МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 1

УДК 517.977.1

© *В. А. Зайцев*

УПРАВЛЯЕМОСТЬ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ[1]

Установлен критерий равномерной полной и дифференциальной управляемости линейной системы с локально интегрируемыми по Лебегу и интегрально ограниченными коэффициентами, в случае когда критерий Калмана неприменим. Получены условия дифференциальной управляемости квазидифференциального уравнения.

Ключевые слова: управляемая система, полная управляемость, дифференциальная управляемость, квазидифференциальное уравнение.

§ 1. Определения и критерии полной управляемости

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n, $|x| = \sqrt{x^*x}$ — норма в $\mathbb{R}^n$, $*$ означает операцию транспонирования; M_{mn} — пространство вещественных $m \times n$-матриц с нормой $|A| = \max\limits_{|x|\leqslant 1}|Ax|$; $M_n := M_{nn}$. Известно [1, с. 357], что такая норма матрицы $A \in M_{mn}$ совпадает с $\sqrt{\Lambda(A^*A)}$, где $\Lambda(A^*A)$ — наибольшее собственное значение матрицы A^*A, и что $|A^*| = |A|$ [1, с. 71]. Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

Будем предполагать, что матричные функции $A : \mathbb{R} \to M_n$, $B : \mathbb{R} \to M_{nm}$ измеримы и по норме локально интегрируемы по Лебегу, то есть для любых $\vartheta > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} |A(s)|\,ds < \infty, \qquad \int_\tau^{\tau+\vartheta} |B(s)|\,ds < \infty. \tag{2}$$

Допустимым управлением будем называть всякую измеримую ограниченную по норме функцию $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$. Условия (2) обеспечивают существование и единственность решения задачи Коши для системы (1), и это решение является локально абсолютно непрерывной функцией. Обозначим через $X(t,s)$ матрицу Коши системы $\dot{x} = A(t)x$, то есть решение матричной задачи Коши $\dot{X} = A(t)X$, $X(s) = I$, $I \in M_n$ — единичная матрица. Эта функция является абсолютно непрерывной по каждой переменной.

Все соотношения между измеримыми функциями будем предполагать выполняющимися почти всюду (п. в.). Запись $G \in L_1(T, M_{nm})$, где $T = [\tau, \tau+\vartheta]$, означает, что $G : T \to M_{nm}$, $G(t) = \{g_{ij}(t)\}$ и $g_{ij} \in L_1(T)$, то есть $\int_\tau^{\tau+\vartheta} |g_{ij}(s)|\,ds < \infty$ для всех $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Лемма 1. $|G| \in L_2(T) \iff \int_\tau^{\tau+\vartheta} g_{ij}^2(s)\,ds < \infty$ *для всех* $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Доказательство. Построим матрицу $G^*(s)G(s)$. При каждом $s \in T$ эта матрица симметрическая, неотрицательно определенная. Ее собственные значения вещественные и неотрицательные $0 \leqslant \lambda_1(s) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m(s)$. Пусть $\Lambda(s)$ — это наибольшее собственное значение этой матрицы, то есть $\Lambda(s) = \lambda_m(s)$. Имеет место неравенство

$$0 \leqslant \Lambda(s) \leqslant \lambda_1(s) + \ldots + \lambda_m(s) = \mathrm{Sp}\,(G^*(s)G(s)) = \sum_{i,j} g_{ij}^2(s) \leqslant m\Lambda(s). \tag{3}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 06–01–00258, 09–01–00403).

Поскольку $\int_{\tau}^{\tau+\vartheta} |G(s)|^2\, ds = \int_{\tau}^{\tau+\vartheta} \Lambda(s)\, ds$, то из неравенства (3) вытекает требуемое утверждение. $\square$

Следствие 1. $|G| \in L_2(T) \iff G^*G \in L_1(T, M_m) \iff GG^* \in L_1(T, M_n)$.

Лемма 2. *Пусть* $G \in M_n$. *Тогда* $|G| \geqslant (\det G)^{1/n}$.

Доказательство. Пусть $\lambda_n \geqslant \ldots \geqslant \lambda_1 \geqslant 0$ — собственные значения матрицы G^*G. Тогда $(\det G)^2 = \det(G^*G) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$. Имеем $|G| = \sqrt{\lambda_n} = (\lambda_n^n)^{1/(2n)} \geqslant (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n)^{1/(2n)} = \big((\det G)^2\big)^{1/(2n)} = (\det G)^{1/n}$. $\square$

Определение 1 (см. [2]). Система (1) называется *вполне управляемой на отрезке* $T = [\tau, \tau+\vartheta]$, если для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется допустимое управление $u(\cdot)$, переводящее систему (1) из состояния $x(\tau) = x_0$ в состояние $x(\tau+\vartheta) = 0$.

Замечание 1. В силу критерия Калмана система (1) вполне управляема на T тогда и только тогда, когда $\det W(\tau+\vartheta, \tau) \neq 0$, где

$$W(t,\tau) = \int_{\tau}^{t} X(t,s)B(s)B^*(s)X^*(t,s)\, ds \tag{4}$$

(см. [3]). Однако если B не принадлежит $L_2(T)$, а принадлежит лишь $L_1(T)$, то матрица (4) может быть не определена и критерий Калмана неприменим. В таком случае критерий полной управляемости дает следующее утверждение.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны.*
1. *Система* (1) *вполне управляема на отрезке* $T = [\tau, \tau+\vartheta]$.
2. *Строки матрицы* $\widehat{B}(t) := X(\tau, t)B(t)$ *линейно независимы на* T.
3. *Строки матрицы* $\widetilde{B}(t) := X(\tau+\vartheta, t)B(t)$ *линейно независимы на* T.

Доказательство. Утверждение 2 эквивалентно утверждению 3 в силу невырожденности матрицы Коши $X(t,s)$ для любых $t, s \in \mathbb{R}$.

