МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 1

УДК 517.2, 517.5

© *В. Я. Дерр*

НЕОСЦИЛЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Памяти А. Ю. Левина

Излагаются основы теории неосцилляции решений обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с новыми доказательствами некоторых основных теорем: признаки неосцилляции, ее следствия, свойства неосцилляционных уравнений. Для уравнения второго порядка приводятся новые достаточные признаки неосцилляции.

Ключевые слова: неосцилляция, сопряженные точки, факторизация, обобщенная теорема Ролля, многоточечная краевая задача Валле Пуссена, функция Грина.

Введение

Предлагаемая вниманию читателей статья представляет собой введение в теорию неосцилляции уравнения

$$Lx \doteq x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = 0, \quad t \in I \doteq (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}, \tag{0.1}$$

в котором основные факты этой теории изложены в единых терминах и обозначениях. Введение это, достаточно краткое, написано в основном по результатам работ [1–4]. Некоторые из утверждений снабжены новыми доказательствами. Для уравнения второго порядка получены новые достаточные условия неосцилляции (см. § 6, п. 5). Сделана попытка переноса некоторых определений на систему уравнений

$$x' - A(t)x = 0, \qquad t \in I, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{0.2}$$

Здесь p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, и элементы $n \times n$-матрицы A локально суммируемые на I функции.

Уравнение (0.1) называется неосцилляционным на промежутке $J \subset I$, если любое его нетривиальное решение имеет на этом промежутке не более $n-1$ нулей, которые подсчитываются с учетом их кратностей. Говорят также, что имеет место неосцилляция решений уравнения (0.1), или что J — промежуток неосцилляции уравнения (0.1). Например, уравнение

$$x^{(n)} = 0 \tag{0.3}$$

неосцилляционно на всей числовой оси, так как любое его нетривиальное решение есть полином степени не выше $n-1$, который может иметь не более $n-1$ нулей; так что $(-\infty, +\infty)$ — промежуток неосцилляции уравнения (0.3).

Использование термина *неосцилляция* в указанном смысле в отечественной литературе относится к концу 1950-х годов (введен этот термин, по-видимому, Н. В. Азбелевым). Соответствующий английский термин *disconjugacy* принадлежит А. Винтнеру [5].

Всюду, если не оговорено иное, будем предполагать, что функции p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, локально суммируемы на I.

Пусть $\mathfrak{T}(J)$ — класс линейных дифференциальных выражений L, для которых уравнение (0.1) неосцилляционно на промежутке J,

$$\Phi(x, J) \qquad \big(\Phi(x, \tau)\big)$$

— число нулей с учетом кратностей функции x на промежутке $J \subset I$ $\big($в точке $\tau \in I\big)$.

Приведем несколько примеров использования неосцилляции решений уравнения (0.1). Доказательство сформулированных ниже утверждений будет приведено позднее.

1. Вещественная факторизация линейного дифференциального выражения L (G. Polia [6], G. Mammana [7]).

Для того чтобы имело место разложение

$$L = h_n \frac{d}{dt} h_{n-1} \frac{d}{dt} \cdots \frac{d}{dt} h_0, \qquad t \in (a,b) \subset I, \tag{0.4}$$

где достаточно гладкие функции $h_i : I \to \mathbb{R},\ i = 0,1,\dots,n,$ *не обращаются в нуль на* (a,b), *необходимо и достаточно, чтобы* $L \in \mathfrak{T}\big((a,b)\big)$.

2. Обобщенная теорема Ролля (G. Polia [9]).

Пусть $L \in \mathfrak{T}(J)$, *функция* Lx *непрерывна на* J, $\Phi(x,J) \geqslant n+1$. *Тогда* $\Phi(Lx,\, J) \geqslant 1$.

3. Разрешимость интерполяционной краевой задачи (называемой также задачей Валле Пуссена) и знакоопределенность её функции Грина.

Рассмотрим краевую задачу

$$(Lx)(t) = f(t), \qquad t \in [a,b] \subset I, \tag{0.5}$$

$$x^{(i)}(t_j) = c_j \tag{0.6}$$

$$(i = 0,\dots,k_j - 1;\ j = 1,\dots,m;\ a = t_1 < \ldots < t_m = b;\ k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n).$$

Условие $L \in \mathfrak{T}([a,b])$ необходимо и достаточно для однозначной разрешимости всех задач (0.5)–(0.6) и существования их функции Грина $G(t,s)$. Более того, имеет место следующее утверждение.

Пусть $\pi(t) \doteq \operatorname{sign}(t-t_1)^{k_1}(t-t_2)^{k_2}\cdots(t-t_m)^{k_m}$.

Если $L \in \mathfrak{T}([a,b])$, *то*

$$\pi(t)G(t,s) \geqslant 0, \quad t,s \in [a,b] \tag{0.7}$$

(Чичкин Е. С. [10], Левин А. Ю. [1]).

Интересно отметить, что при выполнении некоторых легко проверяемых условий сформулированное утверждение остается справедливым и для обобщенной задачи Валле Пуссена, в которой общее число краевых условий больше порядка уравнения, $k_1 + k_2 + \ldots + k_m > n$ (см. [11]–[13]).

Из последнего утверждения немедленно вытекает следующая теорема о дифференциальном неравенстве чаплыгинского типа.

Если $L \in \mathfrak{T}([a,b])$ *и*

$$v^{(i)}(t_j) = u^{(i)}(t_j),\ \ i = 0,\dots,k_j-1;\ \ j = 1,\dots,m, \quad (Lv)(t) \geqslant (Lu)(t), \quad t \in [a,b],$$

то $\pi(t)v(t) \geqslant \pi(t)u(t), \quad t \in [a,b]$.

Теорема С. А. Чаплыгина (см. [14]) получается отсюда при $m = 1$, так как в этом случае задача (0.5)–(0.6) превращается в задачу Коши ($k_1 = n$, $\pi(t) = 1$ при $t > a$) (см. также [38, 16]).

4. Разрешимость краевой задачи с интегральными краевыми условиями (R. Bellman [17]).

Рассмотрим краевые условия

$$l_i x \doteq \int_a^b x(t)\, g_i(t)\, dt = c_i, \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{0.8}$$

Если $L \in \mathfrak{T}([a,b])$ *и функции* $g_1, g_2, \dots, g_n$ *образуют чебышевскую систему на* $[a,b]$ *(см. ниже), то задача* (0.5), (0.8) *однозначно разрешима.*

Неосцилляция полезна и при исследовании других типов краевых задач, в частности периодической краевой задачи [18]–[23].

5. Связь между неосцилляцией и теорией осцилляционных по Гантмахеру–Крейну ядер [24].

Ядро $G(t,s)$ называется осцилляционным (в смысле Гантмахера и Крейна), если $G(t,s)>0 \quad (a\leqslant t,s\leqslant b)$ и

$$\det\left(G(t_j,s_j)\right)_1^m\geqslant 0 \qquad \begin{pmatrix} a<t_1<\ldots<t_m<b\\ a<s_1<\ldots<s_m<b\end{pmatrix} \tag{0.9}$$

$(m=1,2,\ldots)$, причем при $t_i=s_i\ (i=1,\ldots,m)$ неравенства (0.9) строгие.

Интегральный оператор, порожденный осцилляционным ядром, обладает многими «хорошими» свойствами; в частности, он не повышает число перемен знака; его собственные числа все вещественны и различны, а m-я собственная функция имеет в (a,b) ровно $m-1$ нуль [24, 25] (см. также [26, 27]). Однако непосредственная проверка неравенств (0.9) — задача достаточно трудная. Между тем если ядро $G(t,s)$ с точностью до знака совпадает с функцией Грина уравнения (0.1) при интерполяционных краевых условиях $\Phi(x,a)\geqslant n-k$, $\Phi(x,b)\geqslant k$, то для выполнения неравенств (0.9) необходимо и достаточно, чтобы $L\in\mathfrak{T}([a,b])$ [25].

6. В работах [28, 29] вопрос о числе переключений оптимального по быстродействию управления линейной нестационарной системы со скалярным управлением сводится к неосцилляции некоторого скалярного (квазидифференциального) уравнения.

Приведенные соображения подтверждают актуальность получения эффективных способов проверки неосцилляции. Классические теоремы Штурма о разделении нулей и теорема сравнения являются, по-видимому, первыми результатами в этом направлении. Центральным результатом здесь является критерий А. Ю. Левина–Ф. Хартмана [1]–[4] (см. § 5.)

§ 1. Уравнение второго порядка

1. Рассмотрим линейное уравнение второго порядка

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0 \tag{1.1}$$

с локально суммируемыми на $I\doteq(\alpha,\beta)$ коэффициентами p, q. При этом все равенства и неравенства между суммируемыми функциями понимаются выполняющимися почти всюду относительно меры Лебега.

В дальнейшем нам придется ссылаться на следующие две теоремы Штурма (см. [30, с. 252], [31, с. 81], [32, с. 225], [33, т. 1, с. 166]), которые мы сформулируем в удобных для нас терминах. Хотя в процитированных работах предполагается непрерывность коэффициентов p, q, доказательства остаются в силе и для локально суммируемых p, q.

Теорема 1 (теорема сравнения Штурма). *Пусть*

$$L_i\,y\doteq y''+p(t)\,y'+q_i(t)\,y=0,\quad i=1,2,\quad \text{и}\quad q_1(t)\leqslant q_2(t)\quad (t\in I).$$

Тогда, если $L_2\in\mathfrak{T}(J)$, *то и* $L_1\in\mathfrak{T}(J)$ $\quad$ ($J\subset I$ — *промежуток*).

Теорема 2 (теорема Штурма о разделении нулей). *Пусть* x — *решение уравнения* (1.1) *такое, что* $x(t_1)=x(t_2)=0$, $x(t)\neq 0$ $(t\in(t_1,t_2))$. *Тогда любое другое решение* y *этого уравнения, линейно независимое с* x, *имеет ровно один нуль на* (t_1,t_2).

Из теоремы 2 сразу следует первая часть следующего утверждения.

Теорема 3. 1. *Если существует решение уравнения* (1.1), *не обращающееся в нуль на* $[a,b]\subset I$ $\quad\big((a,b)\subset I\big)$, *то* $L\in\mathfrak{T}([a,b])$ $\quad\big(L\in\mathfrak{T}((a,b))\big)$.

2. *Если* $L\in\mathfrak{T}([a,b])$ $\quad\big(L\in\mathfrak{T}([a,b))\big)$, *то существует решение уравнения* (1.1), *не обращающееся в нуль на* $[a,b]$ $\quad\big((a,b)\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 2. Пусть $J = [a, b]$. Определим решения $y_1(t)$ и $y_2(t)$ начальными условиями $y_1(a) = 0$, $y_1'(a) = 1$ и $y_2(b) = 0$, $y_2'(b) = -1$. Так как $L \in \mathfrak{T}([a, b])$, то

$$y_1(t) > 0 \quad (t \in (a, b]), \quad y_2(t) > 0 \quad (t \in [a, b)).$$

Решение $y_1(t) + y_2(t)$ — требуемое.

Если $L \in \mathfrak{T}([a, b))$, то требуемым является решение y_1. □

Решения, сохраняющего знак на $[a, b)$, может не существовать. Так, $L \doteq \frac{d^2}{dt^2} + 1 \in \mathfrak{T}([0, \pi))$. Однако любое решение уравнения $Lx = 0$ имеет в $[0, \pi)$ в точности один нуль.

Теорема 3 представляет собой пример *неэффективного* критерия, сформулированного в терминах решений уравнения (1.1), а не в терминах самого уравнения. Ряд нижеследующих утверждений — это *эффективные* (т. е. выраженные через коэффициенты уравнения) достаточные условия неосцилляции уравнения (1.1), не являющиеся необходимыми. Например, непосредственно из теоремы 1 следует, что

если $q(t) \leqslant 0$ *в* $J \subset I$, *то* $L \in \mathfrak{T}(J)$.

То, что этот признак не является необходимым, видно из примера: $L = \frac{d^2}{dt^2} + \lambda \in \mathfrak{T}([a, b])$, если $\lambda < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$.

2. Приведем здесь лишь несколько достаточных признаков неосцилляции; большое число других можно найти в [3, 21, 22, 23, 34, 35, 36].

Произвольное уравнение (1.1) умножением на $r(t) \doteq \exp\left(\int_\alpha^t p(s)\,ds\right)$ можно преобразовать к самосопряженному виду $(ry')' + rqy = 0$, а последнее уравнение подходящей заменой независимой переменной (см. цитированные выше работы) — к виду

$$Ly \doteq y'' + q(t)y = 0 \tag{1.2}$$

с сохранением неосцилляционных свойств; поэтому здесь мы ограничиваемся рассмотрением уравнения (1.2).

Непосредственно из теоремы 1 следует

Теорема 4. *Если* $\operatorname*{ess\,sup}_{t \in [a,b]} q(t) < \dfrac{\pi^2}{(b-a)^2}$, *то* $L \in \mathfrak{T}([a, b])$.

Далее, общее решение уравнения Эйлера

$$Ly \doteq y'' + \lambda \frac{y}{t^2} = 0$$

при $\lambda < \frac{1}{4}$ имеет вид:

$$y(t) = t^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4\lambda})}(c_1 + c_2 t^{\sqrt{1-4\lambda}}),$$

а при $\lambda = \frac{1}{4}$ —

$$y = t^{\frac{1}{2}}(c_1 + c_2 \ln t),$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Отсюда видно, что при $\lambda \leqslant \frac{1}{4}$ $L \in \mathfrak{T}\big((0, \infty)\big)$. Это вместе с теоремой 1 опять дает нам эффективное достаточное условие неосцилляции (на этот раз на полуоси $(0, +\infty)$).

Теорема 5. *Если* $q(t) \leqslant \dfrac{1}{4t^2}$, $\quad t \in (0, +\infty)$, *то* $L \in \mathfrak{T}\big((0, \infty)\big)$.

Теорема 6 (А. М. Ляпунов, см. [3]). *Если* $q(t) \geqslant 0$ *и* $\int_a^b q(t)\,dt \leqslant \frac{4}{b-a}$, *то* $L \in \mathfrak{T}([a, b])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть уравнение (1.2) имеет такое нетривиальное решение $y(t)$, что $\Phi(y, [a,b]) = 2$. Так как y не может иметь кратных нулей, то, не ограничивая общности, можно считать, что

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{1.3}$$

Функция y как решение краевой задачи (1.2), (1.3) удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(t) = -\int_a^b G(t,s)q(s)y(s)\,ds, \tag{1.4}$$

где

$$G(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{(b-t)(s-a)}{b-a}, & \text{если } a \leqslant s < t, \\ -\dfrac{(t-a)(b-s)}{b-a}, & \text{если } t \leqslant s \leqslant b, \end{cases}$$

— функция Грина уравнения $y'' = 0$ при краевых условиях (1.3). Отсюда видно, что при $t \neq s$

$$|G(t,s)| < \frac{(b-s)(s-a)}{b-a}. \tag{1.5}$$

Пусть $\max\limits_{s\in[a,b]} |y(s)| = |y(t^*)|$. Тогда из (1.4) и (1.5) следует

$$|y(t^*)| = \left|\int_a^b G(t^*,s)q(s)y(s)\,ds\right| \leqslant \int_a^b |G(t^*,s)|\,|y(s)|q(s)\,ds <$$
$$< |y(t^*)| \int_a^b \frac{(b-s)(s-a)q(s)}{b-a}\,ds \leqslant \frac{b-a}{4}\int_a^b q(s)\,ds,$$

так как $(b-s)(s-a) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$ для $s \in [a,b]$. Отсюда $1 < \dfrac{b-a}{4}\displaystyle\int_a^b q(s)\,ds$, что противоречит условию. □

Замечание 1. Константа 4 в условии теоремы 6 неулучшаема.

