УДК 517.977

© *В. В. Лукьянов*

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ Т-СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Для двухпараметрического семейства функций введено понятие ТА-системы, которое является обобщением известного понятия Т-системы для однопараметрического семейства функций. Сформулирован и доказан ряд утверждений о системах функций, образующих ТА-систему. Построенная теория ТА-систем применена для изучения линейных нестационарных управляемых систем с многомерным управлением. Для указанных выше систем решена задача о быстродействии в нуль при условии, что начальная точка движения находится внутри множества докритичности.

Ключевые слова: функции Чебышёва, линейные управляемые системы, задача о быстродействии, функция быстродействия, докритичность, позиционное управление.

Введение

Задача о быстродействии является одним из изучаемых классов задач оптимального управления. Математическая теория оптимального управления, в основе которой лежит принцип максимума Л. С. Понтрягина [1], была создана в середине 50-х годов XX века.

Наиболее полно изучена задача о быстродействии для линейных стационарных систем ([1]–[6]), для которых в ряде случаев удается построить позиционное управление [1, гл. 1, § 5], [2]. Вопросы существования и построения позиционного управления достаточно изучены для автономных систем [7] (в том числе для автономных систем с возмущением [8]), тогда как для неавтономных систем эти вопросы изучены достаточно мало [9, гл. 5, § 20], [10].

В работе Е. Л. Тонкова [11] решена задача о быстродействии в нуль для линейной нестационарной докритической управляемой системы с ограниченным скалярным управлением при условии, что начальная точка движения находится внутри некоторого множества (множества докритичности). Для этого автор использовал свойства функций, образующих систему Чебышёва (Т-систему) [12]. Впоследствии эти исследования были продолжены его учениками С. Ф. Николаевым [13]–[16] и Н. В. Миличем [17]–[19]. Они изучали структуру множества управляемости, свойства функции быстродействия и построили позиционное управление линейной нестационарной докритической системы со скалярным управлением.

В этой работе основные результаты работ [11], [13]–[15] распространены на линейные нестационарные докритические управляемые системы с многомерным управлением. Для этого автор построил теорию двухпараметрических Т-систем (ТА-систем) функций, которая излагается в первом и во втором параграфах представленной работы. В третьем и четвертом параграфах построенная теория применяется для изучения задачи о быстродействии в нуль для линейных нестационарных управляемых систем с многомерным управлением. Для таких систем введено понятие докритичности и определено докритическое множество управляемости по аналогии с системами со скалярным управлением ([13]–[15]). Основными результатами работы являются теоремы 7 и 8, позволяющие синтезировать оптимальное в смысле быстродействия позиционное управление для линейной нестационарной докритической управляемой системы внутри ее докритического множества управляемости.

Ниже приведены используемые в этой работе обозначения.
$\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство размерности n, элементы $\mathbb{R}^n$ следует представлять себе в виде вектор-столбцов, даже если они набраны в строку;

$\mathbb{R}^{n*}$ — пространство, сопряженное к $\mathbb{R}^n$; элементы $\mathbb{R}^{n*}$ — суть векторы-строки;
$|\cdot|$ — норма в $\mathbb{R}^n$, порожденная скалярным произведением;
$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;
$\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел;
$C(X,Y)$ — пространство непрерывных отображений пространства X в пространство Y;
$AC(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ — пространство абсолютно непрерывных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^n$;
$\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ — пространство непрерывных линейных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, далее элементы $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ отождествляются с их матрицами относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$;
A^{T} — матрица, транспонированная к матрице A;
$S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|=1\}$ — сфера размерности $n-1$;
$O^n_\varepsilon(x)=\{y\in\mathbb{R}^n : |x-y|<\epsilon\}$ — открытый шар радиуса ε с центром в точке x;
$\operatorname{Int} A$ — внутренность, ∂A — граница множества A;
$\eta\mapsto c(\eta,A)$ — опорная функция компактного выпуклого множества A.

§ 1. Определение и свойства двухпараметрических T-систем функций на фиксированном промежутке

На протяжении настоящего параграфа предполагаются фиксированными промежуток I и двухпараметрическое семейство непрерывных функций $\bigl\{\xi_i^j\colon I\to\mathbb{R}\bigr\}_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,r}$, где n, r — фиксированные натуральные числа. Под промежутком мы будем понимать связное подмножество вещественных чисел с непустой внутренностью (то есть не вырождающееся в точку).

Определение 1. Будем говорить, что двухпараметрическое семейство непрерывных функций $\bigl\{\xi_i^j(\cdot)\bigr\}_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,r}$ образует *двухпараметрическую T-систему* (короче, *TA-систему*) на промежутке I, если для любого ненулевого вектора $c=(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{R}^n$ общее количество геометрически различных (то есть без учета кратностей) корней на I всех линейных комбинаций $\xi^j(t;c)=c_1\xi_1^j(t)+\ldots+c_n\xi_n^j(t),\quad j=1,\dots,r,$ не больше $n-1$.

При $r=1$ определение 1 превращается в известное определение T-системы для однопараметрического семейства функций $\{\xi_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ ([12, с. 50]). В дальнейшем для краткости будем использовать обозначение $\xi^j(t;c)=c_1\xi_1^j(t)+\ldots+c_n\xi_n^j(t)$, где $c=(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{R}^n$.

Определение 2. Систему точек $\tau=\bigl\{\tau_i^j\bigr\}_{i=1,\dots,n_j}^{j=1,\dots,r}$, удовлетворяющих условиям

1) $\tau_i^j\in I$ при всех $i=1,\dots,n_j$, $j=1,\dots,r$;

2) точки $\tau_1^j,\dots,\tau_{n_j}^j$ попарно различны при каждом $j=1,\dots,r$,

будем называть *допустимой на промежутке I системой точек.*

Таким образом, допустимая на промежутке I система точек — это множество точек, принадлежащих промежутку I и явно разделенных на r групп попарно различных точек. При этом не исключается случай, когда некоторые группы (возможно, все) могут быть пустыми. Общее количество точек в системе τ мы будем обозначать символом $|\tau|=n_1+\ldots+n_r$.

Утверждение 1. *Семейство функций $\bigl\{\xi_i^j\bigr\}_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,r}$ образует TA-систему на промежутке I тогда и только тогда, когда для любой допустимой на I системы точек $\tau=\bigl\{\tau_i^j\bigr\}_{i=1,\dots,n_j}^{j=1,\dots,r}$, где $|\tau|=n$, определитель матрицы*

$$\Xi(\tau)=\begin{pmatrix}\xi_1^1(\tau_1^1) & \xi_2^1(\tau_1^1) & \cdots & \xi_n^1(\tau_1^1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \xi_1^1(\tau_{n_1}^1) & \xi_2^1(\tau_{n_1}^1) & \cdots & \xi_n^1(\tau_{n_1}^1)\\ \hdotsfor{4}\\ \xi_1^r(\tau_1^r) & \xi_2^r(\tau_1^r) & \cdots & \xi_n^r(\tau_1^r)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \xi_1^r(\tau_{n_r}^r) & \xi_2^r(\tau_{n_r}^r) & \cdots & \xi_n^r(\tau_{n_r}^r)\end{pmatrix}\tag{1.1}$$

не равен нулю.

Утверждение 2. *Если семейство $\{\xi_i^j\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r}$ образует ТА-систему на промежутке I, то для любой заданной допустимой на промежутке I системы точек $\tau=\{\tau_i^j\}_{i=1,\ldots,n_j}^{j=1,\ldots,r}$, где $|\tau|=n-1$, существует такой ненулевой вектор $c\in\mathbb{R}^n$, что каждая линейная комбинация функций $\xi^j(t;c)$, $j=1,\ldots,r$, имеет нули в точках $\tau_1^j,\ldots,\tau_{n_j}^j$ и не имеет других нулей на промежутке I. Этот вектор c определяется с точностью до постоянного множителя, то есть $c=k\widehat{c}$, $k\neq 0$, где*

$$\widehat{c}=\begin{pmatrix}\xi_1^1(\tau_0^1) & \xi_2^1(\tau_0^1) & \cdots & \xi_n^1(\tau_0^1)\\ \xi_1^1(\tau_1^1) & \xi_2^1(\tau_1^1) & \cdots & \xi_n^1(\tau_1^1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \xi_1^1(\tau_{n_1}^1) & \xi_2^1(\tau_{n_1}^1) & \cdots & \xi_n^1(\tau_{n_1}^1)\\ \hdotsfor{4}\\ \xi_1^r(\tau_1^r) & \xi_2^r(\tau_1^r) & \cdots & \xi_n^r(\tau_1^r)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \xi_1^r(\tau_{n_r}^r) & \xi_2^r(\tau_{n_r}^r) & \cdots & \xi_n^r(\tau_{n_r}^r)\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\\ \cdot\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

а τ_0^1 — произвольная точка промежутка I, отличная от всех точек $\tau_1^1,\ldots,\tau_{n_1}^1$.

Утверждение 3. *Если семейство функций $\{\xi_i^j\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r}$ образует ТА-систему на промежутке I, то для любой заданной допустимой на промежутке I системы точек $\tau=\{\tau_i^j\}_{i=1,\ldots,n_j}^{j=1,\ldots,r}$, где $|\tau|=n$, существует и при том единственный такой вектор $c\in\mathbb{R}^n$, что каждая линейная комбинация функций $\xi^j(t;c)$, $j=1,\ldots,r$, принимает в точках $\tau_1^j,\ldots,\tau_{n_j}^j$ наперед заданные значения $\widehat{\xi}_1^j,\ldots,\widehat{\xi}_{n_j}^j$. Вектор c определяется равенством $c=\Xi^{-1}(\tau)\times\widehat{\xi}$, где матрица Ξ определена равенством* (1.1), *а вектор $\widehat{\xi}=\left(\widehat{\xi}_1^1,\ldots,\widehat{\xi}_{n_1}^1,\ldots,\widehat{\xi}_1^r,\ldots,\widehat{\xi}_{n_r}^r\right)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$.*

Доказательства утверждений 1–3 аналогичны доказательствам соответствующих утверждений для однопараметрических ТА-систем ([12, с. 51–53]), поэтому мы их не приводим.

Напомним ([12, с. 53]), что изолированный корень непрерывной функции $\xi(t)$, лежащий во внутренности промежутка I, называется *узлом*, если при переходе через этот корень функция $\xi(t)$ меняет знак, и *пучностью*, если эта функция знака не меняет. В случае если корнем функции $\xi(t)$ является граничная точка промежутка I, принадлежащая этому промежутку, такой корень считается узлом.

Теорема 1. *Пусть семейство непрерывных функций $\{\xi_i^j\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r}$ образует ТА-систему на промежутке I, $c\in\mathbb{R}^n$ — произвольный ненулевой вектор, k — общее количество пучностей на I всех линейных комбинаций $\xi^j(t;c)$ $(j=1,\ldots,r)$, а l — их общее количество узлов на I. Тогда $2k+l\leqslant n-1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $c^1\in\mathbb{R}^n$ — произвольный ненулевой вектор. Если $k=0$, то утверждение теоремы непосредственно следует из определения ТА-системы функций.

Пусть $k>0$. Обозначим $\inf I<\tau_1^j<\ldots<\tau_{n_j}^j<\sup I$ $(j=1,\ldots,r)$ — корни линейной комбинации $\xi^j(t;c^1)$, расположенные внутри промежутка I. Произвольным образом выберем точки $\vartheta_i^j\in\left(\tau_{i-1}^j,\tau_i^j\right)$ $(i=1,\ldots,n_j+1,\ j=1,\ldots,r;\ \tau_0^j=\inf I,\ \tau_{n_j+1}^j=\sup I)$. Положим

$$\mu_i^j=\left|\xi^j\left(\vartheta_i^j;c^1\right)\right|>0,\quad i=1,\ldots,n_j+1,\quad j=1,\ldots,r;\quad \mu=\min_{1\leqslant j\leqslant r}\ \min_{1\leqslant i\leqslant n_j+1}\mu_i^j>0.$$

По условию теоремы семейство функций $\{\xi_i^j\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r}$ образует ТА-систему на промежутке I, поэтому $k+l\leqslant n-1$. Согласно утверждению 3 существует такой ненулевой вектор $c^2\in\mathbb{R}^n$, что каждая линейная комбинация $\xi^j(t;c^2)$, $j=1,\ldots,r$, принимает значение $+\mu$ в пучностях линейной комбинации $\xi^j(t;c^1)$, в окрестности которых $\xi^j(t,c^1)\leqslant 0$, и значение $-\mu$

в пучностях линейной комбинации $\xi^j(t;c^1)$, в окрестности которых $\xi^j(t;c^1)\geqslant 0$, и, кроме того обращается в нуль во всех узлах линейной комбинации $\xi^j(t;c^1)$.

Выберем теперь положительное ρ так, чтобы $\rho\max_{1\leqslant j\leqslant r}\max_{1\leqslant i\leqslant n_j+1}\left|\xi^j\left(\vartheta_i^j;c^2\right)\right|<\mu$.

Положим $c^3=c^1+\rho c^2$. Вектор c^3 ненулевой, так как

$$|\xi^1(\vartheta_1^1;c^3)|=|\mu_1^1+\rho\xi^1(\vartheta_1^1;c^2)|>\mu_1^1-\mu\geqslant 0.$$

Нетрудно убедиться, что общее число корней всех линейных комбинаций $\xi^j(t;c^3)$, $j=1,\ldots,r$, не меньше, чем $2k+l$. Действительно, если точка $\tau\in I$ является узлом линейной комбинации $\xi^j(t;c^1)$, то она является корнем (вообще говоря, не обязательно узлом) и линейной комбинации $\xi^j(t;c^3)$, а если точка $\tau_i^j\in\operatorname{Int}I$ является пучностью линейной комбинации $\xi^j(t;c^1)$, в окрестности которой, например, $\xi^j(t;c^1)\geqslant 0$, то $\xi^j\left(\vartheta_i^j;c^1\right)=\mu_i^j\geqslant\mu$, $\xi^j\left(\vartheta_{i+1}^j;c^1\right)=\mu_{i+1}^j\geqslant\mu$. Поэтому $\xi^j\left(\vartheta_i^j;c^3\right)>0$ и $\xi^j\left(\vartheta_{i+1}^j;c^3\right)>0$, и так как $\xi^j\left(\tau_i^j;c^3\right)=-\rho\mu<0$, то $\xi^j(t;c^3)$ имеет корень как в $\left(\vartheta_i^j,\tau_i^j\right)$, так и в $\left(\tau_i^j,\vartheta_{i+1}^j\right)$. Следовательно, каждой пучности каждой линейной комбинации $\xi^j(t;c^1)$ соответствуют два корня линейной комбинации $\xi^j(t;c^3)$. Итак, $2k+l\leqslant n-1$. $\square$

При доказательстве различных утверждений мы будем часто пользоваться сформулированным ниже следствием 1.

Следствие 1. *Пусть семейство непрерывных функций $\left\{\xi_i^j\right\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r}$ образует ТА-систему на промежутке I, $c\in\mathbb{R}^n$ — произвольный ненулевой вектор. Если общее количество корней на I всех линейных комбинаций $\xi^j(t;c)$, $j=1,\ldots,r$, в точности равно $n-1$, то все они являются узлами.*

До конца настоящего параграфа будем считать выполненным следующее предположение.

Предположение 1. Фиксированное семейство непрерывных функций $\left\{\xi_i^j\colon I\to\mathbb{R}\right\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r}$ образует ТА-систему на заданном интервале I.

Определение 3. Пусть $c\in\mathbb{R}^n$ — произвольный ненулевой вектор.

1) *Вектором знаков* семейства линейных комбинаций $\left\{\xi^j(t;c)\right\}_{j=1}^r$ мы будем называть вектор $\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_r)\in\{-1,1\}^r$, где δ_j — это знак соответствующей линейной комбинации $\xi^j(t;c)$ в правой окрестности левого конца интервала I;

2) *вектором индексов* семейства линейных комбинаций $\left\{\xi^j(t;c)\right\}_{j=1}^r$ мы будем называть вектор $\mathfrak{i}=(\mathfrak{i}_1,\ldots,\mathfrak{i}_r)\in\mathbb{Z}_+^r$, а *полным индексом* величину $s(\mathfrak{i})=\mathfrak{i}_1+\ldots+\mathfrak{i}_r$, где $\mathfrak{i}_j$ — количество узлов на I соответствующей линейной комбинации $\xi^j(t;c)$ (пучности мы не учитываем).

Для удобства использования введенных выше понятий мы определим также отображения $\boldsymbol{\delta}\colon\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\{-1,1\}^r$ и $\mathbf{i}^-\colon\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{Z}_+^r$ (смысл знака минус в верхнем индексе для обозначения отображения $\mathbf{i}^-$ станет понятен позже в § 2), сопоставляющие ненулевому вектору c соответственно вектор знаков $\delta\in\{-1,1\}^r$ и вектор индексов $\mathfrak{i}\in\mathbb{Z}_+^r$ семейства линейных комбинаций $\left\{\xi^j(t;c)\right\}_{j=1}^r$. Заметим, что для любых $c\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $k>0$, $l\neq 0$ имеют место соотношения $\boldsymbol{\delta}(kc)=\boldsymbol{\delta}(c)$, $\mathbf{i}^-(lc)=\mathbf{i}^-(c)$.

Согласно определению ТА-системы функций при любом ненулевом векторе c полный индекс $s(\mathbf{i}^-(c))$ не превосходит $n-1$. Множество допустимых векторов индексов обозначим

$$\mathfrak{I}=\{\mathfrak{i}=(\mathfrak{i}_1,\ldots,\mathfrak{i}_r)\in\mathbb{Z}_+^r:\mathfrak{i}_1+\ldots+\mathfrak{i}_r\leqslant n-1\}. \tag{1.3}$$

Для любого ненулевого вектора $c\in\mathbb{R}^n$ количество геометрически различных корней (узлов и пучностей) на интервале I линейной комбинации $\xi^j(t;c)$ далее будем обозначать $n_j(c)$ или более кратко n_j, если из контекста ясно, о каком векторе c идет речь.

Определим теперь многозначное отображение $\boldsymbol{\Lambda}^-\colon\mathfrak{I}\to\{-1,1\}^r$ с помощью равенства

$$\boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i})=\bigcup_{\substack{c\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\\ \mathbf{i}^-(c)=\mathfrak{i}}}\{\boldsymbol{\delta}(c)\}. \tag{1.4}$$

Лемма 1. *Пусть выполнено предположение* 1, *и пусть ненулевые векторы* $c', c'' \in \mathbb{R}^n$ *таковы, что* $\mathfrak{i} = \mathbf{i}^-(c') = \mathbf{i}^-(c'')$ *и* $s(\mathfrak{i}) = n-1$. *Тогда* $\boldsymbol{\delta}(c') = \boldsymbol{\delta}(c'')$ *или* $\boldsymbol{\delta}(c') = -\boldsymbol{\delta}(c'')$.

Доказательство. Обозначим $\tau_1'^j < \ldots < \tau_{\mathfrak{i}_j}'^j$ и $\tau_1''^j < \ldots < \tau_{\mathfrak{i}_j}''^j$ — узлы линейных комбинаций $\xi^j(t;c')$ и $\xi^j(t;c'')$ на интервале I, $\mathfrak{i}_j = \mathbf{i}_j^-(c') = \mathbf{i}_j^-(c'')$, $\mathfrak{i}_1 + \ldots + \mathfrak{i}_r = s(\mathfrak{i}) = n-1$. Других корней линейные комбинации $\xi^j(t;c')$ и $\xi^j(t;c'')$ на интервале I иметь не могут в силу предположения 1 и определения 1. На интервалах $\bigl(\inf I, \tau_1'^1\bigr)$ и $\bigl(\inf I, \tau_1''^1\bigr)$ (либо на всем интервале I, если $\mathfrak{i}_1 = 0$) произвольно выберем по точке $\tau_0'^1 \in \bigl(\inf I, \tau_1'^1\bigr)$, $\tau_0''^1 \in \bigl(\inf I, \tau_1''^1\bigr)$. Обозначим $\xi^1\bigl(\tau_0'^1; c'\bigr) = \rho \neq 0$.

Для $i = 1, \ldots, \mathfrak{i}_j$, $j = 1, \ldots, r$, определим непрерывные функции $\tau_i^j \colon [0,1] \to I$ равенствами $\tau_i^j(s) = \tau_i'^j + \bigl(\tau_i''^j - \tau_i'^j\bigr)s$, а также функцию $\tau_0^1(s) = \tau_0'^1 + \bigl(\tau_0''^1 - \tau_0'^1\bigr)s$. Составим допустимую на I систему точек $\widehat{\tau}(s) = \bigl\{\tau_i^1(s)\bigr\}_{i=0}^{\mathfrak{i}_1} \cup \bigl\{\tau_i^j(s)\bigr\}_{i=1,\ldots,\mathfrak{i}_j}^{j=2,\ldots,r}$, $s \in [0,1]$. При любом фиксированном $s \in [0,1]$ количество точек в системе $\widehat{\tau}(s)$ равно $|\widehat{\tau}(s)| = \mathfrak{i}_1 + \ldots + \mathfrak{i}_r + 1 = n$ и согласно утверждению 3 эта система точек $\widehat{\tau}(s)$ определяет вектор $c(s) = \Xi^{-1}(s) \times (\rho, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$, где

$$\Xi(s) = \begin{pmatrix} \xi_1^1(\tau_0^1(s)) & \xi_2^1(\tau_0^1(s)) & \cdots & \xi_n^1(\tau_0^1(s)) \\ \xi_1^1(\tau_1^1(s)) & \xi_2^1(\tau_1^1(s)) & \cdots & \xi_n^1(\tau_1^1(s)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^1(\tau_{\mathfrak{i}_1}^1(s)) & \xi_2^1(\tau_{\mathfrak{i}_1}^1(s)) & \cdots & \xi_n^1(\tau_{\mathfrak{i}_1}^1(s)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_1^r(\tau_1^r(s)) & \xi_2^r(\tau_1^r(s)) & \cdots & \xi_n^r(\tau_1^r(s)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^r(\tau_{\mathfrak{i}_r}^r(s)) & \xi_2^r(\tau_{\mathfrak{i}_r}^r(s)) & \cdots & \xi_n^r(\tau_{\mathfrak{i}_r}^r(s)) \end{pmatrix}.$$

Отображение $s \mapsto \Xi(s)$ непрерывно на отрезке $[0,1]$, причем определитель квадратной матрицы $\Xi(s)$ отличен от нуля при любом $s \in [0,1]$, следовательно, непрерывными на этом отрезке будут и отображения $s \mapsto \Xi^{-1}(s)$, $s \mapsto c(s)$. Каждая линейная комбинация $\xi^j(t; c(s))$, $j = 1, \ldots, r$, при любом $s \in [0,1]$ имеет корни только в точках $\tau_i^j(s)$, $i = 1, \ldots, \mathfrak{i}_j$ и не имеет других корней на интервале I.

