ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 1

УДК 517.972.8

© *А. Г. Ченцов*

РАСШИРЕНИЯ В КЛАССЕ КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫХ МЕР И УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ НЕЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРИ ОСЛАБЛЕНИИ ЧАСТИ ОГРАНИЧЕНИЙ [1]

Для абстрактной задачи управления рассматривается конструкция расширения в классе векторных конечно-аддитивных мер и исследуются условия асимптотической нечувствительности достижимого множества при ослаблении части ограничений.

Ключевые слова: расширение, конечно-аддитивная мера, асимптотическая нечувствительность.

§ 1. Содержательная постановка задачи

Рассматриваемая ниже абстрактная постановка имеет своим источником следующую содержательную задачу управления линейной системой:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)f(t) \tag{1.1}$$

на конечном промежутке времени $I_0 \stackrel{\triangle}{=} [t_0, \vartheta_0]$ (здесь и ниже $\stackrel{\triangle}{=}$ — равенство по определению), $t_0 < \vartheta_0$; начальные условия заданы: $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, где n — размерность фазового пространства. В (1.1) $A(\cdot)$ — непрерывный покомпонентно $(n \times n)$-матрицант на I_0, $B(\cdot)$ — $(n \times r)$-матрицант на $I \stackrel{\triangle}{=} [t_0, \vartheta_0[$, допускающий покомпонентное равномерное приближение кусочно-постоянными (к.-п.) и непрерывными справа (н. спр.) вещественнозначными (в/з) функциями на I. Пусть F — множество всех к.-п. и н. спр. неотрицательных покомпонентно r-вектор-функций на I, U — непустое подмножество (п/м) F; предполагаем, что в (1.1) $u \in U$, причем на выбор u накладывается ограничение

$$\int_{t_0}^{\vartheta_0} S(t)u(t)dt \in Y, \tag{1.2}$$

где $S(\cdot)$ есть $(m \times r)$-матрицант на I того же типа, что и $B(\cdot)$, Y — замкнутое п/м $\mathbb{R}^m$. Ограничение (1.2) порождает множество U_∂, $U_\partial \subset U$, всех допустимых (в смысле (1.2)) управлений из U. При этом каждая функция $f \in F$, рассматриваемая как управление в системе (1.1), формирует единственную траекторию φ_f данной системы, определенную на отрезке I_0 и принимающую значения в $\mathbb{R}^n$. Множество $\mathbb{G} \stackrel{\triangle}{=} \{\varphi_u(\vartheta_0) :\ u \in U_\partial\}$ есть область достижимости (ОД) в момент ϑ_0; см. [1].

Если Y в (1.2) меняется, то меняется и ОД. Ограничимся сейчас обсуждением ослаблений условия (1.2), имея в виду замену Y каким-то множеством Y_1, $Y \subset Y_1 \subset \mathbb{R}^m$, что приводит к новой ОД $\mathbb{G}_1$. Зачастую бывает трудно указать конкретную степень ослабления (1.2), в то время как тип ослабления понятен. В этой связи полагаем, что Y «заменяется» непустым семейством п/м $\mathbb{R}^m$, пересечение всех множеств которого совпадает с Y. Рассматриваем (сейчас) две версии упомянутого семейства: $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$; в обоих случаях полагаем, что множества из упомянутых семейств — метрические ε-окрестности Y, $\varepsilon > 0$. Одна из метрик — нормируемая (сопоставляем вектору из $\mathbb{R}^m$ наибольший из модулей его компонент), а другая отвечает ситуации, когда ослабление Y-ограничения (1.2) касается лишь части координат, и является

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (06-01-00414, 07-01-96088).

некоторой композицией нормируемой и дискретной метрик. В результате ОД заменяется двумя сравнимыми множествами притяжения (МП) AS_1 и AS_2. В первом случае имеем семейство $\{G^{(\varepsilon)},\ \varepsilon > 0\}$ «больших» ОД (отвечающих ослаблению (1.2) по всем координатам), во втором — семейство $\{G_\varepsilon,\ \varepsilon > 0)$ «малых» ОД; AS_1 совпадает с пересечением всех множеств $\overline{G^{(\varepsilon)}}$, где черта сверху обозначает замыкание, а AS_2 — с пересечением всех множеств $\overline{G_\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Исследуются представления абстрактных аналогов AS_1 и AS_2, а также условия их совпадения; последнее свойство (представляющее практический интерес) имеет смысл асимптотической нечувствительности при ослаблении части ограничений. Для этих целей используется специальный аппарат расширений исходной задачи. В связи с конструкциями расширений отметим [2, 3, 4, 5]; особо выделяем общий подход Н. Н. Красовского в [4] к исследованию задач импульсного управления, связанный с применением обобщенных функций.

В дальнейшем рассматривается абстрактная постановка, включающая вышеупомянутую содержательную задачу как частный случай.

§ 2. Общие понятия и обозначения

Перечислим некоторые соглашения, следуя в основном [6, 7, 8]. Выражение def заменяет фразу «по определению». Для всякого объекта x через $\{x\}$ обозначаем синглетон, содержащий x; $\emptyset$ — пустое множество. Если x и y — объекты, то $\{x;y\} \stackrel{\triangle}{=} \{x\} \cup \{y\}$ — неупорядоченная пара объектов x и y. Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Принимаем аксиому выбора. Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X; $\mathrm{Fin}(X)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$. Если A и B — множества, а $f:\ A \longrightarrow B$, то:

1) для всякого множества $C \in \mathcal{P}(A)$ множество

$$f^1(C) \stackrel{\triangle}{=} \{f(x):\ x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$$

есть образ C при действии f, а $(f|C)$ есть def отображение из C в B (сужение f на C), для которого $(f|C)(x) \stackrel{\triangle}{=} f(x)\ \ \forall x \in C$;

2) $\forall \mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$

$$f^{-1}[\mathcal{B}] \stackrel{\triangle}{=} \{f^{-1}(V):\ V \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A)). \tag{2.1}$$

Если $\mathcal{A}$ — непустое семейство, а B — множество, то

$$\mathcal{A}|_B \stackrel{\triangle}{=} \{A \cap B:\ A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B)).$$

В дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathcal{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1;2;\ldots\}$ и $\forall k \in \mathcal{N}$

$$(\ \overline{1,k} \stackrel{\triangle}{=} \{i \in \mathcal{N} | i \leqslant k\})\ \&\ (\ \overrightarrow{k,\infty} \stackrel{\triangle}{=} \{i \in \mathcal{N} | k \leqslant i\}).$$

Если T — множество и $s \in \mathcal{N}$, то через T^s обозначаем множество всех кортежей $(t_i)_{i \in \overline{1,s}}:\ \overline{1,s} \longrightarrow T$ (в частности, $\mathbb{R}^s$ — s-мерное арифметическое пространство). Речь, стало быть, идет о функциях, определенных на $\overline{1,s}$.

Для всяких топологического пространства (ТП) (X,t) и множества $A \in \mathcal{P}(X):$ 1) $\mathrm{cl}(A,t)$ есть def замыкание A в (X,t); 2) $t|_A$ — топология A, индуцированная из (X,t); 3) $\mathbb{N}_t[A]$ — семейство всех окрестностей A в (X,t), понимаемых в смысле [9, гл. I]. Если (X,t) — ТП и $x \in X$, то полагаем $N_t(x) \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{N}_t[\{x\}]$, получая фильтр [9, гл. I] окрестностей точки x. Если (X,t) — ТП, то через $\mathcal{F}_t$ (через $(t-\mathrm{comp})[X]$) обозначаем семейство всех п/м X, замкнутых (компактных [10]) в (X,t). Если (X,τ_1) и (Y,τ_2) — ТП, то через $C(X,\tau_1,Y,\tau_2)$ обозначаем множество всех (τ_1,τ_2)-непрерывных отображений из X в Y,

$$C_{\mathrm{cl}}(X,\tau_1,Y,\tau_2) \stackrel{\triangle}{=} \{g \in C(X,\tau_1,Y,\tau_2) \mid g^1(F) \in \mathcal{F}_{\tau_2}\ \ \forall F \in \mathcal{F}_{\tau_1}\}$$

(множество всех замкнутых отображений из X в Y) и, наконец,

$$C_{\mathbf{ap}}(X,\tau_1,Y,\tau_2) \stackrel{\triangle}{=} \{g \in C_{\mathrm{cl}}(X,\tau_1,Y,\tau_2) \mid g^{-1}(\{y\}) \in (\tau_1 - \mathrm{comp})[X] \;\; \forall y \in Y\}$$

(множество всех почти совершенных [10, с. 287] отображений из X в Y).

Если P и $\mathbf{T}$ — непустые множества и $\mathbf{t}$ — топология $\mathbf{T}$, то через $\otimes^P(\mathbf{t})$ обозначаем [7, с. 269] топологию множества всех отображений из P в $\mathbf{T}$, соответствующую тихоновской степени ТП $(\mathbf{T},\mathbf{t})$ при использовании P в качестве индексного множества. Если при этом $P = \overline{1,k}$, где $k \in \mathcal{N}$, то $\otimes^k[\mathbf{t}] \stackrel{\triangle}{=} \otimes^{\overline{1,k}}(\mathbf{t})$; ТП $(\mathbf{T}^k, \otimes^k[\mathbf{t}])$ — конечная степень ТП $(\mathbf{T},\mathbf{t})$.

Если X — множество, то $\beta[X]$ (или $\beta_0[X]$) — множество всех семейств $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$ (всех семейств $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(X))$) таких, что

$$\forall B_1 \in \mathcal{B}\, \forall B_2 \in \mathcal{B}\, \exists B_3 \in \mathcal{B}: \; B_3 \subset B_1 \cap B_2;$$

$$\mathfrak{F}[X] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(X)) \mid (A \cap B \in \mathcal{F} \;\; \forall A \in \mathcal{F}\, \forall B \in \mathcal{F})\,\&(\{G \in \mathcal{P}(X) \mid F \subset G\} \subset \mathcal{F} \;\; \forall F \in \mathcal{F})\}$$

есть множество всех фильтров [9, гл. I] X (элементы $\beta_0[X]$ — суть базы фильтров X и только они), причем

$$(X - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{P}(X) \mid \exists B \in \mathcal{B}: \; B \subset L\} \in \mathfrak{F}[X] \;\; \forall \mathcal{B} \in \beta_0[X].$$

Обычным образом [9, гл. I] определяем сходимость фильтров: если (X,t) — ТП, $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X]$ и $x \in X$, то свойство $\mathcal{F} \stackrel{t}{\Longrightarrow} x$ эквивалентно вложению $N_t(x) \subset \mathcal{F}$.

Направленность в множестве P определяем в дальнейшем как всякий триплет $(D,\preccurlyeq,l)$, где $(D,\preccurlyeq)$ — непустое направленное множество (НМ), $l: \; D \longrightarrow P$. Каждой направленности $(D,\preccurlyeq,l)$ в множестве P сопоставляем фильтр

$$(P - \mathrm{ass})[D;\preccurlyeq;l] \stackrel{\triangle}{=} \{V \in \mathcal{P}(P) \mid \exists d \in D\, \forall \delta \in D((d \preccurlyeq \delta) \Longrightarrow (l(\delta) \in V))\} \in \mathfrak{F}[P],$$

ассоциированный с $(D,\preccurlyeq,l)$. Если (X,t) — ТП, $(\mathbb{D},\sqsubseteq,g)$ — направленность в X и $x \in X$, то

$$((\mathbb{D},\sqsubseteq,g) \stackrel{t}{\longrightarrow} x) \stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} ((X - \mathrm{ass})[\mathbb{D};\sqsubseteq;g] \stackrel{t}{\Longrightarrow} x) \tag{2.2}$$

(в (2.2)) введена «обычная» сходимость по Мору-Смиту; см. [10, 11]). Используем ниже известное [10] представление непрерывности в терминах сходимости (2.2). Последовательность есть частный случай направленности: оснащая $\mathcal{N}$ обычной упорядоченностью $\leqslant$, получаем непустое НМ $(\mathcal{N},\leqslant)$; если $(x_i)_{i\in\mathcal{N}}$ — последовательность в множестве X, то триплет $(\mathcal{N},\leqslant,(x_i)_{i\in\mathcal{N}})$ — направленность в X и для всяких топологии t множества X и точки $x \in X$

$$((x_i)_{i\in\mathcal{N}} \stackrel{t}{\longrightarrow} x) \stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} ((\mathcal{N},\leqslant,(x_i)_{i\in\mathcal{N}}) \stackrel{t}{\longrightarrow} x).$$

Получили обычную секвенциальную сходимость в ТП.