Это видно из следующего примера.

Пусть функция v дважды непрерывно дифференцируема на $[0,1]$ и $v(t) = t$ $(0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}-\delta)$,

$$v(t) = 1 - t \quad \left(t > \frac{1}{2} + \delta\right), \quad v(t) > 0, \quad v''(t) < 0 \quad \left(\frac{1}{2} - \delta < t < \frac{1}{2} + \delta\right).$$

Положим

$$q(t) = \begin{cases} -\frac{v''(t)}{v(t)}, & \text{если } t \in (0,1), \\ 0, & \text{если } t = 0,\ t = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что q непрерывна, $q(t) \geqslant 0$ на $[0,1]$; $L \doteq \frac{d^2}{dt^2} + q(t) \notin \mathfrak{T}([0,1])$, так как уравнение $Ly = 0$ имеет решение $y = v(t)$ и $\Phi(v, [0,1]) = 2$. Однако

$$\frac{v''}{v} = \left(\frac{v'}{v}\right)' + \left(\frac{v'}{v}\right)^2 \geqslant \left(\frac{v'}{v}\right)',$$

поэтому интеграл

$$\int_0^1 q(t)\,dt = -\int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} \left(\frac{v'}{v}\right)' dt = -\frac{v'}{v}\bigg|_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} = \frac{4}{1-2\delta}$$

может быть сделан сколь угодно близким к 4 при достаточно малом δ.

Тем не менее, как показывает нижеследующий пример, условие теоремы 6 не является необходимым.

По теореме 4 уравнение $y'' + (1-\varepsilon)\sin t\, y = 0$ при $0 < \varepsilon < 1 - \frac{2}{\pi}$ неосцилляционно на $[0,\pi]$ (так как $(1-\varepsilon)\sin t < 1 = \frac{\pi^2}{\pi^2}$), но

$$\int_0^\pi (1-\varepsilon)\sin t\, dt = 2(1-\varepsilon) > \frac{4}{\pi}.$$

В силу теоремы 1 получаем следствие теоремы 6.

Следствие 1. *Если*

$$\int_a^b q_+(t)\, dt \leqslant \frac{4}{b-a},$$

то $L \in \mathfrak{T}([a,b])$ $(q_+(t) = q(t)$ *при* $q(t) > 0, \quad q_+(t) = 0$ *при* $q(t) \leqslant 0)$.

Действительно, по теореме 6 $L_+ \doteq \frac{d^2}{dt^2} + q_+ \in \mathfrak{T}([a,b]),$ а так как $q(t) \leqslant q_+(t)$, то и $L \in \mathfrak{T}([a,b])$.

Из этого следствия видно, что и условие теоремы 4 также не является необходимым.

В самом деле, рассмотрим пример. Пусть

$$Ly \doteq y'' - (1+\varepsilon)\cos 2t\, y = 0 \qquad \left(0 < \varepsilon < \frac{4-\pi}{\pi}\right).$$

Здесь $\max\limits_{t\in[0,\pi]} |(1+\varepsilon)\cos 2t| = 1 + \varepsilon > 1 = \left(\frac{\pi^2}{\pi^2}\right)$. Однако

$$\int_0^\pi \bigl(-(1+\varepsilon)\cos 2t\bigr)_+\, dt = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1+\varepsilon)\cos 2t\, dt = 1 + \varepsilon < \frac{4}{\pi},$$

т. е. $L \in \mathfrak{T}([0,\pi])$.

3. Приведем теперь необходимое и достаточное условие (*критерий*) неосцилляции уравнения (1.2), который естественно назвать *полуэффективным* [1], так как он хотя и не выражается через коэффициент уравнения (1.2), но с его помощью можно получать достаточные признаки неосцилляции, выражающиеся через этот коэффициент.

Теорема 7 (Ch. I. de la Valee Poussin [37]). *Пусть* $[a,b] \subset I$. *Для того чтобы* $L \in \mathfrak{T}([a,b])$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала функция* v, *имеющая абсолютно непрерывную на* $[a,b]$ *производную, такая, что*

$$v(t) > 0, \qquad Lv \leqslant 0 \qquad (a < t \leqslant b). \tag{1.6}$$

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы 3. Докажем достаточность условий теоремы. Если $v(a) = 0$, то положим $\tilde v(t) = v(t) + \varepsilon u(t)$, где $\varepsilon > 0$, а $u(t)$ — решение уравнения (1.2) с начальными условиями $u(a) = 1$, $u'(a) = 0$. При достаточно малом ε $\tilde v(t) > 0$ на $[a,b]$. Поэтому можно, не ограничивая общности, считать, что уже с самого начала $v(t) > 0$ на $[a,b]$. Рассмотрим уравнение

$$Mx \doteq x'' - \frac{v''}{v}x = 0. \tag{1.7}$$

По теореме 3, $M \in \mathfrak{T}([a,b])$ (так как уравнение (1.7) имеет положительное на $[a,b]$ решение v). По условию теоремы, $v'' + q(t)v \leqslant 0$, т. е. $-\frac{v''}{v} \geqslant q(t)$. Утверждение настоящей теоремы теперь следует из теоремы 1. □

Рассуждая так же, как в вышеприведенном доказательстве, придем к следующему утверждению.

Теорема 8. *Если существует функция v, имеющая абсолютно непрерывную на $[a,b)$ производную, такая, что*
$$v(t)>0, \quad Lv\leqslant 0 \quad (a<t<b), \tag{1.8}$$
то $L\in\mathfrak{T}\big([a,b)\big)$.

Выбирая конкретные «пробные» функции v, получим эффективные признаки неосцилляции.

А. *Если* $q(t)\leqslant \dfrac{2}{(b-t)(t-a)}$ $(a<t<b)$, *то* $L\in\mathfrak{T}\big([a,b)\big)$.

Для доказательства достаточно взять $v(t)=\dfrac{(b-t)(t-a)}{2}$ и воспользоваться теоремой 8. Из приведенного утверждения получаем:

Б. *Если* $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in[a,b]} q(t)\leqslant \dfrac{8}{(b-a)^2}$, *то* $L\in\mathfrak{T}\big([a,b)\big)$.

Это утверждение хуже теоремы 3, так как $8<\pi^2$; мы привели его как иллюстрацию применения теоремы 8; близкое к теореме 3 утверждение получим, если возьмем $v(t)=\sin\frac{\pi(t-a)}{b-a}$ и воспользуемся теоремой 8; таким образом, приходим к утверждению

В. *Если* $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in[a,b]} q(t)\leqslant \dfrac{\pi^2}{(b-a)^2}$, *то* $L\in\mathfrak{T}\big([a,b)\big)$

(строгий знак в теореме 3 ослаблен до нестрогого, зато неосцилляция утверждается только на полуинтервале $[a,b)$).

4. В заключение этого параграфа приведем без доказательства полуэффективный критерий Н. В. Азбелева–З. Б. Цалюка–В. А. Кондратьева [38] для уравнения третьего порядка
$$Ly\doteq y'''+p_1(t)y''+p_2(t)y'+p_3(t)y=0, \quad t\in I\subset[a,b).$$
Пусть p_i имеют абсолютно непрерывные на I производные порядка $2-i$, $i=1,2,3$,
$$L^+z\doteq -z'''+\big(p_1(t)z\big)''-\big(p_2(t)z\big)''+\big(p_3(t)z\big)$$
— формально сопряженное в смысле Лагранжа выражение [30, с.205].

Теорема 9. *Для того чтобы $L\in\mathfrak{T}\big([a,b)\big)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали функции v_1,v_2, имеющие абсолютно непрерывные на I производные второго порядка, такие, что*
$$v_i(a)=0,\;\; v_i(t)>0 \;\text{ в }\; (a,b)\;\;(i=1,2), \quad Lv_1\leqslant 0, \quad L^+v_2\geqslant 0 \;\text{ в }\; (a,b).$$

§ 2. Уравнение n-го порядка. Марковские системы решений

Всюду, если не оговорено иное, рассматриваем уравнение (0.1) с локально суммируемыми на $I\doteq(\alpha,\beta)$ коэффициентами p_i, $i=1,2,\dots,n$. Этот факт будем кратко записывать так: $L\in\mathcal{L}_{loc}(I)$; если фиксирован промежуток $J\subset I$, то пишем $L\in\mathcal{L}(J)$.

1. Начнем с определений и вспомогательных утверждений.

Пусть $J\subset I$ — произвольный промежуток, $m\in\mathbb{N}$, $m\geqslant 2$. Обозначим через $C_*^{m-1}(J)$ множество функций $u:J\to\mathbb{R}$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $m-1$.

Система функций
$$\{u_k\}_{k=1}^m, \qquad u_k\in C_*^{m-1}(J) \tag{2.1}$$
называется *чебышевской* на J, если $\Phi\left(\sum\limits_{k=1}^m c_ku_k, J\right)\leqslant m-1$ при любых значениях c_k. Например, система функций
$$\{t^{k-1}\}_{k=1}^m \tag{2.2}$$
является чебышевской на $\mathbb{R}$.

Из определения неосцилляции следует, что $L \in \mathfrak{T}(J)$ в том и только том случае, если уравнение (0.1) имеет чебышевскую на J ФСР (тогда и любая другая ФСР этого уравнения будет чебышевской на J).

Система (2.1) называется *марковской* на J (M_J-системой), если любая её подсистема вида $\{u_i\}_{i=1}^k$ $(k=1,\dots,m)$ является чебышевской на J. Так, система (2.2) — марковская на $\mathbb{R}$.

Следующее утверждение есть простое следствие определений.

Лемма 1. *Если уравнение* (0.1) *обладает M_J-системой решений, то $L \in \mathfrak{T}(J)$.*

Пусть

$$[u_1,\dots,u_k](t) = [u;1,\dots,k](t) = \det\left(u_j^{(i-1)}(t)\right)$$

означает вронскиан системы $\{u_j\}_{j=1}^k$.

Лемма 2 (см. [9, с. 126]). *Пусть $u_k \in C_*^{m-1}(J)$, $k=1,\dots,m$, J — промежуток из I, $u_1(t)\neq 0$ на J. Тогда*

$$\left[\left(\frac{u_2}{u_1}\right)',\dots,\left(\frac{u_{k+1}}{u_1}\right)'\right] = \frac{[u_1,u_2,\dots,u_{k+1}]}{u_1^k},\quad k=1,2,\dots,m-1.$$

Лемма 3 (см. [9, с. 126]). *Пусть $u_k, y \in C_*^{m-1}(J)$, $k=1,\dots,m$, J — промежуток из I, $[u_1,\dots,u_k](t)\neq 0$ на J для $k=1,2,\dots,m$. Тогда*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{[u_1,\dots,u_k,y]}{[u:1,\dots,k+1]}\right) = \frac{[u;1,\dots,k][u_1,\dots,u_{k+1},y]}{[u;1,\dots,k+1]^2}\quad (t\in J,\ 1\leqslant k\leqslant m-1). \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Левая и правая части тождества (2.3) представляют собой линейные дифференциальные выражения порядка $k+1$ со старшим коэффициентом

$$\frac{[u;1,\dots,k]\,(t)}{[u;1,\dots,k+1]\,(t)} \neq 0$$

в J с одной и той же ФСР $u_1,\dots,u_{k+1}$ соответствующих им линейных однородных уравнений и поэтому совпадают. □

Лемма 4. *Система* (2.1) *тогда и только тогда является марковской на J, когда*

$$[u;1,\dots,k](t)\neq 0\quad (t\in J,\ k=1,\dots,m). \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (2.1) — M_J-система и найдутся такие $t_0\in J$ и k_0, $1\leqslant k_0\leqslant m$, что $[u;1,\dots,k](t_0)=0$. Тогда однородная система уравнений

$$\sum_{j=1}^k c_j u_j^{(i-1)}(t_0) = 0\quad (i=1,\dots,k)$$

имеет нетривиальное решение $(c_1^*,\dots,c_k^*)$; в силу этой системы

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^k c_i^* u_i,\, J\right) \geqslant \Phi\left(\sum_{i=1}^k c_i^* u_i,\, t_0\right) \geqslant k,$$

что противоречит определению M_J-системы.

Обратно, пусть выполнены неравенства (2.4). Тогда утверждение леммы очевидно для всех систем, содержащих одну функцию, так как в этом случае $[u;1] = u_1(t)\neq 0$ на J. Предположим, что оно верно для всех систем, содержащих p $(1\leqslant p< m)$ функций и что вопреки тому, что нужно доказать, существует линейная комбинация $y = \sum\limits_{i=1}^{p+1} c_i u_i$, обладающая свойством $\Phi(y, J) \geqslant p+1$. Это означает также, что $\Phi\left(\frac{y}{u_1}, J\right) \geqslant p+1$. По теореме Ролля $\Phi\left(\left(\frac{y}{u_1}\right)', J\right) \geqslant p$. Обозначим $\left(\frac{u_{i+1}}{u_1}\right)' = z_i$ $(i = 1, \ldots, p)$. Так как по лемме 2 $[z; 1, \ldots, k] = \dfrac{[u; 1, \ldots, k+1]}{u_1^k} \neq 0$ $(k = 1, \ldots, p)$, то по индуктивному предположению $\Phi\left(\sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k z_k, J\right) \leqslant p-1$ для любых α_k. Но $\left(\frac{y}{u_1}\right)' = \sum\limits_{k=1}^{p} c_{k+1} z_k$ и, следовательно, предыдущее неравенство противоречит тому, что $\Phi(y, J) \geqslant p+1$. По индукции утверждение леммы верно для любого числа функций. □

Если система (2.1) обладает свойством

$$[u; 1, \ldots, k](t) > 0 \quad (t \in J, \ k = 1, \ldots, m), \tag{2.5}$$

то будем называть ее M_J^+-системой. Умножив, если потребуется, соответствующую функцию произвольной M_J-системы на -1, можно добиться, чтобы она стала M_J^+-системой.

2. Далее речь в основном будет идти о системах решений уравнения (0.1), так что в (2.1) $m = n$.

