta)\to DM$ непрерывно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{D}:DM\times\Lambda\to M$, $\mathcal{D}(x,\lambda)=\dot x$ — оператор дифференцирования функции x (являющийся константой по λ). В силу условия 1) оператор $(\mathcal{D}-F,\varphi)$ непрерывен и имеет непрерывную производную Фреше (по переменной x) на множестве $B_{DM}(x_0,\sigma_0)\times B_\Lambda(\lambda_0,\delta_0)$. Оператор $(\mathcal{L},l):DM\to M\times R^m$, где $(\mathcal{L},l)=(\mathcal{D}-F,\varphi)'_x(x_0,\lambda_0)$, ограничен. Докажем его обратимость.

Возьмем произвольные $f \in M$, $\alpha \in R^m$. Вследствие выполнения 2) найдется такой элемент $z_0 \in DM$, что $\mathcal{L}z_0 = f$. Далее, пусть $\{z_1, \dots, z_m\}$ — базис в $\ker\mathcal{L}$. В силу условия 3) система уравнений $l(\sum\limits_{j=1}^{m} c_j z_j) = 0$ имеет единственное решение $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$. Тогда матрица $(l_i z_j)_{m\times m}$, где l_i — компоненты вектор-функционала l, невырождена, и система $l(z_0 + \sum\limits_{j=1}^{m} c_j z_j) = \alpha$ разрешима. Таким образом, оператор $(\mathcal{L}, l) : DM \to M \times R^m$ сюръективен. Кроме того, в силу условия 3) данный оператор является инъективным и, следовательно, обратимым. Согласно теореме Банаха об обратном отображении [8, с. 225] оператор $(\mathcal{L}, l)^{-1} : M \times R^m \to DM$ ограничен. Итак, для оператора $(\mathcal{D} - F, \varphi) : DM \times \Lambda \to M \times R^m$ выполнены все условия теоремы о неявной функции [7, с. 332]. □

Замечание 1. В случае равенства $m = n$ выполнение условия 2) теоремы 1 следует, например, из фредгольмовости «главной части»

$$Q : M \to M, \quad Q\xi = \xi - F'_x(x_0, \lambda_0) \int_a^{(\cdot)} \xi(s)ds,$$

оператора $\mathcal{L}$ (см. [9, с. 35]). В связи с приложениями доказанного утверждения к конкретным краевым задачам, отметим, что фредгольмовость оператора $Q : M \to M$ имеет место в случае, когда оператор $F'_x(x_0, \lambda_0) : DM \to M$ допускает продолжение до оператора, действующего из пространства C в пространство M и либо это продолжение обладает свойством U-ограниченности [10, с. 105], либо вложение пространств $DM \subset C$ компактно [6, с. 10].

Теорема 1 сформулирована без предположения единственности решения краевой задачи (1) при значении параметра $\lambda = \lambda_0$. Рассмотрим ситуацию, когда для $\lambda = \lambda_0$ известно множество, в котором содержится единственное решение задачи (1). Итак, будем предполагать, что при $\lambda = \lambda_0$ в некотором открытом множестве $\Omega \subset C$ существует решение $x_0 = x(\lambda_0)$ задачи (1), и это решение единственно в $\overline{\Omega}$. Обозначим X_λ — множество решений задачи (1), отвечающих значению параметра λ и принадлежащих множеству $\overline{\Omega}$. Таким образом, $X_{\lambda_0} = \{x_0\}$. Рассмотрим свойства множеств X_λ при значениях λ, близких к λ_0.

Теорема 2. *Пусть*
1) *выполнены условия теоремы* 1;
2) *при всех* $\lambda \in B_\Lambda(\lambda_0, \delta_0)$ *оператор* $F(\cdot, \lambda) : DM \to M$ *допускает расширение до оператора* $\widetilde{F}(\cdot, \lambda) : C \to M$, *удовлетворяющего следующим условиям*:

2.1) *оператор* $\widetilde{F} : C \times B_\Lambda(\lambda_0, \delta_0) \to M$ *непрерывен на* $\overline{\Omega} \times \{\lambda_0\}$,

2.2) *в случае компактного вложения* $DM \subset C$ *оператор* $\widetilde{F} : C \times B_\Lambda(\lambda_0, \delta_0) \to M$ *ограничен; если же это вложение пространств не является компактным, то для каждого* $r > 0$ *найдется такая функция* $g_r \in L$, *что для любых*

$$(x, \lambda) \in (B_C(x_0, r) \bigcap \overline{\Omega}) \times B_\Lambda(\lambda_0, \delta_0)$$

и почти всех $t \in [a, b]$ *выполнено неравенство*

$$|(\widetilde{F}(x, \lambda))(t)| \leqslant g_r(t);$$

3) *найдется такая последовательность* $\{\lambda_i\} \subset \Lambda$, *что* $\|\lambda_i - \lambda_0\|_\Lambda \to 0$ *и при каждом* λ_i *множество* X_{λ_i} *содержит, по крайней мере, два элемента.*