Зафиксируем произвольное $j \in \{1, \ldots, r\}$ и на интервалах $I_1 = \bigl(\inf I, \tau_1'^j\bigr)$, $I_2 = \bigl(\inf I, \tau_1''^j\bigr)$ выберем произвольно точки $t_1 \in I_1$, $t_2 \in I_2$. Определим функцию $t(s) = t_1 + (t_2 - t_1)s$. Функция $s \mapsto \xi^j\bigl(t(s); c(s)\bigr)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$ и в нуль на нем не обращается вследствие того, что $\inf I < t(s) < \tau_1^j(s)$ при всех $s \in [0,1]$. Поэтому функция $\xi^j\bigl(t(s); c(s)\bigr)$ сохраняет знак на отрезке $[0,1]$, а это означает, что линейные комбинации $\xi^j(t; c(0))$ и $\xi^j(t; c(1))$ имеют одинаковые знаки на интервалах I_1 и I_2. В силу произвольности j имеем $\boldsymbol{\delta}(c(0)) = \boldsymbol{\delta}(c(1))$. Далее, по построению $c(0) = c'$, а из утверждения 2 следует, что $c(1) = kc''$, где $k \neq 0$ — некоторая константа. Отсюда легко вытекает утверждение леммы. □

Следствие 2. *Пусть выполнено предположение* 1, *а вектор индексов* $\mathfrak{i} = (\mathfrak{i}_1, \ldots, \mathfrak{i}_r) \in \mathfrak{I}$ *удовлетворяет условию* $s(\mathfrak{i}) = n-1$. *Тогда:*

1) *множество* $\boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$ *состоит из двух противоположных элементов;*

2) *для любой допустимой на* I *системы точек* $\bigl\{\tau_i^j\bigr\}_{i=1,\ldots,\mathfrak{i}_j}^{j=1,\ldots,r}$ *и для любого вектора* $\delta \in \boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$ *существует такой ненулевой вектор* c, *что*

а) $\boldsymbol{\delta}(c) = \delta$;

б) *каждая линейная комбинация* $\xi^j(t;c)$, $j = 1, \ldots, r$, *имеет узлы только в точках* $\tau_1^j, \ldots, \tau_{\mathfrak{i}_j}^j$ *и не имеет других корней на интервале* I.

Доказательство. Зафиксируем произвольную допустимую на I систему точек $\widehat{\tau} = \bigl\{\widehat{\tau}_i^j\bigr\}_{i=1,\ldots,\mathfrak{i}_j}^{j=1,\ldots,r}$. По условию $|\widehat{\tau}| = s(\mathfrak{i}) = n-1$, поэтому согласно утверждению 2 существует такой ненулевой вектор $\widehat{c} \in \mathbb{R}^n$, что каждая линейная комбинация $\xi^j(t; \widehat{c})$, $j = 1, \ldots, r$, имеет корни только в выбранных точках $\widehat{\tau}_1^j, \ldots, \widehat{\tau}_{\mathfrak{i}_j}^j$ и не имеет других корней на интервале I. По следствию 1 все эти корни являются узлами. Тогда $\boldsymbol{\delta}(\widehat{c}) = \widehat{\delta} \in \boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$ и $\boldsymbol{\delta}(-\widehat{c}) = -\widehat{\delta} \in \boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$. Если $\delta \in \boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$, то по определению отображения $\boldsymbol{\Lambda}^-$ (равенство (1.4)) существует такой ненулевой вектор c, что $\boldsymbol{\delta}(c) = \delta$, $\mathbf{i}^-(c) = \mathfrak{i}$, и тогда по лемме 1 имеем $\delta = \widehat{\delta}$ или $\delta = -\widehat{\delta}$, поэтому $\boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i}) = \big\{\widehat{\delta}, -\widehat{\delta}\big\}$. □

Замечание 1. Вектор c, о котором шла речь в пункте 2) следствия 2, определяется с точностью до положительного множителя, а если мы будем выбирать его из сферы S^{n-1}, то такой вектор c будет единственным.

Лемма 2. *Пусть выполнено предположение* 1, $\mathfrak{i} = (\mathfrak{i}_1, \ldots, \mathfrak{i}_r) \in \mathfrak{I}$, $\delta \in \boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$ — *произвольные векторы. Тогда существуют векторы* $\mathfrak{i}' = (\mathfrak{i}'_1, \ldots, \mathfrak{i}'_r) \in \mathfrak{I}$ *и* $\delta' \in \boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i}')$, *удовлетворяющие условиям:*

1) $s(\mathfrak{i}') = n - 1$;
2) $\mathfrak{i} \leqslant \mathfrak{i}'$[1];
3) $\delta_j = \delta'_j$ *при тех* $j \in \{1, \ldots, r\}$, *при которых* $\mathfrak{i}_j = \mathfrak{i}'_j$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{i} = (\mathfrak{i}_1, \ldots, \mathfrak{i}_r) \in \mathfrak{I}$, $\delta \in \boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$. Утверждение теоремы очевидно, если $s(\mathfrak{i}) = n - 1$, поэтому будем предполагать $s(\mathfrak{i}) < n - 1$. По определению отображения $\boldsymbol{\Lambda}^-$ существует такой ненулевой вектор $c^1 \in \mathbb{R}^n$, что $\mathfrak{i} = \mathbf{i}^-(c^1)$ и $\delta = \boldsymbol{\delta}(c^1)$.

Обозначим $\tau^j_1 < \ldots < \tau^j_{n_j}$ $(j = 1, \ldots, r)$ — корни (узлы и пучности) на I линейной комбинации $\xi^j(t; c^1)$. Легко видеть, что $n_1 + \ldots + n_r < n - 1$ (если бы имело место $n_1 + \ldots + n_r = n - 1$, то по следствию 1 все корни τ^j_i являлись бы узлами и тогда было бы $s(\mathfrak{i}) = n - 1$ вопреки нашему предположению $s(\mathfrak{i}) < n - 1$).

Обозначим $s' = n - 1 - (n_1 + \ldots + n_r) > 0$. На каждом интервале $(\inf I, \tau^j_1)$, $j = 1, \ldots, r$ (либо на всем I, если $n_j = 0$), выберем по точке $\vartheta^j \in (\inf I, \tau^j_1)$, а на интервале (ϑ^1, τ^1_1) произвольно выберем попарно различные точки $\tau'_1, \ldots, \tau'_{s'}$. Обозначим $\mu_i = \xi^1(\tau'_i; c^1)$, $i = 1, \ldots, s'$. Определим отображение $\Gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ равенством $\Gamma(x) = \Xi^{-1} \times (x, \mu_1, \ldots, \mu_{s'}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n_1 + \ldots + n_r})^{\mathrm{T}}$, где

$$\Xi = \begin{pmatrix}
\xi^1_1(\vartheta^1) & \xi^1_2(\vartheta^1) & \cdots & \xi^1_n(\vartheta^1) \\
\xi^1_1(\tau'_1) & \xi^1_2(\tau'_1) & \cdots & \xi^1_n(\tau'_1) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\xi^1_1(\tau'_{s'}) & \xi^1_2(\tau'_{s'}) & \cdots & \xi^1_n(\tau'_{s'}) \\
\xi^1_1(\tau^1_1) & \xi^1_2(\tau^1_1) & \cdots & \xi^1_n(\tau^1_1) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\xi^1_1(\tau^1_{n_1}) & \xi^1_2(\tau^1_{n^1_1}) & \cdots & \xi^1_n(\tau^1_{n_1}) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\xi^r_1(\tau^r_1) & \xi^r_2(\tau^r_1) & \cdots & \xi^r_n(\tau^r_1) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\xi^r_1(\tau^r_{n_r}) & \xi^r_2(\tau^r_{n_r}) & \cdots & \xi^r_n(\tau^r_{n_r})
\end{pmatrix}.$$

Отображение Γ определено таким образом, что для любого $x \in \mathbb{R}$: 1) $\xi^1\big(\vartheta^1; \Gamma(x)\big) = x$; 2) $\xi^1\big(\tau'_i; \Gamma(x)\big) = \mu_i$ при $i = 1, \ldots, s'$; 3) $\xi^j\big(\tau^j_i; \Gamma(x)\big) = 0$ при $i = 1, \ldots, n_j$, $j = 1, \ldots, r$.

Отображение Γ непрерывно, поэтому всюду непрерывной будет и функция

$$x \mapsto \gamma(x) = \min_{1 \leqslant j \leqslant r} \left|\xi^j\big(\vartheta^j, \Gamma(x)\big)\right|. \tag{1.5}$$

Пусть $\alpha = \xi^1(\vartheta^1, c^1) \neq 0$, для определенности будем считать $\alpha > 0$. Положим

$$\widehat{x} = \max\left\{x \in [0, \alpha] : \gamma(x) = 0\right\}. \tag{1.6}$$

[1]Здесь и в дальнейшем запись $a \leqslant b$ $(a, b \in \mathbb{R}^n)$ является сокращением для записи $a_i \leqslant b_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Множество, стоящее внутри фигурных скобок в равенстве (1.6), непустое, так как по крайней мере $\gamma(0)=0$, поскольку $\xi^1\big(\vartheta^1,\Gamma(0)\big)=0$. Максимум существует в силу непрерывности функции $\gamma(\cdot)$ на отрезке $[0,\alpha]$. Заметим, что $\Gamma(\alpha)=c^1$ и $\xi^j(\vartheta^j,c^1)\neq 0$ при каждом $j=1,\ldots,r$ в силу выбора точек ϑ^j, следовательно, $\gamma(\alpha)\neq 0$, и поэтому $\widehat{x}<\alpha$.

Рассмотрим вектор $c^2=\Gamma(\widehat{x})$. Покажем, что для него выполнены следующие утверждения: а) $c^2\neq 0$; б) $n(c^1)\leqslant n(c^2)$; в) $\sum\limits_{j=1}^r n_j(c^1)<\sum\limits_{j=1}^r n_j(c^2)$; г) при тех $j\in\{1,\ldots,r\}$, при которых $n_j(c^1)=n_j(c^2)$, имеем

$$\boldsymbol{\delta}_j(c^1)=\boldsymbol{\delta}_j(c^2). \tag{1.7}$$

Напомним (стр. 104), что через $n_j(c)$ мы обозначили количество корней (узлов и пучностей) на интервале I линейной комбинации $\xi^j(t;c)$. Ранее уже отмечалось, что $s'>0$, поэтому множество точек $\{\tau_1',\ldots,\tau_{s'}'\}$ непусто и $\xi^1(\tau_1',c^2)=\mu_1=\xi^1(\tau_1',c^1)\neq 0$ в силу выбора точки τ_1'. Следовательно, вектор c^2 ненулевой. По построению при каждом $j=1,\ldots,r$ точки $\tau_1^j,\ldots,\tau_{n_j}^j$ являются корнями соответствующей линейной комбинации $\xi^j(t;c^2)$, поэтому имеет место неравенство б). Далее, из равенства (1.6) и определения функции γ (равенство (1.5)) получаем, что по крайней мере одна из точек ϑ^j (по построению они не совпадают ни с одной из точек τ_i^j) также является корнем соответствующей линейной комбинации $\xi^j(t;c^2)$, что доказывает неравенство в).

Для доказательства утверждения пункта г) зафиксируем произвольное $\widehat{\jmath}\in\{1,\ldots,r\}$ (если такое существует), при котором $n_{\widehat{\jmath}}(c^1)=n_{\widehat{\jmath}}(c^2)$. Тогда соответствующая линейная комбинация $\xi^{\widehat{\jmath}}(t;c^2)$ имеет корни только в точках $\tau_1^{\widehat{\jmath}},\ldots,\tau_{n_{\widehat{\jmath}}}^{\widehat{\jmath}}$ и не имеет других корней на интервале I.

Из равенства (1.6) следует, что при любом $x\in(\widehat{x},\alpha]$ имеет место $\gamma(x)>0$ и, значит, при всех $j=1,\ldots,r$ выполнено неравенство $\big|\xi^j\big(\vartheta^j,\Gamma(x)\big)\big|>0$, в частности:

$$\big|\xi^{\widehat{\jmath}}\big(\vartheta^{\widehat{\jmath}},\Gamma(x)\big)\big|>0,\quad x\in(\widehat{x},\alpha]. \tag{1.8}$$

Далее, $\xi^{\widehat{\jmath}}\big(\vartheta^{\widehat{\jmath}},\Gamma(\alpha)\big)=\xi^{\widehat{\jmath}}(\vartheta^{\widehat{\jmath}},c^1)\neq 0$ в силу выбора точек ϑ^j и $\xi^{\widehat{\jmath}}\big(\vartheta^{\widehat{\jmath}},\Gamma(\widehat{x})\big)=\xi^{\widehat{\jmath}}(\vartheta^{\widehat{\jmath}},c^2)\neq 0$ в силу условия для выбранного $\widehat{\jmath}$. Теперь, учитывая непрерывность отображения $x\mapsto\xi^{\widehat{\jmath}}\big(\vartheta^{\widehat{\jmath}},\Gamma(x)\big)$, из неравенства (1.8) получаем $\operatorname{sign}\xi^{\widehat{\jmath}}(\vartheta^{\widehat{\jmath}},c^1)=\operatorname{sign}\xi^{\widehat{\jmath}}(\vartheta^{\widehat{\jmath}},c^2)$. Но $\operatorname{sign}\xi^{\widehat{\jmath}}(\vartheta^{\widehat{\jmath}},c^1)=\boldsymbol{\delta}_{\widehat{\jmath}}(c^1)$ и $\operatorname{sign}\xi^{\widehat{\jmath}}(\vartheta^{\widehat{\jmath}},c^2)=\boldsymbol{\delta}_{\widehat{\jmath}}(c^2)$, отсюда сразу получаем (1.7). Утверждение пункта г) доказано.

Если общее количество корней на интервале I всех линейных комбинаций $\xi^j(t;c^2)$, $j=1,\ldots,r$, меньше $n-1$, то приведенные выше рассуждения можно применить к вектору c^2 и получить вектор c^3 и так далее до тех пор, пока мы не получим вектор c^k, для которого $\sum\limits_{j=1}^r n_j(c^k)=n-1$. Этот вектор мы получим через конечное число шагов, так как указанная сумма $\sum\limits_{j=1}^r n_j(c^i)$ строго увеличивается с увеличением i.

Как уже отмечалось, $c^k\neq 0$, поэтому можно обозначить $\mathbb{i}'=\mathbf{i}^-(c^k)$, $\delta'=\boldsymbol{\delta}(c^k)\in\boldsymbol{\Lambda}^-(\mathbb{i}')$. Имеем $s(\mathbb{i}')=s(\mathbf{i}^-(c^k))=\sum\limits_{j=1}^r n_j(c^k)=n-1$ в силу того, что все корни линейных комбинаций $\xi^j(t;c^k)$ обязательно являются узлами (следствие 1). Далее, запишем цепочку очевидных неравенств

$$\mathbb{i}\leqslant n(c^1)\leqslant n(c^2)\leqslant\ldots\leqslant n(c^k)=\mathbf{i}^-(c^k)=\mathbb{i}'. \tag{1.9}$$

Из (1.9) следует $\mathbb{i}\leqslant\mathbb{i}'$, причем если $\mathbb{i}_j=\mathbb{i}_j'$ при некотором j, то $\mathbb{i}_j=n_j(c^1)=\ldots=n_j(c^k)=\mathbb{i}_j'$ и тогда в силу утверждения пункта г) получаем $\delta_j=\boldsymbol{\delta}_j(c^1)=\ldots=\boldsymbol{\delta}_j(c^k)=\delta_j'$. $\square$

Замечание 2. В построенном ряду векторов $c^1,\ldots,c^k$, несмотря на соотношение (1.9), неравенства $\mathbf{i}_j^-(c^i)\leqslant\mathbf{i}_j^-(c^{i+1})$ и $s(\mathbf{i}^-(c^i))<s(\mathbf{i}^-(c^{i+1}))$ могут, вообще говоря, не иметь места: у линейных комбинаций $\xi^j(t;c^i)$ может быть «много» узлов и «мало» пучностей, в то время как у функций $\xi^j(t;c^{i+1})$ наоборот. Для доказательства леммы нам оказалось достаточно того факта, что для последнего в этом ряду вектора c^k общее количество корней на интервале I всех функций $\xi^j(t;c^k)$, $j=1,\ldots,r$, равно $n-1$, и поэтому в силу следствия 1 такие

функции пучностей не имеют. Можно немного изменить доказательство, построив такой ряд векторов $\widetilde{c}^1,\ldots,\widetilde{c}^l$, для которых было бы $\mathbf{i}_j^-(\widetilde{c}^i) \leqslant \mathbf{i}_j^-(\widetilde{c}^{i+1})$, $j=1,\ldots,r$; $s(\mathbf{i}^-(\widetilde{c}^i)) < s(\mathbf{i}^-(\widetilde{c}^{i+1}))$, $s(\mathbf{i}^-(\widetilde{c}^l)) = n-1$. В таком доказательстве идея рассуждений, возможно, была бы более прозрачной, но зато оно стало бы длиннее.

Замечание 3. В доказательстве того факта, что вектор c^{i+1} является ненулевым, было существенным условие $s(\mathbf{i}^-(c^i)) < n-1$, из которого следовало, что множество $\{\tau_1',\ldots,\tau_{s'}'\}$ непусто. В самом деле, если мы попытаемся по указанному алгоритму по вектору c^k, для которого $s(\mathbf{i}^-(c^k)) = n-1$, построить вектор c^{k+1}, то вектор c^{k+1} окажется нулевым.

Лемма 3. *Допустим, что выполнено предположение* 1, *а векторы* $\mathfrak{i}\in\mathfrak{I}$, $\delta\in\{-1,1\}^r$ *такие, что существуют векторы* $\mathfrak{i}'\in\mathfrak{I}$, $\delta'\in\mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i}')$, *удовлетворяющие условиям:*

1) $s(\mathfrak{i}') = n-1$;

2) $\mathfrak{i} \leqslant \mathfrak{i}'$;

3) $\delta_j = \delta_j'$ *при тех* $j\in\{1,\ldots,r\}$, *при которых* $\mathfrak{i}_j = \mathfrak{i}_j'$.

Тогда для любой допустимой на интервале I *системы точек* $\{\tau_i^j\}_{i=1,\ldots,\mathfrak{i}_j}^{j=1,\ldots,r}$ *существует такой ненулевой вектор* c, *что:*

а) $\boldsymbol{\delta}(c) = \delta$;

б) *каждая линейная комбинация* $\xi^j(t;c)$, $j=1,\ldots,r$, *имеет узлы в точках* $\tau_1^j,\ldots,\tau_{\mathfrak{i}_j}^j$ *и не имеет других узлов на интервале* I.

Доказательство. Зафиксируем произвольную допустимую на I систему точек $\{\widehat{\tau}_i^j\}_{i=1,\ldots,\mathfrak{i}_j}^{j=1,\ldots,r}$ для заданного в условии леммы вектора $\mathfrak{i}\in\mathfrak{I}$. Если $s(\mathfrak{i}) = n-1$, то утверждение леммы следует из следствия 2. Предположим, что $s(\mathfrak{i}) < n-1$.

Для всех $i=1,\ldots,\mathfrak{i}_j'$, $j=1,\ldots,r$ выберем такие последовательности точек $\{\tau_i^j(k)\}_{k=1}^{\infty}$, чтобы выполнялись следующие условия:

1) при всех $i=1,\ldots,\mathfrak{i}_j'$, $j=1,\ldots,r$ и каждом $k\in\mathbb{N}$ $\tau_i^j(k)\in I$; $\tau_s^j(k)\neq\tau_l^j(k)$, $s\neq l$;

2) при тех j, при которых $\mathfrak{i}_j = \mathfrak{i}_j'$, имеем $\tau_i^j(k)\equiv\widehat{\tau}_i^j$, $i=1,\ldots,\mathfrak{i}_j$, $k\in\mathbb{N}$;

3) при тех j, при которых $\mathfrak{i}_j < \mathfrak{i}_j'$ и $\delta_j = \delta_j'$, имеем $\tau_i^j(k)\equiv\widehat{\tau}_i^j$, $i=1,\ldots,\mathfrak{i}_j$, $k\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\tau_i^j(k) = \sup I$, $i=\mathfrak{i}_j+1,\ldots,\mathfrak{i}_j'$, $k\in\mathbb{N}$;

4) при тех j, при которых $\mathfrak{i}_j < \mathfrak{i}_j'$, но $\delta_j = -\delta_j'$, имеем

$$\lim_{k\to\infty}\tau_1^j(k) = \inf I,\quad k\in\mathbb{N},\quad \tau_i^j(k)\equiv\widehat{\tau}_{i-1}^j,\quad i=2,\ldots,\mathfrak{i}_j+1,\quad k\in\mathbb{N},$$
$$\lim_{k\to\infty}\tau_i^j(k) = \sup I,\quad i=\mathfrak{i}_j+2,\ldots,\mathfrak{i}_j',\quad k\in\mathbb{N}.$$

Возможность выбора таких последовательностей обеспечивается условиями леммы.