($1 \Rightarrow 2$). Пусть система (1) вполне управляема на отрезке $T = [\tau, \tau+\vartheta]$. Тогда для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется допустимое управление $\widehat{u}(t)$, $t \in T$, переводящее систему (1) из состояния $x(\tau) = x_0$ в состояние $x(\tau+\vartheta) = 0$. Произведем преобразование $x = X(t,\tau)y$ системы (1). Тогда эта система перейдет в систему

$$\dot{y} = X(\tau,t)B(t)u = \widehat{B}(t)u, \quad (t,y,u) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m. \tag{5}$$

Эта система также является вполне управляемой на T, и управление $\widehat{u}(t)$, $t \in T$, переводит систему (5) из состояния $y(\tau) = x(\tau) = x_0$ в состояние $y(\tau+\vartheta) = X(\tau,\tau+\vartheta)x(\tau+\vartheta) = 0$. Предположим, что строки матрицы $\widehat{B}(t)$ линейно зависимы на T, то есть существует вектор-строка $\xi \in \mathbb{R}^{n*}$, $|\xi| = 1$ такая, что $\xi\widehat{B}(t) \equiv 0$ п. в. $t \in T$. Умножим равенство (5) слева на строку ξ, получим, что $\xi\dot{y}(t) \equiv 0$ п. в. $t \in T$. Производная абсолютно непрерывной функции почти всюду равна нулю, следовательно, $\xi y(t) \equiv const = \xi x_0$ для всех $t \in T$. Если мы возьмем $x_0 = \xi^*$, то $\xi y(t) \equiv 1$ для всех $t \in T$, и какое бы мы ни взяли управление в системе (5), решение с этим управлением никогда не попадет в ноль, следовательно, система (5), а вместе с ней и система (1) не являются вполне управляемыми.

($2 \Rightarrow 1$). Пусть строки матрицы $\widehat{B}(t)$ линейно независимы на T. Покажем, что система (5) вполне управляема на T. Отсюда будет следовать вполне управляемость системы (1) на T. Решение уравнения (5) с начальным условием $y(\tau) = x_0$ имеет вид $y(t) = x_0 + \int_{\tau}^{t} \widehat{B}(s)u(s)\, ds$.

Подставим условие $y(\tau+\vartheta)=0$, получим $x_0+\int_\tau^{\tau+\vartheta}\widehat{B}(s)u(s)\,ds=0$. Требуется для любого $x_0\in\mathbb{R}^n$ найти измеримое ограниченное управление $\widehat{u}(t)$, $t\in T$, которое обеспечивает равенство

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta}\widehat{B}(s)\widehat{u}(s)\,ds=-x_0. \tag{6}$$

Поскольку $|B|\in L_1(T)$, то $|\widehat{B}|\in L_1(T)$, поэтому функция $|\widehat{B}(t)|$ п. в. конечна. Введем функцию $q:T\to\mathbb{R}$

$$q(t)=\begin{cases}0, & |\widehat{B}(t)|=0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{|\widehat{B}(t)|}}, & |\widehat{B}(t)|\neq 0.\end{cases}$$

Эта функция не равна тождественно нулю п. в. на T. В противном случае, если бы функция $q(t)\equiv 0$ п. в. $t\in T$, отсюда бы следовало, что $\widehat{B}(t)\equiv 0$ п. в. $t\in T$ (так как $|\widehat{B}(t)|$ п. в. конечна), что противоречило бы линейной независимости на T строк матрицы $\widehat{B}(t)$. Далее, строки матрицы $\widehat{B}(t)q(t)$ также линейно независимы на T, поскольку $q(t)\neq 0$ для п. в. $t\in T$, где $\widehat{B}(t)\neq 0$. Построим функцию $V(t):=q^2(t)\widehat{B}^*(t)$, $t\in T$ (в тех точках $t\in T$, где $|\widehat{B}(t)|=\infty$, полагаем $V(t):=0$). Тогда $V(t)=\dfrac{\widehat{B}^*(t)}{|\widehat{B}(t)|}$ для п. в. $t\in T$, где $\widehat{B}(t)\neq 0$, и $V(t)=0$, где $\widehat{B}(t)=0$. Следовательно, $V(t)$ — измеримая ограниченная функция и $|V(t)|\leqslant 1$ для всех $t\in T$, поскольку $|\widehat{B}(t)|=|\widehat{B}^*(t)|$. Следовательно, $\widehat{B}(t)V(t)\in L_1(T,M_n)$. Тогда в силу следствия 1 $|\widehat{B}(t)q(t)|\in L_2(T)$, поскольку

$$(\widehat{B}(t)q(t))(\widehat{B}(t)q(t))^*=\widehat{B}(t)q^2(t)\widehat{B}^*(t)=\widehat{B}(t)V(t)\in L_1(T,M_n).$$

Пусть $Q(\tau)=\int_\tau^{\tau+\vartheta}\widehat{B}(t)q^2(t)\widehat{B}^*(t)\,dt$. Матрица $Q(\tau)$ — это матрица Грама для совокупности вектор-строк матрицы $\widehat{B}(t)q(t)$. Поскольку строки матрицы $\widehat{B}(t)q(t)$ линейно независимы на T, следовательно, матрица $Q(\tau)$ — симметрическая, положительно определенная, $\det Q(\tau)>0$. Положим $\widehat{u}(t)=V(t)Q^{-1}(\tau)\cdot(-x_0)$. Тогда $\widehat{u}(t)$ измеримая, ограниченная по норме на T функция (следовательно, она является допустимым управлением), и она обеспечивает равенство (6). Теорема доказана. □

Определение 2. Система (1) называется *дифференциально управляемой на отрезке* $T=[\tau,\tau+\vartheta]$, если она является вполне управляемой на любом отрезке $T_1\subset T$.

Если система (1) дифференциально управляема на отрезке $T=[\tau,\tau+\vartheta]$, то она вполне управляема на отрезке $T=[\tau,\tau+\vartheta]$; обратное, вообще говоря, неверно.