Множества притяжения. До конца настоящего параграфа фиксируем непустое множество E (в дальнейшем E будет конкретизировано). Если $(X,\mathbf{t})$ — ТП, $l: E \longrightarrow X$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то через $(\mathbf{as})[X;\mathbf{t};l;\mathcal{E}]$ обозначаем множество всех $x \in X$ таких, что для некоторой направленности $(D,\preccurlyeq,g)$ в множестве E

$$(\mathcal{E} \subset (E - \mathrm{ass})[D;\preccurlyeq;g])\;\&\;((D,\preccurlyeq,l\circ g) \stackrel{\mathbf{t}}{\longrightarrow} x)$$

($\circ$ — символ суперпозиции); называем $(\mathbf{as})[X;\mathbf{t};l;\mathcal{E}]$ множеством притяжения (МП). Если в условиях, упомянутых выше, $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то [12, с. 39,40]

$$(\mathbf{as})[X;\mathbf{t};l;\mathcal{E}] = \bigcap_{P\in\mathcal{E}} \mathrm{cl}(l^1(P),\mathbf{t}). \tag{2.3}$$

Свойство (2.3) широко используется в дальнейшем. Если $\mathcal{E} \in \beta[E]$ имеет счетную базу (см. [8, (3.3.17)]), а $(X, \mathbf{t})$ — ТП с первой аксиомой счетности, то (см. [8, с. 38], [13], [14]) $(\mathbf{as})[X; \mathbf{t}; l; \mathcal{E}]$ есть множество всех $x \in X$, для каждого из которых существует последовательность $(e_i)_{i \in \mathcal{N}}$ в E со свойствами

$$(\forall V \in \mathcal{E}\ \exists k \in \mathcal{N}:\ e_j \in V\ \ \forall j \in \overrightarrow{k, \infty})\ \&\ ((l(e_i))_{i \in \mathcal{N}} \xrightarrow{\mathbf{t}} x).$$

Отметим, что в [13, 14] даны эквивалентные представления МП на языке фильтров и ультрафильтров множества E, играющего здесь роль пространства обычных решений.

§ 3. Конечно-аддитивные меры

Фиксируем далее полуалгебру [15] $\mathcal{L}$ п/м непустого множества I произвольной природы; итак, в дальнейшем $(I, \mathcal{L})$ — абстрактное измеримое пространство (ИП) с полуалгеброй множеств. Через $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ обозначаем множество всех в/з неотрицательных конечно-аддитивных (к.-а.) мер на $\mathcal{L}$; здесь и ниже используем обозначения [6, 7, 8, 12]. Через $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ обозначаем множество всех в/з к.-а. мер ограниченной вариации, определенных на $\mathcal{L}$; $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \subset \mathbf{A}(\mathcal{L})$, есть конус, порождающий $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ как линейное пространство. Через $B_0(I, \mathcal{L})$ обозначаем множество всех ступенчатых, в смысле ИП $(I, \mathcal{L})$, в/з функций на I; $B_0(I, \mathcal{L})$ — линейная оболочка множества всех индикаторов [15, с. 56] множеств из $\mathcal{L}$. Пространство $\mathbf{B}(I)$ всех ограниченных в/з функций на I оснащаем традиционной sup-нормой $\|\cdot\|$, а замыкание множества $B_0(I, \mathcal{L})$, $B_0(I, \mathcal{L}) \subset \mathbf{B}(I)$, в топологии этой sup-нормы обозначаем через $B(I, \mathcal{L})$, что согласуется с [16, гл. IV]. Оснащая $B(I, \mathcal{L})$ как (линейное) подпространство $\mathbf{B}(I)$ нормой, индуцированной из банахова пространства $(\mathbf{B}(I), \|\cdot\|)$, мы также получаем банахово пространство, причем пространство $B^*(I, \mathcal{L})$, топологически сопряженное к $B(I, \mathcal{L})$, при традиционном нормировании изометрически изоморфно $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме-вариации; см. [8, с. 40]. Сам же изометрический изоморфизм $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ на $B^*(I, \mathcal{L})$ определяется простейшей конструкцией интегрирования [12, гл. 3] (используемой ниже без дополнительных пояснений) и имеет вид

$$\mu \longmapsto \left(\int_I g d\mu \right)_{g \in B(I, \mathcal{L})} :\ \mathbf{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow B^*(I, \mathcal{L}).$$

Двойственности $(B(I, \mathcal{L}), \mathbf{A}(\mathcal{L}))$ отвечает обычная $*$-слабая топология $\tau_*(\mathcal{L})$ [8, с. 41] множества $\mathbf{A}(\mathcal{L})$, для которой

$$(\mathbf{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L})) \tag{3.1}$$

есть локально выпуклый σ-компакт; условия компактности в (3.1) определяются теоремой Алаоглу [16, гл.V]. Через $\tau_{\mathbb{R}}$ (через τ_∂) обозначаем обычную (дискретную) топологию $\mathbb{R}$. В виде

$$\tau_\otimes(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})|_{\mathbf{A}(\mathcal{L})},\ \tau_0(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_\partial)|_{\mathbf{A}(\mathcal{L})}$$

имеем [8, 12] две топологии $\mathbf{A}(\mathcal{L})$, для которых

$$\tau_\otimes(\mathcal{L}) \subset \tau_*(\mathcal{L}), \quad \tau_\otimes(\mathcal{L}) \subset \tau_0(\mathcal{L});$$

$$\tau_*^+(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \tau_*(\mathcal{L})|_{(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]} = \tau_\otimes(\mathcal{L})|_{(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]} \subset \tau_0^+(\mathcal{L}), \tag{3.2}$$

где $\tau_0^+(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \tau_0(\mathcal{L})|_{(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]}$. Через $B_0^+(I, \mathcal{L})$ обозначаем множество всех неотрицательных функций из $B_0(I, \mathcal{L})$. Всюду в дальнейшем фиксируем $r \in \mathcal{N}$ (смысл параметра r аналогичен § 1) и полагаем

$$((\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]^r)\ \&\ (B_{0,r}^+[I; \mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} B_0^+(I, \mathcal{L})^r); \tag{3.3}$$

если $\mu \in (\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}]$, то $\mu :\ \overline{1, r} \longrightarrow (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ и, стало быть,

$$\mu(j) \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]\ \ \forall j \in \overline{1, r}.$$

Аналогичное замечание справедливо относительно

$$f \in B^+_{0,r}[I;\mathcal{L}] : \ f(j) \in B^+_0(I,\mathcal{L}) \ \ \forall j \in \overline{1,r}.$$

В силу (3.2) топологии $\otimes^r[\tau^+_*(\mathcal{L})]$ и $\otimes^r[\tau^+_0(\mathcal{L})]$ непустого множества $(\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L}]$ сравнимы:

$$\otimes^r[\tau^+_*(\mathcal{L})] \subset \otimes^r[\tau^+_0(\mathcal{L})]. \tag{3.4}$$

Более подробные сведения о топологиях, используемых в (3.4), см. в [7, 17]. Если $k \in \mathcal{N}$, то через $\tau^{(k)}_{\mathbb{R}}$ условимся обозначать обычную топологию покоординатной сходимости множества $\mathbb{R}^k$; при этом $\tau^{(k)}_{\mathbb{R}} = \otimes^k[\tau_{\mathbb{R}}]$.

§ 4. Аппроксимативная реализация конечно-аддитивных мер

Всюду в дальнейшем фиксируем к.-а. меру $\eta \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ и полагаем

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \stackrel{\triangle}{=} \{\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \mid \forall L \in \mathcal{L} \ \ ((\eta(L) = 0) \Longrightarrow (\mu(L) = 0))\}, \tag{4.1}$$

получая при этом множество всех в/з неотрицательных слабо абсолютно η-непрерывных [18] к.-а. мер на $\mathcal{L}$. Следуя [12, с. 69], полагаем при $f \in B(I,\mathcal{L})$, что $f * \eta$ есть def к.-а. мера, $f * \eta \in \mathbf{A}(\mathcal{L})$, являющаяся неопределенным η-интегралом функции f. Имеем [12, с. 86]

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] = \mathrm{cl}(\{f * \eta : \ f \in B^+_0(I,\mathcal{L})\}, \tau_*(\mathcal{L})) = \mathrm{cl}(\{f * \eta : \ f \in B^+_0(I,\mathcal{L})\}, \tau_0(\mathcal{L})). \tag{4.2}$$

Конкретный способ аппроксимативной реализации к.-а. мер из множества (4.1) указан в [8, 12, 17]. Через $\mathbf{D}$ обозначаем множество всех семейств $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})$, для каждого из которых:
1) I есть объединение всех множеств из $\mathcal{K}$,
2) $A \cap B = \emptyset \ \ \forall A \in \mathcal{K} \, \forall B \in \mathcal{K} \setminus \{A\}$.
Через $\prec$ обозначаем направление на $\mathbf{D}$, определяемое на основе вписанности одного разбиения из $\mathbf{D}$ в другое; см. [12, с. 83]. Тогда $(\mathbf{D},\prec)$ — непустое НМ. Если $\mu \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]$ и $\mathcal{K} \in \mathbf{D}$, то в согласии с [8, с. 49] определяем $\Theta^+_\mu[\mathcal{K}] \in B^+_0(I,\mathcal{L})$. Это позволяет определить нужные отображения из $\mathbf{D}$ в $B^+_0(I,\mathcal{L})$ и в $(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]$. Сейчас отметим второе: если $\mu \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]$, то $\Theta^+_\mu[\cdot] * \eta$ есть def оператор $\mathcal{K} \longmapsto \Theta^+_\mu[\mathcal{K}] * \eta : \ \mathbf{D} \longrightarrow (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]$, причем для получающейся направленности $(\mathbf{D},\prec,\Theta^+_\mu[\cdot] * \eta)$ в $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ имеем [8, с. 50] свойства:

$$((\mathbf{D},\prec,\Theta^+_\mu[\cdot] * \eta) \stackrel{\tau^+_*(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu) \ \& \ ((\mathbf{D},\prec,\Theta^+_\mu[\cdot] * \eta) \stackrel{\tau^+_0(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu). \tag{4.3}$$

Введем

$$(\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L};\eta] \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]^r, \ (\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L};\eta] \subset (\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L}];$$

для элементов этого множества аппроксимативная конструкция на основе (4.3) реализуется покомпонентно. Для $\mu \in (\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L};\eta]$ имеем $\mu(j) \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]$ при $j \in \overline{1,r}$ и

$$\Theta^{(r)}_\mu[\mathcal{K}] \stackrel{\triangle}{=} (\Theta^+_{\mu(i)}[\mathcal{K}])_{i \in \overline{1,r}} \in B^+_{0,r}[I;\mathcal{L}] \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}.$$

Если $\mu \in (\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L};\eta]$, то через $\Theta^{(r)}_\mu[\cdot]$ обозначаем отображение

$$\mathcal{K} \longmapsto \Theta^{(r)}_\mu[\mathcal{K}] : \ \mathbf{D} \longrightarrow B^+_{0,r}[I;\mathcal{L}]. \tag{4.4}$$

Введем также отображение $\mathbb{P}$ в виде правила

$$(f_i)_{i \in \overline{1,r}} \longmapsto (f_i * \eta)_{i \in \overline{1,r}} : \ B^+_{0,r}[I;\mathcal{L}] \longrightarrow (\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L};\eta]. \tag{4.5}$$

Тогда из (4.3) и (4.5) имеем с очевидностью $\forall \mu \in (\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L};\eta]$

$$((\mathbf{D},\prec,\mathbb{P} \circ \Theta^{(r)}_\mu[\cdot]) \stackrel{\otimes^r[\tau^+_*(\mathcal{L})]}{\longrightarrow} \mu) \ \& \ ((\mathbf{D},\prec,\mathbb{P} \circ \Theta^{(r)}_\mu[\cdot]) \stackrel{\otimes^r[\tau^+_0(\mathcal{L})]}{\longrightarrow} \mu). \tag{4.6}$$

В качестве добавления к (4.6) отметим с учетом [8, с. 49], что

$$(\int_I \Theta^{(r)}_{\mu}[\mathcal{K}](i)d\eta)_{i\in\overline{1,r}} = (\int_I \Theta^{+}_{\mu(i)}[\mathcal{K}]d\eta)_{i\in\overline{1,r}} = (\mu(i)(I))_{i\in\overline{1,r}} \quad \forall \mu \in (\mathrm{add})^{+}_{r}[\mathcal{L};\eta]\ \forall \mathcal{K}\in \mathbf{D}. \qquad (4.7)$$

В дальнейшем (3.4), (4.6) и (4.7) используются в естественном сочетании при установлении свойства плотности при погружении пространства обычных управлений в пространство обобщенных.

§ 5. Пространство возможных управлений и его расширение

В настоящем параграфе вводится одно специальное множество вектор-функций, которое по смыслу аналогично U § 1. Вектор-функции из упомянутого множества называем управлениями, хотя какого-либо аналога системы (1.1) здесь не рассматривается. Обсудим естественную (и восходящую к [7, 8]) схему расширения в классе векторных к.-а. мер.