По следствию 2 (с учетом замечания 1) для каждого натурального k существует такой вектор $c^k\in S^{n-1}$, что каждая линейная комбинация $\xi^j(t;c^k)$, $j=1,\ldots,r$, имеет корни только в точках $\tau_i^j(k)$, $i=1,\ldots,\mathfrak{i}_j'$, которые обязательно будут являться узлами в силу следствия 1, не имеет других корней на интервале I и при этом $\boldsymbol{\delta}(c^k) = \delta'$.

В силу компактности сферы S^{n-1} из последовательности $\{c^k\}_{k=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, которую мы снова обозначим $\{c^k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty}c^k = \widehat{c}\in S^{n-1}$. Очевидно, что

$$\lim_{k\to\infty}\xi^j(t;c^k) = \xi^j(t;\widehat{c}) \quad \text{при каждом } j=1,\ldots,r \text{ и любом } t\in I. \tag{1.10}$$

Теперь, пользуясь равенством (1.10) и условиями 1)–4), легко установить, что $\boldsymbol{\delta}(\widehat{c}) = \delta$ и каждая линейная комбинация $\xi^j(t;\widehat{c})$, $j=1,\ldots,r$, имеет узлы только в точках $\widehat{\tau}_1^j,\ldots,\widehat{\tau}_{\mathfrak{i}_j}^j$ и не имеет других узлов на интервале I (хотя линейные комбинации $\xi^j(t;\widehat{c})$ могут иметь корни на I, отличные от точек $\widehat{\tau}_i^j$, но эти корни обязательно будут пучностями). $\square$

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение* 1. *Тогда для любых векторов* $\mathfrak{i} = (\mathfrak{i}_1, \ldots, \mathfrak{i}_r) \in \mathfrak{I}$, $\delta \in \mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$ *и любой допустимой на* I *системы точек* $\{\tau_i^j\}_{i=1,\ldots,\mathfrak{i}_j}^{j=1,\ldots,r}$ *существует такой ненулевой вектор* c, *что*

1) $\boldsymbol{\delta}(c) = \delta$;

2) *каждая линейная комбинация* $\xi^j(t;c)$, $j = 1,\ldots,r$, *имеет узлы в точках* $\tau_1^j, \ldots, \tau_{\mathfrak{i}_j}^j$ *и не имеет других узлов на интервале* I.

Доказательство. По условию теоремы $\delta \in \mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$, поэтому по лемме 2 существуют векторы $\mathfrak{i}' \in \mathfrak{I}$, $\delta' \in \mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i}')$, удовлетворяющие условиям 1)–3) леммы 3. □

Теорема 3. *Пусть выполнено предположение* 1, $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$, $\delta \in \{-1,1\}^r$ — *произвольные векторы. Для того чтобы* $\delta \in \mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали векторы* $\mathfrak{i}' \in \mathfrak{I}$ *и* $\delta' \in \mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i}')$, *удовлетворяющие условиям:*

1) $s(\mathfrak{i}') = n-1$;

2) $\mathfrak{i} \leqslant \mathfrak{i}'$;

3) $\delta_j = \delta'_j$ *при тех* $j \in \{1,\ldots,r\}$, *при которых* $\mathfrak{i}_j = \mathfrak{i}'_j$.

Доказательство. Необходимость составляет утверждение ранее доказанной леммы 2, а достаточность следует из леммы 3. □

Следствие 3. *Пусть выполнено предположение* 1, $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$, $\delta \in \{-1,1\}^r$ — *произвольные векторы. Если существуют такие векторы* $\mathfrak{i}' \in \mathfrak{I}$ *и* $\delta' \in \mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i}')$, *что* $\mathfrak{i} \leqslant \mathfrak{i}'$ *и* $\delta_j = \delta'_j$ *при тех* $j \in \{1,\ldots,r\}$, *при которых* $\mathfrak{i}_j = \mathfrak{i}'_j$, *то* $\delta \in \mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$.

Доказательство. Пусть выполнены условия следствия. По теореме 3 существуют такие векторы $\mathfrak{i}'' \in \mathfrak{I}$ и $\delta'' \in \mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i}'')$, что

1) $s(\mathfrak{i}'') = n-1$;

2) $\mathfrak{i}' \leqslant \mathfrak{i}''$;

3) $\delta'_j = \delta''_j$ при тех $j \in \{1,\ldots,r\}$, при которых $\mathfrak{i}'_j = \mathfrak{i}''_j$.

Теперь из условий следствия следует, что

4) $\mathfrak{i} \leqslant \mathfrak{i}''$;

5) $\delta_j = \delta''_j$ при тех $j \in \{1,\ldots,r\}$, при которых $\mathfrak{i}_j = \mathfrak{i}''_j$.

Тогда из условий 1), 4), 5) по теореме 3 следует $\delta \in \mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$. □

Выше мы уже отмечали, что если для некоторого $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$ выполнено условие $s(\mathfrak{i}) = n-1$, то множество $\mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$ состоит из двух противоположных элементов (следствие 2). Следующее утверждение продолжает этот результат.

Утверждение 4. *Пусть выполнено предположение* 1. *Тогда множество* $\mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$ *непусто при любом* $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$, *причем* $\mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i}) \subseteq \mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i}')$, *если* $\mathfrak{i} \geqslant \mathfrak{i}'$.

Доказательство. Следует из следствия 3. □

Доказанные выше утверждения и теоремы позволяют построить алгоритм нахождения множества $\mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$ при любом $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$.

Пусть сначала $\mathfrak{i} = (\mathfrak{i}_1, \ldots, \mathfrak{i}_r) \in \mathfrak{I}$, $s(\mathfrak{i}) = n-1$. Возьмем произвольную допустимую на I систему точек $\{\tau_i^j\}_{i=1,\ldots,\mathfrak{i}_j}^{j=1,\ldots,r}$, дополним ее произвольной точкой τ_0^1 интервала I, отличной от всех точек $\tau_1^1, \ldots, \tau_{\mathfrak{i}_j}^1$. Пользуясь равенством (1.2) (с заменой n_j на $\mathfrak{i}_j$), находим вектор $\widehat{c} \neq 0$. Теперь легко найти $\widehat{\delta} = \boldsymbol{\delta}(\widehat{c})$ непосредственно по определению 3. Имеем $\widehat{\delta} \in \mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$ и согласно следствию 2 $\mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i}) = \{\widehat{\delta}, -\widehat{\delta}\}$. Так строится множество $\mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$ для тех $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$, для которых $s(\mathfrak{i}) = n-1$. Для тех $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$, для которых $s(\mathfrak{i}) < n-1$, множество $\mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$ легко построить, пользуясь теоремой 3.

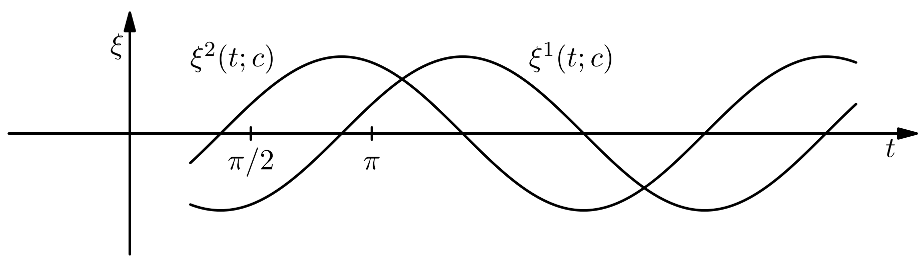

Рис. 1. Графики функций $\xi^1(t;c)$ и $\xi^2(t;c)$ для примера 1

Пример 1. Пусть $n=r=2$ и

$$\begin{pmatrix}\xi_1^1(t) & \xi_1^2(t)\\ \xi_2^1(t) & \xi_2^2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin t & \cos t\\ \cos t & -\sin t\end{pmatrix}.$$

Имеем $\xi^1(t;c)=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\,\sin(t+\phi)$, $\xi^2(t;c)=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\,\cos(t+\phi)$, где ϕ — некоторая константа. На любом интервале $I_\alpha=(\alpha,\,\alpha+\pi/2)$ (α — произвольная вещественная константа) при любом ненулевом векторе $c\in\mathbb{R}^2$ одна из функций $\xi^1(t;c)$, $\xi^2(t;c)$ имеет ровно один узел на интервале I_α, в то время как другая функция не имеет на этом интервале ни одного корня (которая из функций имеет корень зависит, разумеется, от α и от c) и по определению 1 эта система функций образует ТА-систему на любом интервале I_α, $\alpha\in\mathbb{R}$ (рис. 1). На любом из таких интервалов, используя вышеописанный алгоритм, легко найти значения отображения $\mathbf{\Lambda}^-_{I_\alpha}(\mathfrak{i})$ для каждого $\mathfrak{i}\in\mathfrak{I}=\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$. Оказывается, что значение отображения $\mathbf{\Lambda}^-_{I_\alpha}(\mathfrak{i})$ зависит только от переменной $\mathfrak{i}$ и не зависит от выбранного интервала I_α:

$$\mathbf{\Lambda}^-(1,0)=\{(+1,-1),(-1,+1)\},\quad \mathbf{\Lambda}^-(0,1)=\{(+1,+1),(-1,-1)\}, \tag{1.11}$$

$$\mathbf{\Lambda}^-(0,0)=\{(+1,-1),(-1,-1),(-1,+1),(+1,+1)\}. \tag{1.12}$$

В этом примере $\mathbf{\Lambda}^-(0,0)=\{-1,+1\}\times\{-1,+1\}$.

Пример 2. Пусть $n=2$, $r=3$ и

$$\begin{pmatrix}\xi_1^1(t) & \xi_1^2(t) & \xi_1^3(t)\\ \xi_2^1(t) & \xi_2^2(t) & \xi_2^3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ t & 2t & 4t\end{pmatrix}.$$

Это семейство функций образует ТА-систему на любом интервале $I_\alpha=(\alpha,2\alpha)$, $\alpha>0$. В этом примере (как и в предыдущем) значение отображения $\mathbf{\Lambda}^-_{I_\alpha}(\mathfrak{i})$ также зависит только от переменной $\mathfrak{i}$ и не зависит от выбранного интервала I_α:

$$\mathbf{\Lambda}^-(1,0,0)=\{(+1,-1,-1),(-1,+1,+1)\},\quad \mathbf{\Lambda}^-(0,1,0)=\{(+1,+1,-1),(-1,-1,+1)\},$$
$$\mathbf{\Lambda}^-(0,0,1)=\{(+1,+1,+1),(-1,-1,-1)\}.$$

Воспользовавшись теоремой 3, находим множество $\mathbf{\Lambda}^-(0,0,0)$:

$$\mathbf{\Lambda}^-(0,0,0)=\{(+1,+1,+1),(-1,+1,+1),(+1,+1,-1),(+1,-1,-1),(-1,-1,+1),(-1,-1,-1)\}.$$

В отличие от примера 1 здесь $(+1,-1,+1)\notin\mathbf{\Lambda}^-(0,0,0)$, $(-1,+1,-1)\notin\mathbf{\Lambda}^-(0,0,0)$.

§ 2. Некоторые обобщения понятий и утверждений из § 1. Функция $\sigma(\cdot)$ и ее свойства

Введенных понятий и доказанных в параграфе 1 утверждений нам достаточно для изучения так называемых докритических управляемых систем с многомерным управлением, которые будут рассматриваться в следующем параграфе. Однако для полноты изложения мы сделаем некоторые обобщения этих понятий и утверждений. Как и в § 1, мы будем оставаться в рамках предположения 1, считая фиксированными невырожденный интервал $I \subseteq \mathbb{R}$ и семейство определенных на нем непрерывных функций $\{\xi_i^j : I \to \mathbb{R}\}_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,r}$, которые образуют на этом интервале ТА-систему. Лишь в конце параграфа мы кратко рассмотрим случай произвольного промежутка I и введем специальную функцию $\boldsymbol{\sigma}$.

Определение 4. Пусть $c \in \mathbb{R}^n$ — произвольный ненулевой вектор. *Расширенным вектором индексов* для семейства линейных комбинаций $\{\xi^j(t;c)\}_{j=1}^r$ мы будем называть вектор $\mathfrak{i} = (\mathfrak{i}_1, \dots, \mathfrak{i}_r) \in \mathbb{Z}_+^r$, где $\mathfrak{i}_j = 2k_j + l_j$, а k_j и l_j $(j = 1, \dots, r)$ — количества пучностей и узлов соответственно на I линейной комбинации $\xi^j(t;c)$.

Определим отображение $\mathbf{i}^+ : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_+^r$, аналогичное отображению $\mathbf{i}^-$. Для расширенного вектора индексов мы будем использовать то же обозначение, что и для вектора индексов, но величину $s(\mathfrak{i}) = \mathfrak{i}_1 + \ldots + \mathfrak{i}_r$ в таких случаях будем называть расширенным полным индексом. Согласно теореме 1 не только полный индекс, но и расширенный полный индекс не превосходит $n-1$ при любом ненулевом векторе коэффициентов c, и поэтому множество $\mathfrak{I}$ кроме всевозможных векторов индексов содержит также и всевозможные расширенные векторы индексов.

По аналогии с отображением $\mathbf{\Lambda}^-$ (равенство (1.4)) можно определить многозначное отображение $\mathbf{\Lambda}^+ : \mathfrak{I} \to \{-1, 1\}^r$ равенством

$$\mathbf{\Lambda}^+(\mathfrak{i}) = \bigcup_{\substack{c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ \mathbf{i}^+(c) = \mathfrak{i}}} \{\boldsymbol{\delta}(c)\}.$$

Для введенных выше отображений $\mathbf{i}^+$ и $\mathbf{\Lambda}^+$ мы сформулируем и докажем утверждения аналогичные теоремам 2 и 3, но для этого нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть выполнено предположение* 1, $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$, $\delta \in \mathbf{\Lambda}^+(\mathfrak{i})$ — *произвольные векторы. Тогда существуют векторы* $\mathfrak{i}' \in \mathfrak{I}$ *и* $\delta' \in \mathbf{\Lambda}^-(\mathfrak{i}')$, *удовлетворяющие условиям:*

1) $s(\mathfrak{i}') = n - 1$;
2) $\mathfrak{i} \leqslant \mathfrak{i}'$;
3) $\delta_j = \delta'_j$ *при тех* $j \in \{1, \dots, r\}$, *при которых* $\mathfrak{i}_j = \mathfrak{i}'_j$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению отображения $\mathbf{\Lambda}^+$ существует такой ненулевой вектор c^1, что $\mathfrak{i} = \mathbf{i}^+(c^1)$, $\delta \in \boldsymbol{\delta}(c^1)$.

Обозначим $\inf I < \tau_1^j < \ldots < \tau_{n_j}^j < \sup I$ — корни линейных комбинаций $\xi^j(t;c^1)$ на интервале I. Произвольным образом выберем точки $\vartheta_i^j \in (\tau_{i-1}^j, \tau_i^j)$, $i = 1, \dots, n_j + 1$, $j = 1, \dots, r$; $\tau_0^j = \inf I$, $\tau_{n_j+1}^j = \sup I$. Положим

$$\mu_i^j = \left|\xi^j\left(\vartheta_i^j; c^1\right)\right| > 0, \quad i = 1, \dots, n_j + 1, \quad j = 1, \dots, r; \quad \mu = \min_{1 \leqslant j \leqslant r} \min_{1 \leqslant i \leqslant n_j+1} \mu_i^j > 0.$$

По утверждению 3 существует такой ненулевой вектор $c^2 \in \mathbb{R}^n$, что каждая линейная комбинация $\xi^j(t;c^2)$, $j = 1, \dots, r$, принимает значение $+\mu$ в пучностях линейной комбинации $\xi^j(t;c^1)$, в окрестности которых $\xi^j(t,c^1) \leqslant 0$, и значение $-\mu$ в пучностях линейной комбинации $\xi^j(t;c^1)$, в окрестности которых $\xi^j(t;c^1) \geqslant 0$, и, кроме того, обращается в нуль во всех узлах линейной комбинации $\xi^j(t;c^1)$.

Выберем теперь положительное ρ так, чтобы $\rho \max_{1 \leqslant j \leqslant r} \max_{1 \leqslant i \leqslant n_j+1} \left|\xi^j\left(\vartheta_i^j; c^2\right)\right| < \mu$.

Положим $c^3 = c^1 + \rho c^2$. Вектор c^3 ненулевой, так как

$$|\xi^1(\vartheta_1^1; c^3)| = |\mu_1^1 + \rho\xi^1(\vartheta_1^1; c^2)| > \mu_1^1 - \mu \geqslant 0,$$

поэтому можно обозначить $\mathfrak{i}'' = \mathbf{i}^-(c^3)$, $\delta'' = \boldsymbol{\delta}(c^3) \in \boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i}'')$. Если точка τ_i^j является узлом линейной комбинации $\xi^j(t;c^1)$, в котором эта функция меняет знак, например, с плюса на минус, то имеем

$$\xi^j\big(\vartheta_i^j;c^3\big) > \mu_i^j - \mu \geqslant 0, \quad \xi^j\big(\vartheta_{i+1}^j;c^3\big) < -\mu_{i+1}^j + \mu \leqslant 0,$$

откуда следует, что функция $\xi^j(t;c^3)$ имеет на интервале $\big(\vartheta_i^j, \vartheta_{i+1}^j\big)$ по крайней мере один узел. А если точка τ_i^j является пучностью линейной комбинации $\xi^j(t;c^1)$, в окрестности которой, например, $\xi(t;c^1) \geqslant 0$, то

$$\xi^j\big(\vartheta_i^j;c^3\big) > \mu_i^j - \mu \geqslant 0, \quad \xi^j\big(\vartheta_{i+1}^j;c^3\big) > \mu_{i+1}^j - \mu \geqslant 0, \quad \xi^j\big(\tau_i^j;c^3\big) = \rho\xi^j\big(\tau_i^j;c^2\big) = -\rho\mu < 0,$$

откуда следует, что функция $\xi^j(t;c^3)$ имеет на каждом интервале $\big(\vartheta_i^j, \tau_i^j\big)$, $\big(\tau_i^j, \vartheta_{i+1}^j\big)$ по крайней мере по одному узлу.

Таким образом, каждому узлу функции $\xi^j(t;c^1)$ соответствует узел функции $\xi^j(t;c^3)$, а каждой пучности функции $\xi^j(t;c^1)$ соответствуют два узла функции $\xi^j(t;c^3)$ (причем все эти узлы функции $\xi^j(t;c^3)$ по построению попарно различны). В силу произвольности j неравенство $\mathfrak{i}_j \leqslant \mathfrak{i}''_j$ доказано при всех $j = 1, \ldots, r$.

Теперь зафиксируем произвольное j, при котором $\mathfrak{i}_j = \mathfrak{i}''_j$. Из проведенных выше рассуждений следует, что $\operatorname{sign}\xi^j\big(\vartheta_1^j;c^3\big) = \operatorname{sign}\xi^j\big(\vartheta_1^j;c^1\big)$, а из условия $\mathfrak{i}_j = \mathfrak{i}''_j$ следует, что на интервале $\big(\inf I, \vartheta_1^j\big)$ функция $\xi^j(t;c^3)$ узлов иметь не может. Отсюда сразу получаем $\delta_j = \delta''_j$.

Итак, мы построили вектор индексов $\mathfrak{i}'' \in \mathfrak{I}$ и вектор $\delta'' \in \boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i}'')$, обладающие следующими свойствами:

а) $\mathfrak{i} \leqslant \mathfrak{i}''$;

б) $\delta_j = \delta''_j$ при тех $j \in \{1, \ldots, r\}$, при которых $\mathfrak{i}_j = \mathfrak{i}''_j$.

Теперь применим лемму 2 к векторам $\mathfrak{i}''$ и δ''. По этой лемме для векторов $\mathfrak{i}''$ и δ'' существуют векторы $\mathfrak{i}' \in \mathfrak{I}$, $\delta' \in \boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i}')$, обладающие свойствами:

в) $s(\mathfrak{i}') = n - 1$;

г) $\mathfrak{i}'' \leqslant \mathfrak{i}'$;

д) $\delta''_j = \delta'_j$ при тех $j \in \{1, \ldots, r\}$, при которых $\mathfrak{i}''_j = \mathfrak{i}'_j$.