Следствие 2. *Следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Система* (1) *дифференциально управляема на отрезке* $T=[\tau,\tau+\vartheta]$.
2. *Строки матрицы* $\widehat{B}_1(t):=X(\tau_1,t)B(t)$ *линейно независимы на любом отрезке* $T_1=[\tau_1,\tau_1+\vartheta_1]\subset T$.
3. *Строки матрицы* $\widetilde{B}_1(t):=X(\tau_1+\vartheta_1,t)B(t)$ *линейно независимы на любом отрезке* $T_1=[\tau_1,\tau_1+\vartheta_1]\subset T$.

§ 2. Критерий равномерной полной управляемости

Предположим, что матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ системы (1) интегрально ограничены на $\mathbb{R}$, то есть

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|A(s)|\,ds\leqslant a<\infty,\qquad \sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|B(s)|\,ds\leqslant b<\infty. \tag{7}$$

Лемма 3. *Пусть матрица* $A(\cdot)$ *интегрально ограничена на* $\mathbb{R}$. *Тогда матрица Коши* $X(t,s)$ *по норме равномерно локально ограничена и равномерно отделена от нуля и ее определитель равномерно отделен от нуля на каждом отрезке, то есть для любого* $\vartheta>0$ *существуют константы* $N_1>0$, $N_2>0$, $l_1>0$ *такие, что для всякого* $\tau\in\mathbb{R}$ *и для любых* $t,s\in[\tau,\tau+\vartheta]$ *выполнены неравенства* $0<N_1\leqslant|X(t,s)|\leqslant N_2$, $0<l_1\leqslant\det X(t,s)$.

Доказательство. Пусть $t,s\in[\tau,\tau+\vartheta]$ и $t\geqslant s$ (случай $t\leqslant s$ рассматривается аналогично). Из неравенства Гронуолла–Беллмана следует

$$|X(t,s)|\leqslant\exp\Big(\int_s^t|A(\zeta)|\,d\zeta\Big)\leqslant\exp\big((\vartheta+1)a\big)=:N_2,$$

и N_2 не зависит от τ; здесь a из (7). Далее, поскольку $|\mathrm{Sp}\,A(\zeta)|\leqslant n|A(\zeta)|$, то мы имеем

$$\det X(t,s)=\exp\Big(\int_s^t\mathrm{Sp}\,A(\zeta)\,d\zeta\Big)\geqslant\exp\Big(-n\int_s^t|A(\zeta)|\,d\zeta\Big)\geqslant\exp\big(-n(\vartheta+1)a\big)=:l_1.$$

Неравенство $|X(t,s)|\geqslant N_1$ следует из леммы 2 (полагаем $N_1:=l_1^{1/n}$). □

Следствие 3. *Если матрицы* $A(\cdot)$ *и* $B(\cdot)$ *системы* (1) *интегрально ограничены на* $\mathbb{R}$, *то для любого* $\vartheta>0$ *существует* $b_1>0$ *такое, что*

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\int_\tau^{\tau+\vartheta}|X(\tau,s)B(s)|\,ds\leqslant b_1<\infty.$$

Лемма 4. *Пусть измеримые функции* $\lambda(t)$, $s(t)$ *удовлетворяют следующим условиям.*

1. $\lambda(t)\geqslant0$, $0\leqslant s(t)\leqslant1$, $t\in\mathbb{R}$.
2. *Функция* $\lambda(t)$ *локально интегрируема по Лебегу и интегрально ограничена на* $\mathbb{R}$, *то есть*
$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\lambda(\zeta)\,d\zeta\leqslant c<\infty.$$
3. *Существуют* $\vartheta>0$ *и* $\varkappa_1>0$ *такие, что для всех* $\tau\in\mathbb{R}$ *выполнено неравенство*
$$\int_\tau^{\tau+\vartheta}\lambda(t)s(t)\,dt\geqslant\varkappa_1.$$

Тогда существует $\nu_1>0$ *такое, что для всех* $\tau\in\mathbb{R}$ *выполнено неравенство*

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta}\lambda(t)s^2(t)\,dt\geqslant\nu_1.$$

Доказательство. Пусть задано произвольное $\tau\in\mathbb{R}$. Имеет место неравенство $\displaystyle\int_\tau^{\tau+\vartheta}\lambda(t)\,dt\leqslant c(\vartheta+1)=:c_1$. Рассмотрим функции $f(t):=\sqrt{\lambda(t)}\cdot s(t)$, $g(t):=\sqrt{\lambda(t)}$ на отрезке $T=[\tau,\tau+\vartheta]$. Поскольку $\lambda(t)\in L_1(T)$ и $s(t)$ ограничена на T, то $f(t)\in L_2(T)$, $g(t)\in L_2(T)$. Применим неравенство Буняковского $\Big(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\Big)^2\leqslant\Big(\int_a^b f^2(t)\,dt\Big)\cdot\Big(\int_a^b g^2(t)\,dt\Big)$ к данным функциям на отрезке T, получим

$$\Big(\int_\tau^{\tau+\vartheta}\lambda(t)s(t)\,dt\Big)^2\leqslant\Big(\int_\tau^{\tau+\vartheta}\lambda(t)s^2(t)\,dt\Big)\cdot\Big(\int_\tau^{\tau+\vartheta}\lambda(t)\,dt\Big).\tag{8}$$

Поскольку $\displaystyle\int_\tau^{\tau+\vartheta}\lambda(t)\,dt\geqslant\int_\tau^{\tau+\vartheta}\lambda(t)s(t)\,dt\geqslant\varkappa_1>0$, то, разделив обе части неравенства (8) на $\displaystyle\int_\tau^{\tau+\vartheta}\lambda(t)\,dt$, получим

$$\Big(\int_\tau^{\tau+\vartheta}\lambda(t)s^2(t)\,dt\Big)\geqslant\frac{\Big(\int_\tau^{\tau+\vartheta}\lambda(t)s(t)\,dt\Big)^2}{\Big(\int_\tau^{\tau+\vartheta}\lambda(t)\,dt\Big)}\geqslant\frac{\varkappa_1^2}{c_1}=:\nu_1.$$