Лемма 5. *Для любого $\tau \in I$ существует такое число $h > 0$, что $L \in \mathfrak{T}\big([\tau - h, t + h]\big)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим систему $\{\widehat{x}_k\}_{k=1}^n$ решений уравнения (0.1) начальными условиями

$$\widehat{x}_k^{(i-1)}(\tau) = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, \ldots, n), \tag{2.6}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера, $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$, $\delta_{kk} = 1$. Тогда вронскианы

$$\widehat{w}_k(\tau) \doteq [\widehat{x}; 1, \ldots, k](\tau) = 1 \quad (k = 1, \ldots, n).$$

В силу непрерывности $\widehat{w}_k(t) > 0$ $(t \in (\tau - h_1, \tau + h_1),\ k = 1, \ldots, n)$ при некотором $h_1 > 0$. Доказываемое утверждение получается из лемм 4 и 1 при $0 < h < h_1$. □

Лемма 6. *Пусть $a_m \to \tau-$, $b_m \to \tau+$ при $m \to \infty$ $(\tau \in I)$, $\{\widehat{x}_{\tau,k}\}_{k=1}^n$ — система решений уравнения (0.1), удовлетворяющая начальным условиям (2.6),*

$$u_m = \sum_{k=1}^{n} c_{km}\, \widehat{x}_{\tau,k}, \quad u = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \widehat{x}_{\tau,k}, \quad c_{km} \to c_k \tag{2.7}$$

при $m \to \infty$ $(k = 1, \ldots, n)$. Тогда $\Phi(u, \tau) \geqslant l \doteq \varlimsup\limits_{m \to \infty} \Phi(u_m, \tau)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 5 при достаточно большом m $L \in \mathfrak{T}\big([a_m, b_m]\big)$, поэтому $l < n$. Пусть $r \doteq \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n}\{k : c_k \neq 0\}$. Если $r = 1$, то при достаточно большом m $c_{1m} \neq 0$. В силу непрерывности $u_m(t) \neq 0$ в некоторой окрестности точки τ; это значит, что $l = 0$ и утверждение леммы тривиально. Пусть $r \geqslant 2$. Тогда

$$w_m \doteq [\widehat{x}_{\tau,1}, \ldots, \widehat{x}_{\tau,r-1}, u_m] = c_{rm}[\widehat{x}_{\tau,1}, \ldots, \widehat{x}_{\tau,r}] + \sum_{k=r+1}^{n} c_{km}[\widehat{x}_{\tau,1}, \ldots, \widehat{x}_{\tau,r-1}, \widehat{x}_{\tau,k}].$$

Из этого равенства видно, что $w_m(\tau) \neq 0$, а в силу непрерывности $u_m(t) \neq 0$, $t \in (\tau - h, \tau + h)$ при некотором $h > 0$. Это означает, что $\{\widehat{x}_{\tau,1}, \ldots, \widehat{x}_{\tau,r-1}, u_m\}$ — $M_{(\tau-h,\tau+h)}$-система. Следовательно,

$$\varlimsup_{m \to \infty} \Phi\big(u_m, (\tau - h, \tau + h)\big) \leqslant r - 1.$$

Так как при достаточно больших m $[a_m, b_m] \subset (\tau - h, \tau + h)$, то

$$r - 1 \geqslant \varlimsup_{m\to\infty} \Phi\big(u_m, (\tau - h, \tau + h)\big) \geqslant l.$$

По определению r, $u = \sum\limits_{k=r}^{n} c_k \,\widehat{x}_{\tau,k}$, поэтому $\Phi(u, \tau) \geqslant l$. □

3. Пусть U_s (U_{-s}, U_{+s}) — окрестность (левая полуокрестность, правая полуокрестность) точки $s \in I$.

Лемма 7. *Пусть x и y имеют непрерывные в U_s производные до порядка m включительно и $\Phi(x, s) = m$, $\Phi(y, s) \geqslant m - 1$. Тогда при достаточно малом $|\varepsilon|$ $\Phi(x + \varepsilon y, U_s) \geqslant m$.*

Доказательство. Если $\Phi(y, s) > m - 1$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $\Phi(y, s) = m - 1$. Тогда x и y по одну сторону от точки s имеют одинаковые знаки, а по другую — различные. Это значит, что функция $x + \varepsilon y$ при достаточно малом $|\varepsilon|$ имеет по крайней мере один нуль в $U_s \setminus \{s\}$ и, кроме того, $\Phi(x + \varepsilon y, s) = m - 1$. □

Теорема 10. *Пусть a, $b \in I$; тогда*

$$\mathfrak{T}\big((a, b)\big) = \mathfrak{T}\big((a, b]\big) = \mathfrak{T}\big([a, b)\big).$$

Доказательство (А. Ю. Левин [1]). Из соображений симметрии достаточно проверить, например, включение $\mathfrak{T}\big((a, b)\big) \subset \mathfrak{T}\big((a, b]\big)$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_i$ множество нетривиальных решений x уравнения (0.1), обладающих свойством

$$\Phi(x, (a, b)) \geqslant i, \quad \Phi(x, b) \geqslant n - i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Надо доказать, что $\mathfrak{M}_i = \varnothing$ $(i = 1, \ldots, n)$. Так как $L \in \mathfrak{T}\big((a, b)\big)$, то $\mathfrak{M}_n = \varnothing$. Пусть уже доказано, что $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_{n-1} = \ldots = \mathfrak{M}_{k+1} = \varnothing$. Предположим, что $\mathfrak{M}_k \neq \varnothing$ и $v \in \mathfrak{M}_k$ — решение, имеющее максимальное число r геометрически различных нулей в (a, b). Так как $\mathfrak{M}_{k+1} \neq \varnothing$, то $\Phi(v, (a, b)) = k$, поэтому $1 \leqslant r \leqslant k$. Пусть эти нули находятся в точках $t_1 < t_2 < \ldots < t_r$ и $k_i = \Phi(v, t_i)$ $(i = 1, \ldots, r)$; $k_1 + \ldots + k_r = k$.

Если $r < k$, то пусть y — нетривиальное решение уравнения (0.1), удовлетворяющее условиям

$$\Phi(y, t_i) \geqslant k_i - 1 \ \ (i = 1, \ldots, r), \ \ \Phi(y, b) \geqslant n - k - 1, \ \ y(s_j) = 0 \ \ (j = 1, \ldots, r) \tag{2.8}$$

(s_j — отличные от t_i и друг от друга точки (a, b)). Условия (2.8) определяют подпространство решений уравнения (0.1) размерности не менее 1, поэтому такой выбор $y(t) \not\equiv 0$ возможен.

Если $r = k$, то пусть y удовлетворяет начальным условиям

$$\Phi(y, b) = n - k - 1, \quad y^{(n-k-1)}(b) = 1. \tag{2.9}$$

Заметим, что первое равенство в (2.9) выполняется и в случае $r < k$.

Действительно, в этом случае хотя бы одно из чисел k_i больше 1 и y имеет в (a, b) не менее $r{+}1$ геометрически различных нулей, а так как при этом $\Phi(y, (a, b)) \geqslant k$, то неравенство $\Phi(y, b) \geqslant n - k$ означало бы, что $y \in \mathfrak{M}_k$. Но это противоречит определению v.

Выберем окрестности $U_{t_1}, \ldots, U_{t_r}, U_{-b}$ так, чтобы они попарно не пересекались, решение y не имело нулей в U_{-b}, и положим

$$z_s(t) = v(t) - \frac{v(s)}{y(s)} y(t) \quad (s \in U_{-b}).$$

В силу (2.9) $\Phi(v, b) \geqslant n - k > \Phi(y, b)$, так что $\frac{v(s)}{y(s)} \to 0$ при $s \to b - 0$. Согласно лемме 7 и (2.8) $\Phi(z, U_{t_i}) \geqslant k_i$, поэтому $\Phi\big(z, (a, b)\big) \geqslant k + 1$. Поскольку

$$\Phi(z, b) = \Phi(y, b) = n - k - 1, \ \text{ то } \ z \in \mathfrak{M}_{k+1} = \varnothing.$$

Это противоречие доказывает теорему. □

Теорема 11. *Если* $L \in \mathfrak{T}([a,b])$ $(a,b \in I)$, *то найдется такое* $a_1 < a$ $\big(b_1 > b\big)$, *что* $L \in \mathfrak{T}([a_1,\, b])$ $\big(L \in \mathfrak{T}([a,\, b_1])\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать существование $a_1 < a$. Пусть $L \in \mathfrak{T}([a,b])$, но $L \notin \mathfrak{T}([a_1,b])$ при любом $a_1 < a$. Это значит, что при достаточно больших m существуют решения u_m уравнения (0.1), обладающие свойствами

$$\Phi\left(u_m,\, \left[a - \frac{1}{m}, b\right]\right) \geqslant n, \qquad \Phi(u_m,\, [a,b]) \leqslant n-1. \tag{2.10}$$

Пусть $t_1, \ldots, t_{k_m}$ — геометрически различные нули u_m. Представим u_m согласно (2.7) и нормируем последовательность $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ так, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{km}^2 = 1$. В силу компактности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$ найдется подпоследовательность $u_{m_\nu} \to u$ при $\nu \to \infty$. Перейдя еще раз, если это потребуется, к подпоследовательности, получим, что $t_{i,m_\nu} \to t_i$ при $\nu \to \infty$. При этом некоторые из t_i могут совпасть. Пусть $\widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_l$ — геометрически различные точки множества t_i. Применим к каждой точке $\widetilde{t}_i$ лемму 6 (при $\tau = \widetilde{t}_i$). Тогда

$$\Phi(u_m,\, [a,b]) \geqslant \sum_{i=1}^{l} \Phi(u,\, \widetilde{t}_i) \geqslant n.$$

Это противоречие с (2.10) доказывает теорему. □

4. Ранее отмечалось, что неосцилляция уравнения (0.1) на промежутке $J \subset I$ эквивалентна тому, что всякая фундаментальная система его решений является чебышевской на J. Нижеследующее утверждение существенно уточняет это положение.

Теорема 12. *Пусть* $J = [a,b]$ *или* $J = (a,b)$, $a,b \in (\alpha,\beta)$. *Тогда, для того чтобы* $L \in \mathfrak{T}(J)$, *необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (0.1) *имело марковскую на* J *ФСР.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность обоснована леммой 1. Докажем необходимость условий теоремы.

Пусть $J = [a,b]$. По теореме 11 найдутся такие $a_1 < a$, $b_1 > b$, что $L \in \mathfrak{T}\big([a_1,b_1]\big)$. Определим систему решений $\{\widetilde{u}_k\}_1^n$ уравнения (0.1) условиями

$$\Phi(\widetilde{u}_k,\, a_1) = k-1, \quad \widetilde{u}_k^{(k-1)}(a_1) = 1, \quad \Phi(\widetilde{u}_k,\, b_1) = n-k \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{2.11}$$

Так как $L \in \mathfrak{T}\big([a_1,b_1]\big)$, то такие $\widetilde{u}_k$ существуют. Других нулей, кроме указанных в (2.11), $\widetilde{u}_k$ на $[a_1,b_1]$ не имеют и $\widetilde{u}_k(t) > 0$ в (a_1,b_1). При этом $[\widetilde{u}; 1, \ldots, n](a_1) = 1$, так что система $\{\widetilde{u}_k\}_1^n$ линейно независима и $[\widetilde{u}; 1, \ldots, n](t) > 0$ $(t \in [a_1,b_1])$.

Предположим, что найдется k_0 $(1 < k_0 < n)$ и $t_0 \in (a_1,b_1)$ такие, что $[\widetilde{u}; 1, \ldots, k_0](t_0) = 0$. В этом случае, как отмечалось в доказательстве леммы 4, существует нетривиальное решение уравнения (0.1) $u^*(t) = \sum\limits_{i=1}^{k_0} c_i^* \widetilde{u}_i$ такое, что $\Phi(u^*,\, t_0) \geqslant k$. Так как $\Phi(u^*,\, b_1) = n - k_0$, то $\Phi\left(u^*,\, [a_1,b_1]\right) \geqslant n$. Итак, получено противоречие с принадлежностью $L \in \mathfrak{T}([a_1,b_1])$; это доказывает, что $[\widetilde{u}; 1, \ldots, k](t) \neq 0$ $(t \in (a_1,b_1))$. А так как $[\widetilde{u}; 1, \ldots, k](a_1) = 1$, то $[\widetilde{u}; 1, \ldots, k](t) > 0$ $(t \in (a_1,b_1))$ и, значит, система $\{\widetilde{u}_k\}_1^n$ — марковская на $[a_1,b_1)$, а следовательно, марковская и на $[a,b]$.

Если $J = (a,b)$, то по теореме 10 $L \in \mathfrak{T}([a,b))$; определим систему $\{\overline{u}_k\}_{k=1}^n$ решений уравнения (0.1) начальными условиями $\Phi(\overline{u}_k,\, a) = n-k$, $\overline{u}^{(n-k)}(a) = 1$ (остальные условия несущественны). Точно так же, как и выше, показывается, что система $\{\overline{u}_k\}_{k=1}^n$ марковская на (a,b) (но не на $[a,b)$!). Этим доказательство теоремы завершается. □

Замечание 2. Для $J = [a,b)$ утверждение теоремы 12 не имеет места.

Действительно, уравнение $x'' + x = 0$ неосцилляционно на $[0, \pi)$, но марковской на $[0, \pi)$ системы решений не имеет: система $\{\sin t, \cos t\}$ является марковской лишь на $(0, \pi)$.

Замечание 3. На самом деле при доказательстве необходимости условий теоремы 12 было показано, что если $L \in \mathfrak{T}(J)$, то уравнение (0.1) имеет ФСР $\{\tilde{u}_k\}_1^n$, обладающую свойством (2.5). Таким образом, ФСР уравнения (0.1), удовлетворяющая условиям (2.11), *есть* $M^+_{[a,b]}$*-система.*

5. Пусть $L \notin \mathfrak{T}(I)$. Назовем полуинтервал $[a, b)$ $\big((a, b]\big)$ точным промежутком неосцилляции уравнения (0.1) с началом в точке a (концом в точке b), если

$$L \in \mathfrak{T}\big([a, b)\big) \setminus \mathfrak{T}\big([a, b]\big) \qquad \Big(L \in \mathfrak{T}\big((a, b]\big) \setminus \mathfrak{T}\big([a, b]\big)\Big).$$

Пусть $[a, b)$ $\big((a, b]\big)$ — точный промежуток неосцилляции уравнения (0.1). Назовем

$$\rho_+(a) \doteq b \quad \big(\rho_-(b) \doteq a\big)$$

правой сопряженной к точке a (левой сопряженной к точке b) точкой для уравнения (0.1) (отсюда английский термин *disconjugacy*, означающий неосцилляцию).

По лемме 5, $\rho_+(a) > a$, $\rho_-(b) < b$, а из определения неосцилляции следует, что обе функции неубывающие на (α, γ) $\big((\delta, \beta)\big)$, где

$$\gamma \doteq \sup\{t : t > a,\ L \in \mathfrak{T}([a, t))\} \,(\leqslant \beta) \quad \big(\delta \doteq \inf\{t : t < b,\ L \in \mathfrak{T}((t, b])\} \,(\geqslant \alpha)\big).$$

Теорема 13. *Пусть* $L \notin \mathfrak{T}(I)$. *Тогда* $\rho_+(a)$ $\big(\rho_-(b)\big)$ *есть возрастающий гомеоморфизм из* (α, γ) *в* (δ, β) $\big($*из* (δ, β) *в* $(\alpha, \gamma)\big)$, *обратный к которому есть* $\rho_+(b)$ $\big(\rho_-(a)\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что найдутся $a_1, a_2 \in (\alpha, \gamma)$, $a_2 > a_1$, для которых $\rho_+(a_1) = \rho_+(a_2) \doteq b$. Значит, $L \in \mathfrak{T}([a_i, b))$, $i = 1, 2$, но $L \notin \mathfrak{T}([a_2, b])$. Однако по теореме 10 $L \in \mathfrak{T}((a_1, b]) \subset \mathfrak{T}([a_2, b])$. Следовательно, ρ_+ — строго возрастающая функция. Точно такие же рассуждения проводим и для функции ρ_-.

Если $b = \rho_+(a)$ $(a \in (\alpha, \gamma))$, то $L \in \mathfrak{T}([a, b)) \setminus \mathfrak{T}([a, b])$. По теореме 10 $L \in \mathfrak{T}([a, b)) \setminus \mathfrak{T}((a, b])$, поэтому $a = \rho_-(b)$, то есть $b \in (\delta, \beta)$. Точно так же, если $a = \rho_-(b)$ $(b \in (\delta, \beta))$, то $b = \rho_+(a)$, то есть $a \in (\alpha, \gamma)$. Таким образом, ρ_+ взаимно-однозначно отображает интервал (α, γ) на (δ, β). Отсюда следует непрерывность обеих функций. □

6. Теорема 12 и её доказательство позволяют реализовать следующий алгоритм нахождения точного промежутка неосцилляции с началом в заданной точке $a \in I$.

1. Находим ФСР $\{u_{a,k}\}_{k=1}^n$ уравнения (0.1), удовлетворяющую условиям

$$u_{a,k}^{(i-1)}(a) = \delta_{k,n-i+1} \quad (k, i = 1, \ldots, n); \tag{2.12}$$

фактически нужно найти лишь первые $n - 1$ решений этой системы. Определители $w_{a,k} = [u_a; 1, \ldots, k]$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ равны нулю в точке a.