Оказывается тогда, что множество Ω *неограничено и при каждом* λ_i *можно так выбрать* $\mathfrak{x}_i \in X_{\lambda_i}$, *что* $\|\mathfrak{x}_i - x_0\|_{DM} \to 0$ *и для любого* $x_i \in X_{\lambda_i}$, *удовлетворяющего при всех* i, *начиная с некоторого номера, неравенству* $x_i \neq \mathfrak{x}_i$, *выполнено* $\|x_i\|_C \to \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При каждом $\lambda \in \Lambda$ определим оператор $\mathcal{F}_\lambda : C \to C$ равенством $\mathcal{F}_\lambda x = x(a) + \int_a^{(\cdot)} (\widetilde{F}(x,\lambda))(s)ds$. Рассмотрим семейство уравнений

$$x = \mathcal{F}_\lambda x. \qquad (1_\lambda)$$

Так как при любом $x \in C$ имеет место включение $\mathcal{F}_\lambda x \in DM,$ то решениями каждого из уравнений (1_λ) могут являться только абсолютно непрерывные функции — элементы пространства $DM,$ и множества решений данного семейства уравнений и уравнения $\dot{x} = F(x,\lambda)$ совпадают. В силу условия 2.2) для любого $r > 0$ множество $\bigcup\limits_{\forall\lambda \in B_\Lambda(\lambda_0,\delta_0)} \mathcal{F}_\lambda(B_C(x_0,r)\bigcap\overline{\Omega})$ предкомпактно. Действительно, в случае компактного вложения $DM \subset C$ это очевидно. Если это вложение пространств не является компактным, вследствие ограниченности множества функций $\widetilde{F}(B_C(x_0,r)\bigcap\overline{\Omega},\ B_\Lambda(\lambda_0,\delta_0))$ суммируемой функцией $g_r,$ множество $\bigcup\limits_{\forall\lambda \in B_\Lambda(\lambda_0,\delta_0)} \mathcal{F}_\lambda(B_C(x_0,r)\bigcap\overline{\Omega})$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Таким образом, при $\lambda \in B_\Lambda(\lambda_0,\delta_0)$ операторы $\mathcal{F}_\lambda : B_C(x_0,r)\bigcap\overline{\Omega} \to C$ в совокупности компактны [1, с. 190].

Вследствие выполнения условия 1) существует такой номер I , что для всех $i \geqslant I$ множество X_{λ_i} непусто. Предположим, что множество Ω ограничено. Тогда, вследствие совокупной компактности операторов $\mathcal{F}_{\lambda_i},$ любая последовательность элементов $x_i \in X_{\lambda_i},$ $i = I, I+1, \ldots$ компактна. Все ее предельные точки содержатся в $\overline{\Omega}$ и, в силу условия 2.1), являются решениями задачи (1) при $\lambda = \lambda_0.$ Согласно условию 3) в каждом из множеств X_{λ_i} найдутся два различных элемента $x_i,$ $\mathfrak{x}_i,$ и будет выполнено $\|x_i - x_0\|_C \to 0,$ $\|\mathfrak{x}_i - x_0\|_C \to 0.$ Тогда $\|\dot{x}_i - \dot{x}_0\|_M \to 0,$ $\|\dot{\mathfrak{x}}_i - \dot{x}_0\|_M \to 0.$ Эти соотношения противоречат утверждению теоремы 1 о единственности решения $x = x(\lambda)$ в некоторой окрестности точки $x_0 \in DM$ при значениях $\lambda,$ достаточно близких к $\lambda_0.$ □

§ 2. Линейная краевая задача для нелинейного уравнения с отклоняющимся аргументом

Математическое описание многих явлений приводит к функционально-дифференциальным уравнениям с сосредоточенным или распределенным отклонением аргумента. Возникающие в приложениях краевые условия для таких уравнений часто задаются линейными функционалами (например, периодические, апериодические, многоточечные краевые задачи). Для исследования подобных краевых задач рассмотрим следующий частный случай краевой задачи (1):

$$\dot{x}(t) = f\left(t, \big(H(x,\lambda)\big)(t), \lambda\right), \quad l(x,\lambda) = \alpha(\lambda), \quad t \in [a,b]. \qquad (2)$$

Будем полагать заданными отображения

$$H = (H_1, \ldots, H_\eta) : DM(R^n) \times \Lambda \to L_\infty(R^{\eta\, n}),$$
$$f : [a,b] \times R^{\eta\, n} \times \Lambda \to R^n, \quad l : DM(R^n) \times \Lambda \to R^n, \quad \alpha : \Lambda \to R^n$$

(здесь во избежание недоразумений указываем область значений функций — элементов рассматриваемых пространств). Предполагаем, что при каждом параметре $\lambda \in \Lambda$ отображения $l(\cdot,\lambda),$ $H(\cdot,\lambda)$ являются линейными, а функция $f(\cdot,\cdot,\lambda),$ удовлетворяет условиям Каратеодори, то есть при любых $y \in R^{\eta\, n}$ функция $f(\cdot,y,\lambda)$ измерима, при почти всех $t \in [a,b]$ функция $f(t,\cdot,\lambda)$ непрерывна. Далее предполагаем, для любого числа $r > 0$ существует такая функция $g^r \in M(R^n),$ что для всех $y \in R^{\eta\, n},$ удовлетворяющих условию $|y| \leqslant r,$ и любых $\lambda \in \Lambda$ каждая j-я компонента вектора $f(t,y,\lambda)$ при почти всех $t \in [a,b]$ удовлетворяет неравенству

$$|f_j(t,y,\lambda)| \leqslant g_j^r(t), \quad j = 1, 2, \ldots, n\,. \qquad (3)$$

Относительно пространства $M = M(R^n)$ будем дополнительно предполагать, что оно идеальное и что для любой последовательности $\{v_i\} \subset M$, если существует функция $\mathcal{V} \in M$

такая что ее каждая j-я компонента удовлетворяет неравенству $|v_{ij}| \leqslant \mathcal{V}_j$ при всех натуральных i, и если $v_i \xrightarrow{\mu} 0$ на $[a,b]$, то $\|v_i\|_M \to 0$. В силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [8, с. 302] таким свойством обладает норма в пространстве L. Другой важный для нас пример пространства, удовлетворяющего этому условию, будет рассмотрен в следующем параграфе.