Лемма доказана. □

Определение 3. Система (1) называется *ϑ-равномерно вполне управляемой* ($\vartheta > 0$), если существует $l > 0$ такое, что для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и для любого $\tau \in \mathbb{R}$ на отрезке $T = [\tau, \tau+\vartheta]$ найдется допустимое управление $u(\cdot)$, которое переводит систему из состояния $x(\tau) = x_0$ в состояние $x(\tau+\vartheta) = 0$ и удовлетворяет неравенству $|u(t)| \leqslant l|x_0|$, $t \in T$. Далее, система (1) называется *равномерно вполне управляемой* [2], если существует $\vartheta > 0$ такое, что система (1) ϑ-равномерно вполне управляема. Система (1) называется *равномерно дифференциально управляемой,* если для любого $\vartheta > 0$ система (1) ϑ-равномерно вполне управляема.

Замечание 2. Согласно критерию Калмана система (1) равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда существует такое $\vartheta > 0$, что при всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства

$$0 < \alpha_1(\vartheta)I \leqslant W_0(\tau+\vartheta, \tau) \leqslant \alpha_3(\vartheta)I, \tag{9}$$

$$0 < \alpha_2(\vartheta)I \leqslant W(\tau+\vartheta, \tau) \leqslant \alpha_4(\vartheta)I, \tag{10}$$

понимаемые в смысле квадратичных форм, где

$$W_0(\tau+\vartheta, t) = \int_t^{\tau+\vartheta} X(t,s)B(s)B^*(s)X^*(t,s)\,ds \tag{11}$$

(см. [3]). Однако этот критерий неприменим, если B не принадлежит $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, а принадлежит лишь $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, поскольку матрицы (4), (11) могут быть не определены. В таком случае критерий равномерной полной управляемости дает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ системы* (1) *интегрально ограничены на $\mathbb{R}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Система* (1) *ϑ-равномерно вполне управляема.*
2. *Строки матрицы $\widehat{B}(t) := X(\tau,t)B(t)$ линейно независимы на $[\tau, \tau+\vartheta]$ равномерно относительно τ, то есть существует $\varkappa_1 = \varkappa_1(\vartheta) > 0$ такое, что для любого $\tau \in \mathbb{R}$ и для любой вектор-строки $\xi \in \mathbb{R}^{n*}$, $|\xi| = 1$ выполнено неравенство*

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} |\xi X(\tau,t)B(t)|\,dt \geqslant \varkappa_1. \tag{12}$$

3. *Строки матрицы $\widetilde{B}(t) := X(\tau+\vartheta,t)B(t)$ линейно независимы на $[\tau, \tau+\vartheta]$ равномерно относительно τ.*

Доказательство. ($2 \Rightarrow 3$). Положим $\varkappa_2 := \varkappa_1/N_2$, где N_2 из леммы 3. Пусть заданы произвольные $\tau \in \mathbb{R}$ и вектор-строка $\eta \in \mathbb{R}^{n*}$, $|\eta| = 1$. Покажем, что выполнено неравенство

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} |\eta X(\tau+\vartheta,t)B(t)|\,dt \geqslant \varkappa_2. \tag{13}$$

Отсюда будет следовать утверждение 3. Построим вектор-строку $\xi_1 = \eta X(\tau+\vartheta, \tau)$. Тогда $1 = |\eta| = |\xi_1 X(\tau, \tau+\vartheta)| \leqslant |\xi_1| \cdot |X(\tau, \tau+\vartheta)|$. Следовательно, $|\xi_1| \geqslant 1/|X(\tau,\tau+\vartheta)| \geqslant 1/N_2$ и $N_2 \cdot |\xi_1| \geqslant 1$. Построим вектор-строку $\xi = \xi_1/|\xi_1|$. Тогда $|\xi| = 1$ и в силу утверждения 2 для ξ выполнено неравенство (12). Тогда имеем

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta} |\eta X(\tau+\vartheta,t)B(t)|\,dt = \int_\tau^{\tau+\vartheta} |\xi_1 X(\tau,t)B(t)|\,dt = \int_\tau^{\tau+\vartheta} \big||\xi_1| \cdot \xi X(\tau,t)B(t)\big|\,dt =$$
$$= |\xi_1| \cdot \int_\tau^{\tau+\vartheta} \big|\xi X(\tau,t)B(t)\big|\,dt \geqslant |\xi_1| \cdot \varkappa_1 = |\xi_1| \cdot N_2 \cdot \varkappa_2 \geqslant \varkappa_2.$$

Неравенство (13) и утверждение 3 доказано. Импликация ($3 \Rightarrow 2$) доказывается аналогично.

($1 \Rightarrow 2$). Предположим, что утверждение 2 не выполнено. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют $\tau_k \in \mathbb{R}$ и $\xi_k \in \mathbb{R}^{n*}$, $|\xi_k| = 1$ такие, что

$$\int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} |\xi_k X(\tau_k, t)B(t)|\, dt < \frac{1}{k}.$$

Поскольку система (1) ϑ-равномерно вполне управляема, то существует $l > 0$ такое, что для $x_0^k = -\xi_k^*$ на отрезке $T_k = [\tau_k, \tau_k+\vartheta]$ найдется допустимое управление $u_k(\cdot)$, которое переводит систему (1) из состояния $x(\tau_k) = x_0^k$ в состояние $x(\tau_k + \vartheta) = 0$ и удовлетворяет неравенству $|u_k(t)| \leqslant l|x_0^k| = l$, $t \in T_k$. Следовательно, для этого управления выполнено соотношение

$$\int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} X(\tau_k, t)B(t)u_k(t)\, dt = -x_0^k.$$

Умножая это равенство слева на строку ξ_k получим

$$1 = \xi_k\xi_k^* = |\xi_k(-x_0^k)| = \left|\int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} \xi_k X(\tau_k, t)B(t)u_k(t)\, dt\right| \leqslant \int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} |\xi_k X(\tau_k, t)B(t)u_k(t)|\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} |\xi_k X(\tau_k, t)B(t)| \cdot |u_k(t)|\, dt \leqslant l \cdot \int_{\tau_k}^{\tau_k+\vartheta} |\xi_k X(\tau_k, t)B(t)|\, dt < \frac{l}{k} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Противоречие. Следовательно, утверждение 2 выполнено.