Из соотношений а)–д) легко получаем:

а$'$) $s(\mathfrak{i}') = n - 1$;

б$'$) $\mathfrak{i} \leqslant \mathfrak{i}'$;

в$'$) $\delta_j = \delta'_j$ при тех $j \in \{1, \ldots, r\}$, при которых $\mathfrak{i}_j = \mathfrak{i}'_j$. □

Определение 5. Пару $\boldsymbol{\tau} = (\tau, \tau')$, состоящую из двух семейств точек $\tau = \big\{\tau_i^j\big\}_{i=1,\ldots,n_j}^{j=1,\ldots,r}$, $\tau' = \big\{\tau_i'^j\big\}_{i=1,\ldots,n'_j}^{j=1,\ldots,r}$, удовлетворяющих условиям

1) $\tau_i^j \in I$ при всех $i = 1, \ldots, n_j$, $j = 1, \ldots, r$;

2) $\tau_i'^j \in I$ при всех $i = 1, \ldots, n'_j$, $j = 1, \ldots, r$;

3) точки $\tau_1^j, \ldots, \tau_{n_j}^j, \tau_1'^j, \ldots, \tau_{n'_j}'^j$ попарно различны при каждом $j = 1, \ldots, r$,

будем называть *допустимой на промежутке I парой систем точек* (или, короче, *допустимой парой систем точек*).

Лемма 5. *Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда для любой допустимой на интервале I пары систем точек $\boldsymbol{\tau} = (\tau, \tau')$, где $\tau = \big\{\tau_i^j\big\}_{i=1,\ldots,n_j}^{j=1,\ldots,r}$, $\tau' = \big\{\tau_i'^j\big\}_{i=1,\ldots,n'_j}^{j=1,\ldots,r}$, такой, что $2n_j + n'_j = \mathfrak{i}_j$ при каждом $j = 1, \ldots, r$, существует такой ненулевой вектор c, что*

1) $\boldsymbol{\delta}(c) = \delta$;

2) *каждая линейная комбинация $\xi^j(t;c)$, $j = 1, \ldots, r$, имеет пучности в точках τ_1^j, …, $\tau_{n_j}^j$, узлы в точках $\tau_1'^j, \ldots, \tau_{n'_j}'^j$ и не имеет других корней на интервале I.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При доказательстве этой леммы мы будем пользоваться следующей леммой.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия леммы* 3*. Тогда для любой допустимой на интервале* I *системы точек* $\boldsymbol{\tau} = (\tau, \tau')$, $\tau = \{\tau_i^j\}_{i=1,\ldots,n_j}^{j=1,\ldots,r}$, $\tau' = \{\tau_i'^j\}_{i=1,\ldots,n_j'}^{j=1,\ldots,r}$, *такой, что* $2n_j + n_j' = \mathfrak{i}_j$ *при каждом* $j = 1, \ldots, r$, *существует такой ненулевой вектор* c, *что*

1) $\boldsymbol{\delta}(c) = \delta$;

2) *каждая линейная комбинация* $\xi^j(t; c)$, $j = 1, \ldots, r$, *имеет пучности в точках* τ_1^j, $\ldots$, $\tau_{n_j}^j$, *узлы в точках* $\tau_1'^j, \ldots, \tau_{n_j'}'^j$ *и не имеет других узлов на интервале* I.

Условия лемм 5 и 6 одинаковые, но утверждение леммы 6 слабее: в ней для линейных комбинаций $\xi^j(t; c)$ мы допускаем существование пучностей на интервале I, отличных от точек $\tau_1^j, \ldots, \tau_{n_j}^j$. Итак, доказываем вспомогательную лемму 6.

Зафиксируем произвольную допустимую на интервале I пару систем точек $\widehat{\boldsymbol{\tau}} = (\widehat{\tau}, \widehat{\tau}')$ $\big(\widehat{\tau} = \{\widehat{\tau}_i^j\}_{i=1,\ldots,n_j}^{j=1,\ldots,r}$, $\widehat{\tau}' = \{\widehat{\tau}_i'^j\}_{i=1,\ldots,n_j'}^{j=1,\ldots,r}\big)$, удовлетворяющую условиям леммы для заданного вектора $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$.

Для всех $i = 1, \ldots, \mathfrak{i}_j'$, $j = 1, \ldots, r$ выберем такие последовательности точек $\{\tau_i^j(k)\}_{k=1}^{\infty}$, чтобы выполнялись следующие условия:

1) при всех $i = 1, \ldots, \mathfrak{i}_j'$, $j = 1, \ldots, r$ и каждом $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\tau_i^j(k) \in I; \quad \tau_s^j(k) \neq \tau_l^j(k), \quad s \neq l;$$

2) при тех j, при которых $\mathfrak{i}_j = \mathfrak{i}_j'$, имеем

$$\lim_{k\to\infty} \tau_{2i-1}^j(k) = \lim_{k\to\infty} \tau_{2i}^j(k) = \widehat{\tau}_i^j, \quad i = 1, \ldots, n_j, \quad k \in \mathbb{N},$$
$$\tau_{i+2n_j}^j(k) \equiv \widehat{\tau}_i'^j, \quad i = 1, \ldots, n_j', \quad k \in \mathbb{N};$$

3) при тех j, при которых $\mathfrak{i}_j < \mathfrak{i}_j'$ и $\delta_j = \delta_j'$, имеем

$$\lim_{k\to\infty} \tau_{2i-1}^j(k) = \lim_{k\to\infty} \tau_{2i}^j(k) = \widehat{\tau}_i^j, \quad i = 1, \ldots, n_j, \quad k \in \mathbb{N},$$
$$\tau_{i+2n_j}^j(k) \equiv \widehat{\tau}_i'^j, \quad i = 1, \ldots, n_j', \quad k \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{k\to\infty} \tau_i^j(k) = \sup I, \quad i = \mathfrak{i}_j + 1, \ldots, \mathfrak{i}_j', \quad k \in \mathbb{N};$$

4) при тех j, при которых $\mathfrak{i}_j < \mathfrak{i}_j'$, но $\delta_j = -\delta_j'$, имеем

$$\lim_{k\to\infty} \tau_1^j(k) = \inf I, \quad \lim_{k\to\infty} \tau_{2i}^j(k) = \lim_{k\to\infty} \tau_{2i+1}^j(k) = \widehat{\tau}_i^j, \quad i = 1, \ldots, n_j, \quad k \in \mathbb{N},$$
$$\tau_{i+2n_j+1}^j(k) \equiv \widehat{\tau}_i'^j, \quad i = 1, \ldots, n_j', \quad k \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{k\to\infty} \tau_i^j(k) = \sup I, \quad i = \mathfrak{i}_j + 2, \ldots, \mathfrak{i}_j', \quad k \in \mathbb{N}.$$

Возможность выбора таких последовательностей обеспечивается условиями леммы.

По следствию 2 (с учетом замечания 1) для каждого натурального k существует такой вектор $c^k \in S^{n-1}$, что каждая линейная комбинация $\xi^j(t; c^k)$, $j = 1, \ldots, r$, имеет корни только в точках $\tau_i^j(k)$, $i = 1, \ldots, \mathfrak{i}_j'$, которые обязательно будут являться узлами в силу следствия 1, не имеет других корней на интервале I и при этом $\boldsymbol{\delta}(c^k) = \delta'$.

В силу компактности сферы S^{n-1} из последовательности $\{c^k\}_{k=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, которую мы снова обозначим $\{c^k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty} c^k = \widehat{c} \in S^{n-1}$. Очевидно, что

$$\lim_{k\to\infty} \xi^j(t; c^k) = \xi^j(t; \widehat{c}) \quad \text{при каждом } j = 1, \ldots, r \text{ и любом } t \in I. \tag{2.1}$$

Теперь, пользуясь равенством (2.1) и условиями 1)–4), легко установить, что $\boldsymbol{\delta}(\widehat{c}) = \delta$ и каждая линейная комбинация $\xi^j(t;\widehat{c})$, $j = 1,\ldots,r$, имеет пучности в точках $\widehat{\tau}_1^j,\ldots,\widehat{\tau}_{n_j}^j$, узлы в точках $\widehat{\tau}_1'^j,\ldots,\widehat{\tau}_{n_j'}'^j$ и не имеет других узлов на интервале I. Лемма 6 доказана.

Продолжаем доказательство леммы 5. Для заданного в условии леммы вектора $\mathfrak{i} \in \mathfrak{J}$ зафиксируем произвольную допустимую на интервале I пару систем точек $\widehat{\boldsymbol{\tau}} = (\widehat{\tau},\widehat{\tau}')$, где $\widehat{\tau} = \{\widehat{\tau}_i^j\}_{i=1,\ldots,n_j}^{j=1,\ldots,r}$, $\widehat{\tau}' = \{\widehat{\tau}_i'^j\}_{i=1,\ldots,n_j'}^{j=1,\ldots,r}$, такую, что $2n_j + n_j' = \mathfrak{i}_j$ при каждом $j = 1,\ldots,r$. По лемме 6 существует такой ненулевой вектор c^1, что

а) $\boldsymbol{\delta}(c^1) = \delta$;

б) каждая линейная комбинация $\xi^j(t;c^1)$, $j = 1,\ldots,r$, имеет пучности в точках $\widehat{\tau}_1^j,\ldots,\widehat{\tau}_{n_j}^j$, узлы в точках $\widehat{\tau}_1'^j,\ldots,\widehat{\tau}_{n_j'}'^j$ и не имеет других узлов на интервале I.

Если окажется, что каждая линейная комбинация $\xi^j(t;c^1)$, $j = 1,\ldots,r$, не имеет на интервале I пучностей, отличных от точек $\widehat{\tau}_1^j,\ldots,\widehat{\tau}_{n_j}^j$, то вектор c^1 — искомый. В противном случае обозначим n_j^1 $(j = 1,\ldots,r)$ — количество всех пучностей (включая точки $\widehat{\tau}_1^j,\ldots,\widehat{\tau}_{n_j}^j$) соответствующей линейной комбинации $\xi^j(t;c^1)$ на интервале I. Для каждого $j = 1,\ldots,r$ произвольным образом выберем на интервале I точки $\widehat{\tau}_{n_j+1}^j,\ldots,\widehat{\tau}_{n_j^1}$, отличные от всех корней линейной комбинации $\xi^j(t;c^1)$ на интервале I. Добавив выбранные точки к системе точек $\widehat{\tau}$, сформируем систему точек $\widehat{\tau}^1 = \{\widehat{\tau}_i^j\}_{i=1,\ldots,n_j^1}^{j=1,\ldots,r}$ и составим пару систем точек $\widehat{\boldsymbol{\tau}}^1 = (\widehat{\tau}^1,\widehat{\tau}')$.

Вектор c^1 ненулевой, и мы имеем

$$\mathbf{i}^+(c^1) = \mathfrak{i}^1 = (2n_1^1 + n_1',\ldots,2n_r^1 + n_r'),\quad \boldsymbol{\delta}(c^1) = \delta \in \boldsymbol{\Lambda}^+\bigl(\mathfrak{i}^1\bigr).$$

По лемме 4 существуют векторы $\mathfrak{i}'^1 \in \mathfrak{J}$, $s\bigl(\mathfrak{i}'^1\bigr) = n-1$ и $\delta'^1 \in \boldsymbol{\Lambda}^-\bigl(\mathfrak{i}'^1\bigr)$ такие, что $\mathfrak{i}^1 \leqslant \mathfrak{i}'^1$ и $\delta_j = \delta_j'^1$ при тех $j \in \{1,\ldots,r\}$, при которых $\mathfrak{i}_j^1 = \mathfrak{i}_j'^1$. Выполнены все условия леммы 6 для векторов δ, $\mathfrak{i}^1$ и допустимой пары систем точек $\widehat{\boldsymbol{\tau}}^1$. По этой лемме существует такой ненулевой вектор c^2, что

а) $\boldsymbol{\delta}(c^2) = \delta$;

б) каждая линейная комбинация $\xi^j(t;c^2)$, $j = 1,\ldots,r$, имеет пучности в точках $\widehat{\tau}_1^j,\ldots,\widehat{\tau}_{n_j^1}^j$, узлы в точках $\widehat{\tau}_1'^j,\ldots,\widehat{\tau}_{n_j'}'^j$ и не имеет других узлов на интервале I.

Если какая-нибудь линейная комбинация $\xi^j(t;c^2)$ имеет на интервале I пучности, отличные от точек $\widehat{\tau}_1^j,\ldots,\widehat{\tau}_{n_j^1}^j$, то аналогично может быть построен ненулевой вектор c^3 и так далее до тех пор, пока не будет построен ненулевой вектор c^k, для которого будет выполнено $\mathbf{i}^+(c^{k-1}) = \mathbf{i}^+(c^k)$.

Процесс построения векторов $c^1,c^2,\ldots$ обязательно закончится через конечное число шагов, так как полный расширенный индекс в ряду векторов $c^1,c^2,\ldots$ строго возрастает, но он не может быть больше $n-1$:

$$s\bigl(\mathbf{i}^+(c^1)\bigr) < s\bigl(\mathbf{i}^+(c^2)\bigr) < \ldots < s\bigl(\mathbf{i}^+(c^{k-1})\bigr) = s\bigl(\mathbf{i}^+(c^k)\bigr) \leqslant n-1.$$

Итак, мы построили конечный ряд ненулевых векторов $c^1,\ldots,c^k$, обладающих свойствами:

1) $\boldsymbol{\delta}(c^i) = \delta$ при всех $i = 1,\ldots,k$;

2) при каждом $i = 1,\ldots,k$ и каждом $j = 1,\ldots,r$ линейная комбинация $\xi^j(t;c^i)$ имеет узлы в точках $\widehat{\tau}_1'^j,\ldots,\widehat{\tau}_{n_j'}'^j$ и не имеет других узлов на интервале I;

3) при каждом $i = 1,\ldots,k-1$ и каждом $j = 1,\ldots,r$ линейная комбинация $\xi^j(t;c^i)$ имеет пучности в точках $\widehat{\tau}_1^j,\ldots,\widehat{\tau}_{n_j^{i-1}}^j$ $(n_j^0 = n_j)$ и не имеет пучностей в точках $\widehat{\tau}_{n_j^{i-1}+1}^j,\ldots,\widehat{\tau}_{n_j^i}^j$;

4) при каждом $j = 1,\ldots,r$ линейная комбинация $\xi^j(t;c^k)$ имеет пучности только в точках $\widehat{\tau}_1^j,\ldots,\widehat{\tau}_{n_j^{k-1}}^j$ и не имеет других пучностей на интервале I.

Покажем, что вектор $\widehat{c} = c^1 + \ldots + c^k$ — искомый. Для этого нам нужно доказать, что для вектора $\widehat{c}$ выполнены условия:

а) $\widehat{c} \neq 0$;

б) $\boldsymbol{\delta}(\widehat{c}) = \delta$;

в) каждая линейная комбинация $\xi^j(t;\widehat{c})$, $j = 1,\ldots,r$, имеет узлы в точках $\widehat{\tau}_1'^j,\ldots,\widehat{\tau}_{n_j'}'^j$ и не имеет других узлов на интервале I;

г) каждая линейная комбинация $\xi^j(t;\widehat{c})$, $j = 1,\ldots,r$, имеет пучности в точках $\widehat{\tau}_1^j,\ldots,\widehat{\tau}_{n_j}^j$ и не имеет других пучностей на интервале I.

Из 1)–2) сразу следует а)–в) и утверждение: при каждом $j = 1,\ldots,r$ и любом $t \in I$ имеет место неравенство

$$\xi^j(t;c^s)\,\xi^j(t;c^l) \geqslant 0, \quad s \neq l. \tag{2.2}$$

Далее, из 3)–4) и неравенства (2.2) следует, что точка $\tau \in \operatorname{Int} I$ является пучностью некоторой линейной комбинации $\xi^{\overline{j}}(t;\widehat{c})$ тогда и только тогда, когда она является пучностью всех линейных комбинаций $\xi^{\overline{j}}(t;c^i)$, $i = 1,\ldots,k$. Теперь из 3)–4) следует утверждение пункта г).

Теорема 4. *Пусть выполнено предположение* 1. *Тогда для любых векторов* $\mathfrak{i} = (\mathfrak{i}_1,\ldots,\mathfrak{i}_r) \in \mathfrak{I}$, $\delta \in \boldsymbol{\Lambda}^+(\mathfrak{i})$ *и любой допустимой на интервале I пары систем точек* $\boldsymbol{\tau} = (\tau,\tau')$, *где* $\tau = \{\tau_i^j\}_{i=1,\ldots,n_j}^{j=1,\ldots,r}$, $\tau' = \{\tau_i'^j\}_{i=1,\ldots,n_j'}^{j=1,\ldots,r}$, *такой, что* $2n_j + n_j' = \mathfrak{i}_j$ *при каждом* $j = 1,\ldots,r$, *существует такой ненулевой вектор* c, *что*

1) $\boldsymbol{\delta}(c) = \delta$;

2) *каждая линейная комбинация* $\xi^j(t;c)$, $j = 1,\ldots,r$, *имеет пучности в точках* τ_1^j, $\ldots$, $\tau_{n_j}^j$, *узлы в точках* $\tau_1'^j,\ldots,\tau_{n_j'}'^j$ *и не имеет других корней на интервале* I.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию теоремы $\delta \in \boldsymbol{\Lambda}^+(\mathfrak{i})$, поэтому по лемме 4 существуют векторы $\mathfrak{i}' \in \mathfrak{I}$, $\delta' \in \boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i}')$, удовлетворяющие условиям 1)–3) леммы 3. Теперь применяем лемму 5, поскольку ее условия такие же, как у леммы 3. $\square$

Теорема 5. *Пусть выполнено предположение* 1, $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$, $\delta \in \{-1,1\}^r$ — *произвольные векторы. Для того чтобы* $\delta \in \boldsymbol{\Lambda}^+(\mathfrak{i})$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали векторы* $\mathfrak{i}' \in \mathfrak{I}$ *и* $\delta' \in \boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i}')$, *удовлетворяющие условиям:*

1) $s(\mathfrak{i}') = n - 1$;

2) $\mathfrak{i} \leqslant \mathfrak{i}'$;

3) $\delta_j = \delta_j'$ *при тех* $j \in \{1,\ldots,r\}$, *при которых* $\mathfrak{i}_j = \mathfrak{i}_j'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость составляет утверждение ранее доказанной леммы 4, а достаточность следует из леммы 5. $\square$

Теорема 6. $\boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i}) = \boldsymbol{\Lambda}^+(\mathfrak{i})$ *для любого* $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$. Для $\delta \in \{-1,1\}^r$ рассмотрим утверждения:

1) $\delta \in \boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i})$;

2) существуют такие векторы $\mathfrak{i}' \in \mathfrak{I}$, $\delta' \in \boldsymbol{\Lambda}^-(\mathfrak{i}')$, что $\mathfrak{i} \leqslant \mathfrak{i}'$, $s(\mathfrak{i}') = n-1$ и $\delta_j = \delta_j'$ при тех $j \in \{1,\ldots,r\}$, при которых $\mathfrak{i}_j = \mathfrak{i}_j'$;

3) $\delta \in \boldsymbol{\Lambda}^+(\mathfrak{i})$.

Согласно теоремам 3 и 5 имеем 1) $\Leftrightarrow$ 2), 2) $\Leftrightarrow$ 3) соответственно. $\square$

Учитывая утверждение доказанной теоремы 6, мы не будем в дальнейшем указывать верхний индекс у отображения $\boldsymbol{\Lambda}\colon \mathfrak{I} \to \{-1,1\}^r$, положим $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}^- = \boldsymbol{\Lambda}^+$.

Мы дали определение ТА-системы функций на произвольном невырожденном промежутке I, но до сих пор рассматривали их свойства только на интервале. Было бы интересно проверить, какие из этих свойств сохраняют силу на произвольном промежутке. Но прежде необходимо уточнить определение 3, именно как мы будем понимать координату δ^j вектора знаков δ в случае, если левый конец замкнутого слева промежутка I является корнем соответствующей линейной комбинации $\xi^j(t;c)$.

Определение 6. Пусть $c \in \mathbb{R}^n$ — произвольный ненулевой вектор, невырожденный промежуток I замкнут слева, t_0 — левый конец промежутка I. *Вектором знаков* семейства линейных комбинаций $\{\xi^j(t;c)\}_{j=1}^r$ мы будем называть вектор $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_r) \in \{-1, 1\}^r$, координаты которого определяются следующим образом:

$$\delta_j = \begin{cases} -\delta'_j, & \text{если } \xi^j(t_0;c) = 0, \\ \delta'_j & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где δ'_j — знак соответствующей линейной комбинации $\xi^j(t;c)$ в правой окрестности точки t_0.

Теорема 1 была доказана для произвольного промежутка I. Утверждения леммы 1 и следствия 2 легко переносятся на случай произвольного промежутка I, а утверждения леммы 3, теоремы 3 и утверждения 4 в случае произвольного промежутка I могут оказаться неверными даже для случая $r = 1$, что иллюстрируют примеры ниже.

Пример 3. Рассмотрим две функции $\xi_1(t) = \sin t$, $\xi_2(t) = \cos t$. Любая нетривиальная линейная комбинация этих функций имеет вид $\xi(t;c) = c_1 \sin t + c_2 \cos t = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\,\sin(t + \phi)$, где ϕ — некоторая константа. При любом ненулевом векторе $c \in \mathbb{R}^2$ функция $\xi(t;c)$ имеет ровно один узел на любом полуинтервале $I_\alpha = [\alpha, \alpha + \pi)$, где α — произвольная вещественная константа, и по определению 1 эта система функций образует ТА-систему на любом полуинтервале I_α. Между тем не существует ни одного ненулевого вектора c, при котором линейная комбинация $\xi(t;c)$ не имела бы ни одного корня на полуинтервале I_α, то есть $\mathbf{\Lambda}^-_{I_\alpha}(0) = \varnothing$.