Пусть при $\lambda = \lambda_0$ задача (2) имеет решение $x_0 \in DM$. Используя теорему 1, сформулируем условия, гарантирующие, что из непрерывной зависимости (в каком-либо смысле) перечисленных выше отображений от значений параметра λ следует существование решения $x = x(\lambda)$ в некоторой окрестности λ_0 и его непрерывность по λ.

Обозначим $y_0 = H(x_0, \lambda_0) \in L_\infty(R^{\eta n})$.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) *найдутся такие $\sigma_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, что при почти всех $t \in [a,b]$, любых $y \in B_{R^{\eta n}}(y_0(t), \sigma_0)$ и $\lambda \in B_\Lambda(\lambda_0, \delta_0)$ существуют частные производные $\dfrac{\partial f_j}{\partial y_{dp}}(t, y, \lambda)$, $j, p = 1, \ldots, n$, $d = 1, \ldots, \eta$;*
2) *при каждом $\lambda \in B_\Lambda(\lambda_0, \delta_0)$ функции $\dfrac{\partial f_j}{\partial y_{dp}}(t, y, \lambda)$ измеримы по $t \in [a,b]$ и непрерывны по $y \in B_{R^{\eta n}}(y_0(t), \sigma_0)$, причем найдется такая функция $G \in M(R^n)$, что при почти всех $t \in [a,b]$, любых $y \in B_{R^{\eta n}}(y_0(t), \sigma_0)$ и $\lambda \in B_\Lambda(\lambda_0, \delta_0)$ выполнено неравенство*

$$\Big|\frac{\partial f_j}{\partial y_{dp}}(t, y, \lambda)\Big| \leqslant G_j(t)$$

для всех $j, p = 1, \ldots, n$, $d = 1, \ldots, \eta$;
3) *нормы линейных операторов $H(\cdot, \lambda) : DM(R^n) \to L_\infty(R^{\eta n})$, $\lambda \in B_\Lambda(\lambda_0, \delta_0)$, в совокупности ограничены: существует такое число $\mathfrak{H}$, что $\|H(\cdot, \lambda)\| \leqslant \mathfrak{H}$ при всех $\lambda \in B_\Lambda(\lambda_0, \delta_0)$;*
4) *оператор $H(\cdot, \lambda_0)$ допускает продолжение до ограниченного оператора, действующего из $C(R^n)$ в $L_\infty(R^{\eta n})$;*
5) *задача*

$$\dot{z}(t) = A(t)(H(z, \lambda_0))(t), \quad l(z, \lambda_0)z = 0, \quad t \in [a,b],$$

где $A(t) = \Big(\dfrac{\partial f_l}{\partial y_{jp}}(t, y_0(t), \lambda_0)\Big)_{n \times \eta n}$, имеет единственное решение $z = 0 \in DM$.

Пусть также для любого $\lambda \in B_\Lambda(\lambda_0, \delta_0)$ и любой последовательности $\lambda_i \to \lambda$ выполнено:
6) *$\alpha(\lambda_i) \to \alpha(\lambda)$;*
7) *при всяком $x \in DM(R^n)$ имеет место сходимость $l(x, \lambda_i) \to l(x, \lambda)$;*
8) *при каждом $x \in DM(R^n)$, $x \neq 0$, для последовательности функций*

$$\varepsilon_i(t) = \frac{1}{\|x\|_{DM}}\big|(H(x, \lambda_i))(t) - (H(x, \lambda))(t)\big|$$

выполнено $\varepsilon_i \xrightarrow{\mu} 0$ на $[a,b]$;
9) *для любого $y \in R^{\eta n}$ выполнено $f(\cdot, y, \lambda_i) \xrightarrow{\mu} f(\cdot, y, \lambda)$ на $[a,b]$;*
10) *для любого $y \in B_{L_\infty(R^{\eta n})}(y_0, \sigma_0)$ и произвольной последовательности $\{y_i\} \subset B_{L_\infty(R^{\eta n})}(y_0, \sigma_0)$, если $y_i(\cdot) \xrightarrow{\mu} y(\cdot)$ на $[a,b]$, то при всех $j, p = 1, \ldots, n$, $d = 1, \ldots, \eta$ имеет место сходимость*

$$\frac{\partial f_j}{\partial y_{dp}}(\cdot, y_i(\cdot), \lambda_i) \xrightarrow{\mu} \frac{\partial f_j}{\partial y_{dp}}(\cdot, y(\cdot), \lambda) \quad \text{на} \quad [a,b].$$

Оказывается тогда, что найдутся такие числа $\delta > 0$, $\sigma > 0$, что при всех $\lambda \in B_\Lambda(\lambda_0, \delta)$ в шаре $B_{DM}(x_0, \sigma)$ существует единственное решение $x = x(\lambda)$ задачи (2), причем отображение $x(\cdot) : B_\Lambda(\lambda_0, \delta) \to DM$ непрерывно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вследствие идеальности пространства $M = M(R^n)$ и в силу неравенства (3) определенное равенством $(N(y,\lambda))(t)=f(t,y(t),\lambda)$ отображение действует из пространства $L_\infty(R^{\eta\, n})\times\Lambda$ в пространство M. Запишем теперь задачу (2) в виде (1), где $\varphi(x,\lambda)=l(x,\lambda)-\alpha(\lambda)$, $F(x,\lambda)=N(H(x,\lambda),\lambda)$, оператор H определен выше.