($2 \Rightarrow 1$). Предположим, что утверждение 2 выполнено. Тогда строки матрицы $\widehat{B}(t)$ линейно независимы на отрезке $T = [\tau, \tau + \vartheta]$ для любого $\tau \in \mathbb{R}$, следовательно, по теореме 1 система (1) вполне управляема на каждом отрезке $[\tau, \tau+\vartheta]$. Остается показать, что существует константа $l > 0$ (из определения 3) равномерная для всех $\tau \in \mathbb{R}$, то есть не зависящая от τ. Покажем, что система (5) ϑ-равномерно вполне управляема. В силу леммы 3 отсюда будет следовать, что система (1) ϑ-равномерно вполне управляема. Пусть задано произвольное $\tau \in \mathbb{R}$. Будем строить управление $\widehat{u}(t)$ на отрезке $T = [\tau, \tau + \vartheta]$ так же, как в теореме 1, то есть $\widehat{u}(t) = V(t)Q^{-1}(\tau)(-x_0)$, где $Q(\tau) = \int_{\tau}^{\tau+\vartheta} \widehat{B}(t)q^2(t)\widehat{B}^*(t)\, dt$. По определению функции $V(t)$ имеем $Q(\tau) = \int_{\tau}^{\tau+\vartheta} V^*(t)V(t)|\widehat{B}(t)|\, dt$. Для произвольной вектор-строки $\xi \in \mathbb{R}^{n*}$, $|\xi| = 1$ имеем

$$\xi Q(\tau)\xi^* = \int_{\tau}^{\tau+\vartheta} \xi V^*(t)V(t)\xi^*|\widehat{B}(t)|\, dt = \int_{\tau}^{\tau+\vartheta} |\xi V^*(t)|^2|\widehat{B}(t)|\, dt.$$

Для этой вектор-строки ξ выполнено неравенство (12). Поскольку $\xi X(\tau, t)B(t) = \xi\widehat{B}(t) = \xi V^*(t)|\widehat{B}(t)|$ для п. в. $t \in T$, то неравенство (12) равносильно неравенству

$$\int_{\tau}^{\tau+\vartheta} |\xi V^*(t)| \cdot |\widehat{B}(t)|\, dt \geqslant \varkappa_1. \tag{14}$$

Функция $\lambda(t) := |\widehat{B}(t)| = |X(\tau, t)B(t)|$ в силу следствия 3 удовлетворяет условию 2 леммы 4. Функция $s(t) := |\xi V^*(t)|$ удовлетворяет условию $0 \leqslant s(t) = |\xi V^*(t)| \leqslant |\xi| \cdot |V^*(t)| \leqslant 1$, $t \in T$. В силу неравенства (14) выполнено условие 3 леммы 4 для этих функций $\lambda(t)$ и $s(t)$. Таким образом, функции $\lambda(t)$ и $s(t)$ удовлетворяют всем условиям леммы 4, следовательно, по лемме 4 существует $\nu_1 > 0$ такое, что $\xi Q(\tau)\xi^* = \int_{\tau}^{\tau+\vartheta} |\xi V^*(t)|^2|\widehat{B}(t)|\, dt \geqslant \nu_1 > 0$, и это число ν_1 не зависит от τ. Обозначим через $\mu(\tau)$ наименьшее собственное значение матрицы $Q(\tau)$. Из последнего неравенства следует, что $\mu(\tau) \geqslant \nu_1 > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$, следовательно, $|Q^{-1}(\tau)| \leqslant \mu^{-1}(\tau) \leqslant 1/\nu_1 =: l$. Таким образом, $|\widehat{u}(t)| \leqslant |V(t)| \cdot |Q^{-1}(\tau)| \cdot |x_0| \leqslant l|x_0|$, $t \in T$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 3. В определении равномерной полной управляемости *a priori* предполагается, что функции $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ интегрально ограничены. Отсюда автоматически следуют оценки

$$\int_{\tau}^{\tau+\vartheta} |\xi X(\tau,t)B(t)|\,dt \leqslant \varkappa_3(\vartheta), \tag{15}$$

$$\int_{\tau}^{\tau+\vartheta} |\eta X(\tau+\vartheta,t)B(t)|\,dt \leqslant \varkappa_4(\vartheta) \tag{16}$$

для некоторых $\varkappa_3(\vartheta), \varkappa_4(\vartheta) > 0$, всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{n*}$, $|\xi| = 1$, $|\eta| = 1$. Если матрица B удовлетворяет более сильным условиям, чем в теореме 2, а именно $|B| \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ и B интегрально ограничена с квадратом нормы, то есть

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |B(s)|^2\,ds \leqslant b_2 < \infty, \tag{17}$$

то теорема 2 превращается в критерий Калмана и неравенства (12), (15) будут эквивалентны неравенствам (9) (соответственно неравенства (13), (16) будут эквивалентны неравенствам (10)). Действительно, оценка $W_0(\tau+\vartheta,\tau) \leqslant \alpha_3(\vartheta)I$ следует из первого условия (7) и условия (17), а оценка $W_0(\tau+\vartheta,\tau) \geqslant \alpha_1(\vartheta)I$ следует из неравенства

$$\xi W_0(\tau+\vartheta,\tau)\xi^* = \int_{\tau}^{\tau+\vartheta} |\xi X(\tau,s)B(s)|^2\,ds \geqslant \frac{1}{\vartheta}\left(\int_{\tau}^{\tau+\vartheta} |\xi X(\tau,s)B(s)|\,ds\right)^2 \geqslant \frac{1}{\vartheta}\varkappa_1^2(\vartheta) > 0,$$

выполненного для любого $\xi \in \mathbb{R}^{n*}$, $|\xi| = 1$. (Аналогично показывается неравенство (10).)