Пример 4. Рассмотрим семейство функций $\{\xi_i^j(t)\}_{i=1,2}^{j=1,2}$ из примера 1. Там мы установили, что оно образует ТА-систему на любом интервале $(\alpha, \alpha + \pi/2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Это семейство функций образует ТА-систему также на любом полуинтервале $I_\alpha = [\alpha, \alpha + \pi/2)$. Однако не существует ни одного ненулевого вектора c, при котором обе линейные комбинации $\xi^1(t;c)$, $\xi^2(t;c)$ не имели бы ни одного корня на полуинтервале I_α.

В заключение этого параграфа введем специальную функцию $\boldsymbol{\sigma}$, которая понадобится при изучении линейных нестационарных управляемых систем. Для простоты изложения мы будем предполагать, что $\{\xi_i^j \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r}$ — совокупность непрерывных функций, определенных всюду на $\mathbb{R}$, n и r — некоторые константы. Теперь мы не фиксируем промежуток I и рассматриваем эти функции на произвольном промежутке $I \subseteq \mathbb{R}$. Если система функций $\{\xi_i^j(\cdot)\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r}$ образует на нем ТА-систему, то можно определить функцию $\boldsymbol{\delta}$ и отображение $\mathbf{\Lambda}$ (см. §§ 1–2), которые будут зависеть от промежутка I. Мы будем подчеркивать это, указывая рассматриваемый промежуток в качестве нижнего индекса для отображения $\mathbf{\Lambda}_I$, для отображения $\boldsymbol{\delta}_t$, очевидно, достаточно указать только левый конец интервала $t = \inf I$. Из сформулированного ниже утверждения 5 следует, что и для отображения $\mathbf{\Lambda}_I$ достаточно указывать только левый конец интервала $\mathbf{\Lambda}_t$, что мы и будем делать в дальнейшем.

Утверждение 5. *Пусть семейство непрерывных функций $\{\xi_i^j\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r}$ образует ТА-систему на интервалах I_1 и I_2, причем $I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$. Тогда для любого вектора индексов $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$ имеет место $\mathbf{\Lambda}_{I_1}(\mathfrak{i}) = \mathbf{\Lambda}_{I_2}(\mathfrak{i})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $I_1 \cap I_2 = I_3 \neq \varnothing$. Для любого вектора индексов $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$, $s(\mathfrak{i}) = n - 1$ имеем очевидное включение $\mathbf{\Lambda}^-_{I_3}(\mathfrak{i}) \subseteq \mathbf{\Lambda}^-_{I_1}(\mathfrak{i})$. Применив следствие 2, получим $\mathbf{\Lambda}^-_{I_3}(\mathfrak{i}) = \mathbf{\Lambda}^-_{I_1}(\mathfrak{i})$. Аналогично $\mathbf{\Lambda}^-_{I_3}(\mathfrak{i}) = \mathbf{\Lambda}^-_{I_2}(\mathfrak{i})$, и поэтому $\mathbf{\Lambda}^-_{I_1}(\mathfrak{i}) = \mathbf{\Lambda}^-_{I_2}(\mathfrak{i})$. Для всех остальных значений $\mathfrak{i} \in \mathfrak{I}$ равенство $\mathbf{\Lambda}^-_{I_1}(\mathfrak{i}) = \mathbf{\Lambda}^-_{I_2}(\mathfrak{i})$ легко доказывается с использованием теоремы 3. Для завершения доказательства осталось воспользоваться теоремой 6. □

Для каждого $t \in \mathbb{R}$ обозначим через $\boldsymbol{\sigma}(t)$ точную верхнюю грань таких $\sigma > 0$, что на интервале $I_t = (t, t + \sigma)$ совокупность функций $\{\xi_i^j(\cdot)\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r}$ образует ТА-систему (определение 1). Если эти функции не образуют ТА-систему ни на каком интервале I_t, то положим $\boldsymbol{\sigma}(t) = 0$. Так определена функция $\boldsymbol{\sigma}\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

Замечание 4. Для однопараметрического семейства функций $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ аналогичная функция $\boldsymbol{\sigma}$ определялась и использовалась ранее в работах [13, 14]. Там в ее определении вместо интервала $(t,\, t+\sigma)$ использовался полуинтервал $[t,\, t+\sigma)$. Однако для наших исследований более удобной оказалась именно та функция $\boldsymbol{\sigma}$, которая определена выше.

Утверждение 6. *В каждой точке $t \in \mathbb{R}$ функция $\boldsymbol{\sigma}(\cdot)$ имеет односторонние пределы (возможно, бесконечные) $\boldsymbol{\sigma}(t \pm 0)$, причем выполнено соотношение $\boldsymbol{\sigma}(t-0) \leqslant \boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t+0)$.*

Доказательство. Из определения 1 непосредственно следует, что если семейство функций $\bigl\{\xi_i^j\bigr\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r}$ образует ТА-систему на интервале (t_1, t_2), то оно образует ТА-систему также на любом интервале $(t_1+\epsilon,\, t_2) \subseteq (t_1, t_2)$, где $t_1+\epsilon < t_2$. Поэтому функция $s(t) = t+\boldsymbol{\sigma}(t)$ является монотонно неубывающей и в каждой точке $t \in \mathbb{R}$ имеет односторонние пределы (возможно, бесконечные) $s(t \pm 0)$, причем выполнено неравенство $s(t-0) \leqslant s(t) \leqslant s(t+0)$. Следовательно, функция $\boldsymbol{\sigma}(\cdot)$ в каждой точке $t \in \mathbb{R}$ также имеет односторонние пределы и удовлетворяет аналогичному неравенству $\boldsymbol{\sigma}(t-0) \leqslant \boldsymbol{\sigma}(t) \leqslant \boldsymbol{\sigma}(t+0)$.

Предположим теперь, что $\boldsymbol{\sigma}\bigl(\widehat{t}\bigr) < \boldsymbol{\sigma}\bigl(\widehat{t}+0\bigr)$ при некотором $\widehat{t} \in \mathbb{R}$. Тогда $\boldsymbol{\sigma}\bigl(\widehat{t}+0\bigr) > 0$ и на интервале $I = \bigl(\widehat{t},\, \widehat{t}+\boldsymbol{\sigma}\bigl(\widehat{t}+0\bigr)\bigr)$ функции $\bigl\{\xi_i^j(\cdot)\bigr\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r}$ не образуют ТА-систему. Значит, существует такой ненулевой вектор $\widehat{c} \in \mathbb{R}^n$, что линейные комбинации $\xi^j(t;\widehat{c})$, $j = 1, \ldots, r$, имеют на интервале I в совокупности не менее n геометрически различных корней. Выберем из них произвольно n корней, обозначим их $\bigl\{\widehat{\tau}_i^j\bigr\}_{i=1,\ldots,n_j}^{j=1,\ldots,r} \subset I$, $n_1 + \cdots + n_r = n$. Пусть $\widetilde{t} = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant r}\ \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n_j} \widehat{\tau}_i^j > \widehat{t}$. На интервале $\bigl(\bigl(\widehat{t}+\widetilde{t}\bigr)/2,\, \widehat{t}+\boldsymbol{\sigma}\bigl(\widehat{t}+0\bigr)\bigr)$ функции $\bigl\{\xi_i^j(\cdot)\bigr\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r}$ по определению не образуют ТА-систему, хотя

$$\left(\frac{\widehat{t}+\widetilde{t}}{2},\, \widehat{t}+\boldsymbol{\sigma}\bigl(\widehat{t}+0\bigr)\right) \subset \left(\frac{\widehat{t}+\widetilde{t}}{2},\, \frac{\widehat{t}+\widetilde{t}}{2}+\boldsymbol{\sigma}\left(\frac{\widehat{t}+\widetilde{t}}{2}\right)\right).$$

Получаем противоречие. □

Функция $\boldsymbol{\sigma}(\cdot)$ непрерывна справа, но может быть разрывной слева. Например, для функций $\xi_1(t) = t$, $\xi_2(t) = t^2$ имеем $\boldsymbol{\sigma}(0-0) = 0$, $\boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}(0+0) = +\infty$.

§ 3. Линейная нестационарная управляемая система

В этом параграфе мы будем рассматривать линейную нестационарную задачу быстродействия в нуль с закрепленным левым концом

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \tag{3.1}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_0+T) = 0, \quad T \to \inf, \tag{3.2}$$

где $A \in C(\mathbb{R},\, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$, $B \in C(\mathbb{R},\, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^n))$, $x \in AC(\mathbb{R},\, \mathbb{R}^n)$. Множеством допустимых управлений $\mathcal{U}$ будем считать всевозможные измеримые функции $u\colon \mathbb{R} \to U = [-1, 1]^r$. Решение системы (3.1), выходящее в момент времени t_0 из точки x_0 под действием фиксированного управления $\widehat{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$, обозначим $\widehat{x}(t) = x(t; t_0, x_0, \widehat{u}(\cdot))$. Такое решение представимо в виде

$$\widehat{x}(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,s)B(s)\widehat{u}(s)\, ds, \tag{3.3}$$

где $X(t,s)$ — матрица Коши системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n). \tag{3.4}$$

Если $\widehat{u}(\cdot)$ — оптимальное управление в задаче (3.1)–(3.2), переводящее точку x_0 в нуль за минимальное время T, то справедлив принцип максимума Понтрягина [1]:

$$\max_{u\in U} \psi(t)B(t)u = \psi(t)B(t)\widehat{u}(t) \quad \text{почти всюду на } [t_0,\, t_0+T], \tag{3.5}$$

где $\psi(t)$ — некоторое нетривиальное решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\psi A(t), \quad \psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n*}). \tag{3.6}$$

Зафиксируем

$$\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t) \tag{3.7}$$

— некоторую фундаментальную систему решений сопряженной системы (3.6) и определим семейство функций

$$\xi_i^j(t) = \psi_i(t) b^j(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{3.8}$$

где $b^j(t)$ — столбец матрицы $B(t)$ с номером j. Для семейства функций (3.8) строим функцию $\boldsymbol{\sigma}(\cdot)$ (см. § 2), $\boldsymbol{\sigma}(t; A, B) = \boldsymbol{\sigma}(t)$. Если в некоторой точке t_0 выполнено неравенство $\boldsymbol{\sigma}(t_0) > 0$, то семейство функций $\{\xi_i^j(\cdot)\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r}$ образует ТА-систему на интервале $I = \big(t_0,\, t_0 + \boldsymbol{\sigma}(t_0)\big)$ и, значит, для этой точки t_0 можно определить отображение $\mathbf{\Lambda}_{t_0} = \mathbf{\Lambda}_I$ (см. §§ 1–2). Проверим, что определенные таким образом функция $\boldsymbol{\sigma}$ и отображение $\mathbf{\Lambda}_{t_0}$ не зависят от того, какая конкретно фундаментальная система решений (3.7) сопряженной системы (3.6) была выбрана.

Пусть $\psi_1'(t), \ldots, \psi_n'(t)$ и $\psi_1''(t), \ldots, \psi_n''(t)$ — две фундаментальные системы решений сопряженной системы (3.6). Обозначим $\xi_i'^j(t) = \psi_i'(t) b^j(t)$, $\xi_i''^j(t) = \psi_i''(t) b^j(t)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, r$. Располагая векторы $\psi_i'(t)$ и $\psi_i''(t)$ построчно, составим из них соответствующие фундаментальные матрицы $\Psi'(t)$ и $\Psi''(t)$ системы (3.6). Существует постоянная невырожденная матрица $C \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ такая, что $\Psi'(t) \equiv C\Psi''(t)$. Для любого ненулевого вектора-строки $c' \in \mathbb{R}^{n*}$ и любого $j = 1, \ldots, r$ имеем

$$\begin{aligned} \xi'^j(t; c') = \sum_{i=1}^n c_i' \xi_i'^j(t) = \Big(\sum_{i=1}^n c_i' \psi_i'(t)\Big) b^j(t) = c'\Psi'(t) b^j(t) = c' C \Psi''(t) b^j(t) = \\ = c''\Psi''(t) b^j(t) = \Big(\sum_{i=1}^n c_i'' \psi_i''(t)\Big) b^j(t) = \sum_{i=1}^n c_i'' \xi_i''^j(t) = \xi''^j(t; c''), \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $c'' = c'C$. Теперь независимость функции $\boldsymbol{\sigma}$ и отображения $\mathbf{\Lambda}_{t_0}$ от выбранной фундаментальной системы решений (3.7) сопряженной системы (3.6) легко доказать, пользуясь их определениями и равенством (3.9).

Утверждение 7. *Если система* (3.1) *автономна, то функция* $t \mapsto \boldsymbol{\sigma}(t)$ *является постоянной, то есть* $\boldsymbol{\sigma}(t) = \sigma$ *для любого* $t \in \mathbb{R}$, *и если при этом* $\sigma > 0$ (*в том числе* $\sigma = +\infty$), *то отображение* $\mathbf{\Lambda}_t$ *определено при любом* t *и не зависит от* t, *то есть* $\mathbf{\Lambda}_t = \mathbf{\Lambda}\colon \mathfrak{I} \to \{-1, 1\}^r$ *для любого* $t \in \mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что система (3.1) автономна. Зафиксируем произвольные моменты времени t' и t'', $a = t'' - t'$. Обозначим $\Psi(t)$ — фундаментальную матрицу сопряженной системы (3.6), составленную построчно из системы векторов $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$. Сопряженная система также автономна, поэтому матричная функция $t \mapsto \Psi(t+a)$ тоже является фундаментальной и $\Psi(t+a) = C\Psi(t)$, где $C \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ — постоянная невырожденная матрица. Для любого ненулевого вектора-строки $c' \in \mathbb{R}^{n*}$ и любого $j = 1, \ldots, r$ имеем

$$\begin{aligned} \xi^j(t+a; c') = \sum_{i=1}^n c_i' \xi_i^j(t+a) = \Big(\sum_{i=1}^n c_i' \psi_i(t+a)\Big) b^j = c'\Psi(t+a) b^j = \\ = c' C \Psi(t) b^j = c''\Psi(t) b^j = \Big(\sum_{i=1}^n c_i'' \psi_i(t)\Big) b^j = \sum_{i=1}^n c_i'' \xi_i^j(t) = \xi^j(t; c''), \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $c'' = c'C$. Теперь из (3.10) несложно вывести $\boldsymbol{\sigma}(t') = \boldsymbol{\sigma}(t'') = \sigma$ и ввиду произвольности выбора точек t' и t'' получаем, что $\boldsymbol{\sigma}(t) = \sigma$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Если $\sigma > 0$, то отображение $\mathbf{\Lambda}_t$ определено при любом t. Независимость отображения $\mathbf{\Lambda}_t$ от t легко доказать, пользуясь его определением и равенством (3.10). □

По аналогии с системами со скалярным управлением ([13]) введем следующее определение.

Определение 7. Систему (3.1) назовём *докритической* в точке $t_0 \in \mathbb{R}$, если $\boldsymbol{\sigma}(t_0; A, B) > 0$.

Множество всех точек t_0, в которых система (3.1) является докритической, обозначим $\Sigma = \Sigma(A, B) = \{t \in \mathbb{R} : \boldsymbol{\sigma}(t; A, B) > 0\}$.

Для каждого момента времени $t_0 \in \mathbb{R}$ и каждого неотрицательного θ определим *множество управляемости* $D(t_0, \theta)$ *за время* θ (для простоты знак минуса перед интегралом опущен в силу центральной симметричности множества $D(t_0, \theta)$):

$$D(t_0, \theta) = \bigcup_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \int_{t_0}^{t_0+\theta} X(t_0, s) B(s) u(s)\, ds.$$

Если $\theta = \boldsymbol{\sigma}(t_0)$, то множество $D(t_0, \boldsymbol{\sigma}(t_0))$ мы будем называть *докритическим множеством управляемости*. В дальнейшем нам также понадобится *множество управляемости* $D(t_0) = \bigcup\limits_{\theta \geqslant 0} D(t_0, \theta)$ и *расширенное множество управляемости* $\mathfrak{D} = \bigcup\limits_{t_0 \in \mathbb{R}} \big(\{t_0\} \times D(t_0)\big)$. Множество $\mathfrak{D}$ состоит из таких точек (t_0, x_0) расширенного фазового пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, для которых существует допустимое управление $u(\cdot)$ в задаче (3.1)–(3.2), переводящее точку x_0 в нуль за конечное время. Известно ([1, гл. 3, теорема 16]), что для каждого начального условия $(t_0, x_0) \in \mathfrak{D}$ существует оптимальное решение задачи (3.1)–(3.2). Таким образом, на множестве $\mathfrak{D}$ можно определить *функцию быстродействия* в нуль $\Theta\colon \mathfrak{D} \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ следующим образом:

$$\Theta(t_0, x_0) = \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \left\{T \geqslant 0 : x(t_0 + T; t_0, x_0, u(\cdot)) = 0\right\}.$$

Ниже перечислены простейшие свойства множества $D(t_0, \theta)$. Этими свойствами мы будем часто пользоваться в дальнейшем.

Утверждение 8. *Для любых* $t_0 \in \mathbb{R}$, $\theta \geqslant 0$, $\vartheta \geqslant 0$ *множество управляемости* $D(t_0, \theta)$ *обладает следующими свойствами:*

1) *множество* $D(t_0, \theta)$ *выпукло и компактно в* $\mathbb{R}^n$;

2) $0 \in D(t_0, \theta)$;

3) *если* $\vartheta \leqslant \theta$, *то* $D(t_0, \vartheta) \subseteq D(t_0, \theta)$;

4) $D(t_0, \theta) = \{x_0 \in D(t_0) : \Theta(t_0, x_0) \leqslant \theta\}$;

5) *если* $0 < \theta \leqslant \boldsymbol{\sigma}(t_0)$, *то* $\partial D(t_0, \theta) = \{x_0 \in D(t_0) : \Theta(t_0, x_0) = \theta\}$;

6) *если система* (3.1) *докритическая в точке* t_0, *то проекция функции быстродействия* $x \mapsto \Theta(t_0, x)$ *непрерывна на внутренности докритического множества управляемости* $\operatorname{Int} D(t_0, \boldsymbol{\sigma}(t_0))$.

Доказательство. Доказательство свойства 1) можно найти, например, в [1, гл. 3]. Утверждения пунктов 2)–4) непосредственно следуют из соответствующих определений.

Для доказательства утверждений, сформулированных в пунктах 5) и 6), воспользуемся результатами работы [20] и проверим, что система (3.1) *дифференциально управляема* на интервале $I = \big(t_0,\, t_0 + \boldsymbol{\sigma}(t_0)\big)$ в предположении, что эта система является докритической в точке t_0. Согласно [20, определение 1] для этого нужно установить, что для системы (3.1) выполнено условие (в обозначениях, принятых в настоящей работе):

$$0 \in \operatorname{Int} D(t, \varepsilon) \quad \text{для всех } t \in I \text{ и } \varepsilon > 0\,. \tag{3.11}$$

При любых фиксированных $t \in I$ и $\varepsilon > 0$ множество $D(t, \varepsilon)$ выпукло и компактно в $\mathbb{R}^n$. Его опорная функция $\eta \mapsto c\big(\eta, D(t, \varepsilon)\big)$ имеет вид

$$c\big(\eta, D(t, \varepsilon)\big) = \sup_{x \in D(t,\varepsilon)} \eta x = \sup_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \int_t^{t+\varepsilon} \eta X(t, s) B(s) u(s)\, ds. \tag{3.12}$$

Располагая зафиксированные ранее векторы (3.7) построчно, составим матричную функцию $t \mapsto \Psi(t)$, которая является фундаментальной матрицей сопряженной системы (3.6). Тогда матричная функция $t \mapsto \Psi^{-1}(t)$ будет фундаментальной матрицей однородной системы (3.4) и, следовательно, $X(t,s) = \Psi^{-1}(t)\Psi(s)$. Обозначив $\eta_t = \eta\Psi^{-1}(t)$ и подставив выражение для $X(t,s)$ в равенство (3.12), будем иметь

$$c\bigl(\eta, D(t,\varepsilon)\bigr) = \sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \int_t^{t+\varepsilon} \sum_{j=1}^{r} \bigl(\xi^j(s,\eta_t)u_j(s)\bigr)\,ds = \int_t^{t+\varepsilon} \sum_{j=1}^{r} \bigl|\xi^j(s,\eta_t)\bigr|\,ds. \tag{3.13}$$

Вектор η_t ненулевой при любом $\eta \in S^{n-1}$, а совокупность функций (3.8) образует ТА-систему на непустом интервале $I' = I \cap (t,\, t+\varepsilon)$, поэтому из равенства (3.13) следует $c\bigl(\eta, D(t,\varepsilon)\bigr) > 0$. В силу непрерывности опорной функции и компактности S^{n-1} имеем $\min\limits_{\eta\in S^{n-1}} c\bigl(\eta, D(t,\varepsilon)\bigr) = \epsilon > 0$, следовательно, $O^n_\epsilon(0) \subseteq D(t,\varepsilon)$ и тем самым показано включение (3.11). Тогда по [20, лемма 1] функция быстродействия $x \mapsto \Theta(t_0,x)$ непрерывна на множестве $\operatorname{Int} D(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$. Свойство 6) доказано.