Через $\mathbb{R}^r_+$ обозначаем множество всех элементов $\mathbb{R}^r$ (r -мерных векторов) с неотрицательными компонентами. Фиксируем $\mathbf{F} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^r_+)$ и полагаем всюду в дальнейшем, что множество $\mathbf{F}$ замкнуто в $(\mathbb{R}^r, \tau^{(r)}_{\mathbb{R}}) = (\mathbb{R}^r, \otimes^r[\tau_{\mathbb{R}}])$. Итак, $\mathbf{F}$ — непустое замкнутое (в обычном смысле) п/м $\mathbb{R}^r_+$. Пусть

$$\mathbf{U} \stackrel{\triangle}{=} \{(f_i)_{i\in\overline{1,r}} \in B^{+}_{0,r}[I;\mathcal{L}] \mid \left(\int_I f_i d\eta\right)_{i\in\overline{1,r}} \in \mathbf{F}\} \qquad (5.1)$$

(напомним, что I — непустое множество произвольной природы; см. § 3). Кроме того, пусть

$$\tilde{\mathbf{U}} \stackrel{\triangle}{=} \{(\mu_i)_{i\in\overline{1,r}} \in (\mathrm{add})^{+}_{r}[\mathcal{L};\eta] \mid (\mu_i(I))_{i\in\overline{1,r}} \in \mathbf{F}\}. \qquad (5.2)$$

Элементы множества (5.1) (множества (5.2)) именуем обычными (обобщенными) управлениями. Вполне очевидно вложение

$$\mathbb{P}^1(\mathbf{U}) \subset \tilde{\mathbf{U}}, \qquad (5.3)$$

вытекающее из (4.7) и свойств неопределенного интеграла (см. [12, с. 69]). Напомним здесь же, что из (4.2) вытекает по определению топологии произведения цепочка равенств

$$(\mathrm{add})^{+}_{r}[\mathcal{L};\eta] = \mathrm{cl}(\mathbb{P}^1(B^{+}_{0,r}[I;\mathcal{L}]), \otimes^r[\tau^{+}_{*}(\mathcal{L})]) = \mathrm{cl}(\mathbb{P}^1(B^{+}_{0,r}[I;\mathcal{L}]), \otimes^r[\tau^{+}_{0}(\mathcal{L})]). \qquad (5.4)$$

Из (5.4) вытекает, что $\mathbb{P}^1(B^{+}_{0,r}[I;\mathcal{L}])$ есть множество, всюду плотное в $(\mathrm{add})^{+}_{r}[\mathcal{L};\eta]$ в смысле каждого из ТП

$$((\mathrm{add})^{+}_{r}[\mathcal{L}], \otimes^r[\tau^{+}_{*}(\mathcal{L})]),\ (\mathrm{add})^{+}_{r}[\mathcal{L}], \otimes^r[\tau^{+}_{0}(\mathcal{L})]). \qquad (5.5)$$

Предложение 1. *Отображение*

$$(\mu_i)_{i\in\overline{1,r}} \longmapsto (\mu_i(I))_{i\in\overline{1,r}} :\ \mathrm{add})^{+}_{r}[\mathcal{L}] \longrightarrow \mathbb{R}^r \qquad (5.6)$$

непрерывно в смысле топологий $\otimes^r[\tau^{+}_{*}(\mathcal{L})]$ *и* $\tau^{(r)}_{\mathbb{R}}$.

Доказательство практически очевидно и по этой причине опущено.

Предложение 2. *Множество* $\tilde{\mathbf{U}}$ *замкнуто в первом из упоминаемых в* (5.5) *ТП:* $\tilde{\mathbf{U}} \in \mathcal{F}_{\mathbf{t}}$ *при* $\mathbf{t} = \otimes^r[\tau^{+}_{*}(\mathcal{L})]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через φ отображение (5.6). Тогда в силу (5.2) $\tilde{\mathbf{U}} = (\mathrm{add})^{+}_{r}[\mathcal{L};\eta] \cap \varphi^{-1}(\mathbf{F})$, где в силу предложения 1 множество $\varphi^{-1}(\mathbf{F})$ замкнуто в топологии $\otimes^r[\tau^{+}_{*}(\mathcal{L})]$ (см. первое ТП в (5.5)). Поскольку множество $(\mathrm{add})^{+}_{r}[\mathcal{L};\eta]$ замкнуто (см. (5.4)), то требуемое утверждение установлено. □

С учетом (3.4) получаем следующее очевидное вложение:

$$\mathrm{cl}(\mathbb{P}^1(\mathbf{U}), \otimes^r[\tau^{+}_{0}(\mathcal{L})]) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{P}^1(\mathbf{U}), \otimes^r[\tau^{+}_{*}(\mathcal{L})]). \qquad (5.7)$$

Предложение 3. *Справедливо вложение* $\tilde{\mathbf{U}} \subset \mathrm{cl}(\mathbb{P}^1(\mathbf{U}), \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\nu \in \tilde{\mathbf{U}}$. Тогда имеем отображение $\nu : \overline{1,r} \longrightarrow (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]$. Для оператора $\varphi \stackrel{\triangle}{=} \Theta_\nu^{(r)}[\cdot]$ (из $\mathbf{D}$ в $B_{0,r}^+[I;\mathcal{L}]$) имеем, что

$$\varphi(\mathcal{K})(j) = \Theta_{\nu(j)}^+[\mathcal{K}] \ \ \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D} \, \forall j \in \overline{1,r}.$$

С учетом (4.7) имеем, следовательно, очевидное свойство

$$\left(\int_I \varphi(\mathcal{K})(i) d\eta\right)_{i\in\overline{1,r}} = (\nu(i)(I))_{i\in\overline{1,r}} \in \mathbf{F} \ \ \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}.$$

С учетом (5.1) получаем, в частности, что $\varphi :\ \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{U}$. Тогда $(\mathbf{D}, \prec, \mathbb{P}\circ\varphi)$ — направленность в $\mathbb{P}^1(\mathbf{U})$ и с учетом (4.6) имеем (см. [10, с. 89]) включение $\nu \in \mathrm{cl}(\mathbb{P}^1(\mathbf{U}), \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})])$. $\square$

Теорема 1. *Справедлива следующая цепочка равенств:*

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathrm{cl}(\mathbb{P}^1(\mathbf{U}), \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]) = \mathrm{cl}(\mathbb{P}^1(\mathbf{U}), \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (5.3) и предложения 2 имеем: $\mathrm{cl}(\mathbb{P}^1(\mathbf{U}), \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]) \subset \tilde{\mathbf{U}}$. Теперь из (5.7) и предложения 3 имеем цепочку вложений

$$\tilde{\mathbf{U}} \subset \mathrm{cl}(\mathbb{P}^1(\mathbf{U}), \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{P}^1(\mathbf{U}), \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]) \subset \tilde{\mathbf{U}}.$$

Через $\mathcal{O}$ обозначаем в/з функцию на $\mathcal{L}$, для которой $\mathcal{O}(L) \stackrel{\triangle}{=} 0 \ \ \forall L \in \mathcal{L}$. Введена нулевая мера на $\mathcal{L}$. Всюду в дальнейшем полагаем, что $\eta \neq \mathcal{O}$. Тогда $\mathbf{U} \neq \emptyset$, т.е. $\mathbf{U} \in \mathcal{P}'(B_{0,r}^+[I;\mathcal{L}])$. Разумеется (см. теорему 1), $\tilde{\mathbf{U}} \in \mathcal{P}'((\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}])$ и

$$\tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]|_{\tilde{\mathbf{U}}}, \ \ \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]|_{\tilde{\mathbf{U}}} \tag{5.8}$$

суть хаусдорфовы топологии $\tilde{\mathbf{U}}$, причем

$$\tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}) \subset \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}) \tag{5.9}$$

((5.9) наследуется от (3.4)). Справедлива следующая

Теорема 2. *Если* $\mathbf{F} \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(r)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^r]$, *то* $(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}))$ *— непустой компакт.*

Доказательство сводится к элементарной комбинации простейших свойств компактных ТП (см., например, [10, § 3.1]) и теоремы Алаоглу [16, гл. V]. Отметим, что содержательные варианты некомпактного множества $\tilde{\mathbf{U}}$ легко извлекаются из построений [7, 17, 19] (см. также [8, гл. IV], где проведено систематическое исследование расширений в классе неотрицательных векторных к.-а. мер). Сейчас рассмотрим одну детализацию весьма общей процедуры [19], использующей т. н. битопологические пространства (БТП).

Фиксируем множество $\mathbf{X}$, оператор $\mathbf{s} : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{X}$ и множество $\mathbf{Y} \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$. Последнее формирует (стандартное) ограничение $\mathbf{s}(u) \in \mathbf{Y}$ на выбор $u \in \mathbf{U}$. Для конструирования асимптотических аналогов данного ограничения введем топологии $\tau_{\mathbf{l}}$ и $\tau_{\mathbf{u}}$ множества $\mathbf{X}$, полагая при этом, что $\tau_{\mathbf{l}} \subset \tau_{\mathbf{u}}$ (топология $\tau_{\mathbf{u}}$ сильнее). Получающийся триплет

$$(\mathbf{X}, \tau_{\mathbf{l}}, \tau_{\mathbf{u}}) \tag{5.10}$$

именуем БТП в согласии с [19]. Наряду с (5.10), имеем (см. (5.9)) БТП

$$(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}), \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L})). \tag{5.11}$$

Фиксируем семейство $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N}_{\tau_{\mathbf{l}}}[\mathbf{Y}])$ и полагаем в дальнейшем, что

$$\forall x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y} \ \exists O_1 \in N_{\tau_{\mathbf{l}}}(x) \ \exists O_2 \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}} :\ O_1 \cap O_2 = \emptyset. \tag{5.12}$$

Свойство (5.12) называем $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}$-регулярностью множества $\mathbf{Y}$ или просто регулярностью $\mathbf{Y}$, если понятно, о каком семействе $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}$ идет речь.

Замечание 1. Условие (5.12) выполняется, когда $(\mathbf{X},\tau_\mathbf{l})$ — регулярное [11] ТП, $\mathbf{Y}\in\mathcal{F}_{\tau_\mathbf{l}}$ и $\mathcal{Y}_\mathbf{l}=\mathbb{N}_{\tau_\mathbf{l}}[\mathbf{Y}]$. Последнее не всегда естественно. В этой связи отметим другой случай в (5.12): $(\mathbf{X},\tau_\mathbf{l})$ — метризуемое ТП, $\mathbf{Y}\in\mathcal{F}_{\tau_\mathbf{l}}$, $\mathbf{Y}\neq\emptyset$; ; $\mathcal{Y}_\mathbf{l}$ — семейство всех ε-окрестностей $\mathbf{Y}$ в метрике, порождающей топологию $\tau_\mathbf{l}$, $\varepsilon>0$. В общем случае (5.12) непременно имеем свойство замкнутости $\mathbf{Y}$, то есть $\mathbf{Y}\in\mathcal{F}_{\tau_\mathbf{l}}$.

Пусть $\mathcal{Y}_\mathbf{u}\overset{\triangle}{=}\mathbb{N}_{\tau_\mathbf{u}}[\mathbf{Y}]$. По свойствам БТП

$$\mathcal{Y}_\mathbf{l}\subset\mathbb{N}_{\tau_\mathbf{l}}[\mathbf{Y}]\subset\mathcal{Y}_\mathbf{u}. \tag{5.13}$$

Возвращаясь к МП §2, полагаем $\mathcal{E}_\mathbf{l}\overset{\triangle}{=}\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_\mathbf{l}]$ и $\mathcal{E}_\mathbf{u}\overset{\triangle}{=}\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_\mathbf{u}]$ (см. (2.1)); из (5.13) имеем вложение

$$\mathcal{E}_\mathbf{l}\subset\mathcal{E}_\mathbf{u}. \tag{5.14}$$

Всюду в дальнейшем используем определение МП §2 при условии $E=\mathbf{U}$. Если (T,t) — ТП и $g\in T^{\mathbf{U}}$, то

$$(\mathbf{as})[T;t;g;\mathcal{E}_\mathbf{u}]\subset(\mathbf{as})[T;t;g;\mathcal{E}_\mathbf{l}]. \tag{5.15}$$

Пусть $\mathbf{p}\overset{\triangle}{=}(\mathbb{P}|\mathbf{U})$; $\mathbf{p}:\ \mathbf{U}\longrightarrow\tilde{\mathbf{U}}$ (см. (5.3)); при этом $\mathbf{p}^1(\mathbf{U})=\mathbb{P}^1(\mathbf{U})$ и (см. (5.8), теорему 1, а также [10, с.111])

$$\tilde{\mathbf{U}}=\mathrm{cl}(\mathbf{p}^1(\mathbf{U}),\tilde{\tau}^*_r(\mathcal{L}))=\mathrm{cl}(\mathbf{p}^1(\mathbf{U}),\tilde{\tau}^0_r(\mathcal{L})). \tag{5.16}$$

Пусть $\mathbf{r}\in C(\tilde{\mathbf{U}},\tilde{\tau}^*_r(\mathcal{L}),\mathbf{X},\tau_\mathbf{l})\cap C(\tilde{\mathbf{U}},\tilde{\tau}^0_r(\mathcal{L}),\mathbf{X},\tau_\mathbf{u})$ (это свойство $\mathbf{r}$ именуем далее универсальной непрерывностью) и при этом

$$\mathbf{s}=\mathbf{r}\circ\mathbf{p}. \tag{5.17}$$

Теорема 3. *Справедлива следующая цепочка равенств:*

$$(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}};\tilde{\tau}^*_r(\mathcal{L});\mathbf{p};\mathcal{E}_\mathbf{l}]=(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}};\tilde{\tau}^*_r(\mathcal{L});\mathbf{p};\mathcal{E}_\mathbf{u}]=(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}};\tilde{\tau}^0_r(\mathcal{L});\mathbf{p};\mathcal{E}_\mathbf{l}]=(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}};\tilde{\tau}^0_r(\mathcal{L});\mathbf{p};\mathcal{E}_\mathbf{u}]=\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (5.15) имеем два очевидных вложения:

$$(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}};\tilde{\tau}^*_r(\mathcal{L});\mathbf{p};\mathcal{E}_\mathbf{u}]\subset\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}};\tilde{\tau}^*_r(\mathcal{L});\mathbf{p};\mathcal{E}_\mathbf{l}], \tag{5.18}$$

$$(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}};\tilde{\tau}^0_r(\mathcal{L});\mathbf{p};\mathcal{E}_\mathbf{u}]\subset(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}};\tilde{\tau}^0_r(\mathcal{L});\mathbf{p};\mathcal{E}_\mathbf{l}]. \tag{5.19}$$