Из условий 6) и 7) следует непрерывность функционала φ на множестве $DM\times B_\Lambda(\lambda_0,\delta_0)$. Покажем, что и оператор F непрерывен на этом множестве. Возьмем произвольные $x\in DM$, $\lambda\in B_\Lambda(\lambda_0,\delta_0)$. Пусть $\|x_i-x\|_{DM}\to 0$ и $\|\lambda_i-\lambda\|_\Lambda\to 0$. Оценим $\|F(x_i,\lambda_i)-F(x,\lambda)\|_M$. Во-первых, вследствие линейности оператора $H(\cdot,\lambda):DM\to L_\infty(R^{\eta\, n})$ и выполнения условий 3) и 8) имеем $(H(x_i,\lambda_i))(\cdot)\xrightarrow{\mu}(H(x,\lambda))(\cdot)$. Далее, воспользуемся неравенством

$$|f(t,(H(x_i,\lambda_i))(t),\lambda_i)-f(t,(H(x,\lambda))(t),\lambda)|\leqslant$$

$$\leqslant|f(t,(H(x_i,\lambda_i))(t),\lambda_i)-f(t,(H(x_i,\lambda_i))(t),\lambda)|+$$

$$+|f(t,(H(x_i,\lambda_i))(t),\lambda)-f(t,(H(x,\lambda))(t),\lambda)|.$$

Условия 1), 2) и 9) (с учетом того, что измеримая существенно ограниченная функция $H(x_i,\lambda_i)$ с любой точностью аппроксимируется функцией, имеющей конечное число значений) обеспечивают сходимость к нулю по мере на $[a,b]$ первого слагаемого. Для второго слагаемого данную сходимость гарантируют оценка 3) и условие 1). Далее, используя неравенство (3) , получим

$$\|f(\cdot,(H(x_i,\lambda_i))(\cdot),\lambda_i)-f(\cdot,(H(x,\lambda))(\cdot),\lambda)\|\to 0.$$

Таким образом, оператор F непрерывен.

Несложно показать, что при $(y,\lambda)\in B_{L_\infty(R^{\eta\, n})}(y_0,\sigma_0)\times B_\Lambda(\lambda_0,\delta_0)$ производная Фреше по первому аргументу оператора $N(y,\lambda)$ равна $\big(N'_y(y,\lambda)\Delta y\big)(t)=f'_y\big(t,y(t),\lambda(t)\big)\Delta y(t)$ (в скалярном случае для оператора Немыцкого со значениями в пространстве L этот факт доказан в [10, с. 385]). В силу линейности оператора $H(\cdot,\lambda):DM\to L_\infty(R^{\eta\, n})$ имеет место равенство $F'_x(x,\lambda)=N'_y(H(x,\lambda),\lambda)H(\cdot,\lambda)$. Таким образом, при $(x,\lambda)\in B_{DM}\big(x_0,\frac{\sigma_0}{\mathfrak{H}}\big)\times B_\Lambda(\lambda_0,\delta_0)$ существует производная $F'_x(x,\lambda)$.

Докажем непрерывность производной $F'_x(x,\lambda):DM\to M$ на $B_{DM}\big(x_0,\frac{\sigma_0}{\mathfrak{H}}\big)\times B_\Lambda(\lambda_0,\delta_0)$. Зафиксируем произвольные $x\in B_{DM}\big(x_0,\frac{\sigma_0}{\mathfrak{H}}\big)$, $\lambda\in B_\Lambda(\lambda_0,\delta_0)$. Пусть $\|x_i-x\|_{DM}\to 0$ и $\|\lambda_i-\lambda\|_\Lambda\to 0$. Учитывая предположения 3) и 8), имеем следующие оценки

$$\Big|\Big(\big(F'_x(x_i,\lambda_i)-F'_x(x,\lambda)\big)\Delta x\Big)(t)\Big|=$$

$$=\big|\big(N'_y(H(x_i,\lambda_i),\lambda_i)H(\Delta x,\lambda_i)\big)(t)-\big(N'_y(H(x,\lambda),\lambda)H(\Delta x,\lambda)\big)(t)\big|\leqslant$$

$$\leqslant\Big|\Big(N'_y(H(x_i,\lambda_i),\lambda_i)\big(H(\Delta x,\lambda_i)-H(\Delta x,\lambda)\big)\Big)(t)\Big|+$$

$$+\Big|\Big(\big(N'_y(H(x_i,\lambda_i),\lambda_i)-N'_y(H(x,\lambda),\lambda)\big)H(\Delta x,\lambda)\Big)(t)\Big|=$$

$$=\Big|\frac{\partial f}{\partial y}\,(t,(H(x_i,\lambda_i))(t),\lambda_i)\,\big(H(\Delta x,\lambda_i)-H(\Delta x,\lambda)\big)(t)\Big|+$$