Из приведенных выше рассуждений следует, что если $0 < \vartheta < \theta \leqslant \boldsymbol{\sigma}(t_0)$, то неравенство $c\bigl(\eta, D(t_0,\vartheta)\bigr) < c\bigl(\eta, D(t_0,\theta)\bigr)$ выполнено при всех $\eta \in S^{n-1}$, поэтому $D(t_0,\vartheta) \subseteq \operatorname{Int} D(t_0,\theta)$, откуда легко следует утверждение пункта 5). $\square$

Для каждого вектора $\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_1,\dots,\mathfrak{n}_r) \in \mathfrak{I}$ (множество $\mathfrak{I}$ определено ранее равенством (1.3) в § 1) и любого положительного θ определим многообразия без края $\Delta^{\mathfrak{n}}$, $\Delta^{\mathfrak{n}}(\theta)$ и многообразие с краем $\overline{\Delta}^{\mathfrak{n}}(\theta)$, вложенные в пространство $\mathbb{R}^{\mathfrak{n}_1+\ldots+\mathfrak{n}_r+1}$:

$$\Delta^{\mathfrak{n}} = \Bigl\{\bigl(\tau^1_1,\dots,\tau^1_{\mathfrak{n}_1},\dots,\tau^r_1,\dots,\tau^r_{\mathfrak{n}_r},\tau_n\bigr) \in \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_1+\ldots+\mathfrak{n}_r+1}: \\ 0 < \tau^j_1 < \ldots < \tau^j_{\mathfrak{n}_j} < \tau_n \quad \text{при каждом } j = 1,\dots,r\Bigr\},$$

$$\Delta^{\mathfrak{n}}(\theta) = \{(\overline{\tau},\tau_n) \in \Delta^{\mathfrak{n}} : \tau_n < \theta\}, \qquad \overline{\Delta}^{\mathfrak{n}}(\theta) = \{(\overline{\tau},\tau_n) \in \Delta^{\mathfrak{n}} : \tau_n \leqslant \theta\}.$$

Введем вспомогательное множество $\Upsilon = \bigcup\limits_{\mathfrak{n}\in\mathfrak{I}} \bigl(\{\mathfrak{n}\} \times \Delta^{\mathfrak{n}}\bigr)$ и определим отображение $\boldsymbol{u}\colon \mathbb{R} \times \Upsilon \times \{-1,1\}^r \to \mathcal{U}$, сопоставив каждой точке

$$(t_0,\mathfrak{n},\overline{\tau},\tau_n,\delta) = \bigl(t_0,\mathfrak{n}_1,\dots,\mathfrak{n}_r,\tau^1_1,\dots,\tau^1_{\mathfrak{n}_1},\dots,\tau^r_1,\dots,\tau^r_{\mathfrak{n}_r},\tau_n,\delta_1,\dots,\delta_r\bigr)$$

пространства $\mathbb{R} \times \Upsilon \times \{-1,1\}^r$ допустимое управление $\boldsymbol{u}(t_0,\mathfrak{n},\overline{\tau},\tau_n,\delta) \in \mathcal{U}$, определенное равенством $\boldsymbol{u}(t_0,\mathfrak{n},\overline{\tau},\tau_n,\delta) = u(\cdot) = \bigl(u_1(\cdot),\dots,u_r(\cdot)\bigr)$, где

$$u_j(t) = \begin{cases} \delta_j(-1)^{i+1}, & \text{если } t \in \bigl[t_0+\tau^j_{i-1},\, t_0+\tau^j_i\bigr) \\ & \qquad (i = 1,\dots,\mathfrak{n}_j+1;\ \tau^j_0 = 0,\ \tau^j_{\mathfrak{n}_j+1} = \tau_n); \\ 0, & \text{если } t \notin [t_0,\, t_0+\tau_n). \end{cases}$$

Теперь для каждого $t_0 \in \mathbb{R}$, каждого положительного θ, каждого вектора $\mathfrak{n} \in \mathfrak{I}$ и каждого вектора $\delta \in \{-1,1\}^r$ определим множества $M^{\mathfrak{n}}_\delta(t_0,\theta)$ и $\overline{M}^{\mathfrak{n}}_\delta(t_0,\theta)$ следующим образом:

$$M^{\mathfrak{n}}_\delta(t_0,\theta) = \bigcup_{(\overline{\tau},\tau_n)\in\Delta^{\mathfrak{n}}(\theta)} \{\boldsymbol{u}(t_0,\mathfrak{n},\overline{\tau},\tau_n,\delta)\}, \quad \overline{M}^{\mathfrak{n}}_\delta(t_0,\theta) = \bigcup_{(\overline{\tau},\tau_n)\in\overline{\Delta}^{\mathfrak{n}}(\theta)} \{\boldsymbol{u}(t_0,\mathfrak{n},\overline{\tau},\tau_n,\delta)\}.$$

Заметим, что черта в обозначениях $\overline{\Delta}$, $\overline{M}$ и в последующих аналогичных обозначениях является частью обозначений, а не операцией замыкания.

Таким образом, множество $M^{\mathfrak{n}}_\delta(t_0,\theta)$ состоит из всевозможных кусочно постоянных функций $u(\cdot)$, тождественно равных нулю вне промежутка $[t_0,\, t_0+\tau_n) \subset [t_0,\, t_0+\theta)$; каждая координатная функция $u_j(\cdot)$ на промежутке $[t_0,\, t_0+\tau_n)$ принимает значения $+1$ или -1 и имеет ровно $\mathfrak{n}_j$ переключений, а $\delta_j \in \{-1,1\}$ — значение функции $u_j(\cdot)$ в правой окрестности точки t_0. Множества $M^{\mathfrak{n}}_\delta(t_0,\theta)$ введены нами как множества гипотетических управлений, поэтому нам не важны значения функций управления в точках переключения, но для определенности мы определили их так, чтобы они были непрерывными справа.

Каждое множество $M_\delta^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)$ является связным многообразием без края, имеющим размерность $\mathfrak{n}_1+\ldots+\mathfrak{n}_r+1$. В качестве атласа этого многообразия удобно взять атлас, состоящий из единственной карты

$$(\overline{\tau},\tau_n)\mapsto \boldsymbol{u}(t_0,\mathfrak{n},\overline{\tau},\tau_n,\delta),\quad (\overline{\tau},\tau_n)\in\Delta^{\mathfrak{n}}(\theta), \tag{3.14}$$

которая определяет взаимно однозначное соответствие между пространством $M_\delta^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)$ и пространством их локальных координат $\Delta^{\mathfrak{n}}(\theta)$, а также задает топологию на пространстве $M_\delta^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)$, совпадающую, очевидно, с топологией, порожденной на этом пространстве метрикой (3.15) (см. ниже). Вектор $\overline{\tau}=\left(\tau_1^1,\ldots,\tau_{\mathfrak{n}_1}^1,\ldots,\tau_1^r,\ldots,\tau_{\mathfrak{n}_r}^r\right)$ и величина τ_n, соответствующие функции $u(\cdot)=\boldsymbol{u}(t_0,\mathfrak{n},\overline{\tau},\tau_n,\delta)$, будем называть соответственно *вектором переключений* и *временем действия* для управления $u(\cdot)$. Заметим, что согласно нашим определениям все многообразия $M_\delta^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)$ содержат функции только с положительным временем действия, поэтому для однообразия обозначим $M_\varnothing^\varnothing=\left\{\mathbf{0}(\cdot)\right\}$ — множество, состоящее из единственного всюду равного нулю управления, которое является оптимальным для вырожденной задачи (3.1)–(3.2) при $x_0=0$. В дальнейшем будем считать, что время действия управления $\mathbf{0}(\cdot)$ равно нулю, а множество $M_\varnothing^\varnothing$ можно считать многообразием нулевой размерности.

Почти все вышесказанное про многообразие $M_\delta^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)$ относится также к многообразию $\overline{M}_\delta^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)$ за исключением того, что оно является связным многообразием с краем, а в качестве его атласа можно взять атлас, состоящий из той же карты (3.14), но определенной на более широком множестве $\overline{\Delta}^{\mathfrak{n}}(\theta)$.

Край многообразия $\overline{M}_\delta^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)$ обозначим $\partial\overline{M}_\delta^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)$. Множество $\partial\overline{M}_\delta^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)$ является связным многообразием без края, имеющим размерность $\mathfrak{n}_1+\ldots+\mathfrak{n}_r$. Единственная карта

$$\overline{\tau}\mapsto \boldsymbol{u}(t_0,\mathfrak{n},\overline{\tau},\theta,\delta),\qquad \overline{\tau}\in\partial\overline{\Delta}^{\mathfrak{n}}(\theta)=\bigcup_{(\tau,\theta)\in\Delta^{\mathfrak{n}}}\{\tau\}$$

составляет атлас этого многообразия.

Для любой точки $t_0\in\Sigma(A,B)$ и любого неотрицательного θ определим множество $\overline{M}(t_0,\theta)$ следующим образом: $\overline{M}(t_0,0)=M_\varnothing^\varnothing$, а для положительных θ множество $\overline{M}(t_0,\theta)$ определяется равенством

$$\overline{M}(t_0,\theta)=M_\varnothing^\varnothing\bigcup\left(\bigcup_{\mathfrak{n}\in\mathfrak{I}}\ \bigcup_{\delta\in\boldsymbol{\Lambda}_{t_0}(\mathfrak{n})}\overline{M}_\delta^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)\right).$$

Определим также множество $M(t_0)=\bigcup\limits_{\theta\geqslant0}\overline{M}(t_0,\theta)$, которое мы превратим в метрическое пространство, введя на нем метрику

$$\rho\bigl(u^1,u^2\bigr)=\max_{1\leqslant j\leqslant r}\int_{t_0}^{+\infty}\bigl|u_j^1(s)-u_j^2(s)\bigr|\,ds \tag{3.15}$$

для произвольных элементов u^1, $u^2\in M(t_0)$. Все функции, содержащиеся в множестве $M(t_0)$, являются финитными, поэтому интеграл в равенстве (3.15) всегда существует и конечен, а бесконечный верхний предел интегрирования выбран здесь только для упрощения обозначений.

В лемме 7 сформулировано основное свойство множества $\overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$. Утверждение этой леммы будет существенно использоваться в § 4 при решении задачи (3.1)–(3.2).

Лемма 7. *Пусть система* (3.1) *докритическая в точке* t_0. *Тогда*

1) *любое управление* $u(\cdot)\in\overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$ *удовлетворяет принципу максимума* (3.5) *на промежутке* $[t_0,\,t_0+\theta]$, *где* θ — *время действия управления* $u(\cdot)$;

2) *для любого допустимого управления* $u(\cdot)\in\mathcal{U}$, *удовлетворяющего принципу максимума* (3.5) *на некотором невырожденном промежутке* $[t_0,\,t_0+\theta]\subseteq[t_0,\,t_0+\boldsymbol{\sigma}(t_0)]$, *существует такое управление* $u'(\cdot)\in\partial\overline{M}_\delta^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)\subseteq\overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$, *что* $u(t)=u'(t)$ *при почти всех* $t\in[t_0,\,t_0+\theta]$.

Доказательство. Пусть $\widehat{u}(\cdot)\in\overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$ — произвольное управление, имеющее время действия θ. Докажем, что оно удовлетворяет принципу максимума (3.5) на отрезке $[t_0,\,t_0+\theta]$. Для управления $\mathbf{0}(\cdot)\in M^{\varnothing}_{\varnothing}$ это очевидно, пусть $\widehat{u}(\cdot)\in\overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))\setminus M^{\varnothing}_{\varnothing}$. Существуют такие векторы $\mathfrak{n}\in\mathfrak{I}$ и $\delta\in\boldsymbol{\Lambda}_{t_0}(\mathfrak{n})$, что $\widehat{u}(\cdot)\in\overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$.

Обозначим $\tau=(\tau^1_1,\ldots,\tau^1_{\mathfrak{n}_1},\ldots,\tau^r_1,\ldots,\tau^r_{\mathfrak{n}_r})$ — вектор переключений функции $\widehat{u}(\cdot)$. По построению множества $\overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$ для θ имеет место неравенство $0<\theta\leqslant\boldsymbol{\sigma}(t_0)$ (напоминаем, что мы предполагаем $\widehat{u}\neq\mathbf{0}$), поэтому совокупность функций $\{\xi^j_i(\cdot)\}^{j=1,\ldots,r}_{i=1,\ldots,n}$, определенных равенством (3.8), образует ТА-систему на непустом интервале $I=(t_0,\,t_0+\theta)$. Далее, $\delta\in\boldsymbol{\Lambda}_{t_0}(\mathfrak{n})$ и система точек $\tau'=\{t_0+\tau^j_i\}^{j=1,\ldots,r}_{i=1,\ldots,\mathfrak{n}_j}$ является допустимой на интервале I, следовательно, по теореме 2 существует такой ненулевой вектор $\widehat{c}\in\mathbb{R}^n$, что $\boldsymbol{\delta}(\widehat{c})=\delta$ и каждая линейная комбинация $\xi^j(t;\widehat{c})$, $j=1,\ldots,r$, имеет узлы в точках $t_0+\tau^j_1,\ldots,t_0+\tau^j_{\mathfrak{n}_j}$ и не имеет других узлов на интервале I.

Положим
$$\widehat{\psi}(t)=\widehat{c}_1\psi_1(t)+\ldots+\widehat{c}_n\psi_n(t),\tag{3.16}$$
где $\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t)$ — фиксированная ранее система векторов (3.7). Так как вектор $\widehat{c}$ ненулевой, то решение $\widehat{\psi}(t)$ сопряженной системы (3.6) нетривиально. Подставляя (3.16) в принцип максимума (3.5) и учитывая обозначения (3.8), получаем, что равенство

$$\begin{aligned}\max_{u\in U}\widehat{\psi}(t)B(t)u&=\max_{|u_1|\leqslant1}\Big(\sum_{i=1}^n\widehat{c}_i\xi^1_i(t)\Big)u_1+\ldots+\max_{|u_r|\leqslant1}\Big(\sum_{i=1}^n\widehat{c}_i\xi^r_i(t)\Big)u_r=\\&=\max_{|u_1|\leqslant1}\xi^1(t;\widehat{c})u_1+\ldots+\max_{|u_r|\leqslant1}\xi^r(t;\widehat{c})u_r=\xi^1(t;\widehat{c})\widehat{u}_1(t)+\ldots+\xi^r(t;\widehat{c})\widehat{u}_r(t)\end{aligned}\tag{3.17}$$

имеет место при всех $t\in(t_0,\,t_0+\theta)$, кроме, может быть, конечного числа точек $t_0+\tau^j_i$. Первое утверждение леммы доказано.

Для доказательства второго утверждения предположим, что допустимое управление $\widehat{u}$ удовлетворяет принципу максимума (3.5) на некотором промежутке $[t_0,\,t_0+\theta]\subseteq[t_0,\,t_0+\boldsymbol{\sigma}(t_0)]$ для некоторого нетривиального решения $\widehat{\psi}(t)$ сопряженной системы (3.6). Тогда существует такой ненулевой вектор $\widehat{c}\in\mathbb{R}^n$, что для функции $\widehat{\psi}(t)$ имеет место разложение (3.16). Подставляя (3.16) в принцип максимума (3.5) и учитывая обозначения (3.8), получаем, что равенство (3.17) имеет место при почти всех $t\in[t_0,\,t_0+\theta]$.

По условию леммы $\theta\leqslant\boldsymbol{\sigma}(t_0)$, поэтому семейство функций $\{\xi^j_i\}^{j=1,\ldots,r}_{i=1,\ldots,n}$, определенных равенством (3.8), образует ТА-систему на непустом интервале $(t_0,\,t_0+\theta)$, следовательно, можно обозначить
$$\mathfrak{n}=\mathbf{i}^-(\widehat{c})\in\mathfrak{I},\quad\delta=\boldsymbol{\delta}(\widehat{c})\in\boldsymbol{\Lambda}_{t_0}(\mathfrak{n}),\quad t_0<t_0+\tau^j_1<\ldots<t_0+\tau^j_{\mathfrak{n}_j}<t_0+\theta$$
— узлы линейной комбинации $\xi^j(t;\widehat{c})$ $(j=1,\ldots,r)$ на интервале $(t_0,\,t_0+\theta)$. Положим
$$u'(\cdot)=\boldsymbol{u}\big(t_0,\mathfrak{n},\tau^1_1,\ldots,\tau^1_{\mathfrak{n}_1},\ldots,\tau^j_1,\ldots,\tau^j_{\mathfrak{n}_j},\theta,\delta\big)\in\partial\overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)\subseteq\overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0)).$$
Из (3.17) следует, что $\widehat{u}(t)=u'(t)$ при почти всех $t\in[t_0,\,t_0+\theta]$. □

Лемма 8. *Если система* (3.1) *докритическая в точке* t_0, *то для любого* $0\leqslant\theta\leqslant\boldsymbol{\sigma}(t_0)$ *множество* $\overline{M}(t_0,\theta)$ *компактно.*

Доказательство. При $\theta=0$ утверждение леммы очевидно, поскольку в этом случае множество $\overline{M}(t_0,0)=M^{\varnothing}_{\varnothing}$ состоит из единственного элемента $\mathbf{0}(\cdot)$ и, следовательно, является компактным. Пусть $\theta>0$.

Возьмем произвольную последовательность кусочно постоянных функций $\{u^k(\cdot)\}^{\infty}_{k=1}\subset\overline{M}(t_0,\theta)$. Найдутся такие векторы $\mathfrak{n}\in\mathfrak{I}$ и $\delta\in\boldsymbol{\Lambda}_{t_0}(\mathfrak{n})$, что множество $\overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)$ содержит бесконечное число членов последовательности $\{u^k(\cdot)\}^{\infty}_{k=1}$. Выделим эту подпоследовательность и снова обозначим ее $\{u^k(\cdot)\}^{\infty}_{k=1}\subset\overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)$. Обозначим
$$\overline{\tau}(k)=\big(\tau^1_1(k),\ldots,\tau^1_{\mathfrak{n}_1}(k),\ldots,\tau^r_1(k),\ldots,\tau^r_{\mathfrak{n}_r}(k)\big)$$

и $\tau_n(k)$ — вектор переключений и время действия соответственно функции $u^k(\cdot)$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. Координаты вектора $\overline{\tau}(k)$ и время действий $\tau_n(k)$ удовлетворяют условию:

$$0 < \tau_1^j(k) < \ldots < \tau_{\mathfrak{n}_j}^j(k) < \tau_n(k) \leqslant \theta, \quad j = 1, \ldots, r, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.18}$$

Бесконечное множество точек $\{y^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^{\mathfrak{n}_1+\ldots+\mathfrak{n}_r+1}$, где

$$y^k = \big(\tau_1^1(k), \ldots, \tau_{\mathfrak{n}_1}^1(k), \ldots, \tau_1^r(k), \ldots, \tau_{\mathfrak{n}_r}^r(k), \tau_n(k)\big), \quad k \in \mathbb{N},$$

принадлежит компакту $[0,\theta]^{\mathfrak{n}_1+\ldots+\mathfrak{n}_r+1}$ и поэтому имеет предельную точку

$$\widehat{y} = \big(\widehat{\tau}_1^1, \ldots, \widehat{\tau}_{\mathfrak{n}_1}^1, \ldots, \widehat{\tau}_1^r, \ldots, \widehat{\tau}_{\mathfrak{n}_r}^r, \widehat{\tau}_n\big) \in [0,\theta]^{\mathfrak{n}_1+\ldots+\mathfrak{n}_r+1}.$$

Из последовательности $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ выделим подпоследовательность, сходящуюся к точке $\widehat{y}$, и снова обозначим ее $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty} y^k = \widehat{y}$. Имеем

$$\lim_{k\to\infty} \tau_i^j(k) = \widehat{\tau}_i^j, \quad i = 1, \ldots, \mathfrak{n}_j, \quad j = 1, \ldots, r; \qquad \lim_{k\to\infty} \tau_n(k) = \widehat{\tau}_n.$$

Переходя в (3.18) к пределу при $k \to \infty$, будем иметь

$$0 \leqslant \widehat{\tau}_1^j \leqslant \ldots \leqslant \widehat{\tau}_{\mathfrak{n}_j}^j \leqslant \widehat{\tau}_n \leqslant \theta, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{3.19}$$

Если $\widehat{\tau}_n = 0$, то, очевидно, $u^k \to \mathbf{0} \in \overline{M}(t_0,\theta)$ в метрике (3.15) при $k \to \infty$. Пусть $\widehat{\tau}_n > 0$. Построим функцию $\widehat{u}(\cdot) = \big(\widehat{u}_1(\cdot), \ldots, \widehat{u}_r(\cdot)\big) \in \mathcal{U}$, где каждая функция $\widehat{u}_j \colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$, $j = 1, \ldots, r$, строится следующим образом:

1) $\widehat{u}_j(t) = 0$, если $t \notin [t_0,\, t_0 + \widehat{\tau}_n]$;

2) $\widehat{u}_j(t) = \delta_j(-1)^{i+1}$, если $t \in \big(t_0 + \widehat{\tau}_{i-1}^j,\, t_0 + \widehat{\tau}_i^j\big)$ $(i = 1, \ldots, \mathfrak{n}_j + 1;\ \widehat{\tau}_0^j = 0,\ \widehat{\tau}_{\mathfrak{n}_j+1}^j = \widehat{\tau}_n)$;

3) $\widehat{u}_j(t) = \widehat{u}_j(t+0)$, если $t \in \{t_0,\, t_0 + \widehat{\tau}_1^j, \ldots, t_0 + \widehat{\tau}_{\mathfrak{n}_j}^j,\, t_0 + \widehat{\tau}_n\}$.