Из (5.9) непосредственно следует система вложений: $N_{\tilde{\tau}^*_r(\mathcal{L})}(\mu)\subset N_{\tilde{\tau}^0_r(\mathcal{L})}(\mu)\quad\forall\mu\in\tilde{\mathbf{U}}$. Как следствие (см. (2.2)) имеем очевидные вложения

$$(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}};\tilde{\tau}^0_r(\mathcal{L});\mathbf{p};\mathcal{E}]\subset(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}};\tilde{\tau}^*_r(\mathcal{L});\mathbf{p};\mathcal{E}]\ \ \forall\mathcal{E}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(U)). \tag{5.20}$$

В частности, из (5.18) и (5.20) следуют вложения

$$(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}};\tilde{\tau}^0_r(\mathcal{L});\mathbf{p};\mathcal{E}_\mathbf{u}]\subset(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}};\tilde{\tau}^*_r(\mathcal{L});\mathbf{p};\mathcal{E}_\mathbf{u}]\subset(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}};\tilde{\tau}^*_r(\mathcal{L});\mathbf{p};\mathcal{E}_\mathbf{l}]. \tag{5.21}$$

В свою очередь, из (5.19) и (5.20) имеем цепочку вложений

$$(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}};\tilde{\tau}^0_r(\mathcal{L});\mathbf{p};\mathcal{E}_\mathbf{u}]\subset(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}};\tilde{\tau}^0_r(\mathcal{L});\mathbf{p};\mathcal{E}_\mathbf{l}]\subset(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}};\tilde{\tau}^*_r(\mathcal{L});\mathbf{p};\mathcal{E}_\mathbf{l}]. \tag{5.22}$$

Выберем произвольно $\mu\in(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}};\tilde{\tau}^*_r(\mathcal{L});\mathbf{p};\mathcal{E}_\mathbf{l}]$ и подберем направленность $(D,\preccurlyeq,\varphi)$ в множестве $\mathbf{U}$, для которой

$$(\mathcal{E}_\mathbf{l}\subset(\mathbf{U}-\mathrm{ass})[D;\preccurlyeq;\varphi])\ \&\ ((D,\preccurlyeq,\mathbf{p}\circ\varphi)\overset{\tilde{\tau}^*_r(\mathcal{L})}{\longrightarrow}\mu). \tag{5.23}$$

С учетом непрерывности $\mathbf{r}$ имеем (см. [20, с.47]) из (5.23) следующее свойство сходимости:

$$(D,\preccurlyeq,\mathbf{r}\circ\mathbf{p}\circ\varphi)\overset{\tau_\mathbf{l}}{\longrightarrow}\mathbf{r}(\mu).$$

С учетом (5.17) получаем очевидное свойство

$$(D, \preccurlyeq, \mathbf{s} \circ \varphi) \xrightarrow{\tau_{\mathbf{l}}} \mathbf{r}(\mu). \tag{5.24}$$

Тогда $\mathbf{r}(\mu) \in \mathbf{Y}$. В самом деле, допустим противное: $\mathbf{r}(\mu) \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y}$. С учетом регулярности Y (см. (5.12)) подберем окрестности $O_1 \in N_{\tau_{\mathbf{l}}}(\mathbf{r}(\mu))$ и $O_2 \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}}$, для которых $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Тогда $\mathbf{s}^{-1}(O_2) \in \mathcal{E}_{\mathbf{l}}$, а потому (см. (5.23))

$$\mathbf{s}^{-1}(O_2) \in (\mathbf{U} - \mathrm{ass})[D; \preccurlyeq; \varphi]. \tag{5.25}$$

Из (5.24) следует, что $O_1 \in (\mathbf{X} - \mathrm{ass})[D; \preccurlyeq; \mathbf{s} \circ \varphi]$, откуда легко следует, что

$$\mathbf{s}^{-1}(O_1) \in (\mathbf{U} - \mathrm{ass})[D; \preccurlyeq; \varphi]. \tag{5.26}$$

Из (5.25) и (5.26) имеем по аксиомам фильтра следующее свойство:

$$\mathbf{s}^{-1}(O_1 \cap O_2) = \mathbf{s}^{-1}(O_1) \cap \mathbf{s}^{-1}(O_2) \in (\mathbf{U} - \mathrm{ass})[D; \preccurlyeq; \varphi], \tag{5.27}$$

откуда, в частности, следует (см. § 2), что $\mathbf{s}^{-1}(O_1 \cap O_2) \neq \emptyset$, что противоречит выбору O_1 и O_2. Данное противоречие означает: $\mathbf{r}(\mu) \in \mathbf{Y}$. Поэтому $\mu \in \mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})$, чем завершается обоснование вложения

$$(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_{\mathbf{l}}] \subset \mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}). \tag{5.28}$$

Выберем произвольно $\nu \in \mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})$. Тогда $\nu \in \tilde{\mathbf{U}}$ и при этом $\mathbf{r}(\nu) \in \mathbf{Y}$. По выбору $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$ имеем свойство $\mathcal{E}_{\mathbf{u}} \in \beta[\mathbf{U}]$, а тогда (см.(2.3))

$$(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}] = \bigcap_{M \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}} \mathrm{cl}(\mathbf{p}^1(M), \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L})). \tag{5.29}$$

Пусть $V \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}$, а $W \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$ таково, что $V = \mathbf{s}^{-1}(W)$. По определению $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$ имеем, что $W_0 \subset W$ для некоторого множества $W_0 \in \tau_{\mathbf{u}}$ со свойством $\mathbf{Y} \subset W_0$; см. § 2. С учетом непрерывности $\mathbf{r}$ имеем:

$$\mathbf{r}^{-1}(W_0) \in \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}), \tag{5.30}$$

$$\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) \subset \mathbf{r}^{-1}(W_0). \tag{5.31}$$

Это означает, что $\mathbf{r}^{-1}(W_0)$ есть открытая окрестность ν : выполнено (5.30) и в силу (5.31) $\nu \in \mathbf{r}^{-1}(W_0)$. Пусть $H_* \in N_{\tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L})}(\nu)$, а $G_* \in \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L})$ обладает свойствами $G_* \subset H_*$ и $\nu \in G_*$; см. [9, гл. I]. Тогда

$$G_0 \stackrel{\triangle}{=} G_* \cap \mathbf{r}^{-1}(W_0) \in \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}) : \ \nu \in G_0. \tag{5.32}$$

Тогда, в частности, $G_0 \in N_{\tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L})}(\nu)$. В силу (5.16) $G_0 \cap \mathbf{p}^1(\mathbf{U}) \neq \emptyset$. Пусть $\nu_0 \in G_0 \cap \mathbf{p}^1(\mathbf{U})$. В силу (5.32) $\mathbf{r}(\nu_0) \in W_0$. С другой стороны, $\nu_0 = \mathbf{p}(u_0)$ для некоторого управления $u_0 \in \mathbf{U}$, а тогда (см. (5.17)) $\mathbf{s}(u_0) = \mathbf{r}(\mathbf{p}(u_0)) = \mathbf{r}(\nu_0) \in W_0$ и, стало быть, $u_0 \in \mathbf{s}^{-1}(W)$. Тогда $u_0 \in V$ и $\nu_0 \in \mathbf{p}^1(V) \cap H_*$. Установили, что $\mathbf{p}^1(V) \cap T \neq \emptyset \ \ \forall T \in N_{\tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L})}(\nu)$. Поэтому $\nu \in \mathrm{cl}(\mathbf{p}^1(V), \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}))$. Поскольку выбор V был произвольным, имеем из (5.29) включение $\nu \in (\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}]$, чем и завершается обоснование вложения

$$\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) \subset (\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}]. \tag{5.33}$$

Из (5.22), (5.28) и (5.33) вытекает следующая цепочка равенств:

$$\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) = (\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}] = (\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_{\mathbf{l}}] = (\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_{\mathbf{l}}]. \tag{5.34}$$

Из (5.21) и (5.34) следует также равенство $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) = (\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}]$; комбинируя последнее с (5.34), получаем требуемое утверждение. $\square$

Итак, $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})$ есть «универсальное» МП в пространстве обобщенных элементов (ОЭ).

§ 6. Конечномерная версия ограничений

В пределах данного параграфа полагаем, что $\mathbf{X} = \mathbb{R}^m$, где $m \in \mathcal{N}$. Кроме того, в настоящем параграфе предполагается, что $\tau_{\mathbf{l}} = \tau_{\mathbb{R}}^{(m)}$, то есть

$$(\mathbf{X}, \tau_{\mathbf{l}}) = (\mathbb{R}^m, \tau_{\mathbb{R}}^{(m)}) = (\mathbb{R}^m, \otimes^m[\tau_{\mathbb{R}}]) \tag{6.1}$$

(позднее мы вернемся к рассмотрению общего случая § 5). Имеем в (6.1) нормируемое и, в частности, метризуемое ТП. Условимся о некоторых обозначениях.

Если A — непустое множество, то через $(\mathrm{Dist})[A]$ обозначаем множество всех метрик на A; для $z \in A \times A$ через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первую и вторую компоненты z: $\mathrm{pr}_1(z) \in A$, $\mathrm{pr}_2(z) \in A$, $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$. Полагаем для всякого непустого множества A, что $\mathrm{diag}(A) \stackrel{\triangle}{=} \{z \in A \times A \mid \mathrm{pr}_1(z) = \mathrm{pr}_2(z)\}$ и $\mathbf{d}_A^0 \in (\mathrm{Dist})[A]$ (дискретная метрика A) такова, что

$$(\mathbf{d}_A^0(z) \stackrel{\triangle}{=} 0 \ \ \forall z \in \mathrm{diag}(A)) \ \& \ (\mathbf{d}_A^0(z) \stackrel{\triangle}{=} 1 \ \ \forall z \in (A \times A) \setminus \mathrm{diag}(A)).$$

Если A, B и C — множества, $g: A \times B \longrightarrow C$, $a \in A$ и $b \in B$, то (как обычно) $g(a,b) \stackrel{\triangle}{=} g(z)$, где $z = (a,b)$.

Через $\mathbf{d}$, $\mathbf{d} \in (\mathrm{Dist})[\mathbb{R}]$, обозначаем обычную $|\cdot|$-метрику $\mathbb{R}$ ($\mathbf{d}(x,y) = |x-y|$ при $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$); кроме того, $\mathbf{d}_{\mathbb{R}}^0 \in (\mathrm{Dist})[\mathbb{R}]$.

В целях построения $\tau_{\mathbf{u}}$ фиксируем множество $M \in \mathcal{P}(\overline{1,m})$: $M \subset \overline{1,m}$. Кортеж

$$(\rho_i)_{i \in \overline{1,m}} : \ \overline{1,m} \longrightarrow (\mathrm{Dist})[\mathbb{R}] \tag{6.2}$$

определяем условиями: $(\rho_j \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{d}_{\mathbb{R}}^0 \ \ \forall j \in M) \ \& \ (\rho_j \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{d} \ \ \forall j \in \overline{1,m} \setminus M)$. В терминах (6.2) конструируем метрику $\rho \in (\mathrm{Dist})[\mathbf{X}]$ по следующему правилу:

$$\rho((x_i)_{i \in \overline{1,m}}, (\tilde{x}_i)_{i \in \overline{1,m}}) \stackrel{\triangle}{=} \max_{k \in \overline{1,m}} \rho_k(x_k, \tilde{x}_k) \ \ \forall (x_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathbf{X} \ \forall (\tilde{x}_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathbf{X} \tag{6.3}$$

(случай $M = \emptyset$ не исключается; при $M = \overline{1,m}$ в силу (6.3) имеем равенство $\rho = \mathbf{d}_{\mathbf{X}}^0$). Всюду в настоящем параграфе полагаем, что $\tau_{\mathbf{u}}$ — топология $\mathbf{X}$, порожденная метрикой ρ.