2. Находим первые после a нули t_k^* функций $w_{a,k}$, т. е.

$$t_k^* \doteq \min\{t :\ w_{a,k}(t) = 0,\ t > a\}, \quad k = 1, \ldots, n-1$$

(если $w_{a,k}$ в нуль не обращается, то полагаем $t_k^* = \beta$).

3. Полагаем $b = \rho_+(a) = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \{t_k^*\}$.

В самом деле, по построению $w_{a,k}(t) \neq 0\,(k = 1, \ldots, n-1)$ при $t \in (a, b)$, и так как $w_{a,n}(t) \neq 0$ при $t \in I$, то по лемме 4 $\{u_{a,k}\}_{k=1}^n$ — $M_{(a,b)}$-система. По теореме 12, $L \in \mathfrak{T}((a, b))$, а по теореме 10, $L \in \mathfrak{T}([a, b))$. Если же $b \neq \beta$, то хотя бы одно из чисел $w_{a,k}(b) = 0$, поэтому $L \notin \mathfrak{T}([a, b])$.

§ 3. Факторизация Пойя–Маммана. Обобщенная теорема Ролля

1. Факторизация Пойя– Маммана ([6, 7]).

Теорема 14. *Пусть* $J = [a, b]$ *или* $J = (a, b)$, $a, b \in I$. *Для того чтобы на* J *имело место представление* (0.4), *где* $h_k(t) > 0$, $t \in J$, h_k *абсолютно непрерывны на* J $(k = 1, \dots, n-1)$, h_n *локально суммируема на* J, $h_n(t) > 0$ *п. в., необходимо и достаточно, чтобы* $L \in \mathfrak{T}(J)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность. Пусть $L \in \mathfrak{T}(J)$. В силу теоремы 12 и замечания 3 уравнение (0.1) имеет M_J^+-систему решений $\{u_k\}_{k=1}^n$, т. е. выполняются неравенства (2.5).

Обозначив $w_k \doteq [u; 1, \dots, k]$, $k = 1, \dots, n$, положим

$$h_0 \doteq \frac{1}{w_1}, \quad h_k \doteq \frac{w_k^2}{w_{k-1}w_{k+1}} \quad (k = 1, \dots, n-1), \quad h_n \doteq \frac{w_n}{w_{n-1}},$$

$$L_k u \doteq \frac{[u_1, \dots, u_k, u]}{w_k} \quad (k = 1, \dots, n), \quad L_0 u \doteq h_0 u.$$

Функции h_k и $L_k u$ абсолютно непрерывны, причем $h_k(t) > 0$ на J $(k = 1, \dots, n-1)$, функции h_n и $L_n u$ локально суммируемы на J, причем $h_n(t) > 0$ п. в. на J. Представление (0.4) получается n-кратным применением тождества (2.3) и очевидного тождества $L_n u \equiv Lu$.

Необходимость. Пусть имеет место представление (0.4). Обозначим

$$L_0 u \doteq h_0\, u, \qquad L_k u \doteq h_k \frac{d}{dt}\, L_{k-1} u, \quad k = 1, \dots, n \tag{3.1}$$

и положим

$$u_1(t) \doteq \frac{1}{h_0(t)}, \quad u_k(t) \doteq \frac{1}{h_0(t)} \int_a^t \frac{dt_1}{h_1(t_1)} \int_a^{t_1} \cdots \int_a^{t_{k-2}} \frac{dt_{k-1}}{h_{k-1}(t_{k-1})} \tag{3.2}$$

$(a \in J,\ 2 \leqslant k \leqslant n,\ t_0 = t)$. Непосредственным счетом убеждаемся, что

$$L_k u_i = 0 \ \ (i = 1, \dots, k,\ k = 1, \dots, n), \quad L_k u_{k+1} = 1 \ \ (k = 1, \dots, n-1), \tag{3.3}$$

и так как $L_n = L$, то $\{u_k\}_{k=1}^n$ — система решений уравнения (0.1).

Докажем тождество

$$[u_1, \dots, u_k, u] = (h_0 \cdot \ldots \cdot h_k)^{-1}\, w_k\, L_k u, \quad k = 1, \dots, n, \ \ t \in J. \tag{3.4}$$

При $k = 1$ оно проверяется непосредственно. Предположим, что это тождество верно для $1, 2, \dots, k$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$. Тогда в силу (3.3) при $u = u_{k+1}$ получаем

$$w_{k+1} = (h_0 \cdot \ldots \cdot h_k)^{-1}\, w_k. \tag{3.5}$$

Так как $w_1(t) = u_1(t) = \frac{1}{h_0(t)} > 0$ $(t \in J)$, то отсюда следует, что

$$w_1(t) > 0, \quad w_2(t) > 0, \ \dots, \ w_{k+1}(t) > 0 \quad (t \in J).$$

Выразим из (3.5) $h_0 \cdot \ldots \cdot h_k = \frac{w_k}{w_{k+1}}$ и снова применим лемму 3:

$$L_{k+1} u = h_{k+1} \frac{d}{dt} L_k u = h_{k+1}\, h_0 \cdot \ldots \cdot h_k \cdot \frac{[u_1, \dots, u_k, u]}{w_k} =$$
$$= h_{k+1} \frac{d}{dt} \frac{[u_1, \dots, u_{k+1}, u]}{w_{k+1}} = h_0 \cdot \ldots \cdot h_{k+1} \frac{[u_1, \dots, u_k, u]}{w_{k+1}}.$$

По индукции (3.4), а значит, и (3.5) верно для всех $k = 1, 2, \dots, n$. Следовательно, выполняются неравенства (2.5), т. е. система, определенная равенствами (3.2), есть M_J-система. По теореме 12, $L \in \mathfrak{T}(J)$. □

Замечание 4. Г. Маммана [7] предлагал вместо представления (0.4) эквивалентную форму

$$L = \left(\frac{d}{dt} + m_n\right)\left(\frac{d}{dt} + m_{n-1}\right)\dots\left(\frac{d}{dt} + m_1\right) \tag{3.6}$$

$(m_n \in \mathcal{L}_{loc}(I),\ m_k \in C_*^{n-k}(J),\ k = 1, \dots, n-1).$

Переход от (0.4) к (3.6) и обратно очевиден.

2. Уравнение с постоянными коэффициентами. Пусть коэффициенты уравнения (0.1) постоянные: $p_k(t) \equiv p_k \equiv \text{const},\ k = 1, 2, \dots, n,\quad \mathcal{P}(\lambda) \doteq \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n$ — характеристический многочлен выражения L. Из теоремы 14 и замечания 4 получаем следующее утверждение.

Теорема 15. *Для того чтобы уравнение* (0.1) *с постоянными коэффициентами было неосцилляционным на* $(-\infty, +\infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения* $\mathcal{P}(\lambda)$ *были вещественными.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $\lambda_k,\ k = 1, 2, \dots, n$ — вещественные корни характеристического уравнения (не обязательно различные). Тогда разложению

$$\mathcal{P}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

соответствует представление

$$L = (\frac{d}{dt} - \lambda_1)(\frac{d}{dt} - \lambda_2)\cdots(\frac{d}{dt} - \lambda_n),$$

т. е. имеет место представление (3.6).

Необходимость. Предположим, что характеристическое уравнение имеет пару сопряженных невещественных корней $\gamma \pm \delta i,\ \delta \neq 0$. Тогда уравнение (0.1) имеет решение $y = e^{\gamma t}\cos\delta t$, для которого $\Phi\big(y, (-\infty, +\infty)\big) = \infty$.

3. Обобщенная теорема Ролля (ср. [9, с. 63]).

Пусть $J \subset I$ — промежуток. Число геометрически различных нулей непрерывной функции $v : J \to \mathbb{R}$ на J обозначим $\Psi(v, J)$; если $v(t) \equiv 0$ на отрезке $[t_1, t_2]$ и отлично от нуля в окрестности этого отрезка, то считаем $\Psi(v, [t_1, t_2]) = 1$; число перемен знака кусочно непрерывной функции $z : J \to \mathbb{R}$ обозначим $\mathfrak{S}(z, J)$.

Теорема 16. *Пусть* $J = [a, b]$ *или* $J = (a, b), a, b \in I,\ L \in \mathfrak{T}(J), u \in C_*^{n-1}$, *функция* Lu *непрерывна на* J *и* $\Phi(u, J) = m\ (n \leqslant m < \infty)$. *Тогда* $\Psi(Lu, J) \geqslant m - n$.

Доказательство. По теореме 14 имеет место представление (0.4). Определим L_k по формулам (3.1) и построим систему $\{u_k\}_{k=1}^n$ согласно (3.2). Тогда из представления (3.4) получаем

$$L_k u = \big((h_0 \cdot \ldots \cdot h_k)/w_k\big)[u_1, \dots, u_k,\, u] \quad (k = 1, \dots, n). \tag{3.7}$$

Из (3.7) видно, что имеет место импликация

$$\big(\Phi(u, t_0) = \nu\big) \Longrightarrow \big((L_j u)(t_0) = 0,\ j = 0,\ \dots, \nu - 1,\ \nu \geqslant 2\big). \tag{3.8}$$

Пусть $t_1 < \ldots < t_l$ — различные нули u, $\quad k_i = \Phi(u, t_i), \quad \sum\limits_{i=1}^{l} k_i = m$. Если $l = 1$, то утверждение теоремы очевидно (при $m = n$ нечего доказывать, при $m \geqslant n + 1$ утверждение теоремы следует из (3.7)). Пусть $l \geqslant 2,\ l_j$ — число нулей u кратности j, $\quad k \doteq \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant l}\{k_i\}$. Тогда

$$l_1 + \ldots + l_k = l, \qquad l_1 + 2l_2 + \ldots\ kl_k = m. \tag{3.9}$$

В силу (3.8) L_1u имеет нули в $l-l_1$ точках из числа t_i (в тех из них, которые не являются простыми нулями u) и, кроме того, по теореме Ролля не менее $l-1$ нулей в точках $t_i' \in (t_i, t_{i+1})$, $\quad i = 1, \dots, l-1$. Таким образом,

$$\Psi(L_1u, J) \geqslant (l-1) + (l-l_1) = 2l - l_1 - 1.$$

Аналогично

$$\Psi(L_2u, J) \geqslant (2l - l_1 - 1) - 1 + (l - l_1 - l_2) = 3l - 2l_1 - l_2 - 2,$$

и вообще, при $k > 2$ нетрудно подсчитать, учитывая (3.9), что

$$\Psi(L_{k-1}u, J) \geqslant kl - (k-1)l_1 - \dots - l_{k-1} - k + 1 = m - k + 1.$$

При $k = n+1$ теорема доказана. При $k \leqslant n$ в дальнейшем переход от L_j к L_{j+1} уменьшает оценку снизу числа нулей L_ju на единицу:

$$\Psi(L_ku, J) \geqslant m - k, \ \dots, \ \Psi(L_nu, J) = \Psi(Lu, J) \geqslant m - n. \qquad \square$$

Замечание 5. Из доказательства теоремы 16 видно, что по крайней мере $m-n$ нулей Lu расположены строго между t_1 и t_l.

Следствие 2. *При условиях теоремы* 16 *имеет место импликация*

$$\big(\Phi(u, J) \geqslant m \quad (k \leqslant m < \infty)\big) \Longrightarrow \big(\Psi(L_ku, J) \geqslant m - k\big), \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Следствие 3. *Пусть* Lu *кусочно непрерывна и выполнены остальные условия теоремы* 16. *Тогда* $\mathfrak{S}(Lu, J) \geqslant m - n$.

§ 4. Декартовы системы решений

1. Нашей следующей задачей является усиление (в части необходимости) теоремы 12.

Система (2.1) называется декартовой на J (D_J-системой), если для любой нетривиальной линейной комбинации $y = \sum\limits_{i=1}^{n} c_iu_i(t)$ $\quad \Phi(y,\, J)$ не превосходит числа перемен знака в последовательности коэффициентов $c_1, c_2, \dots, c_n$ (при этом нулевые c_i не учитываются).

Лемма 8 (см. [9, с. 62]). *Для того чтобы* (2.1) *была* D_J*-системой, необходимо и достаточно, чтобы определители*

$$[u; i_1, \dots, i_k](t), \quad 1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n \tag{4.1}$$

имели в J *один и тот же строгий знак, зависящий лишь от* k.

Из этой леммы следует, что любая подсистема вида $\{u_{k_j}\}_{j=1}^r$ $\quad (1 \leqslant k_1 < \dots < k_r \leqslant n)$ D_J-системы $\{u_k\}_{k=1}^n$ сама является D_J-системой.

Число вронскианов, знак которых нужно проверять, можно существенно уменьшить по сравнению с (4.1).

Лемма 9 (см. [24, с. 307]). *Для того чтобы* (2.1) *была* D_J*-системой, достаточно, чтобы определители* $[u; i, \dots, j](t)$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$ *имели в* J *один и тот же строгий знак, зависящий лишь от порядка определителя.*

Если $[u; i, \dots, j](t) > 0$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$ на J для определителей всех порядков, то система называется D_J^+-системой.

Набор экспонент

$$\left\{e^{\lambda_k t}\right\}_{k=1}^n \qquad (\lambda_1 < \dots < \lambda_n) \tag{4.2}$$

является $D^+_{(-\infty,+\infty)}$-системой, так как здесь

$$[u;i_1,\ldots,i_k](t)=e^{\lambda_{i_1}t}\cdot\ldots\cdot e^{\lambda_{i_k}t}\cdot\det\left(\lambda_{i_l}^{j-1}\right)_{j,l=1}^{k}>0$$

для всех $t\in\mathbb{R}$ и $k=1,2,\ldots,n$, $\quad$ ($\det\left(\lambda_{i_l}^{j-1}\right)_{j,l=1}^{k}$ — определитель Вандермонда).

Точно так же показывается, что набор степенных функций $\{t^{k-1}\}_{k=1}^n$ является $D^+_{(0,+\infty)}$-системой.

2. Приведем основное утверждение этого параграфа.

Теорема 17. *Пусть* $J=[a,b]$ *или* $J=(a,b)$, $\quad a,b\in I$. *Тогда, для того чтобы* $L\in\mathfrak{T}(J)$, *необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (0.1) *имело декартову на* J *ФСР.*

Доказательство. Так как всякая D_J-система есть в то же время и M_J-система, то достаточность условий теоремы вытекает из теоремы 12. Докажем их необходимость. Достаточно рассмотреть случай $J=[a,b]$.

Покажем, что построенная при доказательстве теоремы 12 система $\{\widetilde{u}_k\}_{k=1}^n$ решений уравнения (0.1), удовлетворяющая условиям (2.11), есть $D^+_{(a_1,b_1)}$-система (см. обозначения доказательства теоремы 12); согласно лемме 9 надо показать, что

$$[\widetilde{u};i,\ldots,j](t)>0\quad(t\in(a_1,b_1),\quad 1\leqslant i<j\leqslant n).$$

Предположим, что найдется такое $t_0\in(a_1,b_1)$, что

$$[\widetilde{u};i_0,\ldots,j_0](t_0)=0\quad(1\leqslant i_0<j_0\leqslant n).$$

Тогда существует нетривиальная линейная комбинация — решение уравнения (0.1) — $y_{i_0j_0}=\sum\limits_{k=i_0}^{j_0}c_k\widetilde{u}_k$ такая, что $\Phi\big(y_{i_0j_0},\,t_0\big)\geqslant j_0-i_0+1$. А так как

$$\Phi\big(y_{i_0j_0},\,a_1\big)\geqslant i_0-1,\quad \Phi\big(y_{i_0j_0},\,b_1\big)\geqslant n-j_0,\quad\text{то}\quad \Phi\left(y_{i_0j_0},\,[a_1,b_1]\right)\geqslant n,$$

что противоречит неосцилляции уравнения (0.1).