$$+\Big|\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(t,(H(x_i,\lambda_i))(t),\lambda_i)-\frac{\partial f}{\partial y}(t,(H(x,\lambda))(t),\lambda)\Big)\big(H(\Delta x,\lambda)\big)(t)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\Big|\frac{\partial f}{\partial y}\,(t,(H(x_i,\lambda_i))(t)\lambda_i)\Big|\cdot\varepsilon_i(t)\cdot\|\Delta x\|_{DM}+$$

$$+\Big|\frac{\partial f}{\partial y}(t,(H(x_i,\lambda_i))(t),\lambda_i)-\frac{\partial f}{\partial y}(t,(H(x,\lambda))(t),\lambda)\Big|\cdot\|H(\cdot,\lambda)\|_{DM\to L_\infty}\cdot\|\Delta x\|_{DM}.$$

Из приведенных неравенств в силу условий 2), 3) и 10) следует, что

$$\frac{\|\big(F'_x(x_i,\lambda_i)-F'_x(x,\lambda)\big)\Delta x\|_M}{\|\Delta x\|_{DM}} \to 0,$$

и производная $F'_x(x,\lambda): DM \to M$ непрерывна на множестве $B_{DM}\big(x_0, \frac{\sigma_0}{\mathfrak{H}}\big) \times B_\Lambda(\lambda_0,\delta_0)$.

Согласно условиям 2), 4) отображение $F'_x(x_0,\lambda_0): C \to M$ обладает свойством U-ограниченности. Это означает (см. замечание 1) фредгольмовость «главной части» $Q: M \to M$ оператора $\mathcal{L}$ и выполнение условия 2) теоремы 1.

Существование и непрерывность при всех $(x,\lambda) \in DM \times B_\Lambda(\lambda_0,\delta_0)$ производной Фреше $\varphi'_x(x,\lambda) = l(x,\lambda)$ очевидны.

Итак, для операторов $F: DM \times \Lambda \to M$ и $\varphi: DM \times \Lambda \to R^n$ выполнены все условия теоремы 1. $\square$

Пусть при $\lambda = \lambda_0$ решение $x_0 = x(\lambda_0)$ задачи (2) принадлежит некоторому открытому множеству $\Omega \subset C$ и единственно в $\overline{\Omega}$. Обозначим X_λ — множество решений задачи (2), отвечающих значению параметра λ и принадлежащих множеству $\overline{\Omega}$.

Справедливость следующего утверждения непосредственно следует из теоремы 2.

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) *выполнены условия теоремы* 3;
2) *при любом значении параметра λ из множества $B_\Lambda(\lambda_0,\delta_0)$ оператор $H(\cdot,\lambda)$ допускает продолжение до оператора $\widetilde{H}(\cdot,\lambda): C \to L_\infty(R^{\eta n})$, причем для всякого $x \in \overline{\Omega}$ и любых двух последовательностей $\{x_i\} \subset C$, $\{\lambda_i\} \subset \Lambda$ таких, что $x_i \to x$ и $\lambda_i \to \lambda_0$, имеет место сходимость $(\widetilde{H}(x_i,\lambda_i))(\cdot) \xrightarrow{\mu} (\widetilde{H}(x,\lambda_0))(\cdot)$;*
3) *для некоторой последовательности $\{\widehat{\lambda}_i\} \subset \Lambda$, где $\widehat{\lambda}_i \to \lambda_0$, множества $X_{\widehat{\lambda}_i}$ содержат, по крайней мере, два элемента.*

Оказывается тогда, что множество Ω неограничено и при каждом $\widehat{\lambda}_i$ можно так выбрать $\mathfrak{x}_i \in X_{\widehat{\lambda}_i}$, что $\|\mathfrak{x}_i - x_0\|_{DM} \to 0$ и для любого $x_i \in X_{\widehat{\lambda}_i}$, удовлетворяющего при всех i, начиная с некоторого номера, неравенству $x_i \neq \mathfrak{x}_i$, выполнено $\|x_i\|_C \to \infty$.

§ 3. Непрерывная зависимость от параметров периодических решений управляемых систем с отклоняющимся аргументом

Ключевую роль в исследовании необходимых условий оптимальности периодических движений играют утверждения о непрерывной зависимости от управления решений соответствующих уравнений. Для обыкновенных дифференциальных уравнений такие теоремы были доказаны в работах [4, 5]. Здесь на основании результатов § 2 получены утверждения о непрерывной зависимости периодических решений управляемых систем с отклоняющимся аргументом от параметров (значений управления и отклонения аргумента).

Рассмотрим управляемые системы

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t-\tau_1(t)), \ldots, x(t-\tau_\eta(t)), u_0(t)\big), \quad t \in R; \tag{4}$$

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t-\tau_{1i}(t)), \ldots, x(t-\tau_{\eta i}(t)), u_i(t)\big), \quad t \in R. \tag{4i}$$