Следствие 4. *Пусть матрицы* $A(\cdot)$ *и* $B(\cdot)$ *системы* (1) *интегрально ограничены на* $\mathbb{R}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Система* (1) *равномерно вполне управляема.*
2. *Существует* $\vartheta > 0$ *такое, что строки матрицы* $X(\tau,t)B(t)$ *линейно независимы на* $[\tau,\tau+\vartheta]$ *равномерно относительно* τ.
3. *Существует* $\vartheta > 0$ *такое, что строки матрицы* $X(\tau+\vartheta,t)B(t)$ *линейно независимы на* $[\tau,\tau+\vartheta]$ *равномерно относительно* τ.

Следствие 5. *Пусть матрицы* $A(\cdot)$ *и* $B(\cdot)$ *системы* (1) *интегрально ограничены на* $\mathbb{R}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Система* (1) *равномерно дифференциально управляема.*
2. *Для любого* $\vartheta > 0$ *строки матрицы* $X(\tau,t)B(t)$ *линейно независимы на* $[\tau,\tau+\vartheta]$ *равномерно относительно* τ.
3. *Для любого* $\vartheta > 0$ *строки матрицы* $X(\tau+\vartheta,t)B(t)$ *линейно независимы на* $[\tau,\tau+\vartheta]$ *равномерно относительно* τ.

§ 3. Управляемость системы в форме Хессенберга

Пусть коэффициенты системы (1) имеют вид

$$A(t) = \left\| \begin{matrix} a_{11}(t) & b_1(t) & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & b_2(t) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1}(t) & \ldots & \ldots & \ldots & b_{n-1}(t) \\ a_{n1}(t) & \ldots & \ldots & \ldots & a_{nn}(t) \end{matrix} \right\|, \qquad B(t) = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n(t) \end{matrix} \right\|. \tag{18}$$

Система (1) с коэффициентами вида (18) называется системой в форме Хессенберга. Будем предполагать, что функции a_{ij}, b_i, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,i}$, измеримы и по норме локально интегрируемы по Лебегу.

Теорема 3. *Пусть* $|b_i(t)| > 0$, $i = \overline{1,n}$ *для п. в.* $t \in T = [\tau, \tau + \vartheta]$. *Тогда система* (1), (18) *дифференциально управляема на отрезке* T.

Замечание 4. В работе [4, с. 184] теорема 3 была доказана в частном случае, когда $b_i(t) \equiv 1$, $i = \overline{1,n}$; $a_{ij} \equiv 0$, $i = \overline{1,n-1}$, $j = \overline{1,i}$; a_{nj} непрерывны, то есть когда система (1), (18) эквивалентна обыкновенному дифференциальному уравнению с непрерывными коэффициентами (в этом случае говорят, что эта система имеет форму Фробениуса). На самом деле эта теорема верна при более общих условиях на коэффициенты системы, то есть когда система (1), (18) эквивалентна квазидифференциальному уравнению (см. далее теорему 4).

Доказательство. В силу следствия 2 достаточно показать, что для любого отрезка $T_1 = [\tau_1, \tau_1 + \vartheta_1] \subset T$ строки матрицы $X(\tau_1, t)B(t)$ линейно независимы на T_1. Предположим противное: существует вектор-строка $\xi \in \mathbb{R}^{n*}$, $|\xi| = 1$ такая, что $\xi X(\tau_1, t)B(t) \equiv 0$ п. в. $t \in T_1$. Поскольку $b_n(t) \neq 0$ п. в. $t \in T_1$, следовательно, последнее равенство равносильно тому, что $\xi X(\tau_1, t)e_n \equiv 0$ п. в. $t \in T_1$, где $e_n = \operatorname{col}(0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. Матрица Коши абсолютно непрерывна, поэтому $\xi X(\tau_1, t)e_n = 0$ для всех $t \in T_1$.

Пусть $\varphi_1(t)$, $\ldots$, $\varphi_n(t)$ — вектор-столбцы матрицы $X(\tau_1, t)$. Из последнего равенства следует, что $\xi\varphi_n(t) \equiv 0$, $t \in T_1$. Матрица $X(\tau_1, t)$ удовлетворяет матричному уравнению $\dot X = -XA(t)$. Следовательно, вектор-функции $\varphi_i(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot\varphi_1(t) &= -\sum_{i=1}^{n} a_{i1}(t)\varphi_i(t), \\ \dot\varphi_k(t) &= -b_{k-1}(t)\varphi_{k-1}(t) - \sum_{i=k}^{n} a_{ik}(t)\varphi_i(t), \quad k = \overline{2,n}. \end{aligned} \tag{19}$$

Умножим равенство (19) при $k = n$ слева на строку ξ. Поскольку $\xi\varphi_n(t) \equiv 0$, $t \in T_1$, то $\xi\dot\varphi_n(t) \equiv 0$, $t \in T_1$. Следовательно, $b_{n-1}(t)\xi\varphi_{n-1}(t) \equiv 0$, $t \in T_1$. Поскольку $b_{n-1}(t) \neq 0$ для п. в. $t \in T_1$, то $\xi\varphi_{n-1}(t) \equiv 0$ п. в. $t \in T_1$. В силу абсолютной непрерывности $\varphi_{n-1}(t)$ получаем, что $\xi\varphi_{n-1}(t) = 0$ для всех $t \in T_1$. Далее, положим в (19) $k = n - 1$, умножим слева это равенство на вектор-строку ξ и с помощью аналогичных рассуждений получим, что $\xi\varphi_{n-2}(t) \equiv 0$, $t \in T_1$. Продолжим этот процесс далее, получим, что $\xi\varphi_k(t) \equiv 0$, $t \in T_1$ для всех $k = \overline{1,n}$. Следовательно, $\xi X(\tau_1, t) \equiv 0$, $t \in T_1$. Приходим к противоречию, поскольку $\det X(\tau_1, t) \neq 0$ для всех $t \in T_1$ и $\xi \neq 0$. Следовательно, строки матрицы $X(\tau_1, t)B(t)$ линейно независимы на T_1. Теорема доказана. □