Итак, $[\widetilde{u};i,\ldots,j](t)\neq 0\quad(t\in(a_1,b_1),\ 1\leqslant i<j\leqslant n)$. Из леммы 3 имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{[\widetilde{u};i,\ldots,j]}{[\widetilde{u};i-1,\ldots,j-1]}\right)=\frac{[\widetilde{u};i,\ldots,j-1]\,[\widetilde{u};i-1,\ldots,j]}{[\widetilde{u};i-1,\ldots,j-1]^2}.\tag{4.3}$$

Так как $u_1(t)>0$ в (a_1,b_1), то $\{\widetilde{u}_1\}-D^+_{(a_1,b_1)}$-система. Покажем, что

$$[\widetilde{u};i,\ldots,p+1](t)>0\quad(1\leqslant i\leqslant p,\ t\in(a_1,b_1)).\tag{4.4}$$

При $i=1$ это верно в силу (2.5). Пусть (4.4) верно для $i-1$. Так как $[\widetilde{u};i,\ldots,p+1](a_1)=0$, то из (4.3) при $j=p+1$ получим (4.4). Значит, $\{\tilde{u}_k\}_1^{p+1}$ — $D^+_{(a_1,b_1)}$-система, следовательно, и $D^+_{[a,b]}$-система. □

Замечание 6. Как видно из доказательства теоремы, неосцилляционное на J уравнение обладает D^+_J-системой решений.

3. Введем еще один класс систем функций, промежуточный между классами марковских и декартовых систем (см. [1]).

Пусть $u_k\in C^m_*(J)$, $k=1,\ldots,m$, и $[u;i_1,\ldots,i_p\setminus j_1,\ldots,j_q]$ означает вронскиан системы функций, которая получается из системы $\{u_{i_1},\ldots,u_{i_p}\}$ удалением подсистемы $\{u_{j_1},\ldots,u_{j_p}\}$.

M_J^+-система (2.1) называется S_J^+-системой, если для $k = 1, \ldots, m-1$ системы функций $\{u_1, \ldots, u_m\} \setminus \{u_k\}$ являются M_J^+-системами. Другими словами, система функций (2.1) будет S_J^+-системой, если

$$[u; 1, \ldots, j](t) > 0, \quad j = 1, \ldots, m; \quad [u; 1, \ldots, j \setminus k](t) > 0 \quad \text{для всех} \quad j = 2, \ldots m,$$

$k = 1, \ldots j-1$ $(t \in J)$. Непосредственно из определения следует, что всякая S_J^+-система является M_J^+-системой, а всякая D_J^+-система есть S_J^+-система. Таким образом, получаем из теорем 12 и 17

Следствие 4. *Пусть $J = [a, b]$ или $J = (a, b)$, $a, b \in I$. Тогда, для того чтобы $L \in \mathfrak{T}(J)$, необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (0.1) *имело S_J^+-систему решений.*

Заметим, что понятие S_J^+-системы при $m > 2$ шире, чем понятие D_J^+-системы. Так, например, функции $1, t+1, (t+1)^2 - c$ при $1 < c < 4$ образуют $S_{[0,1]}^+$-систему, так как при $t \in [0, 1]$

$$[u; 1](t) = [u; 1, 2](t) = 1, \quad [u; 1, 2, 3](t) = 2 \quad [u; 2](t) = 1 + t > 0,$$
$$[u; 2, 3](t) = (t+1)^2 + c > 0, \quad [u; 1, 3](t) = 2(t+1) > 0,$$

однако эти функции не образуют $D_{[0,1]}^+$-систему, так как определитель
$[u; 3](t) = (t+1)^2 - c$ меняет знак на $[0, 1]$.

4. Следующее утверждение будем называть леммой замещения.

Лемма 10. *Пусть $\{v_i\}_0^m$ — D_J^+-система, $0 \leqslant k \leqslant m$, $u \in C_*^m(J)$,*

$$u^{(i)}(a) = v_k^{(i)}(a), \qquad i = 0, \ldots, m, \tag{4.5}$$

$$[v_0, \ldots, v_{k-1}, u, v_{k+1}, \ldots, v_m](t) > 0, \qquad t \in [a, b]. \tag{4.6}$$

Тогда $\{v_0, \ldots, v_{k-1}, u, v_{k+1}, \ldots, v_m\}$ — D_J^+-система.

(При $k = 0$ вронскиан в левой части (4.6) есть $[u, v_1, \ldots, v_m]$, при $k = m$ — этот вронскиан есть $[v_0, \ldots, v_{m-1}, u]$; аналогично понимаются и соответствующие системы функций.)

Доказательство. Обозначим $\widetilde{v}_i = v_i$ при $i \neq k$, $\widetilde{v}_k = u$. Согласно лемме 9 надо доказать, что

$$[\widetilde{v}; i, \ldots, i+j]\,(t) > 0, \ \ t \in [a, b] \ \text{ для } j = m-1, \ldots, 1 \ \text{ и } \ i = 0, \ldots, m-j. \tag{4.7}$$

При $i > k$ или $i + j < k$ неравенство следует из условий леммы. Пусть $i \leqslant k \leqslant i + j$. При $j = m$, $i = 0$ неравенство (4.7) верно в силу (4.6). Пусть (4.7) верно для $j = m, \ldots, j_0 + 1$ и $i = 0, \ldots, m - j_0$, $(1 \leqslant j_0 \leqslant m-1)$.

Согласно лемме 3

$$\frac{d}{dt}\frac{[\widetilde{v};\ i, \ldots, i+j_0]}{[\widetilde{v};\ i, \ldots, i+j_0+1 \setminus k]} = \frac{[\widetilde{v};\ i, \ldots, i+j_0 \setminus k][\widetilde{v};\ i, \ldots, i+j_0+1]}{[\widetilde{v};\ i, \ldots, i+j_0+1 \setminus k]^2} \tag{4.8}$$

$(0 \leqslant i \leqslant m - j_0 - 1)$ или

$$\frac{d}{dt}\frac{[\widetilde{v};\ i, \ldots, i+j_0]}{[\widetilde{v};\ i-1, \ldots, i+j_0 \setminus k]} = \frac{[\widetilde{v};\ i, \ldots, i+j_0 \setminus k][\widetilde{v};\ i-1, \ldots, i+j_0]}{[\widetilde{v};\ i-1, \ldots, i+j_0 \setminus k]^2} \tag{4.9}$$

$(1 \leqslant i \leqslant m - j_0)$. В силу начальных условий (4.5)

$$[\widetilde{v};\ i-1, \ldots, i+j_0](a) = [v;\ i-1, \ldots, i+j_0](a).$$

Кроме того,

$$[\widetilde{v};\ p, \ldots, p+j_0 \setminus k](t) = [v;\ p, \ldots, p+j_0 \setminus k](t) \quad \text{для} \ \ p = i-1 \quad \text{и} \ \ p = i;$$

из индуктивного допущения следует, что

$$[\widetilde{v};\ i,\dots,i+j_0+1](t)>0,\qquad t\in J,\quad 0\leqslant i\leqslant m-j_0-1,$$

или

$$[\widetilde{v};\ i-1,\dots,i+j_0](t)>0,\qquad t\in J,\quad 1\leqslant i\leqslant m-j_0.$$

Это вместе с тождествами (4.8) и (4.9) означает, что

$$[\widetilde{v};\ i,\dots,i+j_0](t)>0,\quad t\in J.$$

По индукции (4.7) верно для $j=m-1,\dots,1$ и $i=0,\dots,m-j$. □

§ 5. Полуэффективный критерий неосцилляции

1. Критерий, о котором здесь пойдет речь, получен практически одновременно А. Ю. Левиным [1] и Ф. Хартманом [2] (см. также [3, 4]). В наиболее общей редакции (см. [1]) этот критерий выглядит так:

для того чтобы $L\in\mathfrak{T}([a,b])$ $\big(L\in\mathfrak{T}([a,b))\big)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала* $S^+_{[a,b)}$ *-система* $\big(S^+_{(a,b)}$ *-система* $\big)$ *функций* $\{v_k\}_{k=1}^{n-1}$ *из* $C_*^{n-1}[a,b]$, *удовлетворяющая неравенствам* (*ср.* (1.6), (1.8))

$$(-1)^{n-k}\,(Lv_k)(t)\geqslant 0\quad \text{п. в. на}\quad [a,b];\quad k=1,\dots,n-1. \tag{5.1}$$

Здесь этот критерий доказывается в следующей несколько менее широкой форме (см. [2]). Это, однако, не слишком сузит применение его, так как все в действительности применяющиеся S^+ -системы являются также D^+ -системами.

Теорема 18. *Пусть* $a,b\in I$. *Для того чтобы*

$$L\in\mathfrak{T}\big([a,b]\big)\qquad \big(L\in\mathfrak{T}\big([a,b)\big)\big)\,,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала $D^+_{[a,b)}$ *-система* $\big(D^+_{(a,b)}$ *-система*$\big)$ *функций* $\{v_k\}_{k=1}^{n-1}$ *из* $C_*^{n-1}[a,b]$, *удовлетворяющая неравенствам* (5.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условий теоремы вытекает из теоремы 17; при этом функции v_k, $k=1,\dots,n-1$, — решения уравнения (0.1), то есть неравенства (5.1) выполняются как равенства.

Для доказательства достаточности нам понадобится два вспомогательных утверждения.

Лемма 11. *Пусть* $J=(a,b)$ *или* $J=[a,b)$ *и существует* D^+_J *-система* v_k, $k=1,\dots,n-1$, *удовлетворяющая неравенствам* (5.1). *Тогда существует функция* $v_0\in C_*^{n-1}(J)$ *такая, что* $Lv_0=0$ *п. в. на* $[a,b]$ *и* $\{v_k\}_{k=0}^{n-1}$ — D^+_J *-система.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $J=(a,b)$ и

$$q(t)\doteq p_1(t)+\frac{[v;1,\dots,n-1]'(t)}{[v;1,\dots,n-1](t)},\quad Mx\doteq(-1)^{n+1}\frac{[x,v_1,\dots,v_{n-1}]}{[v;1,\dots,n-1]}\ -$$

линейное дифференциальное выражение порядка $n-1$ с единичным старшим коэффициентом,

$$C_M(t,s)=\frac{\begin{vmatrix} v_1(s) & \dots & v_{n-1}(s)\\ \dots & \dots & \dots\\ v_1^{(n-3)}(s) & \dots & v_{n-1}^{(n-3)}(s)\\ v_1(t) & \dots & v_{n-1}(t)\end{vmatrix}}{[v;1,\dots,n-1](s)}\ -$$

функция Коши уравнения $Mx = 0$. Так как это уравнение имеет D_J^+-систему решений $\{v_k\}_{k=1}^{n-1}$, то, согласно теореме 17, $M \in \mathfrak{T}(J)$. Поэтому $C_M(t,s) > 0$ $(a \leqslant s \leqslant t < b)$. Кроме того, в силу неравенств (5.1)

$$(LC_M)(t,s) = \frac{\begin{vmatrix} v_1(s) & \dots & v_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ v_1^{(n-3)}(s) & \dots & v_{n-1}^{(n-3)}(s) \\ (Lv_1)(t) & \dots & (Lv_{n-1})(t) \end{vmatrix}}{[v;1,\dots,n-1](s)} \leqslant 0.$$

Функции q и $(LC_M)(\cdot,s)$, очевидно, суммируемы на $[a,b]$ (вторая при любом $s \in J$), функция $(LC_M)(t,\,\cdot)$ абсолютно непрерывна на J при почти всех $t \in [a,b]$; полагаем

$$K(t,s) = -\int_s^t (LC_M)(t,\tau)e^{-\int_s^\tau q(\sigma)\,d\sigma}\,d\tau, \qquad F(t) = (-1)^n\int_s^t (LC_M)(t,\tau)e^{-\int_a^\tau q(\sigma)\,d\sigma}\,d\tau.$$

Так как $(LC_M)(t,s) \leqslant 0$ п. в. на $[a,b]$, то $K(t,s) \geqslant 0$, $(-1)^{n+1}F(t) \geqslant 0$ $(a \leqslant t < b)$. Пусть g — решение линейного интегрального уравнения Вольтерры $g(t) = \int_a^t K(t,s)g(s)\,ds + F(t)$ в пространстве $\mathbb{L}_{[a,b]}$ с неотрицательным ядром и свободным членом F, которое существует, суммируемо и $(-1)^{n+1}g(t) \geqslant 0$ п. в. на $[a,b]$. Выберем f как решение задачи

$$f'(t) + q(t)f(t) = g(t), \quad f(a) = (-1)^{n+1}.$$

Тогда

$$f(t) = (-1)^{n+1}e^{-\int_a^t q(\sigma)\,d\sigma} + \int_a^t e^{-\int_\tau^t q(\sigma)\,d\sigma}g(\tau)\,d\tau; \tag{5.2}$$

при этом f, очевидно, абсолютно непрерывна и $(-1)^{n+1}f(t) > 0$ на $[a,b]$. Наконец, функцию v_0 определим как решение задачи

$$Mv_0 = f(t), \quad v_0^{(i)}(a) = 0, \quad i = 0,\dots,n-2.$$

Тогда

$$v_0(t) = \int_a^t C_M(t,s)f(s)\,ds. \tag{5.3}$$

Последовательно дифференцируя это представление, найдем

$$v_0^{(k)}(t) = \int_a^t \frac{\partial^k C_M(t,s)}{\partial t^k}f(s)\,ds, \quad k = 0,\dots,n-2; \tag{5.4}$$

$$v_0^{(n-1)}(t) = \int_a^t \frac{\partial^{n-1} C_M(t,s)}{\partial t^{n-1}}f(s)\,ds + f(t); \tag{5.5}$$

$$v_0^{(n)}(t) = \int_a^t \frac{\partial^n C_M(t,s)}{\partial t^n}f(s)\,ds + f'(t) + \frac{\partial^{n-1} C_M(t,t)}{\partial t^{n-1}}f(t), \tag{5.6}$$

где

$$\frac{\partial^{n-1} C_M(t,t)}{\partial t^{n-1}} = \frac{[v;1,\dots,n-1]'(t)}{[v;1,\dots,n-1](t)}.$$

С учётом этих равенств, определений q, g, f, K, F и представления (5.2)

$$\begin{aligned}(Lv_0)(t) = \int_a^t (LC_M)(t,s)f(s)\,ds + f'(t) + q(t)f(t) = \int_a^t (LC_M)(t,s)f(s)\,ds + g(t) = \\ = \int_a^t (LC_M)(t,s)\left(e^{-\int_a^s q(\sigma)\,d\sigma} + \int_a^s e^{-\int_\tau^s q(\sigma)\,d\sigma}g(\tau)\,d\tau\right)\,ds + \\ + \int_a^t \left(-\int_s^t (LC_M)(t,\tau)e^{-\int_s^\tau q(\sigma)\,d\sigma}\,d\tau\right)g(s)\,ds - \int_s^t (LC_M)(t,\tau)e^{-\int_a^\tau q(\sigma)\,d\sigma}\,d\tau \equiv 0.\end{aligned}$$

Непосредственная подстановка равенств (5.3)–(5.6) в $[v;0,\ldots,n-1]$ приводит к соотношениям

$$[v;0,\ldots,n-1](t)=(-1)^{n+1}f(t)[v;1,\ldots,n-1](t)>0 \quad \text{на} \quad [a,b]. \tag{5.7}$$

Так как согласно лемме 9 $[v;i,\ldots,j](t)>0 \quad (t\in J, \quad 1\leqslant i<j\leqslant n-1)$, то достаточно доказать, что

$$[v;0,\ldots,j](t)>0 \quad (t\in J, \quad 1\leqslant j\leqslant n-1). \tag{5.8}$$

При $j=n-1$ это неравенство выполнено (см. (5.7)). Предположим, что $[v;0,\ldots,j+1](t)>0$ $(t\in J, \quad 2\leqslant j\leqslant n-2)$. По лемме 3

$$\frac{d}{dt}\frac{[v;\,0,\ldots,j]}{[v;\,1,\ldots,j+1]}=\frac{[v;1,\ldots,j][v;0,\ldots,j+1]}{[v;1,\ldots,j+1]^2}. \tag{5.9}$$

Так как $[v;\,0,\ldots,j](a)=0$ и согласно (5.9) и индуктивному предположению $\dfrac{[v;\,0,\ldots,j]}{[v;\,1,\ldots,j+1]}$ — возрастающая функция, то $[v;\,0,\ldots,j](t)>0, \quad t\in J$. По индукции выполнены все неравенства (5.8).