Поясним подробнее, как строятся функции $\widehat{u}_j(\cdot)$ на непустом отрезке $[t_0,\, t_0 + \widehat{\tau}_n]$. Согласно (3.19) точки $t_0 + \widehat{\tau}_1^j, \ldots, t_0 + \widehat{\tau}_{\mathfrak{n}_j}^j$ разбивают этот отрезок на промежутки $\big[t_0,\, t_0 + \widehat{\tau}_1^j\big]$, $\big[t_0 + \widehat{\tau}_1^j,\, t_0 + \widehat{\tau}_2^j\big]$, $\ldots$, $\big[t_0 + \widehat{\tau}_{\mathfrak{n}_j}^j,\, t_0 + \widehat{\tau}_n\big]$, среди которых могут быть вырожденные. На каждом невырожденном интервале $\big(t_0 + \widehat{\tau}_{i-1}^j,\, t_0 + \widehat{\tau}_i^j\big)$ функция $\widehat{u}_j(\cdot)$ определяется согласно 2). После этого функция $\widehat{u}_j(\cdot)$ становится определенной на всем интервале $(t_0,\, t_0 + \widehat{\tau}_n)$ за исключением, может быть, конечного числа точек. В этих точках, включая концы интервала $(t_0,\, t_0 + \widehat{\tau}_n)$, функция доопределяется по непрерывности справа согласно 3). Таким образом, все точки переключений каждой функции $\widehat{u}_j(\cdot)$ $(j = 1, \ldots, r)$ на интервале $(t_0,\, t_0 + \widehat{\tau}_n)$ содержатся среди множества точек $\{t_0 + \widehat{\tau}_1^j, \ldots, t_0 + \widehat{\tau}_{\mathfrak{n}_j}^j\}$, но не каждая точка $t_0 + \widehat{\tau}_i^j$, вообще говоря, является точкой переключения функции $\widehat{u}_j(\cdot)$. Например, в случае если $0 < \widehat{\tau}_1^1 = \widehat{\tau}_2^1 < \widehat{\tau}_3^1 < \ldots$, точки $t_0 + \widehat{\tau}_1^1$ и $t_0 + \widehat{\tau}_2^1$ не дают переключения для функции $\widehat{u}_1(\cdot)$ (в этом примере $\widehat{u}_1 = \delta_1$ при $t \in (t_0,\, t_0 + \widehat{\tau}_3^1)$).

Обозначим $\widehat{\mathfrak{n}}_j$ $(j = 1, \ldots, r)$ — количество переключений функции $\widehat{u}_j(\cdot)$ на интервале $(t_0,\, t_0 + \widehat{\tau}_n)$. Из вышесказанного следует, что $\widehat{\mathfrak{n}}_j \leqslant \mathfrak{n}_j$ при каждом $j = 1, \ldots, r$, поэтому $\widehat{\mathfrak{n}} = (\widehat{\mathfrak{n}}_1, \ldots, \widehat{\mathfrak{n}}_r) \in \mathfrak{I}$. Обозначим, далее, $\widehat{\delta}_j = \widehat{u}_j(t_0 + 0)$ $(j = 1, \ldots, r)$ — значение кусочно постоянной функции $\widehat{u}_j(\cdot)$ в правой окрестности точки t_0. При тех $j \in \{1, \ldots, r\}$, при которых $\mathfrak{n}_j = \widehat{\mathfrak{n}}_j$, по постоению функции $\widehat{u}_j(\cdot)$ имеет место $\widehat{\delta}_j = \delta_j$. Поэтому согласно следствию 3 $\widehat{\delta} \in \mathbf{\Lambda}_{t_0}(\widehat{\mathfrak{n}})$ и, следовательно, $\widehat{u}(\cdot) \in \overline{M}{}^{\widehat{\mathfrak{n}}}_{\widehat{\delta}}(t_0,\theta) \subseteq \overline{M}(t_0,\theta)$.

По построению функции $\widehat{u}(\cdot)$, очевидно, $u^k \to \widehat{u}$ в метрике (3.15) при $k \to \infty$. Компактность множества $\overline{M}(t_0,\theta)$ доказана. □

§ 4. Структура множества докритичности и синтез оптимального управления

Для каждой точки $t_0 \in \mathbb{R}$ определим отображение $F_{t_0}\colon M(t_0) \to \mathbb{R}^n$ с помощью равенства

$$F_{t_0}(u) = -\int_{t_0}^{+\infty} X(t_0,s)B(s)u(s)\,ds. \tag{4.1}$$

Отображение F_{t_0} обладает следующим свойством: любое фиксированное управление $\widehat{u} \in M(t_0)$ переводит точку $x_0 = F_{t_0}(\widehat{u})$ в нуль за время θ, где θ — время действия управления $\widehat{u}(\cdot)$ (бесконечный верхний предел интегрирования в равенстве (4.1) использован исключительно для упрощения обозначений, поскольку все функции, входящие в множество $M(t_0)$, являются финитными).

Лемма 9. *Пусть линейная управляемая система* (3.1) *докритическая в точке* t_0. *Тогда отображение*

$$F_{t_0}\colon \overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0)) \to D(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0)) \tag{4.2}$$

является гомеоморфизмом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что выполнены условия леммы. Произвольное управление $u(\cdot) \in \overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$ является допустимым и переводит точку $x_0 = F_{t_0}\bigl(u(\cdot)\bigr)$ в нуль за время $\theta \leqslant \boldsymbol{\sigma}(t_0)$, где θ — время действия управления $u(\cdot)$. Тогда $\Theta(t_0,x_0) \leqslant \theta \leqslant \sigma(t_0)$ и согласно свойству 4) утверждения 8 имеет место включение $x_0 \in D(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$, поэтому $F_{t_0}\bigl(\overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))\bigr) \subseteq D(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$.

Пусть теперь $x_0 \in D(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$. Если $x_0 = 0$, то $F_{t_0}\bigl(\mathbf{0}(\cdot)\bigr) = 0 = x_0$, где $\mathbf{0}(\cdot) \in M_{\varnothing}^{\varnothing} \subseteq \overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$. Предположим, что $x_0 \neq 0$. Тогда по свойству 4) утверждения 8 существует оптимальное управление $\widehat{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$, переводящее точку x_0 в нуль за время $0 < \Theta(t_0,x_0) \leqslant \boldsymbol{\sigma}(t_0)$. Оптимальное управление $\widehat{u}(\cdot)$ удовлетворяет принципу максимума (3.5) на невырожденном промежутке $[t_0,\, t_0 + \Theta(t_0,x_0)] \subseteq [t_0,\, t_0 + \boldsymbol{\sigma}(t_0)]$, поэтому по лемме 7 существует такое $\widetilde{u}(\cdot) \in \overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$, что $\widehat{u}(t) = \widetilde{u}(t)$ при почти всех $t \in [t_0,\, t_0 + \Theta(t_0,x_0)]$. Тогда $F_{t_0}(\widetilde{u}) = F_{t_0}(\widehat{u}) = x_0$, а так как $\widetilde{u}(\cdot) \in \overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$, то $D(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0)) \subseteq F_{t_0}\bigl(\overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))\bigr)$, что вместе с доказанным ранее включением $F_{t_0}\bigl(\overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))\bigr) \subseteq D(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$ дает $F_{t_0}\bigl(\overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))\bigr) = D(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$. Таким образом, отображение (4.2) является сюръекцией.

Теперь покажем, что отображение (4.2) является инъекцией. Это можно доказать, используя те же идеи, что лежат в основе доказательства аналогичного утверждения для управляемых систем со скалярным управлением ([13, свойство 1]), но мы поступим проще и воспользуемся теоремой 12 из [1, гл. 3]. Хотя эта теорема сформулирована для линейной управляемой системы (3.1)–(3.2) с постоянными матрицами A и B, она остается справедливой для управляемой системы (3.1)–(3.2) с непрерывными матричными функциями $t \mapsto A(t)$ и $t \mapsto B(t)$ при некоторых обобщениях условий теоремы согласно комментариям на [1, с. 205–210].

Итак, проверяем условия теоремы 12 из [1, гл. 3] для интервала $I = \bigl(t_0,\, t_0 + \boldsymbol{\sigma}(t_0)\bigr)$. Первое условие теоремы требует, чтобы начало координат пространства $\mathbb{R}^r$ являлось внутренней точкой многогранника $U = [-1,1]^r$, что в нашем случае, очевидно, имеет место. Второе условие — общность положения в любой точке интервала I — используется в доказательстве теоремы 12 из [1, гл. 3] лишь в связи со ссылкой на теорему 15 из [1, гл. 3] (обобщение теоремы 9 из [1, гл. 3] на нестационарные линейные управляемые системы). Поэтому вместо проверки условия общности положения в любой точке интервала I проверим непосредственно выполнение утверждение теоремы 15 из [1, гл. 3]. Нам нужно доказать, что при любом $0 < \theta \leqslant \boldsymbol{\sigma}(t_0)$ каждое нетривиальное решение сопряженной системы (3.6) определяет управляющую функцию на промежутке $[t_0,\, t_0 + \theta]$ однозначно за исключением, может быть, конечного числа точек. Поскольку система (3.1) по условию является докритической в точке t_0, то этот факт также легко следует из рассуждений, использованных при доказательстве леммы 7.

Предположим теперь, что $x_0 = F_{t_0}(u') = F_{t_0}(u'')$ для некоторых управляющих функций $u'(\cdot),\, u''(\cdot) \in \overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$. Если $u' = \mathbf{0}$ или $u'' = \mathbf{0}$, то, очевидно, $u' = u'' = \mathbf{0}$. Будем считать далее, что $u' \neq \mathbf{0}$ и $u'' \neq \mathbf{0}$. По лемме 7 управления $u'(\cdot)$ и $u''(\cdot)$ удовлетворяют принципу максимума (3.5) на промежутках $[t_0,\, t_0+\theta']$ и $[t_0,\, t_0+\theta'']$ соответственно, где $0<\theta'\leqslant\boldsymbol{\sigma}(t_0)$, $0<\theta''\leqslant\boldsymbol{\sigma}(t_0)$ — времена действий этих управлений. Таким образом, управления $u'(\cdot)$ и $u''(\cdot)$ являются экстремальными на промежутках $[t_0,\, t_0+\theta']$ и $[t_0,\, t_0+\theta'']$ и переводят точку x_0 в нуль за времена θ' и θ'' соответственно. По теореме 12 из [1, гл. 3] эти управления совпадают, то есть $\theta'=\theta''=\theta$ и $u'(t)=u''(t)$ при $t\in[t_0,\, t_0+\theta]$. Таким образом, доказана инъективность отображения (4.2), что вместе с доказанной выше сюръективностью означает взаимную однозначность отображения (4.2).

Непрерывность отображения (4.2) в области $\overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$ очевидна. Если значение функции $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$ конечно, то согласно лемме 8 множество $\overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$ компактно, поэтому отображение (4.2) является гомеоморфизмом. Если $\boldsymbol{\sigma}(t_0)=+\infty$, то из свойств 5)–6) утверждения 8 следует, что множество $D(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))=D(t_0)$ открыто в $\mathbb{R}^n$ и функция быстродействия $x\mapsto\Theta(t_0,x)$ непрерывна в любой точке $x\in D(t_0)$. Поэтому для любой точки $x_0\in D(t_0)$ образ компакта $\overline{M}(t_0,\Theta(t_0,x_0)+1)$ при отображении F_{t_0} полностью накрывает точку x_0 вместе с некоторой ее окрестностью $O^n_\varepsilon(x_0)$ в $\mathbb{R}^n$. Этого свойства вместе с непрерывностью и взаимной однозначностью достаточно, чтобы отображение (4.2) было гомеоморфизмом. □

Обозначим

$$N^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)=F_{t_0}\big(M^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)\big),\quad \overline{N}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)=F_{t_0}\big(\overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)\big), \tag{4.3}$$

$$\partial\overline{N}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)=F_{t_0}\big(\partial\overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)\big),\quad N^{\varnothing}_{\varnothing}=F_{t_0}(M^{\varnothing}_{\varnothing})=0 \tag{4.4}$$

$$\big(t_0\in\Sigma,\quad 0<\theta\leqslant\boldsymbol{\sigma}(t_0),\quad \mathfrak{n}\in\mathfrak{I},\quad \delta\in\boldsymbol{\Lambda}_{t_0}(\mathfrak{n})\big).$$

Лемма 10. *Пусть система* (3.1) *докритическая в точке* t_0. *Тогда при любых векторах* $\mathfrak{n}\in\mathfrak{I}$, $\delta\in\boldsymbol{\Lambda}_{t_0}(\mathfrak{n})$ *и любом* $0<\theta\leqslant\boldsymbol{\sigma}(t_0)$

1) *отображение* $F_{t_0}\colon M^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)\to N^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)$ *непрерывно дифференцируемо и в каждой точке области своего определения имеет максимально возможный ранг* $\mathfrak{n}_1+\ldots+\mathfrak{n}_r+1$;

2) *отображение* $F_{t_0}\colon \partial\overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)\to\partial\overline{N}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)$ *непрерывно дифференцируемо и в каждой точке области своего определения имеет максимально возможный ранг* $\mathfrak{n}_1+\ldots+\mathfrak{n}_r$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем отображение F_{t_0} как функцию, зависящую от локальных координат

$$(\overline{\tau},\tau_n)=\big(\tau^1_1,\ldots,\tau^1_{\mathfrak{n}_1},\ldots,\tau^r_1,\ldots,\tau^r_{\mathfrak{n}_r},\tau_n\big)\in\Delta^{\mathfrak{n}}(\theta)$$

произвольного элемента $u(\cdot)=\boldsymbol{u}(t_0,\mathfrak{n},\overline{\tau},\tau_n,\delta)\in M^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)$. Имеем

$$F_{t_0}(\overline{\tau},\tau_n)=F_{t_0}\big(u(\cdot)\big)=-\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{\mathfrak{n}_j+1}\delta_j(-1)^{i+1}\int_{t_0+\tau^j_{i-1}}^{t_0+\tau^j_i}X(t_0,s)b^j(s)\,ds, \tag{4.5}$$

где $\tau^j_0=0$, $\tau^j_{\mathfrak{n}_j+1}=\tau_n$, а b^j — столбец матрицы B с номером j. Дифференцируя (4.5) по каждой переменной τ^j_i и переменной τ_n, получим

$$h^j_i(\overline{\tau},\tau_n)=\frac{\partial F}{\partial\tau^j_i}(\overline{\tau},\tau_n)=2\delta_j(-1)^iX\big(t_0,\,t_0+\tau^j_i\big)b^j\big(t_0+\tau^j_i\big),\quad i=1,\ldots,\mathfrak{n}_j,\ j=1,\ldots,r; \tag{4.6}$$

$$h_n(\overline{\tau},\tau_n)=\frac{\partial F}{\partial\tau_n}(\overline{\tau},\tau_n)=-\sum_{j=1}^{r}\delta_j(-1)^{\mathfrak{n}_j}X(t_0,\,t_0+\tau_n)b^j(t_0+\tau_n). \tag{4.7}$$

Покажем, что система (4.6)–(4.7) линейно независима в любой точке $(\widehat{\overline{\tau}},\widehat{\tau}_n)$ множества $\Delta^{\mathfrak{n}}(\theta)$. Пусть $c^1_1,\ldots,c^1_{\mathfrak{n}_1},\ldots,c^r_1,\ldots,c^r_{\mathfrak{n}_r},c_n$ таковы, что $\sum\limits_{j=1}^{r}\sum\limits_{i=1}^{\mathfrak{n}_j}c^j_ih^j_i(\widehat{\overline{\tau}},\widehat{\tau}_n)+c_nh_n(\widehat{\overline{\tau}},\widehat{\tau}_n)=0$ или

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{\mathfrak{n}_j}2c^j_i\delta_j(-1)^iX\big(t_0,\,t_0+\widehat{\tau}^j_i\big)b^j\big(t_0+\widehat{\tau}^j_i\big)+c_n\sum_{j=1}^{r}\delta_j(-1)^{\mathfrak{n}_j+1}X(t_0,\,t_0+\widehat{\tau}_n)b^j(t_0+\widehat{\tau}_n)=0. \tag{4.8}$$

Ранее (см. стр. 119) мы показали, что $X(t_0,s)=\Psi^{-1}(t_0)\Psi(s)$, где матрица $\Psi(s)$ построчно составлена из системы векторов (3.7). Умножая (4.8) на $\Psi(t_0)$ слева, будем иметь

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{\mathfrak{n}_j}2c_i^j\delta_j(-1)^i\Psi\big(t_0+\widehat{\tau}_i^j\big)b^j\big(t_0+\widehat{\tau}_i^j\big)+c_n\sum_{j=1}^{r}\delta_j(-1)^{\mathfrak{n}_j+1}\Psi(t_0+\widehat{\tau}_n)b^j(t_0+\widehat{\tau}_n)=0. \tag{4.9}$$

Так как $0<\widehat{\tau}_n<\theta\leqslant\boldsymbol{\sigma}(t_0)$, то совокупность функций $\big\{\xi_i^j(\cdot)\big\}_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,r}$, определенных равенством (3.8), образует ТА-систему на непустом интервале $I=(t_0,\,t_0+\theta)$. Далее, по условию леммы $\delta\in\boldsymbol{\Lambda}_{t_0}(\mathfrak{n})=\boldsymbol{\Lambda}_{t_0}^{+}(\mathfrak{n})$ и система точек $\widehat{\tau}'=\big\{t_0+\widehat{\tau}_i^j\big\}_{i=1,\dots,\mathfrak{n}_j}^{j=1,\dots,r}$ является допустимой на интервале I, поэтому по теореме 4 существует такой ненулевой вектор $\widehat{c}\in\mathbb{R}^n$, что $\boldsymbol{\delta}(\widehat{c})=\delta$ и при каждом $j=1,\dots,r$ линейная комбинация $\xi^j(t;\widehat{c})$ имеет узлы в точках $t_0+\widehat{\tau}_1^j,\dots,t_0+\widehat{\tau}_{\mathfrak{n}_j}^j$ и не имеет других корней (ни узлов, ни пучностей) на интервале I, в частности $\xi^j(t_0+\widehat{\tau}_n;\widehat{c})\neq 0$ при всех $j=1,\dots,r$. Умножая (4.9) на вектор-строку $\widehat{c}^{\mathrm{T}}$ слева, будем иметь

$$c_n\sum_{j=1}^{r}\delta_j(-1)^{\mathfrak{n}_j+1}\xi^j(t_0+\widehat{\tau}_n;\widehat{c})=0. \tag{4.10}$$

По построению вектора $\widehat{c}$ каждая линейная комбинация $\xi^j(t;\widehat{c})$ имеет на $(t_0,\,t_0+\theta)$ ровно $\mathfrak{n}_j$ корней и все эти корни — узлы, при этом $\boldsymbol{\delta}_j(\widehat{c})=\delta_j$ и $\xi^j(t_0+\widehat{\tau}_n;\widehat{c})\neq 0$, поэтому имеют место равенство $\operatorname{sign}\xi^j(t_0+\widehat{\tau}_n;\widehat{c})=\delta_j(-1)^{\mathfrak{n}_j}$ и при каждом $j=1,\dots,r$ равенство

$$\xi^j(t_0+\widehat{\tau}_n;\widehat{c})=\big|\xi^j(t_0+\widehat{\tau}_n;\widehat{c})\big|\operatorname{sign}\xi^j(t_0+\widehat{\tau}_n;\widehat{c})=\delta_j(-1)^{\mathfrak{n}_j}\big|\xi^j(t_0+\widehat{\tau}_n;\widehat{c})\big|. \tag{4.11}$$

Подставляя (4.11) в (4.10), получим $c_n\sum\limits_{j=1}^{r}\big|\xi^j(t_0+\widehat{\tau}_n;\widehat{c})\big|=0$, откуда $c_n=0$, поскольку все $\xi^j(t_0+\widehat{\tau}_n;\widehat{c})\neq 0$ $(j=1,\dots,r)$, как уже отмечалось выше. Тогда (4.9) преобразуется к виду

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{\mathfrak{n}_j}2c_i^j\delta_j(-1)^i\Psi\big(t_0+\widehat{\tau}_i^j\big)b^j\big(t_0+\widehat{\tau}_i^j\big)=0. \tag{4.12}$$

Для произвольного фиксированного $c_{\widetilde{i}}^{\widetilde{j}}$ по утверждению 3 существует такой ненулевой вектор $\widetilde{c}\in\mathbb{R}^n$, что $\xi^{\widetilde{j}}\big(t_0+\widehat{\tau}_{\widetilde{i}}^{\widetilde{j}};\widetilde{c}\big)\neq 0$ и $\xi^j\big(t_0+\widehat{\tau}_i^j;\widetilde{c}\big)=0$ при остальных значениях $i=1,\dots,\mathfrak{n}_j$ и $j=1,\dots,r$. Умножая (4.12) на вектор-строку $\widetilde{c}^{\mathrm{T}}$ слева, получим $c_{\widetilde{i}}^{\widetilde{j}}\xi^{\widetilde{j}}\big(t_0+\widehat{\tau}_{\widetilde{i}}^{\widetilde{j}};\widetilde{c}\big)=0$, откуда $c_{\widetilde{i}}^{\widetilde{j}}=0$. Ввиду произвольности $c_{\widetilde{i}}^{\widetilde{j}}$ имеем $c_i^j=0$ при всех $i=1,\dots,\mathfrak{n}_j$ и $j=1,\dots,r$.