Замечание 5. Предположим, что коэффициенты системы (1), (18) достаточно гладкие функции, такие, что п. в. на интервале $J \supset T$ определены функции $q_0(t) := B(t)$, $q_i(t) := A(t)q_{i-1}(t) - \dot q_{i-1}(t)$, $i = \overline{1,n-1}$, и *матрица управляемости* $Q(t) := [q_0(t), \ldots, q_{n-1}(t)]$ (это означает, что система имеет класс $n - 1$ на J [4, с. 166]). Тогда теорема 3 следует из теоремы 12.1 [4], согласно которой такая система дифференциально управляема тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} Q(t) = n$ для п. в. $t \in T$. Действительно, в этом случае матрица $Q(t) = \{q_{ij}(t)\}$, $i, j = \overline{1,n}$, имеет треугольный вид: на побочной диагонали стоят элементы $q_{n+1-k,k} = \prod_{i=1}^{k} b_{n+1-i}(t) \neq 0$, $k = \overline{1,n}$ п. в. $t \in T$, а элементы выше побочной диагонали равны нулю. Следовательно, $\det Q(t) \neq 0$ п. в. $t \in T$, и теорема верна.

По аналогии с теоремой 3 представляется справедливым следующее утверждение.

Гипотеза 1. *Пусть матрицы* $A(\cdot)$ *и* $B(\cdot)$ *локально интегрируемы по Лебегу и интегрально ограничены на* $\mathbb{R}$. *Если существует* β *такое, что* $|b_i(t)| \geqslant \beta > 0$, $i = \overline{1,n}$ *для п. в.* $t \in \mathbb{R}$, *то система* (1), (18) *равномерно дифференциально управляема.*

Замечание 6. Это утверждение в частном случае при $n = 2$ доказано в работе [6] в предположении, что последняя строка матрицы $A(t)$ состоит из измеримых ограниченных функций.

Для произвольного n это утверждение не доказано. Можно попытаться доказать более слабое утверждение, усиливая условия на гладкость коэффициентов $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$. Следует отметить, что даже в случае, когда $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ имеют достаточно высокий порядок гладкости, такой что система (1), (18) принадлежит классу $\mathcal{E}$ [4, § 17] (это означает, что компоненты $g_k(t)$ вектор-функции $g(t) := Q^{-1}(t)q_n(t)$, где $q_n(t) := A(t)q_{n-1}(t) - \dot{q}_{n-1}(t)$, являются $k-1$ раз непрерывно дифференцируемыми функциями, $k = \overline{1,n}$; в этом случае система невырожденным непрерывно дифференцируемым преобразованием $x = G(t)y$ приводится к канонической форме Фробениуса [4, теорема 17.2]), сформулированная гипотеза не следует из результатов работы [4], поскольку матрица преобразования $G(t)$, равно как и коэффициенты формы Фробениуса, может быть неограниченной, а свойство равномерной дифференциальной (полной) управляемости не является инвариантным относительно, вообще говоря, неограниченных преобразований.

§ 4. Управляемость квазидифференциального уравнения

Введем в рассмотрение квазидифференциальное уравнение в соответствии с работой [5]. Пусть задана нижняя треугольная матрица $\mathcal{P}(t) = \{p_{ik}(t)\}_{i,k=0}^{n}$ такая, что выполнены следующие условия на некотором интервале $J \subset \mathbb{R}$.

У1. Функции $p_{00}(\cdot)$ и $p_{nn}(\cdot)$ измеримы, п. в. конечны и п. в. отличны от нуля на J.

У2. Функции $\dfrac{1}{p_{ii}(\cdot)}$, $i = \overline{1,n-1}$, измеримы и локально интегрируемы по Лебегу на J.

У3. Функции $\dfrac{p_{ik}(\cdot)}{p_{ii}(\cdot)}$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,i-1}$, измеримы и локально интегрируемы по Лебегу на J.

Определим квазипроизводные ${}^{k}_{\mathcal{P}}x$ $(k = \overline{0,n})$ функции $x : J \to \mathbb{R}$ равенствами

$$\begin{aligned} {}^{0}x &:= {}^{0}_{\mathcal{P}}x := p_{00}(t)x, \\ {}^{k}x &:= {}^{k}_{\mathcal{P}}x := p_{kk}(t)\frac{d}{dt}\left({}^{k-1}_{\mathcal{P}}x\right) + \sum_{\nu=0}^{k-1} p_{k\nu}(t)\left({}^{\nu}_{\mathcal{P}}x\right), \qquad k = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{20}$$

Квазидифференциальным уравнением (КдУ) n-го порядка называется уравнение

$${}^{n}x = f(t), \qquad t \in J. \tag{21}$$

Решением уравнения (21) называется всякая функция $x(t)$, $t \in J$, имеющая локально абсолютно непрерывные квазипроизводные ${}^{k}x$, $k = \overline{0,n-1}$, и п. в. на J удовлетворяющая уравнению (21).