Пусть теперь $J=[a,b)$. Согласно доказанному, существует функция $\widetilde{v}_0$ такая, что $L\widetilde{v}_0=0$ п. в. на $[a,b]$ и $\{\widetilde{v}_0,v_k\}_{k=1}^{n-1}$ — $D^+_{(a,b)}$-система. Определим z как решение задачи $Lz=0, \quad z^{(i)}(a)=(-1)^i\gamma, \quad i=0,\ldots,n-1$, где $\gamma>0$ таково, что $[z,v_i,\ldots,v_j](a)>0$, $1\leqslant i<j\leqslant n-1$. Тогда $\{z,v_1,\ldots,v_{n-1}\}$ — D^+-система в некоторой окрестности точки a. Легко видеть, что функция $v_0=\widetilde{v}_0+\varepsilon z$ при достаточно малом $\varepsilon>0$ — требуемая. □

Лемма 12. *Пусть* $J=(a,b)$ *или* $J=[a,b)$, $0\leqslant k\leqslant n-2$, $\{u_j\}_{j=0}^k$ — *система решений уравнения* (0.1), *а система* $\{v_j\}_{j=k+1}^{n-1}$ *удовлетворяет неравенствам* (5.1) *и такая, что*

$$\{u_0,\ldots,u_k,v_{k+1},\ldots,v_{n-1}\} \;-\; D^+_J - \textit{система}.$$

Тогда существует такое решение u_{k+1} *уравнения* (0.1), *что*

$$\{u_0,\ldots,u_{k+1},v_{k+2},\ldots,v_{n-1}\} \;-\; D^+_J - \textit{система}.$$

Доказательство в основном следует канве доказательства леммы 11.

Пусть

$$Nx \doteq \frac{[u_0,\ldots,u_k,v_{k+1},\ldots,v_{n-1},x]}{[u_0,\ldots,u_k,v_{k+1},\ldots,v_{n-1}]} \;-$$

линейное дифференциальное выражение n-го порядка с единичным старшим коэффициентом,

$$C_N(t,s)=\frac{\begin{vmatrix} u_0(s) & \ldots & u_k(s) & v_{k+1}(s) & \ldots & v_{n-1}(s)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ u_0^{(n-2)}(s) & \ldots & u_k^{(n-2)}(s) & v_{k+1}^{(n-2)}(s) & \ldots & v_{n-1}^{(n-2)}(s)\\ u_0(t) & \ldots & u_k(t) & v_{k+1}(t) & \ldots & v_{n-1}(t)\end{vmatrix}}{[u_0,\ldots,u_k,v_{k+1},\ldots,v_{n-1}](s)} \;-$$

функция Коши уравнения $Nx=0.$. Так как это уравнение имеет D^+_J-систему решений $\{u_0,\ldots,u_k,v_{k+1},\ldots,v_{n-1}\}$, то по теореме 17 $N\in\mathfrak{T}(J)$. Поэтому $C_N(t,s)>0$ $(a\leqslant s\leqslant t<b)$. Кроме того, в силу неравенств (5.1) $(LC_N)(t,s)=$

$$=\frac{\begin{vmatrix} u_0(s) & \ldots & u_k(s) & v_{k+1}(s) & \ldots & v_{n-1}(s)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ u_0^{(n-2)}(s) & \ldots & u_k^{(n-2)}(s) & v_{k+1}^{(n-2)}(s) & \ldots & v_{n-1}^{(n-2)}(s)\\ (Lu_0)(t,s) & \ldots & (Lu_k)(t,s) & (Lv_{k+1})(t,s) & \ldots & (Lv_{n-1})(t,s)\end{vmatrix}}{[u_0,\ldots,u_k,v_{k+1},\ldots,v_{n-1}](s)}\leqslant 0.$$

Функция $(LC_N)(\cdot,s)$, очевидно, суммируема на $[a,b]$ при любом $s\in J$, функция $(LC_N)(t,\cdot)$ абсолютно непрерывна на J при почти всех $t\in[a,b]$. Введем функции

$$K(t,s)\doteq-(LC_N(t,s)\,(\geqslant 0),\quad g(t)\doteq-(Lv_{k+1})(t),\qquad (-1)^{n-k}g(t)\geqslant 0\quad \text{п. в. на}\quad [a,b]$$

и определим f как решение интегрального уравнения Вольтерры

$$f(t)=\int_a^t K(t,s)f(s)\,ds+g(t)$$

в пространстве $\mathbb{L}_{[a,b]}$ с неотрицательным ядром и свободным членом $(-1)^{n-k}g(t)\geqslant 0$ п. в. на $[a,b]$; это решение существует, является суммируемым и $(-1)^{n-k}f(t)\geqslant 0$ п. в. на $[a,b]$.

Функцию u_{k+1} определим как решение задачи

$$(Nu_{k+1})(t)=f(t),\quad u_{k+1}^{(i)}(a)=v_{k+1}^{(i)}(a),\quad i=0,\ldots,n-1.$$

Тогда

$$u_{k+1}(t)=v_{k+1}(t)+\int_a^t C_N(t,s)f(s)\,ds. \tag{5.10}$$

Последовательно дифференцируя это представление, найдем

$$u_{k+1}^{(i)}(t)=\int_a^t \frac{\partial^i C_N(t,s)}{\partial t^i}f(s)\,ds,\quad i=0,\ldots,n-1; \tag{5.11}$$

$$u_{k+1}^{(n)}(t)=\int_a^t \frac{\partial^n C_N(t,s)}{\partial t^n}f(s)\,ds+f(t);$$

с учетом этих равенств, определений f, K, g и представления (5.10) имеем

$$(Lu_{k+1})(t)=(Lv_{k+1})(t)+\int_a^t (LC_N)(t,s)f(s)\,ds+f(t)\equiv 0\quad \text{п. в. на } [a,b],$$

т. е. u_{k+1} — решение уравнения (0.1). Подставив равенства (5.10)–(5.11) в определитель $[u_0,\ldots,u_{k+1},v_{k+2},\ldots,v_{n-1}]$, придем к соотношению

$$[u_0,\ldots,u_{k+1},v_{k+2},\ldots,v_{n-1}](t)=[u_0,\ldots,u_k,v_{k+1},\ldots,v_{n-1}](t)\times \\ \times\left(1+(-1)^{n+k}\int_a^t \frac{[u_0,\ldots,u_k,v_{k+2},\ldots,v_{n-1}](s)}{[u_0,\ldots,u_k,v_{k+1},\ldots,v_{n-1}](s)}f(s)\,ds\right)>0.$$

По лемме замещения 10

$$\{u_0,\ldots,u_{k+1},v_{k+2},\ldots,v_{n-1}\}\ -D_J^+-\text{система}.\qquad \square$$

Завершим теперь доказательство теоремы.

Пусть $J=(a,b)$ или $J=[a,b)$ и имеется D_J^+-система $\{v_k\}_{k=1}^{n-1}$, удовлетворяющая неравенствам (5.1). По лемме 11 имеем D_J^+-систему $\{v_k\}_{k=0}^{n-1}$, удовлетворяющую неравенствам (5.1) и при $k=0$ (в виде равенства). Положив $u_0\doteq v_0$, получим, что выполнено условие леммы 12 при $k=0$. Согласно этой лемме существует решение u_1 уравнения (0.1) такое, что выполнено условие леммы 12 при $k=1$. Продолжая эту цепочку рассуждений, установим с помощью леммы 12 существование ФСР $\{u_k\}_{k=0}^{n-1}$ уравнения (0.1), которая является D_J^+-системой. По теореме 17 $L\in\mathfrak{T}\big((a,b)\big)$, а по теореме 10 $L\in\mathfrak{T}\big([a,b)\big)$. При $J=(a,b)$ этим доказательство завершается.

Пусть $J=[a,b)$. Рассмотрим функции

$$\widetilde{v}_k=\begin{cases} v_k & (t\in[a,b)),\\ u_k & (t<a),\end{cases}\qquad k=1,\ldots,n-1,$$

где u_k — решения уравнения (0.1) при условиях

$$u_k^{(i)}(a) = v_k^{(i)}(a), \quad i = 0, \ldots, n-1, \ k = 1, \ldots, n-1.$$

Если $a_1 < a$ и достаточно близко к a, то $\{\tilde{v}_k\}_{k=1}^{n-1}$ — $D^+_{[a_1,b)}$-система, удовлетворяющая неравенствам (5.1). По доказанному

$$L \in \mathfrak{T}\big([a_1, b)\big) = \mathfrak{T}\big((a_1, b]\big) \subset \mathfrak{T}\big([a, b]\big). \qquad \square$$

§ 6. Достаточные условия неосцилляции

Здесь мы приведем ряд достаточных условий неосцилляции, которые получаются из критерия, доказанного в предыдущем параграфе, за счет специального выбора системы «пробных» функций $\{v_k\}_{k=1}^{n-1}$.

Рассмотрим сначала пример. Пусть

$$\hat{L}x \doteq x'' + (3 \pm 2|\sin t|)\, x' + (2 \pm 3|\sin t|)x = 0 \quad (t \in I = \mathbb{R}) \tag{6.1}$$

(берутся либо верхние, либо нижние знаки). Уравнение (6.1) неосцилляционно на $\mathbb{R}$ по теореме 18, так как функция $v(t) = e^{-\frac{3}{2}t} > 0$ и $(\hat{L}v)(t) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{2}t} < 0$ на $\mathbb{R}$.

1. Начнем с системы функций

$$v_k(t) = (t-a)^k (b-t)^{n-k} \quad (a, b \in I, \ k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{6.2}$$

Система (6.2), будучи подсистемой ФСР уравнения $x^{(n+1)} = 0$, удовлетворяющей краевым условиям (2.11), которая согласно теореме 17 есть $D^+_{(a,b)}$-система, сама является $D^+_{(a,b)}$-системой. Неравенства (5.1) перепишутся в виде

$$\frac{(-1)^{n-k-1}}{n!} \sum_{i=1}^{n} v_k^{(n-i)}(t) p_i(t) \leqslant 1 \quad (a < t < b, \ k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{6.3}$$

Неравенства (6.3) выполняются, если выполняется легче проверяемое неравенство (см. [1, 47])

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i}{i!n}(b-a)^i \operatorname*{ess\,sup}_{t \in (a,b)} |p_i(t)| + \frac{(n-1)^{n-1}(b-a)^n}{n^n n!} \operatorname*{ess\,sup}_{t \in (a,b)} |p_n(t)| \leqslant 1. \tag{6.4}$$

Таким образом, приходим к достаточным условиям неосцилляции.

Если выполняется неравенство (6.4) $\big($*неравенства* (6.3)$\big)$, *то* $L \in \mathfrak{T}\big([a, b)\big)$.

2. Как было установлено в § 4, система экспонент $\{v_k(t) = e^{\lambda_k t}\}_{k=1}^{n-1}$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n-1})$ является $D^+_{(-\infty,+\infty)}$-системой. Рассмотрим «характеристический многочлен»

$$\mathcal{P}(\lambda, t) \doteq \lambda^n + p_1(t)\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(t)\lambda + p_n(t). \tag{6.5}$$

С помощью этого многочлена условия (5.1) примут вид

$$(-1)^{n-k}\mathcal{P}(\lambda_k, t) \geqslant 0 \quad \big(t \in (a, b), \ k = 1, 2, \ldots, n-1\big). \tag{6.6}$$

Таким образом,

если существуют числа $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n-1}$ *такие, что выполняются неравенства* (6.6), *то* $L \in \mathfrak{T}\big([a, b)\big)$ *; если неравенства* (6.6) *выполняются на* $(-\infty, +\infty)$, *то* $L \in \mathfrak{T}\big((-\infty, +\infty)\big)$.

Эквивалентная формулировка:

если при всех $t \in (a, b)$ $\big(t \in (-\infty, +\infty)\big)$ *корни* $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ *характеристического многочлена* (6.5) *вещественны и разделены константами* $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_{n-1}$, *т. е.*

$$\lambda_1(t) \leqslant \nu_1 \leqslant \lambda_2(t) \leqslant \ldots \leqslant \nu_{n-1} \leqslant \lambda_n(t),$$

то $L \in \mathfrak{T}\big([a,b)\big)$ $\big(L \in \mathfrak{T}\big((-\infty,+\infty)\big)\big)$.

В работах [1]–[3], [45]–[49] приведено большое число других достаточных признаков неосцилляции, основанных на критерии теоремы 18, которые мы здесь воспроизводить не будем.

3. Для уравнений конкретных порядков могут быть получены более «тонкие» достаточные условия неосцилляции. Ограничимся здесь уравнением второго порядка

$$Lx \doteq x'' + p_1(t)x' + p_2(t)x = 0, \quad t \in I, \quad L \in \mathcal{L}_{loc}(I). \tag{6.7}$$

На достаточных условиях, приведенных в п.п. 1, 2 применительно к уравнению (6.7), останавливаться не будем.

1^o. Пусть $v(t) = \sin\frac{\pi(t-a)}{b-a}$; очевидно, $v(t) > 0$ $(a < t < b)$. Неравенство $(Lv)(t) \leqslant 0$ теперь приводит к

$$\frac{\pi}{b-a}\operatorname{ctg}\frac{\pi(t-a)}{b-a}p_1(t) + p_2(t) \leqslant \frac{\pi^2}{(b-a)^2}. \tag{6.8}$$

Таким образом, приходим к утверждению:

Пусть $p_1(t) = O(t-a)$ *при* $t \to a+$, $p_1(t) = O(b-t)$ *при* $t \to b-$. *Тогда если выполнено условие* (6.8), *то* $L \in \mathfrak{T}\big([a,b)\big)$.

Заметим, что при $p_1(t) \equiv 0$ это утверждение уже приведено в § 1.

2^o. Рассмотрим уравнение

$$\widetilde{L}x \doteq x'' + Px' + Qx = 0 \tag{6.9}$$

с постоянными коэффициентами P и Q в предположении, что оно является неосцилляционным на некотором полуинтервале $[a,b)$. Пусть v — решение краевой задачи

$$\widetilde{L}v = -1, \quad v(a) = v(b) = 0,$$

$\widetilde{C}(t,s)$ — функция Коши уравнения (6.9). Тогда $\widetilde{C}(t,s) > 0$ $(a \leqslant s < t < b)$ и $v(t) = \int_a^b M(t,s)\,ds > 0$ $(t \in (a,b))$, где

$$M(t,s) \doteq \begin{cases} \dfrac{\widetilde{C}(b,t)\cdot\widetilde{C}(s,a)}{\widetilde{C}(b,a)}, & a \leqslant s \leqslant t \leqslant b, \\ \dfrac{\widetilde{C}(t,a)\cdot\widetilde{C}(b,s)}{\widetilde{C}(b,a)}, & a \leqslant t < s \leqslant b \end{cases} > 0, \quad (t,s) \in ((a,b)\times(a,b)).$$

Так как $(Lv)(t) = -1 + (p_1(t)-P)v'(t) + (p_2(t)-Q)v(t)$, то неравенство $(Lv)(t) \leqslant 0$ выполняется, если

$$(p_1(t)-P)\int_a^b \frac{\partial M(t,s)}{\partial t}\,ds + (p_2(t)-Q)\int_a^b M(t,s)\,ds)\,ds \leqslant 1, \quad t \in (a,b). \tag{6.10}$$

Таким образом,

если выполнено неравенство (6.10), *то уравнение* (6.7) *неосцилляционно на* $[a,b)$.