Здесь функции $\tau_d, \tau_{di}: R \to R$ измеримы и ω-периодичны, функции $u_0, u_i: R \to R^k$ измеримы, существенно ограничены и ω-периодичны ($d = 1,\ldots,\eta$, $i = 1,2,\ldots$). Далее предполагаем, что функция $f: R \times R^{\eta n} \times R^k \to R^n$ является ω-периодической по первому аргументу и удовлетворяет условиям Каратеодори, то есть при любых $y \in R^{\eta n}$, $u \in R^k$ функция $f(\cdot,y,u)$ измерима, при почти всех $t \in R$ функция $f(t,\cdot,\cdot)$ непрерывна по совокупности второго и третьего аргументов. Кроме того, для любого числа $r > 0$ пусть существует такая функция $g^r \in L([0,\omega],\mu,R)$, что при всех $y \in R^{\eta n}$, $u \in R^k$, удовлетворяющих условиям $|y| \leqslant r$, $|u| \leqslant r$, выполнено неравенство

$$|f(t,y,u)| \leqslant g^r(t), \quad t \in [0,\omega]. \tag{5}$$

Пусть уравнение (4) имеет абсолютно непрерывное ω-периодическое решение x_0. Обозначим $y_0(t) = \big(x_0\big(t-\tau_1(t)\big), \ldots, x_0\big(t-\tau_\eta(t)\big)\big)$, $t \in R$. Эта функция, очевидно, является измеримой, существенно ограниченной и ω-периодической.

Для произвольной определенной на всей числовой оси функции θ будем обозначать $\theta^{[0,\omega]}$ — ее сужение на отрезок $[0,\omega]$.

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия*:
1) *найдутся такие* $\delta_0 > 0$, $\sigma_0 > 0$, *что при почти всех* $t \in [0,\omega]$, *любых таких* $y \in R^{\eta n}$ *и* $u \in R^k$, *что* $|y - y_0(t)| < \sigma_0$, $|u - u_0(t)| < \delta_0$, *существуют частные производные* $\dfrac{\partial f_j}{\partial y_{dp}}(t,y,u)$, $j,p = 1,\ldots,n$, $d = 1,\ldots,\eta$;
2) *функции* $\dfrac{\partial f_j}{\partial y_{dp}}$ *измеримы по первому и непрерывны по совокупности второго и третьего аргументов, причем найдется такая суммируемая функция* $G \in L([0,\omega],\mu,R)$, *что при почти всех* $t \in [0,\omega]$, *любых таких* $y \in R^{\eta n}$, $u \in R^k$, *что* $|y - y_0(t)| < \sigma_0$, $|u - u_0(t)| < \delta_0$, *выполнены неравенства*

$$\Big|\frac{\partial f_j}{\partial y_{dp}}(t,y,u)\Big| \leqslant G(t)$$

для всех $j,p = 1,\ldots,n$, $d = 1,\ldots,\eta$;
3) $u_i^{[0,\omega]} \xrightarrow{\mu} u_0^{[0,\omega]}$, $\tau_{di}^{[0,\omega]} \xrightarrow{\mu} \tau_d^{[0,\omega]}$ *при любом* $d = 1,\ldots,\eta$;
4) *уравнение*

$$\dot z(t) = A(t)\big(z(t-\tau_1(t)),\ldots,z(t-\tau_\eta(t)\big), \quad t \in R,$$

где $A(t) = \Big(\dfrac{\partial f_j}{\partial y_{dp}}(t, y_0(t), u_0(t))\Big)_{n\times\eta n}$, *имеет единственное абсолютно непрерывное* ω-*периодическое решение* $z(t) \equiv 0$.

Оказывается тогда, что найдутся такие $\sigma > 0$ *и номер* I, *для которых при всех* $i > I$ *существует единственное абсолютно непрерывное* ω-*периодическое решение* x_i *уравнения* (4i), *удовлетворяющее неравенству* $\|x_i^{[0,\omega]} - x_0^{[0,\omega]}\|_{DL} < \sigma$, *причем имеет место сходимость* $\|x_i^{[0,\omega]} - x_0^{[0,\omega]}\|_{DL} \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задача отыскания ω-периодических решений уравнений (4), (4i) равносильна краевым задачам

$$\dot x(t) = f\big(t, x(h_1(t)),\ldots,x(h_\eta(t)), u_0(t)\big), \quad x(0) - x(\omega) = 0, \quad t \in [0,\omega]; \tag{6}$$

$$\dot x(t) = f\big(t, x(h_{1i}(t)),\ldots,x(h_{\eta i}(t)), u_i(t)\big), \quad x(0) - x(\omega) = 0, \quad t \in [0,\omega]; \tag{6i}$$

где функции $h_d, h_{di} : [0,\omega] \to [0,\omega]$, $d = 1,\ldots,\eta$, $i = 1,2,\ldots$ определяются равенствами

$$h_d(t) = \Big\{\frac{t-\tau_d(t)}{\omega}\Big\}\omega, \quad h_{di}(t) = \Big\{\frac{t-\tau_{di}(t)}{\omega}\Big\}\omega,$$

символом $\{\cdot\}$ обозначена дробная часть числа.

Препятствием к использованию теоремы 3 при исследовании разрешимости полученных краевых задач является невыполнение условия 8) для последовательности линейных операторов $H_i : DL \to L_\infty(R^{\eta n})$, определяемых равенством $(H_i x)(t) = \big(x(h_{1i}(t)),\ldots,x(h_{\eta i}(t))\big)$. Поэтому для доказательства рассматриваемого утверждения мы построим специальное вложенное в L банахово пространство M, такое что если существуют решения задач (6), (6i), то их производные принадлежат M, а операторы $H_i : DM \to L_\infty(R^{\eta n})$ удовлетворяют условию 8) и выполнены все остальные требования теоремы 3.