Мы доказали, что $c_1^1=\ldots=c_{\mathfrak{n}_1}^1=\ldots=c_1^r=\ldots=c_{\mathfrak{n}_r}^r=c_n=0$, значит система векторов (4.6)–(4.7) линейно независима в точке $(\widehat{\overline{\tau}},\widehat{\tau}_n)\in\Delta^{\mathfrak{n}}(\theta)$ и, следовательно, ввиду произвольности точки $(\widehat{\overline{\tau}},\widehat{\tau}_n)$, в любой точке $(\overline{\tau},\tau_n)\in\Delta^{\mathfrak{n}}(\theta)$. Поэтому производное отображение

$$\begin{aligned}(\overline{\tau},\tau_n)\mapsto F'(\overline{\tau},\tau_n)&=\\&=\big(h_1^1(\overline{\tau},\tau_n)\ \cdots\ h_{\mathfrak{n}_1}^1(\overline{\tau},\tau_n)\ \cdots\ h_1^r(\overline{\tau},\tau_n)\ \cdots\ h_{\mathfrak{n}_r}^r(\overline{\tau},\tau_n)\ \ h_n(\overline{\tau},\tau_n)\big)\end{aligned} \tag{4.13}$$

непрерывно дифференцируемо на множестве $\Delta^{\mathfrak{n}}(\theta)$ в силу непрерывности матричных функций $s\mapsto X(t_0,s)$, $s\mapsto B(s)$ и в каждой точке этого множества отображение (4.5) имеет максимально возможный ранг $\mathfrak{n}_1+\ldots+\mathfrak{n}_r+1$, поскольку столбцы матрицы, стоящей в правой части равенства (4.13), линейно независимы. Утверждение пункта 1) леммы доказано.

При любом фиксированном $0<\theta\leqslant\boldsymbol{\sigma}(t_0)$ отображение

$$\overline{\tau}\mapsto F'(\overline{\tau},\theta)=\big(h_1^1(\overline{\tau},\theta)\ \cdots\ h_{\mathfrak{n}_1}^1(\overline{\tau},\theta)\ \cdots\ h_1^r(\overline{\tau},\theta)\ \cdots\ h_{\mathfrak{n}_r}^r(\overline{\tau},\theta)\big), \tag{4.14}$$

где $\overline{\tau}\in\partial\overline{\Delta}^{\mathfrak{n}}(\theta)$, а векторы $h_i^j(\cdot,\cdot)$ определены равенством (4.6), является производным отображением для отображения $F_{t_0}\colon\partial\overline{M}_\delta^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)\to\partial\overline{N}_\delta^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)$. Оно непрерывно дифференцируемо на множестве $\partial\overline{\Delta}^{\mathfrak{n}}(\theta)$ и в каждой точке этого множества отображение (4.5) имеет максимально возможный ранг $\mathfrak{n}_1+\ldots+\mathfrak{n}_r$, поскольку столбцы матрицы, стоящей в правой части равенства (4.14), линейно независимы в любой точке множества $\partial\overline{\Delta}^{\mathfrak{n}}(\theta)$. Утверждение пункта 2) леммы также доказано. $\square$

Теорема 7. *Если система* (3.1) *докритическая в точке* t_0, *то для любой точки* x_0 *множества* $D(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$ *управление* $\widetilde{u}(\cdot) = F_{t_0}^{-1}(x_0)$ *является решением задачи* (3.1)–(3.2) *и переводит точку* x_0 *в нуль за время* $\Theta(t_0,x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система (3.1) докритическая в точке t_0. Если $x_0 = 0$, то управление $F_{t_0}^{-1}(0) = \mathbf{0}(\cdot) \in M_{\varnothing}^{\varnothing} \subseteq \overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$ является оптимальным для вырожденной задачи (3.1)–(3.2). Далее, для любой точки $0 \neq x_0 \in D(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$ существует оптимальное управление $\widehat{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$, переводящее точку x_0 в нуль за время $0 < \Theta(t_0,x_0) \leqslant \boldsymbol{\sigma}(t_0)$. Оптимальное управление $\widehat{u}(\cdot)$ удовлетворяет принципу максимума (3.5) на невырожденном промежутке $[t_0,\, t_0+\Theta(t_0,x_0)] \subseteq [t_0,\, t_0+\boldsymbol{\sigma}(t_0)]$, поэтому по лемме 7 существует такое управление $\widetilde{u}(\cdot) \in \overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$, что $\widehat{u}(t) = \widetilde{u}(t)$ при почти всех $t \in [t_0,\, t_0+\Theta(t_0,x_0)]$. Следовательно, управление $\widetilde{u}(t)$ также переводит точку x_0 в нуль за время $\Theta(t_0,x_0)$ и поэтому является оптимальным. Теперь из взаимной однозначности отображения $F_{t_0}\colon \overline{M}(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0)) \to D(t_0,\boldsymbol{\sigma}(t_0))$ (лемма 9) следует $\widetilde{u}(\cdot) = F_{t_0}^{-1}(x_0)$. □

Доказанные выше свойства отображения F_t позволяют изучить структуру множества управляемости за время θ при условии $\theta \leqslant \boldsymbol{\sigma}(t_0)$.

Теорема 8. *Пусть система* (3.1) *докритическая в точке* t_0. *Тогда для любого положительного* $\theta \leqslant \boldsymbol{\sigma}(t_0)$ *справедливы следующие утверждения.*

1. *Множество управляемости за время* θ $D(t_0,\theta)$ *является выпуклым компактом в* $\mathbb{R}^n$ *и может быть представлено в виде*

$$D(t_0,\theta) = N_{\varnothing}^{\varnothing} \bigcup \left(\bigcup_{\mathfrak{n}\in\mathfrak{I}} \bigcup_{\delta\in\boldsymbol{\Lambda}_{t_0}(\mathfrak{n})} \overline{N}_{\delta}^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta) \right), \tag{4.15}$$

где $\overline{N}_{\delta}^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)$ *— попарно непересекающиеся многообразия с краем и с гладкой внутренностью* $N_{\delta}^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)$, *имеющие размерность* $\mathfrak{n}_1+\ldots+\mathfrak{n}_r+1$. *Для любой точки* $x_0 \in \overline{N}_{\delta}^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)$ *существует оптимальное кусочно постоянное управление* $u(\cdot)\in\mathcal{U}$, *переводящее точку* x_0 *в нуль за минимальное время* $0 < \vartheta \leqslant \theta$; *каждая координатная управляющая функция* $u_j(\cdot)$ *на промежутке* $(t_0,\, t_0+\vartheta)$ *принимает значения* $+1$ *или* -1 *и имеет ровно* $\mathfrak{n}_j$ *переключений, а* $\delta_j \in \{-1,1\}$ *— значение функции* $u_j(\cdot)$ *от момента начала движения* t_0 *до первого переключения* (*или до конца движения, если переключений нет*).

2. *Граница множества управляемости за время* θ $\partial D(t_0,\theta)$ *может быть представлена в виде*

$$\partial D(t_0,\theta) = \bigcup_{\mathfrak{n}\in\mathfrak{I}} \bigcup_{\delta\in\boldsymbol{\Lambda}_{t_0}(\mathfrak{n})} \partial\overline{N}_{\delta}^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta), \tag{4.16}$$

где $\partial\overline{N}_{\delta}^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)$ *— это гладкие попарно непересекающиеся многообразия без края, имеющие размерность* $\mathfrak{n}_1+\ldots+\mathfrak{n}_r$. *Для любой точки* $x_0 \in \partial\overline{N}_{\delta}^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)$ *существует оптимальное кусочно постоянное управление* $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, *переводящее точку* x_0 *в нуль за минимальное время* θ; *каждая координатная управляющая функция* $u_j(\cdot)$ *на промежутке* $(t_0,\, t_0+\theta)$ *принимает значения* $+1$ *или* -1 *и имеет ровно* $\mathfrak{n}_j$ *переключений, а* $\delta_j \in \{-1,1\}$ *— значение функции* $u_j(\cdot)$ *от момента начала движения* t_0 *до первого переключения* (*или до конца движения, если переключений нет*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнены условия теоремы. Множество управляемости за время θ $D(t_0,\theta)$ является выпуклым компактом в $\mathbb{R}^n$ согласно свойству 1) утверждения 8. Представление (4.15) следует из определений § 3, обозначений (4.3)–(4.4) и леммы 9.

Множества $\overline{M}_{\delta}^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)$ $(\mathfrak{n}\in\mathfrak{I},\ \delta\in\boldsymbol{\Lambda}_{t_0}(\mathfrak{n}))$, очевидно, попарно не пересекаются, поэтому из леммы 9 с учетом обозначений (4.3)–(4.4) следует, что многообразия $\overline{N}_{\delta}^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)$ $(\mathfrak{n}\in\mathfrak{I},$ $\delta\in\boldsymbol{\Lambda}_{t_0}(\mathfrak{n}))$ также попарно не пересекаются. Утверждение пункта 1) теоремы о гладкости и размерности многообразий $\overline{N}_{\delta}^{\mathfrak{n}}(t_0,\theta)$ непосредственно следует из леммы 10.

Пусть x_0 — произвольная точка многообразия $\overline{N}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)$. Управление $u(\cdot)=F^{-1}_{t_0}(x_0)$ по теореме 7 переводит точку x_0 в нуль за минимальное время $0<\vartheta\leqslant\theta$. Далее, $u(\cdot)\in\partial\overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\vartheta)\subseteq\overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)$ и, значит, по определению множества $\partial\overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\vartheta)$ (см. § 3) управление $u(\cdot)$ кусочно постоянно, каждая координатная функция $u_j(\cdot)$ на промежутке $(t_0,\,t_0+\vartheta)$ принимает значения $+1$ или -1 и имеет ровно $\mathfrak{n}_j$ переключений, а $\delta_j\in\{-1,1\}$ — значение функции $u_j(\cdot)$ от момента начала движения t_0 до первого переключения (или до конца движения, если переключений нет).

Первый пункт теоремы доказан.

Множество $\partial\overline{M}(t_0,\theta)=\bigcup\limits_{\mathfrak{n}\in\mathfrak{I}}\ \bigcup\limits_{\delta\in\mathbf{\Lambda}_{t_0}(\mathfrak{n})}\partial\overline{M}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\theta)$, очевидно, является границей множества $\overline{M}(t_0,\theta)$, следовательно, его образом при гомеоморфном отображении F_{t_0} (лемма 9) будет граница множества $D(t_0,\theta)$. Отсюда, учитывая обозначения (4.3)–(4.4), сразу получаем (4.16). Остальные утверждения второго пункта теоремы доказываются аналогично соответствующим утверждениям первого пункта. □

В заключение приведем простой пример, на котором продемонстрируем полученные в этой работе результаты.

Пример 5. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2+u_1, & |u_1|\leqslant 1,\\ \dot{x}_2=-x_1+u_2, & |u_2|\leqslant 1.\end{cases}\tag{4.17}$$

В качестве фундаментальной системы решений сопряженной системы

$$\begin{cases}\dot{\psi}_1=\psi_2,\\ \dot{\psi}_2=-\psi_1\end{cases}$$

возьмем вектор-функции $\psi_1(t)=(\sin t,\,\cos t)$, $\psi_2(t)=(\cos t,\,-\sin t)$. Теперь в соответствии с равенством (3.8) определим семейство функций

$$\begin{pmatrix}\xi^1_1(t) & \xi^2_1(t)\\ \xi^1_2(t) & \xi^2_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin t & \cos t\\ \cos t & -\sin t\end{pmatrix}.\tag{4.18}$$

Так как система (4.17) является автономной, то согласно утверждению 7 функция $t\mapsto\boldsymbol{\sigma}(t)$, построенная для семейства (4.18), является постоянной. В примере 1 (см. § 1) мы уже рассматривали семейство функций (4.18) и установили, что оно образует ТА-систему на любом интервале $(\alpha,\,\alpha{+}\pi/2)$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Ясно также, что это семейство функций не образует ТА-систему ни на каком интервале $(\alpha,\,\alpha{+}\pi/2{+}\varepsilon)$, если $\varepsilon>0$. Таким образом, по определению $\boldsymbol{\sigma}(t)=\pi/2$ для всех $t\in\mathbb{R}$, а система (4.17) является докритической в любой точке вещественной оси.

Согласно утверждению 7 отображение $\mathbf{\Lambda}_t$, построенное для семейства (4.18), не зависит от t, то есть $\mathbf{\Lambda}_t=\mathbf{\Lambda}\colon\mathfrak{I}\to\{-1,1\}^2$ для любого $t\in\mathbb{R}$. Значения отображения $\mathbf{\Lambda}(\mathfrak{i})$ при каждом $\mathfrak{i}\in\mathfrak{I}=\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ нами уже были найдены в примере 1 (равенства (1.11)–(1.12)).

Теперь для каждой пары $(\mathfrak{n},\delta)$, $\mathfrak{n}\in\mathfrak{I}$, $\delta\in\mathbf{\Lambda}(\mathfrak{i})$ построим многообразия $N^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\pi/2)$, $\partial\overline{N}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\pi/2)$. Поскольку система (4.17) является автономной, то ее докритическое множество $D(t_0,\pi/2)$ и многообразия $N^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\pi/2)$, $\partial\overline{N}^{\mathfrak{n}}_{\delta}(t_0,\pi/2)$ не зависят от начального момента времени t_0. Поэтому в дальнейшем мы не будем указывать аргумент t_0 в обозначениях этих множеств. Каждое одномерное открытое многообразие $N^{0,0}_{\delta}(\pi/2)$, $\delta\in\mathbf{\Lambda}(0,0)$ представляет собой четверть некоторой окружности (разной для каждого многообразия) без концевых точек, каждое двумерное открытое многообразие $N^{1,0}_{\delta}(\pi/2)$, $\delta\in\mathbf{\Lambda}(1,0)$ и $N^{0,1}_{\delta}(\pi/2)$, $\delta\in\mathbf{\Lambda}(0,1)$ представляет собой открытый криволинейный сектор, а нульмерное многообразие $N^{\varnothing}_{\varnothing}$ есть просто начало координат в $\mathbb{R}^2$.

Все вышеперечисленные множества попарно не пересекаются, а их объединение согласно теореме 8 представляет собой внутренность докритического множества управляемости

МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 1

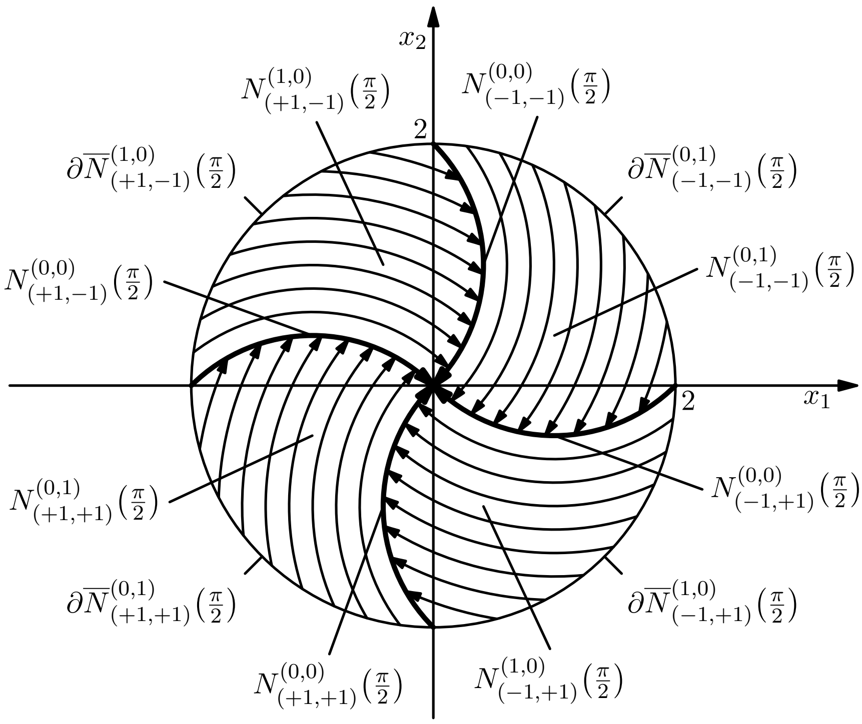

Рис. 2. Структура множества докритичности $D(\pi/2)$ системы (4.17)

$\operatorname{Int} D(\pi/2)$ системы (4.17), которая является открытым кругом радиуса 2 с центром в начале координат (рис. 2):

$$\operatorname{Int} D\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \{0\} \bigcup \left(\bigcup_{\mathfrak{n}\in\mathfrak{I}} \bigcup_{\delta\in\mathbf{\Lambda}(\mathfrak{n})} N^{\mathfrak{n}}_{\delta}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\right) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2\}.$$

Каждое открытое многообразие $\partial\overline{N}^{1,0}_{\delta}(\pi/2)$, $\delta \in \mathbf{\Lambda}(1,0)$ и $\partial\overline{N}^{0,1}_{\delta}(\pi/2)$, $\delta \in \mathbf{\Lambda}(0,1)$ есть четверть окружности $S^1_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 2\}$, отсекаемая осями координат, а многообразия $\partial\overline{N}^{0,0}_{\delta}(\pi/2)$, $\delta \in \mathbf{\Lambda}(0,0)$ — это точки пересечения окружности S^1_2 с осями координат (на рисунке 2 они не показаны). Согласно теореме 8 множества $\partial\overline{N}^{\mathfrak{n}}_{\delta}$ попарно не пересекаются, а их объединение представляет собой границу докритического множества управляемости $\partial D(\pi/2)$, которая является окружностью S^1_2 (рис. 2):

$$\partial D\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \bigcup_{\mathfrak{n}\in\mathfrak{I}} \bigcup_{\delta\in\mathbf{\Lambda}(\mathfrak{n})} \partial\overline{N}^{\mathfrak{n}}_{\delta}\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = S^1_2.$$

Структура множества докритичности $D(\pi/2)$ системы (4.17) изображена на рис. 2. Траектории, соответствующие оптимальному движению, изображены на нем с помощью стрелок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. — М.: Наука, 1983. — 392 с.
2. Черноусько Ф. Л., Шматков А. М. Оптимальное по быстродействию управление в одной системе третьего порядка // Прикладная математика и механика. — 1997. — Т. 61. — Вып. 5. — С. 723–731.
3. Киселев Ю. Н. Оптимальный синтез в гладкой линейной задаче быстродействия // Дифференциальные уравнения. — 1990. — Т. 26. — № 2. — С. 232–237.
4. Белоусова Е. Р., Зарх М. А. Построение поверхности переключения в линейной задаче быстродействия четвертого порядка // Известия РАН. Техническая кибернетика. — 1994. — № 6. — С. 126–139.

5. Белоусова Е. Р., Зарх М. А. Синтез оптимального управления в линейной задаче быстродействия четвертого порядка // Прикладная математика и механика. — 1996. — Т. 60. — Вып. 2. — С. 189–197.
6. Благодатских В. И. Введение в оптимальное управление: Линейная теория. — М.: Высшая школа, 2001. — 239 с.
7. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Прищепова С. В. Синтез оптимальной по быстродействию дискретной системы // Автоматика и телемеханика. — 1991. — № 12. — С. 92–99.
8. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени // Известия РАН. Техническая кибернетика. — 1992. — № 4. — С. 3–19.
9. Тонков Е. Л. К теории линейных управляемых систем: Дис. д-ра. физ.-матем. наук / ИММ УНЦ АН СССР. — Свердловск, 1983. — 267 с.
10. Альбрехт Э. Г., Ермоленко Е. А. Синтез оптимального по быстродействию управления в линейных системах // Дифференциальные уравнения. — 1977. — Т. 33. — № 11. — С. 1443–1450.
11. Тонков Е. Л. Неосцилляция и число переключений в линейной системе, оптимальной по быстродействию // Дифференциальные уравнения. — 1973. — Т. 9. — № 12. — С. 2180–2185.
12. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. — 552 с.
13. Николаев С. Ф., Тонков Е. Л. Структура множества управляемости линейной докритической системы // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35. — № 1. — С. 107–115.
14. Николаев С. Ф., Тонков Е. Л. Дифференцируемость вектора быстродействия и позиционное управление линейной докритической системой // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36. — № 1. — С. 78–84.
15. Николаев С. Ф., Тонков Е. Л. Дифференцируемость функции быстродействия и позиционное управление линейной нестационарной системой // Изв. Ин-та математики и информатики / УдГУ. — Ижевск, 1996. — Вып. 2(8). — С. 47–68.
16. Николаев С. Ф., Тонков Е. Л. Позиционное управление нелинейной системой близкой к докритической // Изв. Ин-та математики и информатики / УдГУ. — Ижевск, 1998. — Вып. 2(13). — С. 3–26.
17. Милич Н. В. О структуре границы множества управляемости линейной докритической системы на большом промежутке времени // Изв. Ин-та математики и информатики / УдГУ. — Ижевск, 1998. — Вып. 2(13). — С. 27–52.
18. Милич Н. В. Длина промежутка чебышевскости и множество управляемости линейной нестационарной системы // Вестник Удмуртского университета / УдГУ. — Ижевск, 2000. — Т. 1. — С. 109–130.
19. Милич Н. В. Позиционное управление возмущенной системой, близкой к докритической // Известия Института математики и информатики / УдГУ. — Ижевск, 2000. — Вып. 2(19). — С. 38–53.
20. Родионова А. Г., Тонков Е. Л. О непрерывности функции быстродействия линейной системы в критическом случае // Изв. высших учебных заведений. Матем. — 1993. — № 5(372). — С. 101–111.

Поступила в редакцию 01.09.08

V. V. Lukyanov

Two-dimensional T-systems of functions and their application for research of time optimal linear nonstationary control systems

The notion of TA-system is introduced for a two-dimensional family of functions. This concept generalizes the well-known notion of T-system for a one-dimensional family of functions. A number of statements about TA-systems of functions is formulated and proved. The developed theory of TA-systems is used to studying of linear non-stationary control systems. For such systems the time optimal problem is solved provided the initial point belongs the interior of the subcritical set.

Keywords: Tchebyshev systems of functions, T-systems, linear nonstationary control systems, time optimal control problem, time optimal function, subcritical systems, positional control.

Mathematical Subject Classifications: 34H05

Лукьянов Владимир Викторович, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: imi@uni.udm.ru