Пусть, кроме того, $\delta \in (\mathrm{Dist})[\mathbf{X}]$ — обычная нормируемая метрика покоординатной сходимости: $\delta((x_i')_{i \in \overline{1,m}}, (x_i'')_{i \in \overline{1,m}}) = \max\limits_{i \in \overline{1,m}} |x_i' - x_i''| \ \ \forall (x_i')_{i \in \overline{1,m}} \in \mathbf{X} \ \forall (x_i'')_{i \in \overline{1,m}} \in \mathbf{X}$. Если $d \in (\mathrm{Dist})[\mathbf{X}]$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то $\mathbf{B}_d^0(x, \varepsilon) \stackrel{\triangle}{=} \{y \in \mathbf{X} \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ (открытый шар в $(\mathbf{X}, d)$). В качестве d можно использовать δ и ρ. Если $(x_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathbf{X}$ и $\varepsilon \in]0,1]$, то

$$\mathbf{B}_\rho^0((x_i)_{i \in \overline{1,m}}, \varepsilon) = \{(y_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathbf{X} \mid (x_j = y_j \ \ \forall j \in M) \ \& \ (|x_j - y_j| < \varepsilon \ \ \forall j \in \overline{1,m} \setminus M)\}. \tag{6.4}$$

Итак, топологии $\tau_{\mathbf{l}}$ и $\tau_{\mathbf{u}}$ порождены (в настоящем параграфе) метриками δ и ρ соответственно; ясно, что $\tau_{\mathbf{l}} \subset \tau_{\mathbf{u}}$, а рассматриваемый вариант триплета (5.10) есть БТП. Пусть до конца данного параграфа

$$\mathbf{Y} \in \mathcal{F}_{\tau_{\mathbf{l}}} \setminus \{\emptyset\}. \tag{6.5}$$

Если $d \in (\mathrm{Dist})[\mathbf{X}]$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то полагаем, что

$$\mathfrak{B}_d^0(\mathbf{Y}, \varepsilon) \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{y \in \mathbf{Y}} \mathbf{B}_d^0(y, \varepsilon).$$

Тем самым введена открытая ε-окрестность $\mathbf{Y}$ в метрическом пространстве $(\mathbf{X}, d)$. Полагаем в настоящем параграфе, что

$$\mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \stackrel{\triangle}{=} \{\mathfrak{B}_\delta^0(\mathbf{Y}, \varepsilon) : \ \varepsilon \in]0, \infty[\}.$$

В силу (6.5) непременно выполнено свойство (5.12). Как и в общем случае, $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}} = \mathbb{N}_{\tau_{\mathbf{u}}}[\mathbf{Y}]$. С учетом (6.4) можно сказать, что у нас много окрестностей в сильнейшей из двух топологий и мало окрестностей в слабейшей из этих топологий; в этой связи заметим, что

$$\mathbf{B}^0_\rho(x,\varepsilon) \subset \mathbf{B}^0_\delta(x,\varepsilon) \ \ \forall x \in \mathbf{X} \ \forall \varepsilon \in]0,1].$$

Для введения требуемого варианта $\mathbf{s}$ введем предварительно следующее отображение:

$$(i,j) \longmapsto S_{i,j} : \overline{1,m} \times \overline{1,r} \longrightarrow B(I,\mathcal{L}), \tag{6.6}$$

в терминах которого как раз и будет определен оператор $\mathbf{s}$ § 5:

$$\mathbf{s}((f_j)_{j\in\overline{1,r}}) \overset{\triangle}{=} \Big(\sum_{j=1}^{r} \int_I S_{i,j} f_j d\eta\Big)_{i\in\overline{1,m}} \ \ \forall (f_j)_{j\in\overline{1,r}} \in \mathbf{U}. \tag{6.7}$$

Постулируем до конца настоящего параграфа, что

$$S_{i,j} \in B_0(I,\mathcal{L}) \ \ \forall i \in M \ \forall j \in \overline{1,r}. \tag{6.8}$$

Оператор $\mathbf{r} : \tilde{\mathbf{U}} \longrightarrow \mathbf{X}$ определяем сейчас посредством интегрирования матриканта (6.6) по векторной к.-а. мере:

$$\mathbf{r}((\mu_j)_{j\in\overline{1,r}}) \overset{\triangle}{=} \Big(\sum_{j=1}^{r} \int_I S_{i,j} d\mu_j\Big)_{i\in\overline{1,m}} \quad \forall (\mu_j)_{j\in\overline{1,r}} \in \tilde{\mathbf{U}}. \tag{6.9}$$

Тогда (см. (6.7), (6.9)) по свойствам неопределенного интеграла [12, с. 70] имеем равенство (5.17) в его конкретной редакции: $\mathbf{s} = \mathbf{r} \circ \mathbf{p}$.

Предложение 4. *Отображение* (6.9) *универсально непрерывно:*

$$\mathbf{r} \in C(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}^*_r(\mathcal{L}), \mathbf{X}, \tau_{\mathbf{l}}) \cap C(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}^0_r(\mathcal{L}), \mathbf{X}, \tau_{\mathbf{u}}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойство $\mathbf{r} \in C(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}^*_r(\mathcal{L}), \mathbf{X}, \tau_{\mathbf{l}})$ вытекает из (6.9) и определения $*$-слабой топологии. Пусть $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi)$ есть направленность в $\tilde{\mathbf{U}}$, $\mu^* \in \tilde{\mathbf{U}}$ и при этом

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi) \overset{\tilde{\tau}^0_r(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu^*. \tag{6.10}$$

При $d \in \mathbb{D}$ имеем: $\psi(d) : \overline{1,r} \longrightarrow (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$. Кроме того, $\mu^* : \overline{1,r} \longrightarrow (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$. При этом в силу (5.8) и (6.10)

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi) \overset{\otimes^r[\tau^+_0(\mathcal{L})]}{\longrightarrow} \mu^*. \tag{6.11}$$

Если $i \in \overline{1,r}$, то отображение $d \longmapsto \psi(d)(i) : \mathbb{D} \longrightarrow (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ обозначаем через $\psi(\cdot)(i)$. Тогда из (6.11) вытекает, что

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi(\cdot)(i)) \overset{\tau^+_0(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu^*(i) \ \ \forall i \in \overline{1,r}. \tag{6.12}$$

С учетом (3.2) и (6.12) получаем также свойства: $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi(\cdot)(i)) \overset{\tau^+_*(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu^*(i) \ \ \forall i \in \overline{1,r}$. Итак, справедливы утверждения относительно $*$-слабой сходимости:

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi(\cdot)(i)) \overset{\tau_*(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu^*(i) \ \ \forall i \in \overline{1,r}. \tag{6.13}$$

В силу (6.6) и (6.13)

$$\Big(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \Big(\sum_{j=1}^{r} \int_I S_{i,j} d\psi(\partial)(j)\Big)_{\partial\in\mathbb{D}}\Big) \overset{\tau_{\mathbb{R}}}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^{r} \int_I S_{i,j} d\mu^*(j) \ \ \forall i \in \overline{1,m}. \tag{6.14}$$

Если $i \in \overline{1,m}$, то отображение $d \longmapsto (\mathbf{r} \circ \psi)(d)(i) : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ обозначаем через $(\mathbf{r} \circ \psi)(\cdot)(i)$. Тогда из (6.9) и (6.14) вытекает, что

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, (\mathbf{r} \circ \psi)(\cdot)(i)) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}} \mathbf{r}(\mu^*)(i) \ \ \forall i \in \overline{1,m}. \tag{6.15}$$

Наконец, из (6.12) и определений § 3 вытекает, что $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi(\cdot)(j)) \xrightarrow{\tau_0(\mathcal{L})} \mu^*(j) \ \ \forall j \in \overline{1,r}$. Последнее означает, что

$$\forall j \in \overline{1,r} \; \forall L \in \mathcal{L} \; \exists d_1 \in \mathbb{D} \; \forall d_2 \in \mathbb{D} \; (d_1 \sqsubseteq d_2) \Longrightarrow (\psi(d_2)(j)(L) = \mu^*(j)(L)).$$

Из (6.8) следует теперь, что $\forall i \in M \; \exists d_1 \in \mathbb{D} \; \forall d_2 \in \mathbb{D}$

$$(d_1 \sqsubseteq d_2) \Longrightarrow \Big(\sum_{j=1}^{r} \int_I S_{i,j} d\psi(d_2)(j) = \sum_{j=1}^{r} \int_I S_{i,j} d\mu^*(j) \Big). \tag{6.16}$$

Из (6.9) и (6.16) получаем очевидное следствие: $\exists d_1 \in \mathbb{D} \; \forall d_2 \in \mathbb{D}$

$$(d_1 \sqsubseteq d_2) \Longrightarrow ((\mathbf{r} \circ \psi)(d_2)(i) = \mathbf{r}(\mu^*)(i) \ \ \forall i \in M). \tag{6.17}$$

Рассмотрим (6.15) и (6.17) в естественной комбинации. Из (6.4) получаем: $\forall \varepsilon \in]0,1] \ \ \exists d_1 \in \mathbb{D}$ $\forall d_2 \in \mathbb{D}$

$$(d_1 \sqsubseteq d_2) \Longrightarrow ((\mathbf{r} \circ \psi)(d_2) \in \mathbf{B}^0_\rho(\mathbf{r}(\mu^*), \varepsilon)). \tag{6.18}$$

С учетом (6.18) и определения $\tau_{\mathbf{u}}$ имеем при условии (6.10) свойство

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \mathbf{r} \circ \psi) \xrightarrow{\tau_{\mathbf{u}}} \mathbf{r}(\mu^*). \tag{6.19}$$

Итак, (6.10) $\Longrightarrow$ (6.19). Поскольку выбор $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi)$ и μ^* был произвольным, имеем [20, с. 47] требуемое свойство $\mathbf{r} \in C(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}^0_r(\mathcal{L}), \mathbf{X}, \tau_{\mathbf{u}})$. □

С учетом предложения 4 можно говорить о конкретном варианте построений § 5; следовательно, в рассматриваемом сейчас случае справедливо утверждение теорем 1, 3.

§ 7. Множества притяжения (общий случай)

Вернемся к общей постановке § 5, в рамках которой справедливы теоремы 1, 3. Всюду в настоящем параграфе фиксируем ТП

$$(\mathbf{H}, \tau); \tag{7.1}$$

буква τ используется далее только в смысле (7.1) и обозначает фиксированную топологию множества $\mathbf{H}$. Пусть

$$\mathbf{h} : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{H}. \tag{7.2}$$

Оператор (7.2) именуем целевым, а ТП (7.1) — пространством оценок (результатов) в смысле, оговоренном в [14, 21]. Рассматриваем МП

$$(\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}_{\mathbf{l}}], \ (\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}]. \tag{7.3}$$

Для построения МП (7.3) привлекаем процедуры [19], следуя при этом общим соглашениям § 5 в части определения семейств $\mathcal{E}_{\mathbf{l}}$ и $\mathcal{E}_{\mathbf{u}}$, отвечающих (потенциально) вариантам ослабления $\mathbf{Y}$-ограничения при заданном БТП (5.10). Полагаем, разумеется, что для заданного универсально непрерывного отображения $\mathbf{r}$ (см. § 5) выполнено равенство (5.17), где $\mathbf{p}$ — сужение оператора $\mathbb{P}$ на $\mathbf{U}$. Итак, справедливы теоремы 1, 3.

Полагаем, кроме того, до конца настоящего параграфа, что

$$\mathbf{q} \in C_{\mathbf{ap}}(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}^*_r(\mathcal{L}), \mathbf{H}, \tau) : \ \mathbf{h} = \mathbf{q} \circ \mathbf{p}. \tag{7.4}$$

Итак, у нас задан совершенный (в данном случае; см. [10, с. 287]) оператор $\mathbf{q}$ со значениями в ТП (7.1), реализующий представление $\mathbf{h}$ в виде суперпозиции с оператором погружения $\mathbf{p}$.

Теорема 4. *Справедлива следующая цепочка равенств, характеризующая МП* (7.3):

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) = (\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}_{\mathbf{l}}] = (\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}]. \tag{7.5}$$

Доказательство получается простой конкретизацией положений [6, 7, 8, 19, 22], где следует учитывать (2.3) и возможность сведения задачи, в которой $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, к случаю (2.3) путем замены семейства $\mathcal{E}$ семейством конечных пересечений множеств из $\mathcal{E}$; см. [14, с. 53]. В итоге

$$(\mathbf{as})[\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathcal{E}] = \mathbf{q}^1((\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}};\tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L});\mathbf{p};\mathcal{E}]) \ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)).$$

Данное свойство следует дополнить теоремой 3.

Итак, $\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))$ есть МП, универсальное в диапазоне «асимптотических ограничений», определяемых семействами $\mathcal{E}_\mathbf{l}$, $\mathcal{E}_\mathbf{u}$. Точнее, $\forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$(\mathcal{E}_\mathbf{l} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{E}_\mathbf{u}) \Longrightarrow (\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) = (\mathbf{as})[\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathcal{E}]).$$

Данное свойство получается непосредственной комбинацией теоремы 4 и определений § 2.

§ 8. Компактифицируемый случай

В настоящем параграфе предполагается, что множество $\mathbf{F}$, используемое в (5.1) и (5.2), компактно: всюду в дальнейшем

$$\mathbf{F} \in (\tau_\mathbb{R}^{(r)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^r]. \tag{8.1}$$

Следовательно (см. (8.1)), в дальнейшем $\mathbf{F}$ — непустой компакт в $(\mathbb{R}^r, \tau_\mathbb{R}^{(r)})$.

Кроме того, всюду в дальнейшем полагаем, что $(\mathbf{H}, \tau)$ — хаусдорфово ТП. Пусть, наконец, до конца статьи

$$\mathbf{q} \in C(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}), \mathbf{H}, \tau) : \ \mathbf{h} = \mathbf{q} \circ \mathbf{p}. \tag{8.2}$$

Из (8.2) имеем очевидное следствие (см. [10, § 3.7], [20, с.77], а также теорему 2): в рассматриваемом далее случае (см., в частности, (8.1), (8.2)) непременно выполнено (7.4), чем обеспечивается справедливость теоремы 4. Итак, имеем в виде итогового следствия свойство: всюду в дальнейшем справедливо (7.5).