Удачный выбор коэффициентов P и Q позволяет получить признаки неосцилляции более тонкие, чем приведенные в п. 1.

3^o. Рассмотрим частный случай, когда $Q = 0$. В этом случае

$$M(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(1-e^{-P(b-t)})(1-e^{-P(s-a)})}{P(1-e^{-P(b-a)})} & (s \leqslant t), \\ \dfrac{(1-e^{-P(t-a)})(1-e^{-P(b-s)})}{P(1-e^{-P(b-a)})} & (s > t). \end{cases}$$

Непосредственное интегрирование и дифференцирование приводит к представлениям и оценке

$$v(t)=\frac{(1-e^{-P(b-t)})(t-a-\frac{1}{P}(1-e^{-P(t-a)}))}{P(1-e^{-P(b-a)})}+$$
$$+\frac{(1-e^{-P(t-a)})(b-t-\frac{1}{P}(1-e^{-P(b-t)}))}{P(1-e^{-P(b-a)})}\leqslant\frac{2(\frac{b-a}{2}-\frac{1}{P}(1-e^{-P\frac{b-a}{2}}))}{P(1+e^{-P\frac{b-a}{2}}))},$$
$$v'(t)=\frac{P\left((b-t)e^{-P(t-a)}-(t-a)e^{-P(b-t)}\right)+e^{-P(b-t)}-e^{-P(t-a)}}{P\left(1-e^{-P(b-a)}\right)},$$
$$|v'(t)|\leqslant\frac{|P(b-a)+e^{-P(b-a)}-1|}{P(1-e^{-P(b-a)})}.$$

Так как условие $Lv\leqslant 0$ теперь эквивалентно неравенству $(p_1(t)-P)v'(t)+p_2(t)v(t)\leqslant 1$, то получаем следующий признак.

Если
$$|p_1(t)-P|\frac{|P(b-a)+e^{-P(b-a)}-1|}{P(1-e^{-P(b-a)})}+|p_2(t)|\frac{2(\frac{b-a}{2}-\frac{1}{P}(1-e^{-P\frac{b-a}{2}}))}{P(1+e^{-P\frac{b-a}{2}}))}\leqslant 1$$

$(a<t<b)$, *то уравнение* (6.7) *неосцилляционно на* $[a,b)$.

4. Если вместо вспомогательного уравнения (6.9) взять уравнение $\widetilde{L}x\doteq x''+p_1(t)x'=0$, а в качестве v — решение задачи $\widetilde{L}v=-1,\quad v(a)=v(b)=0$, то приходим к следующему признаку:

если выполнено неравенство $p_2(t)\int_a^b M(t,s)\,ds\leqslant 1,\quad t\in(a,b)$, *где*

$$M(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\int_t^b e^{-\int_t^\sigma p_1(\mu)\,d\mu}d\sigma\cdot\int_a^s e^{-\int_a^\sigma p_1(\mu)\,d\mu}d\sigma}{\int_a^b e^{-\int_a^\sigma p_1(\mu)\,d\mu}d\sigma} & (s\leqslant t),\\[2ex] \dfrac{\int_a^t e^{-\int_a^\sigma p_1(\mu)\,d\mu}d\sigma\cdot\int_s^b e^{-\int_s^\sigma p_1(\mu)\,d\mu}d\sigma}{\int_a^b e^{-\int_a^\sigma p_1(\mu)\,d\mu}d\sigma} & (t<s),\end{cases}$$

то уравнение (6.7) *неосцилляционно на* $[a,b)$.

5. Приведем признаки неосцилляции уравнения второго порядка на всей оси. Рассмотрим уравнение
$$\widetilde{L}x\doteq x''+px'+qx=0 \qquad (6.11)$$
с постоянными коэффициентами p и q. Как было выяснено ранее (см. теорему 15), неосцилляция уравнения (6.11) на всей оси эквивалентна выполнению неравенства $p^2-4q\geqslant 0$.

Будем изображать уравнение (6.11) точкой $\widetilde{\mathcal{L}}=(p,q)$ плоскости Π переменных p,q. Пусть
$$\mathfrak{N}\doteq\{(p,q):p^2-4q\geqslant 0\},\qquad \mathfrak{O}\doteq\mathbb{R}^2\setminus\mathfrak{N}.$$

Тогда согласно теореме 15
$$\widetilde{L}\in\mathfrak{T}\big((-\infty,+\infty)\big)\Longleftrightarrow\widetilde{\mathcal{L}}\in\mathfrak{N}.$$

Пусть теперь
$$Lx\doteq x''+p(t)x'+q(t)x=0\quad — \qquad (6.12)$$
уравнение с непрерывными на $(-\infty,+\infty)$ коэффициентами. Каждое уравнение вида (6.12) изображается на плоскости Π жордановой кривой
$$G_L:\qquad p=p(t),\quad q=q(t),$$
точнее, движением DG_L по этой кривой. Поставим задачу: выяснить, при каких условиях включение $G_L\subset\mathfrak{N}$ обеспечивает неосцилляцию уравнения (6.12) на всей числовой оси.

Вот несколько простых решений этой задачи.

А. Пусть $p(t)\equiv p=\mathrm{const}$. Тогда включение $G_L\subset\mathfrak{N}$ эквивалентно выполнению неравенства $q(t)\leqslant\frac14 p^2$. Функция $v(t)\doteq e^{-\frac{p}{2}t}>0$ $(t\in\mathbb{R})$ удовлетворяет неравенству $(Lv)(t)=e^{-\frac{p}{2}t}\bigl(q(t)-\frac14p^2\bigr)\leqslant 0$ $(t\in\mathbb{R})$. Таким образом,

если $p(t)\equiv p=\mathrm{const}$, $q(t)\leqslant\frac14p^2$, *то уравнение* (6.12) *неосцилляционно на всей оси.*

Б. Пусть G_L — прямая (или отрезок прямой) и $G_L\subset\mathfrak{N}$. Уравнение такой прямой либо имеет вид $q(t)\equiv q=\mathrm{const}\leqslant 0$ (при любой $p(t)$), либо

$$p=p(t),\ q=-\gamma^2+k\,p(t),\quad\text{где}\quad |k|\leqslant\gamma\quad(\gamma>0)$$

(при $k=\pm\gamma$ прямая касается параболы $q=\frac14p^2$). В первом случае неосцилляция уравнения (6.12) на всей оси следует из теоремы 1 (см. конец п. 1 § 1). Во втором случае функция $v(t)\doteq e^{-kt}>0$ $(t\in\mathbb{R})$ удовлетворяет неравенству $(Lv)(t)=e^{-kt}(k^2-\gamma^2)\leqslant 0$ $(t\in\mathbb{R})$. Таким образом,

если G_L — прямая в плоскости Π, *целиком лежащая в* $\mathfrak{N}$, *или отрезок такой прямой, то уравнение* (6.12) *неосцилляционно на всей оси.*

В. Пусть $\gamma\geqslant 0$. Введем множества

$$\mathfrak{M}_\pm(\gamma)=\{(p,q):q\leqslant-\gamma^2\pm\gamma\,p\}.$$

Так как прямые $q=-\gamma^2\pm\gamma\,p$ касаются параболы $q=\frac14p^2$, то $\mathfrak{M}_\pm(\gamma)\subset\mathfrak{N}$ при любом $\gamma\geqslant0$.

Из утверждений **А** и **Б** и теоремы сравнения 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 19. *Если при некотором* $\gamma\geqslant 0$

$$G_L\subset\mathfrak{M}_+(\gamma)\quad\bigl(G_L\subset\mathfrak{M}_-(\gamma)\bigr),$$

то уравнение (6.12) *неосцилляционно на всей оси.*

$\bigl($Полагаем $v(t)=e^{-\gamma t}$ $\quad\bigl(v(t)=e^{\gamma t}\bigr).\bigr)$

Заметим, что условие теоремы 19 зависит лишь от кривой G_L, а не от движения DG_L по этой кривой.

Г. Условия нижеследующих теорем зависят и от движения DG_L.

Теорема 20. *Если p дифференцируема,* $p'(t)\geqslant 0$ $\quad(p'(t)\leqslant 0)$ *на* $\mathbb{R}$ *и выполняется неравенство* $q(t)\leqslant\frac{p^2(t)}{4}$ $\quad(t\in\mathbb{R})$ *(эквивалентное включению* $G_L\subset\mathfrak{N}$), *то уравнение* (6.12) *неосцилляционно на всей оси.*

Доказательство. Пусть $p'(t)\geqslant0$, $\quad L_2x\doteq x''+p(t)x'+\frac{p^2(t)}{4}x$. Положим $v(t)=\exp\left(-\frac12\int_0^t p(s)\,ds\right)$; тогда $v(t)>0$, $(L_2v)(t)=-\frac12p'(t)\exp\left(-\frac12\int_0^t p(s)\,ds\right)\leqslant0$, $t\in\mathbb{R}$. Следовательно, $L_2\in\mathfrak{T}\bigl((-\infty,+\infty)\bigr)$. Неосцилляция уравнения (6.12) следует теперь из теоремы сравнения 1.

Если $p'(t)\leqslant0$, то, положив $y(t)=x(-t)$, придем к уравнению $y''-p(t)y'+q(t)y=0$, т. е. к уже рассмотренному случаю.

Отметим, что условие $G_L\subset\mathfrak{N}$ не является необходимым для неосцилляции уравнения (6.12) на всей оси. Так, уравнение

$$(\overline{L}x)(t)\doteq x''+tx'+\left(\frac{t^2}{4}+\frac12\right)x=0,$$

обладая решением $x=e^{-\frac{t^2}{4}}>0$ $(t\in\mathbb{R})$, является неосцилляционным на всей оси, однако здесь $G_{\overline{L}}\subset\mathfrak{O}$. Точно таким же свойством обладает и более общее уравнение

$$x''+p(t)x'+\left(\frac{p^2(t)}{4}+\frac12p'(t)\right)x=0,\qquad p'(t)>0,\ t\in\mathbb{R}.$$

Здесь однородное уравнение имеет решение $x=\exp\left(-\frac12\int_0^t p(s)\,ds\right)>0$, $t\in\mathbb{R}$.

Из последнего примера и теоремы сравнения 1 получаем следующее усиление теоремы 20.

Теорема 21. *Если p дифференцируема, $p'(t) \geqslant 0$ $\quad (p'(t) \leqslant 0)$ на $\mathbb{R}$ и выполняется неравенство $q(t) \leqslant \frac{p^2(t)}{4} + \frac{1}{2}p'(t)$ $\quad \left(q(t) \leqslant \frac{p^2(t)}{4} - \frac{1}{2}p'(t)\right)$ $(t \in \mathbb{R})$, то уравнение* (6.12) *неосцилляционно на всей оси.*

§ 7. Иерархия решений

1. Следуя [1], назовем ФСР $\{u_k\}_{k=1}^n$ уравнения (0.1) *иерархической* (ИФС) при $t \to s-$ $\big(t \to s+\big)$, если она обладает свойством

$$\lim_{t\to s-} \frac{u_k(t)}{u_{k+1}(t)} = 0 \qquad \left(\lim_{t\to s+} \frac{u_{k+1}(t)}{u_k(t)} = 0\right), \qquad k = 1, \ldots, n-1. \tag{7.1}$$

Очевидно, иерархическую ФС при $t \to s-,\quad s \in I$ образует ФСР $\{u_{s,k}\}_{k=1}^n$ уравнения (0.1), удовлетворяющая начальным условиям

$$\Phi(u_{s,k},\, s) = n-k, \quad u_{s,k}^{(n-k)}(s) = 1, \quad k = 1, \ldots, n \tag{7.2}$$

(остальные начальные условия несущественны), а иерархическую ФС при $t \to s+,\ s \in I$ образует ФСР $\{z_{s,k}\}_{k=1}^n$ уравнения (0.1), удовлетворяющая начальным условиям

$$\Phi(z_{s,k},\, s) = k-1, \quad z_{s,k}^{(k-1)}(s) = 1, \quad k = 1, \ldots, n \tag{7.3}$$

(остальные начальные условия несущественны). Так как решения уравнения (0.1) принадлежат классу $C_*^{n-1}[a,b]$, то верно также и обратное утверждение : всякая ИФС при $t \to s-$ $\quad \big(t \to s+\big)$ удовлетворяет условиям

$$\Phi(u_k, s) \geqslant n-k \quad \big(\Phi(u_k, s) \geqslant k-1\big), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Если $\{u_k\}_{k=1}^n$ и $\{v_k\}_{k=1}^n$ — две ИФС при $t \to s-$ $\quad \big(t \to s+\big)$, то

$$v_i = \sum_{j=1}^{i} c_{ij} x_j \qquad \left(v_{n-i+1} = \sum_{j=1}^{i} c_{ij} x_{n-j+1}\right), \quad c_{ii} > 0,\ i = 1, \ldots, n,$$

а u_1 $\quad \big(u_n\big)$ определяются с точностью до положительного множителя.

Пусть $[a,b] \subset I$ и $L \in \mathfrak{T}\big([a,b]\big)$. Тогда существует ФСР $\{u_k\}_{k=1}^n$ уравнения (0.1), удовлетворяющая условиям

$$\Phi(u_k,\, a) = n-k, \quad u_k^{(n-k)}(a) = 1, \quad \Phi(u_k,\, b) = k-1, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{7.4}$$

Как отмечалось ранее, соответствующие двухточечные задачи Валле Пуссена однозначно разрешимы, следовательно, u_k существуют; так как согласно (7.4) $\Phi(u_k,\, [a,b]) \geqslant n-1$, $u_k^{(n-k)}(a) = 1$, то по формуле Тейлора $u_k(t) > 0, \quad t \in (a,b)$, $k = 1, \ldots, n$. Согласно сказанному выше о системах (7.2) и (7.3), система $\{u_k\}_{k=1}^n$ является иерархической и при $t \to a+$, и при $t \to b-$. Такие системы будем называть *дважды иерархическими* (ДИФС) на $[a,b]$.

Теорема 22. *Всякая дважды иерархическая на* $[a,b]$ *ФСР уравнения* (0.1) *является* $D_{(a,b)}$ *-системой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем доказывать теорему индукцией по порядку уравнения. При $n = 2$ $\quad y_1,\ y_2$ (см. доказательство теоремы 3) образуют ДИФС на $[a,b]$, и так как

$$y_1(t) > 0, \quad t \in (a,b], \quad y_2(t) > 0, \quad t \in [a,b), \quad [y_1, y_2](t) \neq 0, \quad t \in [a,b],$$

то они образуют $D_{(a,b)}$ -систему. Следовательно, при $n = 2$ теорема верна.