Пусть заданы начальные условия

$$({}^{k}x)(\tau) = \gamma_k, \quad k = \overline{0,n-1}, \quad \tau \in J, \quad \gamma_k \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Обозначим $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1})$. Построим по матрице $\mathcal{P}(t)$ матрицу

$$A(t) = \begin{Vmatrix} -\dfrac{p_{10}(t)}{p_{11}(t)} & \dfrac{1}{p_{11}(t)} & 0 & \ldots & 0 \\ -\dfrac{p_{20}(t)}{p_{22}(t)} & -\dfrac{p_{21}(t)}{p_{22}(t)} & \dfrac{1}{p_{22}(t)} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\dfrac{p_{n-1,0}(t)}{p_{n-1,n-1}(t)} & \ldots & \ldots & \ldots & \dfrac{1}{p_{n-1,n-1}(t)} \\ -\dfrac{p_{n0}(t)}{p_{nn}(t)} & \ldots & \ldots & \ldots & -\dfrac{p_{n,n-1}(t)}{p_{nn}(t)} \end{Vmatrix} \tag{23}$$

и вектор $\widehat{f}(t) = \operatorname{col}\big(0, \ldots, 0, f(t)/p_{nn}(t)\big)$. В работе [5] показано, что задача Коши (21), (22) эквивалентна задаче

$$\dot{z} = A(t)z + \widehat{f}(t), \tag{24}$$

с начальным условием $z(\tau)=\gamma$, где $z=({}_{\mathcal{P}}x)=({}^{0}_{\mathcal{P}}x,\ldots,{}^{n-1}_{\mathcal{P}}x)$, $A(t)$ — матрица (23), и если выполнены условия У1–У3 и функция $f(\cdot)/p_{nn}(\cdot)$ локально интегрируема на J, то задача (24), $z(\tau)=\gamma$ (а вместе с ней и задача (21), (22)) имеет единственное решение, компоненты ${}^{k}x$, $k=\overline{0,n-1}$, которого локально абсолютно непрерывны.

Рассмотрим управляемое КдУ

$$ {}^{n}x=u, \qquad u: J\to\mathbb{R}. \tag{25}$$

Это КдУ эквивалентно линейной управляемой системе

$$\dot z=A(t)z+B(t)\mathfrak{u}, \quad \mathfrak{u}\in\mathbb{R}, \tag{26}$$

где $A(t)$ имеет вид (23), $B(t)=\operatorname{col}\big(0,\ldots,0,1/p_{nn}(t)\big)$, $\mathfrak{u}=u$, $z=({}^{0}x,\ldots,{}^{n-1}x)$. Допустимые управления $\mathfrak{u}(\cdot)=u(\cdot)$ — это измеримые ограниченные функции. Будем предполагать, что выполнено следующее условие.

У4. Функция $\dfrac{1}{p_{nn}(\cdot)}$ локально интегрируема по Лебегу на J.

Тогда для любого допустимого управления $u(\cdot)$ функция $\dfrac{u(\cdot)}{p_{nn}(\cdot)}$ локально интегрируема и выполнены все условия теоремы работы [5], обеспечивающие существование и единственность решения задачи Коши.

Будем говорить, что КдУ (25) *вполне управляемо на отрезке* $T\subset J$ (*дифференциально управляемо на* T, *равномерно вполне управляемо, равномерно дифференциально управляемо*), если соответствующая система (26) обладает этим свойством.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* У1–У4 *и выполнено условие*

У5. *Функции* $p_{ii}(\cdot)$, $i=\overline{1,n-1}$, *п. в. конечны на* J.

Тогда КдУ (25) *дифференциально управляемо на отрезке* $T\subset J$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ системы (26) имеют вид (18), где

$$b_i(t)=\frac{1}{p_{ii}(t)}, \quad a_{ij}=-\frac{p_{i,j-1}(t)}{p_{ii}(t)}, \quad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,i}. \tag{27}$$

Условия У1–У4 обеспечивают локальную интегрируемость матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ и существование и единственность решения задачи Коши для системы (26). Условие У5 обеспечивает свойство $|b_i(t)|>0$, $i=\overline{1,n}$ для п. в. $t\in T$. По теореме (3) система (26) будет дифференциально управляемой на T. □

Утверждение 1. *Предположим, что гипотеза* 1 *верна. Пусть выполнены условия* У1–У4 *на* $\mathbb{R}$ *и выполнены следующие условия.*

У6. *Функции* $\dfrac{p_{ik}(\cdot)}{p_{ii}(\cdot)}$, $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,i-1}$, *интегрально ограничены на* $\mathbb{R}$.

У7. *Функции* $p_{ii}(\cdot)$, $i=\overline{1,n}$, *ограничены п. в. на* $\mathbb{R}$.

Тогда КдУ (25) *равномерно дифференциально управляемо.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ системы (26) имеют вид (18) с коэффициентами (27). Условия У1–У4, У6, У7 обеспечивают выполнение всех условий гипотезы 1, и если она верна, то система (26) равномерно дифференциально управляема. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.
2. Тонков Е. Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференциальные уравнения. — 1979. — Т. 15. — № 10. — С. 1804–1813.
3. Култышев С. Ю., Тонков Е. Л. Управляемость линейной нестационарной системы // Дифференциальные уравнения. — 1975. — Т. 11. — № 7. — С. 1206–1216.
4. Гайшун И. В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 408 с.
5. Дерр В. Я. Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Известия Института математики и информатики / УдГУ. — Ижевск, 1999. — Вып. 1 (16). — С. 3–105.
6. Зайцев В. А. Равномерная полная управляемость и ляпуновская приводимость двумерного квазидифференциального уравнения // Вестник Удмуртского университета. Математика. — 2007. — № 1. — С. 55–66.

Поступила в редакцию 01.11.08

V. A. Zaitsev

Quasidifferential equation controllability

The criterion of uniform complete and differential controllability of linear system with locally integrable and integrally bounded matrix coefficients is established, in a case when Kalman criterion is not applicable. Conditions of differential controllability of a quasidifferential equation are received.

Keywords: control system, complete controllability, differential controllability, quasidifferential equation.

Mathematical Subject Classifications: 93B05, 93C05

Зайцев Василий Александрович, к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: verba@udm.ru