Напомним, что согласно (8.1) и теореме 2 ТП $(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}))$ — непустой компакт. Итак, в данном параграфе имеем компактифицируемый случай абстрактной задачи о достижимости. Будем предполагать в дальнейшем, что

$$\mathcal{Y}_\mathbf{l} \in \beta[\mathbf{X}]; \tag{8.3}$$

свойство $\mathcal{Y}_\mathbf{u} \in \beta[\mathbf{X}]$ следует из определений § 5. В связи с (8.3) отметим соотношение (3.4) в [14]. Разумеется, из определений § 5 вытекают включения

$$(\mathcal{E}_\mathbf{l} \in \beta[\mathbf{U}]) \ \& \ (\mathcal{E}_\mathbf{u} \in \beta[\mathbf{U}]). \tag{8.4}$$

Это позволяет использовать положения [23] (см. также [20, § 3.6]). Теперь с учетом (7.5) и положений [23], вытекающих из следствия 3.1.5 монографии [10], имеем (см. также [20, § 3.6]) $\forall S \in \mathbb{N}_\tau[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))]$

$$\begin{gathered}(\exists P \in \mathcal{E}_\mathbf{l} : \ S \in \mathbb{N}_\tau[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(Q), \tau)] \ \ \forall Q \in \mathcal{E}_\mathbf{l} \cap \mathcal{P}(P)) \ \& \\ \& \ (\exists \tilde{P} \in \mathcal{E}_\mathbf{u} : \ S \in \mathbb{N}_\tau[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\tilde{Q}), \tau)] \ \ \forall \tilde{Q} \in \mathcal{E}_\mathbf{u} \cap \mathcal{P}(\tilde{P})).\end{gathered}$$

Из определения семейств (8.4) вытекает, что $\forall S \in \mathbb{N}_\tau[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))]$

$$\begin{gathered}(\exists A \in \mathcal{Y}_\mathbf{l} : \ \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(B)), \tau) \subset S \ \ \forall B \in \mathcal{Y}_\mathbf{l} \cap \mathcal{P}(A)) \ \& \\ \& \ (\exists \tilde{A} \in \mathcal{Y}_\mathbf{u} : \ \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\tilde{B})), \tau) \subset S \ \ \forall \tilde{B} \in \mathcal{Y}_\mathbf{u} \cap \mathcal{P}(\tilde{A})).\end{gathered} \tag{8.5}$$

В (8.5) указана принципиальная возможность «окрестностной» реализации универсального (в диапазоне «асимптотических ограничений») МП (7.5): имеется в виду попадание замыканий множеств $\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(T))$, где T — окрестность $\mathbf{Y}$ соответствующего типа, в наперед заданную «вилку» с некоторого момента.

Компактифицируемая задача о достижимости в метрическом пространстве. Всюду в дальнейшем предполагается, что $(\mathbf{H},\tau)$ — метризуемое ТП (усиливаем условия на $(\mathbf{H},\tau)$). Пусть $\mathcal{D}$ — метрика $\mathbf{H}$, порождающая топологию τ;

$$\mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}(z,\varepsilon)\stackrel{\triangle}{=}\{\tilde z\in\mathbf{H}\mid\mathcal{D}(z,\tilde z)<\varepsilon\}\ \ \forall z\in\mathbf{H}\,\forall\varepsilon\in]0,\infty[.$$

Тогда τ — семейство всех множеств $G\in\mathcal{P}(\mathbf{H})$ таких, что $\forall z\in G\ \exists\varepsilon\in]0,\infty[:\ \mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}(z,\varepsilon)\subset G$. Если $T\in\mathcal{P}(\mathbf{H})$ и $\varepsilon\in]0,\infty[$, то

$$\mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[T;\varepsilon]=\bigcup_{z\in T}\mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}(z,\varepsilon)\in\mathbb{N}_\tau[T]\cap\tau \tag{8.6}$$

есть открытая ε-окрестность множества T.

Напомним, что в силу непрерывности $\mathbf{r}$ имеем (см. замечание 5.1), что $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})\in\mathcal{F}_{\tilde\tau^*_r(\mathcal{L})}$. Как следствие, $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})\in(\tilde\tau^*_r(\mathcal{L})-\mathrm{comp})[\tilde{\mathbf{U}}]$, а тогда в силу известного свойства непрерывных отображений

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))\in(\tau-\mathrm{comp})[\mathbf{H}]. \tag{8.7}$$

Полезно отметить также и то, что

$$\mathbf{q}^1(\tilde{\mathbf{U}})\in(\tau-\mathrm{comp})[\mathbf{H}]\setminus\{\emptyset\}. \tag{8.8}$$

Если же $L\in\mathcal{P}(\mathbf{U})$, то, как легко видеть, $\mathbf{h}^1(L)\subset\mathbf{q}^1(\tilde{\mathbf{U}})$, а потому

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(L),\tau)\subset\mathbf{q}^1(\tilde{\mathbf{U}}). \tag{8.9}$$

В связи с (8.8) полагаем, что $\tilde\tau\stackrel{\triangle}{=}\tau|_{\mathbf{q}^1(\tilde{\mathbf{U}})}$, получая непустой компакт

$$(\mathbf{q}^1(\tilde{\mathbf{U}}),\tilde\tau). \tag{8.10}$$

С учетом (8.9), компактности ТП (8.10) и свойства транзитивности операции перехода к подпространству имеем, что

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(L),\tau)\in(\tau-\mathrm{comp})[\mathbf{H}]\ \ \forall L\in\mathcal{P}(\mathbf{U}). \tag{8.11}$$

Из (8.11) следует, что

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(T)),\tau)\in(\tau-\mathrm{comp})[\mathbf{H}]$$

при $T\in\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$; с учетом (5.13) имеем, что

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\tilde T)),\tau)\in(\tau-\mathrm{comp})[\mathbf{H}]$$

при $\tilde T\in\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}$. Используя (2.3), (8.4) и определения § 5, получаем, что

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))\subset\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(T)),\tau)\ \ \forall T\in\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}. \tag{8.12}$$

В связи с (8.12) полезно учесть свойство (5.13). Рассмотрим отдельно следующие два возможных случая: 1') $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})=\emptyset$; 2') $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})\neq\emptyset$.

1') Пусть $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})=\emptyset$. Тогда (см. (2.3), (8.4)) в силу теоремы 4 пересечение всех множеств $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(T)),\tau)$, $T\in\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}$, пусто. Введем в рассмотрение семейство

$$\mathcal{T}\stackrel{\triangle}{=}\{\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(T)),\tau):\ T\in\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}\} \tag{8.13}$$

с пустым пересечением всех своих множеств. С учетом (8.3) и (8.13) проверяется [20, с. 37], что

$$\forall\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{T})\ \exists W\in\mathcal{T}:\ W\subset\bigcap_{T\in\mathcal{K}}T. \tag{8.14}$$

С учетом (8.9) имеем, что $T \subset \mathbf{q}^1(\tilde{\mathbf{U}})\quad \forall T \in \mathcal{T}$. Наконец, все множества из $\mathcal{T}$ замкнуты в компакте (8.10). Поэтому с учетом пустоты пересечения всех множеств из $\mathcal{T}$ (8.13) и свойства (8.14) имеем, что $\exists T \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}}:\ \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(T)), \tau) = \emptyset$. Из этого свойства вытекает с очевидностью, что $\exists T \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}}:\ \mathbf{s}^{-1}(T) = \emptyset$. С учетом (5.13) имеем также, что $\exists \tilde{T} \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}:\ \mathbf{s}^{-1}(\tilde{T}) = \emptyset$. Итак, при $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) = \emptyset$ имеем свойство несовместности некоторых ослабленных версий $\mathbf{Y}$-ограничения. Сейчас отметим только импликацию $(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) = \emptyset) \Longrightarrow (\exists T \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}}:\ \mathbf{s}^{-1}(T) = \emptyset)$.

2') Всюду в дальнейшем полагаем, что $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) \neq \emptyset$. Как следствие, имеем

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \neq \emptyset. \tag{8.15}$$

Пусть $\mathcal{C} \overset{\triangle}{=} (\tau - \mathrm{comp})[\mathbf{H}] \setminus \{\emptyset\}$ ($\mathcal{C}$ — семейство всех непустых компактных п/м $\mathbf{H}$). С учетом (8.7) и (8.15)

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \in \mathcal{C}. \tag{8.16}$$

С учетом (8.11) и (8.12) имеем теперь, что

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(T)), \tau) \in \mathcal{C}\ \ \forall T \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}. \tag{8.17}$$

Из (5.13) и (8.17) вытекает, в частности, следующее свойство:

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(T)), \tau) \in \mathcal{C}\ \ \forall T \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}}. \tag{8.18}$$

Через $\mathbf{B}[\mathcal{D}]$ обозначаем семейство всех множеств $\mathbf{\Gamma} \in \mathcal{P}'(\mathbf{H})$, для каждого из которых

$$\exists z \in \mathbf{H}\ \exists a \in]0, \infty[:\ \ \mathbf{\Gamma} \subset \mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}(z, a).$$

Тогда $\mathbf{B}_{\mathcal{F}}[\mathcal{D}] \overset{\triangle}{=} \mathbf{B}[\mathcal{D}] \cap \mathcal{F}_\tau$ есть семейство всех непустых, ограниченных и замкнутых п/м $\mathbf{H}$, причем $\mathcal{C} \subset \mathbf{B}_{\mathcal{F}}[\mathcal{D}]$. Если $\mathbf{\Gamma} \in \mathcal{P}'(\mathbf{H})$, то

$$(\mathcal{D} - \inf)[z;\, \mathbf{\Gamma}\,] \overset{\triangle}{=} \inf(\{\mathcal{D}(z, \tilde{z}) :\ \tilde{z} \in \mathbf{\Gamma}\,\}) \in [0, \infty[\ \ \forall z \in \mathbf{H}. \tag{8.19}$$

В частности, (8.19) определено при $\mathbf{\Gamma} \in \mathbf{B}[\mathcal{D}]$. Если $A \in \mathbf{B}[\mathcal{D}]$ и $B \in \mathbf{B}[\mathcal{D}]$, то

$$\exists c \in [0, \infty[:\ \{(\mathcal{D} - \inf)[z; A] :\ z \in B\} \in \mathcal{P}'([0, c]);$$

в силу этого очевидного свойства определено значение $\sup\limits_{z \in B}(\mathcal{D} - \inf)[z; A] \in [0, \infty[$. Пусть отображение $\mathfrak{D} :\ \mathbf{B}[\mathcal{D}] \times \mathbf{B}[\mathcal{D}] \longrightarrow [0, \infty[$ определено условием

$$\mathfrak{D}(P, Q) \overset{\triangle}{=} \sup(\{\sup_{z \in P}(\mathcal{D} - \inf)[z; Q];\ \sup_{z \in Q}(\mathcal{D} - \inf)[z; P]\})\forall P \in \mathbf{B}[\mathcal{D}]\ \forall Q \in \mathbf{B}[\mathcal{D}]. \tag{8.20}$$

Тогда сужение $\mathfrak{D}_{\mathcal{F}} \overset{\triangle}{=} (\mathfrak{D}|\mathbf{B}_{\mathcal{F}}[\mathcal{D}] \times \mathbf{B}_{\mathcal{F}}[\mathcal{D}])$ отображения $\mathfrak{D}$ есть «обычная» метрика Хаусдорфа [10, с. 441], порожденная метрикой $\mathcal{D}$. В частности, $\mathfrak{D}_{\mathcal{F}}(P, Q) \in [0, \infty[,\ P \in \mathcal{C},\ Q \in \mathcal{C}$.

Рассмотрим непустое множество $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$; если $\theta \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$, то через $\mathrm{pr}_1(\theta)$ и $\mathrm{pr}_2(\theta)$ обозначаем соответственно первую и вторую компоненты упорядоченной пары θ: $\mathrm{pr}_1(\theta) \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}}$, $\mathrm{pr}_2(\theta) \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$, $\theta = (\mathrm{pr}_1(\theta), \mathrm{pr}_2(\theta))$. На $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$ определяем бинарное отношение $\ll$ посредством условия: $\forall a \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}\ \forall b \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$

$$(a \ll b) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} ((\mathrm{pr}_1(b) \subset \mathrm{pr}_1(a))\ \&\ (\mathrm{pr}_2(b) \subset \mathrm{pr}_2(a))).$$

Тогда $\ll$ — направление [11, гл. 2] на $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$, а пара $(\mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}, \ll)$ есть непустое НМ.