Обозначим $L_2([0,\omega],\mu,R^n)$ — банахово пространство измеримых функций $y : [0,\omega] \to R^n$, квадрат которых суммируем, с нормой $\|y\|_{L_2} = \Big(\int_0^\omega |y(s)|^2\,ds\Big)^{\frac12}$. Для

$$r_0 = \max\{\|x_0^{[0,\omega]}\|_{DL} + \sigma_0,\ \|u_0^{[0,\omega]}\|_{L_\infty} + \delta_0\}$$

найдем функцию g^{r_0}, удовлетворяющую неравенству (5). Далее зададим функции

$$g, \zeta : [0,\omega] \to R, \quad g(t) = \max\{1, g^{r_0}(t)\}, \quad \zeta(t) = (g(t))^{-1/2}.$$

Определим пространство $L_2^{\zeta}([0,\omega],\mu,R^n)$ таких измеримых функций $y : [0,\omega] \to R^n$, что произведение $\zeta y \in L_2$, то есть существует $\int_0^{\omega} |\zeta(s)y(s)|^2\,ds$. Положим $\|y\|_{L_2^{\zeta}} = \Big(\int_0^{\omega} |\zeta(s)y(s)|^2\,ds\Big)^{\frac{1}{2}}$. Введенное пространство изоморфно и изометрично пространству L_2, взаимно-однозначное соответствие задается отображением $y \in L_2^{\zeta} \longleftrightarrow \zeta y \in L_2$, причем $\|y\|_{L_2^{\zeta}} = \|\zeta y\|_{L_2}$. Следовательно, пространство L_2^{ζ} является банаховым. Проверим, что введенное пространство обладает всеми свойствами пространства M, использовавшимися для доказательства теорем 1–4. Для произвольного $y \in L_2^{\zeta}$ в силу неравенства Гельдера [8, с. 52] выполнено

$$\int_0^{\omega} |y(s)|\,ds = \int_0^{\omega} g(s)^{1/2}|\zeta(s)y(s)|\,ds \leqslant \Big(\int_0^{\omega} |\zeta(s)y(s)|^2\,ds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^{\omega} g(s)\,ds\Big)^{\frac{1}{2}},$$

то есть $y \in L$ и имеет место неравенство $\|y\|_L \leqslant \|y\|_{L_2^{\zeta}}\sqrt{\|g\|_L}$. Таким образом, L_2^{ζ} вложено в пространство L.

Определим пространство $DL_2^{\zeta}([0,\omega],\mu,R^n)$ абсолютно непрерывных функций $x : [0,\omega] \to R$, производная которых $\dot{x} \in L_2^{\zeta}$, норму зададим равенством $\|x\|_{DL_2^{\zeta}} = |x(a)| + \|\dot{x}\|_{L_2^{\zeta}}$. Отметим, что вложение банаховых пространств $DL_2^{\zeta} \subset C$ является компактным. Действительно, для произвольного $x \in DL_2^{\zeta}$, $\|x\|_{DL_2^{\zeta}} \leqslant 1$, во-первых, имеем

$$\|x\|_C \leqslant |x(0)| + \|\dot{x}\|_L \leqslant |x(0)| + \|\dot{x}\|_{L_2^{\zeta}}\,(\|g\|_L)^{1/2} \leqslant \max\{1,\ \sqrt{\|g\|_L}\};$$

во-вторых, для любых $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \omega$ выполнено

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} |\dot{x}(s)|ds \leqslant \|\dot{x}\|_{L_2^{\zeta}}\Big(\int_{t_1}^{t_2} g(s)ds\Big)^{1/2}.$$

Теперь обоснуем правомерность рассмотрения краевых задач (6), ($6i$) в пространстве DL_2^{ζ}. Если абсолютно непрерывная функция $x \in B_{DL}(x_0,\sigma)$, где $\sigma > 0$, является решением задачи ($6i$) при некотором натуральном i, то $|\dot{x}(t)| \leqslant g(t)$. Тогда

$$\int_0^{\omega} |\dot{x}(s)\zeta(s)|^2 ds \leqslant \int_0^{\omega} |g(s)\zeta(s)|^2 ds = \int_0^{\omega} g(s)\,ds$$

и, следовательно, $x \in DL_2^{\zeta}$. Для этой функции будет выполнено

$$\|x - x_0\|_{DL_2^{\zeta}} = |x(0) - x_0(0)| + \int_0^{\omega} |\dot{x}(s) - \dot{x}_0(s)|^2\zeta(s)^2\,ds \leqslant$$

$$\leqslant |x(0) - x_0(0)| + \int_0^{\omega} |\dot{x}(s) - \dot{x}_0(s)|\,(|\dot{x}(s)| + |\dot{x}_0(s)|)\,\frac{1}{g(s)}\,ds \leqslant 2\|x - x_0\|_{DL} < 2\sigma,$$

то есть $x \in B_{DL_2^{\zeta}}(x_0, 2\sigma)$. С другой стороны, если функция $x \in B_{DL_2^{\zeta}}(x_0,\sigma)$ будет решением некоторой задачи ($6i$), то вследствие вложения пространств $DL_2^{\zeta} \subset DL$ эта функция абсолютно непрерывна и $\|x - x_0\|_{DL} \leqslant c_2\|x - x_0\|_{DL_2^{\zeta}} < c_2\sigma$, где $c_2 = \max\{1,\ \sqrt{\|g\|_L}\}$. Следовательно, $x \in B_{DL}(x_0, c_2\sigma)$.