Теорема 5. *Имеет место следующее свойство асимптотической нечувствительности в окрестностной реализации:* $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists a \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}\ \forall b \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$

$$(a \ll b) \Longrightarrow (\mathfrak{D}_{\mathcal{F}}(\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathrm{pr}_1(b))), \tau), \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathrm{pr}_2(b))), \tau)) < \varepsilon). \tag{8.21}$$

Доказательство. Пусть $\kappa \in]0,\infty[$. Тогда согласно (8.6) имеем свойство

$$\mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}));\frac{\kappa}{4}\,] \in \mathbb{N}_\tau[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))]. \tag{8.22}$$

В силу (8.5) и (8.22) имеем для некоторого множества $\Lambda \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}}$ свойство

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(B)),\tau) \subset \mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}));\frac{\kappa}{4}\,]\ \ \forall B \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \cap \mathcal{P}(\Lambda). \tag{8.23}$$

Кроме того, имеем в силу (8.5) для некоторого $\mathbf{\Gamma} \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(B)),\tau) \subset \mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}));\frac{\kappa}{4}\,]\ \ \forall B \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}} \cap \mathcal{P}(\,\mathbf{\Gamma}\,). \tag{8.24}$$

Тогда $\zeta \overset{\triangle}{=} (\Lambda,\,\mathbf{\Gamma}\,) \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$, $\mathrm{pr}_1(\zeta) = \Lambda$ и $\mathrm{pr}_2(\zeta) = \mathbf{\Gamma}$. Выберем произвольно $\theta \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$ со свойством $\zeta \ll \theta$. Тогда

$$(\Theta_1 \overset{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1(\theta) \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}})\ \&\ (\Theta_2 \overset{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(\theta) \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}})$$

обладают следующими свойствами: $(\Theta_1 \subset \Lambda)\ \&\ (\Theta_2 \subset \mathbf{\Gamma}\,)$; см. определение $\ll$. Поэтому $\Theta_1 \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \cap \mathcal{P}(\Lambda)$ и $\Theta_2 \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}} \cap \mathcal{P}(\,\mathbf{\Gamma}\,)$. Из (8.23) и (8.24) получаем поэтому две цепочки вложений:

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_1)),\tau) \subset \mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}));\frac{\kappa}{4}\,], \tag{8.25}$$

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_2)),\tau) \subset \mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}));\frac{\kappa}{4}\,]. \tag{8.26}$$

В силу включений (8.17), (8.18) имеем очевидные включения $(\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_1)),\tau) \in \mathcal{C})$ и $(\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_2)),\tau) \in \mathcal{C})$. Как следствие, имеем, что при $z \in \mathbf{H}$ определены три значения:

$$(\mathcal{D}-\inf)[z;\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_1)),\tau)] \in [0,\infty[,\ (\mathcal{D}-\inf)[z;\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_2)),\tau)] \in \\ \in [0,\infty[,\ (\mathcal{D}-\inf)[z;\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))] \in [0,\infty[;$$

если $z \in \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))$, то каждое из этих значений равно 0. Из (8.6) и (8.25) вытекает, что

$$\forall z \in \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_1)),\tau)\ \exists \tilde{z} \in \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})):\ \mathcal{D}(z,\tilde{z}) < \frac{\kappa}{4}\,; \tag{8.27}$$

аналогичным образом из (8.6) и (8.26) получаем, что

$$\forall z \in \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_2)),\tau)\ \exists \tilde{z} \in \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})):\ \mathcal{D}(z,\tilde{z}) < \frac{\kappa}{4}\,. \tag{8.28}$$

Согласно (8.16) и (8.18) имеем по выбору θ, что $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_1)),\tau) \in \mathbf{B}[\mathcal{D}]$, а тогда множество

$$\{(\mathcal{D}-\inf)[z;\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))]:\ z \in \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_1)),\tau)\}$$

непусто и ограничено, а потому определено значение

$$\alpha_1 \overset{\triangle}{=} \sup_{z \in \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_1)),\tau)} (\mathcal{D}-\inf)[z;\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))] \in [0,\infty[;$$

аналогичным образом из (8.16), (8.17) следует, что $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_2)),\tau) \in \mathbf{B}[\mathcal{D}]$ и, следовательно, множество $\{(\mathcal{D}-\inf)[z;\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))]:\ z \in \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_2)),\tau)\}$ непусто и ограничено, а тогда определено значение

$$\alpha_2 \overset{\triangle}{=} \sup_{z \in \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_2)),\tau)} (\mathcal{D}-\inf)[z;\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))] \in [0,\infty[.$$

Легко видеть (см. (8.19), (8.27), (8.28)), что справедливы неравенства

$$\Big(\alpha_1 \leqslant \frac{\kappa}{4}\Big) \ \& \ \Big(\alpha_2 \leqslant \frac{\kappa}{4}\Big). \tag{8.29}$$

Учитывая (5.13), (8.12), (8.20) и (8.29), получаем следующие неравенства:

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{F}}(\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_1)), \tau), \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))) \leqslant \frac{\kappa}{4}, \quad \mathfrak{D}_{\mathcal{F}}(\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})), \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_2)), \tau)) \leqslant \frac{\kappa}{4}.$$

Используя (для $\mathfrak{D}_{\mathcal{F}}$) неравенство треугольника, получаем, что

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{F}}(\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_1)), \tau), \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_2)), \tau)) \leqslant \frac{\kappa}{2} < \kappa.$$

Тем самым установлена импликация (учитываем определение Θ_1 и Θ_2)

$$(\zeta \ll \theta) \Longrightarrow (\mathfrak{D}_{\mathcal{F}}(\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathrm{pr}_1(\theta))), \tau), \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathrm{pr}_2(\theta))), \tau)) < \kappa). \tag{8.30}$$

Поскольку выбор θ был произвольным, имеем из (8.30), что $\forall b \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$

$$(\zeta \ll b) \Longrightarrow (\mathfrak{D}_{\mathcal{F}}(\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathrm{pr}_1(b))), \tau), \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathrm{pr}_2(b))), \tau)) < \kappa).$$

Коль скоро и выбор числа κ был произвольным, требуемое утверждение полностью доказано.

Частный случай. Теорема 5 доставляет целый ряд полезных следствий; в этой связи см., в частности, [8, с. 109,110]. Сейчас ограничимся простейшим вариантом, обращаясь к построениям § 6. Всюду в дальнейшем полагаем выполненным (6.1), следуем соглашениям § 6 относительно множества M, а также метрик $\rho \in (\mathrm{Dist})[\mathbf{X}]$, $\delta \in (\mathrm{Dist})[\mathbf{X}]$ и множества $\mathbf{Y}$ (6.5). Далее оператор $\mathbf{s}$ определяем посредством (6.6), (6.7), постулируя (6.8); оператор $\mathbf{r}$ понимается ниже в смысле (6.9), чем гарантируется равенство $\mathbf{s} = \mathbf{r} \circ \mathbf{p}$ и справедливость предложения 4. Как отмечалось в § 6, $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}$ определяется в виде семейства всех множеств $\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y}, \varepsilon)$, $\varepsilon \in]0, \infty[$, чем обеспечивается справедливость (5.12).

Итак, в дальнейшем БТП (5.10) — суть $\mathbb{R}^m$ с парой метризуемых топологий. В отношении $(\mathbf{H}, \tau)$ сохраняем прежнее предположение о метризуемости посредством $\mathcal{D}$. Сохраняем предположение о том, что $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) \neq \emptyset$. Следовательно, справедлива теорема 5.

Рассмотрим семейство $\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}}$ всех множеств $\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y}, \varepsilon)$, $\varepsilon \in]0, \infty[$. Тогда $\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}} \in \mathcal{P}'(\mathcal{Y}_{\mathbf{u}})$. Как следствие, для $\tilde{\mathcal{E}_{\mathbf{u}}} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{s}^{-1}[\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}}] \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{U}))$

$$(\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}] \subset (\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \tilde{\mathcal{E}_{\mathbf{u}}}]; \tag{8.31}$$

см. определения § 2 (мы учли, что $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}} = \mathbb{N}_{\tau_{\mathbf{u}}}[\mathbf{Y}]$). При этом $\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}} \in \beta[\mathbf{X}]$ и, как следствие, $\tilde{\mathcal{E}_{\mathbf{u}}} \in \beta[\mathbf{U}]$. Это свойство позволяет использовать нужный вариант (2.3). Далее, из (6.4) вытекает, что

$$\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y}, \varepsilon) \subset \mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y}, \varepsilon) \ \ \forall \varepsilon \in]0, 1].$$

Поэтому имеем с очевидностью свойство:

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y}, \varepsilon))), \tau) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y}, \varepsilon))), \tau) \ \ \forall \varepsilon \in]0, 1].$$

Как следствие, имеем при всяком $\kappa \in]0, 1]$, что

$$\begin{gathered}(\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \tilde{\mathcal{E}_{\mathbf{u}}}] = \bigcap_{T \in \tilde{\mathcal{E}_{\mathbf{u}}}} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(T)), \tau) = \bigcap_{\varepsilon \in]0, \infty[} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y}, \varepsilon))), \tau) \subset \\ \subset \bigcap_{\varepsilon \in]0, 1]} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y}, \varepsilon))), \tau) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y}, \kappa))), \tau)\end{gathered} \tag{8.32}$$

Поскольку выбор κ был произвольным, установлено вложение

$$(\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \tilde{\mathcal{E}_{\mathbf{u}}}] \subset \bigcap_{\varepsilon \in]0, 1]} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y}, \varepsilon))), \tau).$$

Заметим теперь, что при $\varepsilon_* \in]0,\infty[$ для $\bar{\varepsilon}_* \triangleq \inf(\{\varepsilon_*;1\}) \in]0,1]$ имеет место цепочка вложений

$$\begin{gathered}(\mathbf{as})[\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\tilde{\mathcal{E}_{\mathbf{u}}}] \subset \bigcap_{\varepsilon\in]0,1]} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\varepsilon))),\tau) \subset \\ \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\bar{\varepsilon}_*))),\tau) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\varepsilon_*))),\tau),\end{gathered} \tag{8.33}$$

поскольку $\bar{\varepsilon}_* \leqslant \varepsilon_*$. Коль скоро ε_* в (8.33) выбиралось произвольно, то (см. (2.3))

$$\begin{gathered}(\mathbf{as})[\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\tilde{\mathcal{E}_{\mathbf{u}}}] \subset \bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\varepsilon))),\tau) = \bigcap_{T\in\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(T)),\tau) = \\ = \bigcap_{L\in\mathcal{E}_{\mathbf{l}}} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(L),\tau) = (\mathbf{as})[\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathcal{E}_{\mathbf{l}}].\end{gathered}$$

С учетом теоремы 4 (см. (7.5)) имеем теперь вложение

$$(\mathbf{as})[\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\tilde{\mathcal{E}_{\mathbf{u}}}] \subset \mathbf{q}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{Y})). \tag{8.34}$$

Наконец, из (7.5) и (8.31) вытекает вложение $\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset (\mathbf{as})[\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\tilde{\mathcal{E}_{\mathbf{u}}}]$, которое в сочетании с (8.34) доставляет равенство

$$(\mathbf{as})[\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\tilde{\mathcal{E}_{\mathbf{u}}}] = \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})). \tag{8.35}$$

Напомним (8.1), учитывая, что $\tilde{\mathcal{E}_{\mathbf{u}}} \in \beta[\mathbf{U}]$. В связи с (8.35) используем положения [23] (см. также [20, § 3.6]), компактность ТП $(\tilde{\mathbf{U}},\tilde{\tau}^*_r(\mathcal{L}))$ и отделимость ТП $(\mathbf{H},\tau)$. Тогда имеем, что

$$\forall T \in \mathbb{N}_\tau[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))]\ \exists P \in \tilde{\mathcal{E}_{\mathbf{u}}}:\ \ T \in \mathbb{N}_\tau[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(Q),\tau)]\ \ \forall Q \in \tilde{\mathcal{E}_{\mathbf{u}}} \cap \mathcal{P}(P). \tag{8.36}$$

В связи с (8.36) см., например, [20, с. 124].