Итак, рассматриваем краевые задачи (6), ($6i$) относительно неизвестных $x \in B_{DL_2^{\zeta}}(x_0,\sigma_1)$, где $\sigma_1 = \sigma_0/c_2$, и применяем теорему 3, в которой полагаем пространство $M = L_2^{\zeta}$. Очевидно, в проверке нуждается лишь условие 8). Используя неравенство Гельдера, для любого $x \in DL_2^\zeta$ при всех $d = 1, \ldots, \eta$ получим

$$|x(h_{di}(t)) - x(h_d(t))| = \Big|\int_{h_d(t)}^{h_{di}(t)} \dot{x}(s)\,ds\Big| = \Big|\int_{h_d(t)}^{h_{di}(t)} g(s)^{1/2}\,\frac{\dot{x}(s)}{g(s)^{1/2}} ds\Big| \leqslant \Big|\int_{h_d(t)}^{h_{di}(t)} g(s) ds\Big|^{1/2} \|x\|_{DL_2^\zeta}.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла и сходимости по мере последовательности h_{di} к функции h_d имеет место $\Big|\int_{h_d(\cdot)}^{h_{di}(\cdot)} g(s) ds\Big|^{1/2} \xrightarrow{\mu} 0$ на $[0, \omega]$, то есть условие 8) теоремы 3 действительно выполнено.

Таким образом, согласно теореме 3 найдутся такие $\sigma > 0$ и номер I, что при всех $i > I$ в шаре $B_{DL_2^\zeta}(x_0, \sigma)$ существует единственное решение x_i задачи $(6i)$ и имеет место сходимость $\|x_i - x_0\|_{DL_2^\zeta} \to 0$. Несложно заметить, что данная сходимость влечет за собой сходимость по норме пространства DL. □

Далее предположим существование такого открытого множества $\Omega \subset C([0, \omega], R^n)$, что x_0 — единственное ω-периодическое решение уравнения (4), удовлетворяющее включению $x_0^{[0,\omega]} \in \overline{\Omega}$. Обозначим X_i — множество ω-периодических решений уравнения $(4i)$, сужения которых на отрезок $[0, \omega]$ содержатся в $\overline{\Omega}$.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 5. *Тогда если для некоторой подпоследовательности* $\{i_q\}$ *множества* X_{i_q} *содержат, по крайней мере, два элемента, то множество* Ω *неограничено, и для каждого* q *найдется такое* $\mathfrak{x}_{i_q} \in X_{i_q}$, *что* $\|\mathfrak{x}_{i_q}^{[0,\omega]} - x_0^{[0,\omega]}\|_{DL} \to 0$, *если же* $x_{i_q} \in X_{i_q}$ *и начиная с некоторого номера* $x_{i_q} \neq \mathfrak{x}_{i_q}$, *то* $\|x_{i_q}^{[0,\omega]}\|_C \to \infty$.

Доказательство этого утверждения, как и предыдущей теоремы 5, основано на взаимно-однозначном соответствии между ω-периодическими решениями уравнений (4), $(4i)$ и решениями краевых задач (6), $(6i)$. Справедливость теоремы 6 непосредственно следует из теоремы 4, примененной к краевым задачам (6), $(6i)$ рассматриваемым, как и при доказательстве теоремы 5, в пространстве $DL_2^\zeta([0, \omega], \mu, R^n)$. □

Авторы благодарят Евгения Леонидовича Тонкова за постановку задачи о непрерывной зависимости периодических решений управляемой системы с отклоняющимся аргументом, полезные замечания и критику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Максимов В. П. Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. — Пермь: Изд-во ПГУ, ПСИ, ПССГК, 2003. — 306 с.
2. Вайнико Г. М. Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1979. — Вып. 16. — С. 5–53.
3. Artstein Z. Continuous dependence of solutions of operator equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1977. — Vol. 231, № 1. — P. 143–166.
4. Тонков Е. Л. Оптимальные периодические движения управляемой системы // Мат. физика. — 1977. — Вып. 21. — С. 45–59.
5. Тонков Е. Л. Оптимальное управление периодическими движениями // Мат. физика. — 1977. — Вып. 22. — С. 54–64.
6. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
7. Крейн С. Г. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1972. — 544 с.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 544 с.

9. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 280 с.
10. Интегральные уравнения / Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я. — М.: Наука, 1968. — 488 с.

Поступила в редакцию 11.11.09

E. O. Burlakov, E. S. Zhukovskiy

On a correctness of boundary value problems and continuous dependence of periodic solutions of controllable systems on parameters

Conditions for continuous dependence on parameters of solution of a general boundary value problem are obtained for a functional-differential equation. The results are applied to investigation of a correctness of a linear general boundary value problem for the nonlinear differential equation with divergent argument and to problem of continuous dependence of periodic solutions of controllable system on control and divergence values.

Keywords: functional-differential equations, boundary value problems, continuous dependence of solutions on parameters, periodic solutions of controllable systems.

Mathematical Subject Classifications: 34F31, 34C23

Бурлаков Евгений Олегович, аспирант, кафедра алгебры и геометрии, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33, E-mail: eb_@bk.ru

Жуковский Евгений Семенович, д. ф.-м. н., профессор, директор Института математики, физики и информатики, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33, E-mail: zukovskys@mail.ru