Теорема 6. $\forall \alpha \in]0,\infty[\ \exists \beta \in]0,1]\ \forall \varepsilon \in]0,\beta]$

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\varepsilon))) \subset \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\varepsilon))) \subset \mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\varepsilon)));\alpha].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\alpha \in]0,\infty[$. Тогда в силу (8.6)

$$\mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}));\frac{\alpha}{2}\,] \in \mathbb{N}_\tau[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))]. \tag{8.37}$$

С учетом (8.5) и (8.37) подберем множество $\Sigma \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}}$ такое, что

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(B)),\tau) \subset \mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}));\frac{\alpha}{2}\,]\ \ \forall B \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \cap \mathcal{P}(\Sigma). \tag{8.38}$$

Подберем $\tilde{\sigma} \in]0,\infty[$ со свойством $\Sigma = \mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\tilde{\sigma})$. Тогда $\sigma \triangleq \inf(\{\tilde{\sigma};1\}) \in]0,1]$ и при этом $\sigma \leqslant \tilde{\sigma}$. Поэтому

$$\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\sigma) \subset \Sigma. \tag{8.39}$$

В итоге $\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\sigma) \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \cap \mathcal{P}(\Sigma)$ (см. (8.39)), а потому из (8.38) имеем следующую цепочку вложений:

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\sigma))),\tau) \subset \mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}));\frac{\alpha}{2}\,]. \tag{8.40}$$

Выберем произвольно $\kappa \in]0,\sigma]$. Тогда $\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\kappa) \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \cap \mathcal{P}(\Sigma)$, т.к. $\kappa \leqslant \sigma \leqslant \tilde{\sigma}$. Поэтому (см. (8.38)) имеем, в частности, вложение

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\kappa))),\tau). \tag{8.41}$$

Кроме того, по выбору κ имеем следующее вложение:

$$\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\kappa) \subset \mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\sigma).$$

С учетом изотонности операций замыкания, взятия образа и прообраза

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\kappa))),\tau)\subset\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\sigma))),\tau).$$

В итоге (см. (8.40), (8.41)) получаем следующую цепочку вложений:

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))\subset\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\kappa))),\tau)\subset\mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}));\frac{\alpha}{2}\,]. \tag{8.42}$$

Рассмотрим множество $\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\kappa)$, для которого $\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\kappa)\subset\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\kappa)$;

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\kappa)))\subset\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\kappa))). \tag{8.43}$$

Из (8.32), (8.35) вытекает очевидное вложение

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))\subset\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\kappa))),\tau).$$

Тогда (см. (8.6)) имеем, в частности, следующее вложение:

$$\mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}));\frac{\alpha}{2}\,]\subset\mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\kappa))),\tau);\frac{\alpha}{2}\,]. \tag{8.44}$$

Из (8.42), (8.44) получаем, что справедливо

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\kappa))),\tau)\subset\mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\kappa))),\tau);\frac{\alpha}{2}\,].$$

Тем более справедливо следующее вложение:

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\kappa)))\subset\mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\kappa))),\tau);\frac{\alpha}{2}\,]. \tag{8.45}$$

Напомним теперь, что согласно (8.6) справедливы равенства

$$\mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\kappa)));\alpha]=\bigcup_{z\in\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\kappa)))}\mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}(z,\alpha), \tag{8.46}$$

$$\mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\kappa))),\tau);\frac{\alpha}{2}\,]=\bigcup_{z\in\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\kappa))),\tau)}\mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}(z,\frac{\alpha}{2}\,). \tag{8.47}$$

Выберем произвольно $z_*\in\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\kappa)))$. Тогда (см. (8.45)), в частности,

$$z_*\in\mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\kappa))),\tau);\frac{\alpha}{2}\,].$$

С учетом (8.47) подберем точку $z^*\in\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\kappa))),\tau)$, для которой

$$z_*\in\mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}(z^*,\frac{\alpha}{2}).$$

Это означает, что $z^*\in\mathbf{H}$ и $z_*\in\mathbf{H}$ связаны условием

$$\mathcal{D}(z_*,z^*)=\mathcal{D}(z^*,z_*)<\frac{\alpha}{2}. \tag{8.48}$$

По выбору z^* имеем очевидное свойство

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\kappa)))\cap T\neq\emptyset\ \ \forall T\in N_\tau(z^*). \tag{8.49}$$

В частности, из (8.49) следует, конечно, что

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\kappa)))\cap\mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}(z^*,\frac{\alpha}{2}\,)\neq\emptyset. \tag{8.50}$$

Пусть (см. (8.50)) $y^* \in \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\kappa))) \cap \mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}(z^*, \frac{\alpha}{2}\,)$. Тогда

$$\mathcal{D}(z^*, y^*) < \frac{\alpha}{2}. \tag{8.51}$$

Из (8.48) и (8.51) имеем по неравенству треугольника, что $\mathcal{D}(z_*, y^*) < \alpha$, т. е. $z_* \in \mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}(y^*, \alpha)$. С учетом (8.46) имеем, в частности, включение

$$z_* \in \mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\kappa))); \alpha].$$

Поскольку выбор z_* был произвольным, установлено вложение

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\kappa))) \subset \mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\kappa))); \alpha].$$

С учетом (8.43) получаем теперь цепочку вложений

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\kappa))) \subset \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\kappa))) \subset \mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\kappa))); \alpha]. \tag{8.52}$$

Поскольку выбор κ был произвольным, из (8.52) следует, что $\forall \varepsilon \in]0, \sigma]$

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\varepsilon))) \subset \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\delta(\mathbf{Y},\varepsilon))) \subset \mathbb{B}^0_{\mathcal{D}}[\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}^0_\rho(\mathbf{Y},\varepsilon))); \alpha]. \tag{8.53}$$

Поскольку $\sigma \in]0, 1]$, то из (8.53) следует, что существует число $\beta \in]0, 1]$ такое, что при всяком $\varepsilon \in]0, \beta]$ истинно (8.53). Коль скоро выбор $\alpha > 0$ был произвольным. □

Замечание 2. Отметим, что задача управления, намеченная в §1, может рассматриваться как вариант только что рассмотренной постановки. Полагаем для простоты, что в (1.1) все компоненты матрицы $A(t)$ равны нулю при всех $t \in [t_0, \vartheta_0]$ (в противном случае следует воспользоваться неособым линейным преобразованием [5, с.160]). Итак, речь пойдет о дифференциальной системе $\dot{x}\,(t) = B(t)f(t)$. Сохраняем в отношении $B(\cdot)$, $S(\cdot)$ и Y все предположения §1. Обозначения I и I_0 понимаем далее в согласии с §1. В качестве $\mathcal{L}$ используем далее обычную полуалгебру пространства-стрелки: $\mathcal{L}$ определяется как семейство всех полуинтервалов $[a, b[$, $a \in I_0$, $b \in I_0$. Итак, в данном случае $(I, \mathcal{L})$ — пространство-стрелка. Пусть η — обычная функция длины: $\eta(\emptyset) = 0$, $\eta(L) = \sup(L) - \inf(L)\ \forall L \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$. Разумеется, η может рассматриваться как след меры Лебега. Отметим, кстати, что в данном примере $(\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta] = (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$; см. [12, с.89]. Полагаем, что множество U § 1 совпадает с множеством (5.1): $U = \mathbf{U}$. Пусть $\mathbf{H} = \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ (см. §1). Сохраняем обозначение φ_u для траектории системы, порожденной управлением $u \in \mathbf{U}$. Определяем $\mathbf{h}$ в виде правила

$$u \longmapsto \varphi_u(\vartheta_0) : \ \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{H}.$$

В нашем конкретном случае данное правило имеет вид

$$u \longmapsto x_0 + \int_I B(t)f(t)\eta(dt) : \ \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{H},$$

где интеграл определяется покомпонентно. Если же следовать символике, принятой в основной части работы, то при $(u_j)_{j\in\overline{1,r}} \in \mathbf{U}$

$$\mathbf{h}((u_j)_{j\in\overline{1,r}}) = (x_0(i) + \sum_{j=1}^{r} \int_I B_{i,j} u_j d\eta)_{i\in\overline{1,\mathbf{n}}}.$$

Здесь $B_{i,j}$, $i \in \overline{1,\mathbf{n}}$, $j \in \overline{1,r}$, — компоненты матрицанта B, являющиеся (см. §1) равномерными пределами к.-п. и н. спр. в/з функций на I. Аналогичным образом (см. (6.7)) определяется оператор $\mathbf{s}$. Разумеется, само $\mathbf{Y}$-ограничение имеет при этом смысл условия (1.2), где $\mathbf{Y} = Y$ и S согласовано с (6.7), (6.8).

Определяем $\mathcal{D}$ подобно δ в § 6 (следует только заменить m на $\mathbf{n}$). В отношении БТП $(\mathbf{X}, \tau_{\mathbf{l}}, \tau_{\mathbf{u}})$, операторов $\mathbf{s}$ и $\mathbf{r}$, а также семейств $\mathcal{E}_{\mathbf{l}}$ и $\mathcal{E}_{\mathbf{u}}$ следуем соглашениям § 6.

Итак, мы располагаем весьма содержательным вариантом основной задачи (его можно было бы усложнить, привлекая, как и в [19], непрерывное преобразование вектора $\mathbf{h}(u) \in \mathbf{H}$ в точку $\mathbb{R}^l$ при некотором $l \in \mathcal{N}$ и заменяя исходный оператор $\mathbf{h}$ его суперпозицией с этим преобразованием; при этом, конечно, «совокупная система» будет, вообще говоря, нелинейной).

В связи с расширением задачи отметим, что множество $\tilde{\mathbf{U}}$ имеет смысл множества обобщенных управлений; если $\mu = (\mu_j)_{j\in\overline{1,r}} \in \tilde{\mathbf{U}}$, то траектория $\tilde{\varphi}_\mu$ определяется в виде

$$t \longmapsto (x_0(i) + \sum_{j=1}^{r} \int_{[t_0,t[} B_{i,j} d\mu_j)_{i\in\overline{1,\mathbf{n}}} : \ I_0 \longrightarrow \mathbf{H}.$$

В этой связи уместно принять соглашение: оператор $\mathbf{q}$ есть правило

$$\mu \longmapsto \tilde{\varphi}_\mu(\vartheta_0) : \ \tilde{\mathbf{U}} \longrightarrow \mathbf{H}.$$

Отображение $\mathbf{r}$ определяем посредством (6.9). Тогда $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})$ можно рассматривать как множество допустимых обобщенных управлений (ОУ), а $\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))$ — как ОД в классе ОУ:

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) = \{\tilde{\varphi}_\mu(\vartheta_0) : \ \mu \in \mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})\}.$$

Ограничимся сейчас обсуждением случая, когда $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) \neq \emptyset$ и выполнено (8.1); последнее соответствует естественному в теории управления случаю ресурсно ограниченной задачи (в связи с общим случаем множества (5.1) напомним построения [8, гл. 4], где рассматривались классы задач, в которых выполнено условие (7.4)). В данном случае наиболее наглядно проявляет себя свойство асимптотической нечувствительности, отмеченное в теореме 6. Здесь оно конкретизируется в виде свойства ОД исходной системы, имеющего и определенное практическое значение. В теореме 6 не используется каких-либо сведений относительно ОУ; существенно лишь условие (6.8), формулируемое в терминах исходной задачи (без элементов расширения) и по этой причине допускающее непосредственную проверку; об условиях такого рода см., в частности, в [8, 12, 17, 22]. В то же время обоснование теоремы существенно использует аппарат ОУ, формализуемых в данном случае в классе векторных к.-а. мер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970. — 420 с.
2. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977. — 624 с.
3. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. — Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1977. — 252 с.
4. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 475 с.
5. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
6. Ченцов А. Г. К вопросу о корректном расширении некоторых неустойчивых задач управления с интегральными ограничениями // Известия РАН. Серия Матем. — 1999. — Т. 63. — С. 185–223.
7. Ченцов А. Г. Векторные конечно-аддитивные меры и вопросы регуляризации задачи о построении множеств асимптотической достижимости. // Труды Института математики и механики. — Т. 4. — Екатеринбург: УрО РАН, 1996. — С. 266–295.
8. Chentsov A. G. Asymptotic attainability. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 1997. — 322 p.
9. Бурбаки Н. Общая топология. — М.: Наука, 1968. — 272 с.
10. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 751 с.
11. Келли Дж. Л. Общая топология. — М.: Наука, 1981. — 431 с.
12. Chentsov A. G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. — New York, London and Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. 244 p.

13. Ченцов А. Г. Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна-Чеха // Современная математика и ее приложения. — Академия наук Грузии, Институт кибернетики, 2005. — Т. 26 — С. 119–150.
14. Ченцов А. Г. Несеквенциальные приближенные решения в абстрактных задачах управления // Труды Международного семинара «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби». Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2006. — Т. 1. — С. 48–60.
15. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. — М.: Мир, 1969. — 309 с.
16. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: Изд. ин. лит., 1962. — 895 с.
17. Ченцов А. Г. Асимптотически достижимые элементы и их обобщенное представление в классе конечно-аддитивных мер // Труды Института математики и механики УрО РАН. — Екатеринбург, 1995. — Т. 3. — С. 211–244.
18. Bhaskara Rao K. P. S., Bhaskara Rao M. Theory of charges. A study of finitely additive measures. — New York: Acad. Press, 1983. — 253 p.
19. Ченцов А. Г. К вопросу о построении корректных расширений в классе конечно-аддитивных мер // Известия ВУЗов. Математика. — 2002. — С. 58–80.
20. Chentsov A. G. and Morina S. I. Extensions and Relaxations. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 408 с.
21. Ченцов А. Г. Несеквенциальные приближенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Труды Института математики и механики. — Екатеринбург: УрО РАН, 2006. — Т. 12. — С. 216–241.
22. Chentsov A. G. Finitely Additive Measures and Extension Constructions // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. — 2001. — IL. — P. 531–545.
23. Ченцов А. Г. Топологические конструкции расширений и представления множеств притяжения // Труды Института математики и механики. — Екатеринбург: УрО РАН, 2000. — Т. 9. — С. 269–301.

Поступила в редакцию 15.09.08

A. G. Chentsov

Extensions in the class of finitely additive measures and conditions of asymptotic non-sensitivity under a weakening of the part of constraints.

For an abstract problem of control, the extension construction in the class of finitely additive measures is considered. Conditions of asymptotic non-sensitivity of the attainable set under a weakening of the part of constraints are investigated.

Keywords: extension, finitely additive measure, asymptotic non-sensitivity.

Mathematical Subject Classifications: 28A33

Ченцов Александр Георгиевич, член-корреспондент РАН, заведующий отделом оптимального управления, Институт математики и механики УрО РАН, 620219 Россия, ГСП-384, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, E-mail: chentsov@imm.uran.ru