Пусть теорема верна для любого уравнения порядка $n-1$ и $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ — ДИФС на $[a,b]$. Это означает, что $[u;1,\ldots,n](t)\neq 0,\quad t\in[a,b]$ и $\{u_k\}_{k=1}^{n-1}$ — ДИФС на $[a,b]$. Предположим, что $[u;1,\ldots,n-1](t_0)=0,\ t_0\in(a,b]$. Согласно лемме 4 существует решение $u=\sum\limits_{k}^{n-1}u_k$ такое, что $\Phi(u,t_0)\geqslant n-1$, и так как $\Phi(u,a)\geqslant 1$, то $\Phi(u,[a,b])\geqslant n$. Но это противоречит неосцилляции уравнения (0.1). Значит, $[u;1,\ldots,n-1](t)\neq 0,\ t\in(a,b]$, и систему $\{u_k\}_{k=1}^{n-1}$ можно рассматривать как ДИФС на $[a,b]$ для уравнения

$$L_{n-1}x\doteq\frac{[u_1,\ldots,u_{n-1},x](t)}{[u;1,\ldots,n-1](t)}=0,\quad t\in(a,b].$$

Согласно индуктивному предположению и лемме 9 $[u;i,\ldots,j](t)\neq 0,\quad 1\leqslant i<j\leqslant n-1$, $t\in(a,b)$, поэтому достаточно доказать, что

$$[u;i,\ldots,n](t)\neq 0,\quad t\in(a,b),\quad 1<i<n. \tag{7.5}$$

Пусть $i_0>1$ — наименьшее из $i,\quad 1<i<n$, для которых это неравенство не выполнено хотя бы в одной точке. По определению числа i_0 $[u;i,\ldots,n](t)\neq 0,\quad t\in(a,b),\quad i<i_0$. Из леммы 3 имеем

$$\frac{d}{dt}\frac{[u;i_0,\ldots,n]}{[u;i_0-1,\ldots,n-1]}=\frac{[u;i_0,\ldots,n-1]\cdot[u;i_0-1,\ldots,n]}{[u;i_0-1,\ldots,n-1]^2}\neq 0,\quad t\in(a,b);$$

из этого неравенства следует, что дробь, стоящая под знаком производной в левой части строго монотонна на (a,b). Так как $[u;i_0,\ldots,n](b)=0$, то $[u;i_0,\ldots,n](t)\neq 0$ на (a,b). По индукции неравенство (7.5) справедливо для всех требуемых i, то есть $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ — $D_{(a,b)}$-система. Следовательно, теорема верна для любого n. □

2. Назовем конец $\alpha\ \ (\beta)$ интервала I *несингулярным*, если $\alpha>-\infty\ \ (\beta<+\infty)$ и коэффициенты $p_k,\ k=1,\ldots,n$, суммируемы на $[\alpha,s]\ \ ([s,\beta])$ при некотором $s\in I$; в противном случае назовем конец $\alpha\ \ (\beta)$ *сингулярным*. Далее, назовем $\alpha\ \ (\beta)$ *неосцилляционным концом* интервала I (пишем $\rho_+(\alpha)\neq\alpha\ \ (\rho_-(\beta)\neq\beta)$), если $L\in\mathfrak{T}(U_{+\alpha})\ \ (L\in\mathfrak{T}(U_{-\beta}))$ для некоторой окрестности $U_{+\alpha}\ \ (U_{-\beta})$. Если $\alpha\ \ (\beta)$ не является неосцилляционным концом интервала I, то пишем $\rho_+(\alpha)=\alpha\ \ (\rho_-(\beta)=\beta)$. Несингулярный конец является неосцилляционным; сингулярный конец может быть неосцилляционным, а может и не быть таковым.

Согласно сказанному в п. 1, в случае несингулярного конца ИФС (ДИФС) можно определить с помощью задания соответствующих начальных (краевых) условий. Пусть $\alpha\ \ (\beta)$ — сингулярный конец интервала I. Скажем, что система решений $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ уравнения (0.1) образует ИФС при $t\to\alpha+\ \ (t\to\beta-)$, если имеет место соотношение (7.1), где $s=\alpha\ \ (s=\beta)$ (напомним: при $\alpha=-\infty\ \ \big(\beta=+\infty\big)\ \ t\to\alpha+\ \ \big(t\to\beta-\big)$ означает, что $t\to-\infty\ \ \big(t\to+\infty\big)$).

Введем понятие *обобщенного нуля* (*обобщенной кратности*). Пусть $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ — ИФС при $t\to\alpha+\ \ (t\to\beta-)$. Будем говорить, что $\Phi(x,\alpha)=k\ \ (\Phi(x,\beta)=k),\ k\geqslant 1,\ x$ — нетривиальное решение уравнения (0.1), если

$$x=\sum_{i=k+1}^{n}c_iu_i,\quad c_{k+1}\neq 0\qquad\left(x=\sum_{i=1}^{n-k}c_iu_i,\quad c_{n-k}\neq 0\right). \tag{7.6}$$

Если $x(t)$ не стремится к 0 при $t\to\alpha+\ \ (t\to\beta-)$, то полагаем $\Phi(x,\alpha)=0\ \ (\Phi(x,\beta=0))$. Очевидно, что в случае несингулярного конца обобщенные кратности $\Phi(x,\alpha)\ \ (\Phi(x,\beta))$ совпадают с обычными. Обобщенные кратности позволяют производить подсчет нулей на расширенном промежутке $\overline{I}\doteq[\alpha,\beta]$. Так, система экспонент (4.2) при $\lambda_1<\ldots<\lambda_n$ является ИФС как при $t\to-\infty$, так и при $t\to+\infty$, т. е. является ДИФС на $[-\infty,+\infty]$. Набор степенных функций $\{t^{k-1}\}_{k=1}^{n}$ образует ИФС только при $t\to+\infty$.

Обобщенные кратности обладают многими свойствами обычных кратностей (x,y — нетривиальные решения уравнения (0.1)):

а) $0 \leqslant \Phi(x,s) \leqslant n-1$, $s \in \overline{I}$;

б) множество $\{x : \Phi(x,s) \geqslant r\}$, $0 \leqslant r \leqslant n-1$, образует $(n-r)$-мерное подпространство решений уравнения (0.1);

в) $\lim\limits_{t\to s}\frac{x(t)}{y(t)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Phi(x,s) > \Phi(y,s)$.

Однако имеется и различие: в несингулярном случае связь между кратностью и ростом не зависит от L, тогда как в сингулярном случае — зависит. Например, если $L = \frac{d^2}{dt^2} - 1$, то $\Phi(e^t, +\infty) = 0$, а если $L = \frac{d^2}{dt^2} - 3\frac{d}{dt} + 2$, то $\Phi(e^t, +\infty) = 1$ (так как $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{e^{2t}} = 0$).

Приведем без доказательства следующую теорему, на которую мы в дальнейшем не ссылаемся (см. [1, 2]).

Теорема 23. *Если* $L \in \mathfrak{T}(I)$, *то уравнение* (0.1) *обладает иерархическими при* $t \to \alpha+$ $(t \to \beta-)$ *фундаментальными системами решений. Для того чтобы* $L \in \mathfrak{T}(\overline{I})$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала ДИФС на* $\overline{I}$.

В работе [1] доказано, что при выполнении условия последней теоремы иерархия распространяется и на вронскианы. Например, *при* $t \to \beta-$ *предельное соотношение*

$$\lim_{t\to\beta-}\frac{[u;i_1,\ldots,i_k](t)}{[u;j_1,\ldots,j_k](t)} = 0$$

имеет место для любых двух возрастающих наборов индексов $\{i_\nu\}$ *и* $\{j_\nu\}$ *таких, что* $i_\nu \leqslant j_\nu$, $\nu = 1,\ldots,k$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$ (*хотя бы при одном* ν *неравенство строгое*).

Заметим, что Ф. Хартман (см. [2]) называет элементы ИФС *главными решениями* (*principal solutions*).

§ 8. Формально сопряженное в смысле Лагранжа уравнение

1. Установим вначале полезное свойство декартовых систем функций.

Пусть $u_k \in C_*^{m-1}(J)$, $k = 1,\ldots,m$. Зафиксируем k $(1 \leqslant k \leqslant m-1)$ и ν $(1 \leqslant \nu \leqslant n-k)$ и положим

$$z_i \doteq [u;\, \nu,\ldots,\nu+k \setminus \nu+k-i+1], \quad i = 1,\ldots,k+1.$$

С помощью детерминатного тождества Сильвестра ([40, с. 47]) нетрудно доказать следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 13 (ср. с леммой 2). *При* $i < l$

$$\left(\frac{z_i}{z_l}\right)' = -\frac{[u;\nu,\ldots,\nu+k \setminus \nu+k-l+1,\ \nu+k-i+1]\cdot[u;\nu,\ \ldots,\nu+k]}{z_l^2},$$

а при $i > l$

$$\left(\frac{z_i}{z_l}\right)' = \frac{[u;\nu,\ldots,\nu+k \setminus \nu+k-i+1, \nu+k-l+1]\cdot[u;\nu,\ldots,\nu+k]}{z_l^2}.$$

Теорема 24. *Если* $\{u_i\}_{i=1}^m$ — D_J*-система, то и* $\{z_i\}_{i=1}^{k+1}$ — D_J*-система.*

Доказательство ([41]). При $m = 2, k = \nu = 1$ теорема очевидна, так как $z_1 = u_1$, $z_2 = u_2$. Предположим, что утверждение теоремы верно для любой системы функций, содержащей менее m функций.

Пусть $F \doteq \sum\limits_{i=1}^{k+1} c_i z_i$, $\quad N(F) \doteq \Phi(F,J)$, $\quad W$ — число перемен знака последовательности

$$c_1,\ldots,c_{k+1}. \tag{8.1}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $c_i \neq 0$, $i = 1,\ldots,k+1$.

Если $W=0$, то $N(F)=0$, так как все z_i имеют одинаковый знак. Следовательно, в этом случае неравенство $N(F)\leqslant W$ выполняется.

Пусть $W>0$ и $l+1$ — место перемены знака в последовательности (8.1) $(c_l\cdot c_{l+1}<0)$. Рассмотрим функцию $F^*(t)\doteq \frac{d}{dt}\left(\frac{F(t)}{z_l(t)}\right)$. По лемме 13:

$$F^*=\left(\frac{[u;\,\nu,\dots,\nu+k]}{z_l^2}\right)\cdot\left(-\sum_{i=1}^{l-1}c_i[u;\,\nu,\dots,\nu+k\setminus\nu+k-i+1,\,\nu+k-l+1]+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=l+1}^{k+1}c_i[u;\,\nu,\dots,\nu+k\setminus\nu+k-l+1,\,\nu+k-i+1]\right).$$

По теореме Ролля, $N(F^*)\geqslant N(F)-1$.

Пусть W^* — число перемен знака последовательности

$$-c_1,\dots,\,-c_{l-1},c_{l+1},\dots,\,c_{k+1}. \tag{8.2}$$

Так как $\{u_\nu,\dots,u_{\nu+k-l},\,u_{\nu+k-l+2},\dots,u_{\nu+k}\}$ — D_J - система, то по индуктивному допущению таковой является и система

$$\{[u;\nu,\dots,\nu+k\setminus\nu+k-l+1,\,\nu+k-i+1]\},\ i=1,\,\dots,\,l-1,l+1,\dots,k+1.$$

Значит, $N(F^*)\leqslant W^*$.

Пусть $l>1$. Тогда могут представиться два случая: а) $c_{l-1}\cdot c_{l+1}>0$; в этом случае $c_{l-1}\cdot c_l<0$ и последовательность

$$c_1,\dots,\,c_{l-1},c_{l+1},\dots,\,c_{k+1} \tag{8.3}$$

имеет $W-2$ перемен знака, а последовательность (8.2) — $W-1$ перемен знака, $W^*=W-1$; и б) $c_{l-1}\cdot c_{l+1}<0$; в этом случае $c_{l-1}\cdot c_l>0$, последовательность (8.3) имеет W перемен знака, а последовательность (8.2) — $W-1$, т. е. $W^*=W-1$.

При $l=1$ последовательности (8.2) и (8.3) выглядят так: $c_2,\dots,c_{k+1}$, т. е. снова $W^*=W-1$.

Таким образом, $W-1=W^*\geqslant N(F^*)\geqslant N(F)\geqslant N(F)-1$. Следовательно, $N(F)\leqslant W$, т. е. $\{z_i\}_{i=1}^{k+1}$ — D_J-система. По индукции утверждение теоремы верно для любого m. □

2. Если уравнение (0.1) имеет гладкие коэффициенты, а именно коэффициент p_k имеет суммируемую на J производную порядка $n-k$, $k=1,\dots,n$, то будем записывать это так: $L\in\mathcal{A}d(J)$; в этом случае можно говорить о сопряженном в смысле Лагранжа уравнении

$$L^+y\doteq(-1)^n\left(y^{(n)}-\bigl(p_1(t)y\bigr)^{n-1}+\ldots+(-1)^{n-1}\bigl(p_{n-1}(t)y\bigr)'+(-1)^np_n(t)y\right)=0, \tag{8.4}$$

которое является обыкновенным дифференциальным уравнением с суммируемыми на J коэффициентами. Если $L\in\mathcal{A}d(J)$, то для L^+ справедливы все утверждения, которые были сформулированы для L. Если же имеет место лишь принадлежность $L\in\mathcal{L}(J)$, то уравнение (8.4) будет квазидифференциальным (см. [13, 43, 29, 44]).

Установим связь между неосцилляционными свойствами уравнений (8.4) и (0.1) в предположении, что $L\in\mathcal{A}d(J)$.

Лемма 14 (см. [30, с. 210]). *Если* $\{u_k\}_{k=1}^n$ — *ФСР уравнения* (0.1), *то* $\{z_k\}_{k=1}^n$, *где*

$$z_k=\frac{[u;\,1,\dots,n\setminus n-k+1]}{[u;\,1,\dots,n]}\ -$$

ФСР уравнения (8.4); *при этом*

$$[z;1,\dots,k]=\frac{[u;k+1,\dots,n]}{[u;1,\dots,n]},\ \ k=1,\dots,n-1,\ \ [z;1,\dots,n]=\frac{1}{[u;1,\dots,n]}. \tag{8.5}$$

МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 1

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как z_k с точностью до множителя $1/[u;1,\dots,n]$ — миноры последней строки определителя $[u;1,\dots,n]$, то равенства (8.5) следуют из формулы, выражающей миноры обратной матрицы через миноры данной [40, с. 31] (см. также [41, с. 5]). $\square$

Теорема 25. *Пусть $J\subset I$ — промежуток. Для того чтобы $L\in\mathfrak{T}(J)$, необходимо и достаточно, чтобы $L^+\in\mathfrak{T}(J)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $(L^+)^+=L$, то достаточно доказать импликацию $L\in\mathfrak{T}(J)\Longrightarrow L^+\in\mathfrak{T}(J)$.

Пусть $J=[a,b]$ или $J=(a,b)$, $a,b\in I$, $L\in\mathfrak{T}(J)$, и $\{u_k\}_{k=1}^n$ — D_J-система решений уравнения (0.1) (по теореме 17 такая система существует). По лемме 14 система функций $z_k=\dfrac{[u;\,1,\dots,n\setminus n-k+1]}{[u;\,1,\dots,n]}$, $k=1,\dots n$, — ФСР уравнения (8.4), а по теореме 24 она является D_J-системой. По теореме 17 $L^+\in\mathfrak{T}(J)$.

Если $J=[a,b)$ или $J=(a,b]$, то сначала докажем, что $L\in\mathfrak{T}\big((a,b)\big)$, а затем сошлемся на теорему 10. $\square$

3. Из нижеследующей теоремы, которая интересна и сама по себе, снова получаем утверждение теоремы 25.

Теорема 26. *Пусть $J=[a,b]$ или $J=(a,b)$, $a,b\in I$, и имеет место представление (0.4), где $h_k(t)>0$, $t\in J$, h_k абсолютно непрерывны на J $(k=1,\dots,n-1)$, h_n локально суммируема на J, $h_n(t)>0$ п. в. Тогда*

$$L^+y=(-1)^n h_0\frac{d}{dt}h_1\frac{d}{dt}\dots\frac{d}{dt}h_n y.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 14 $L\in\mathfrak{T}(J)$, а по теореме 17 уравнение (0.1) имеет D_J^+-систему решений $\{u_k\}_{k=1}^n$ (см. замечание 6). Как показано в доказательстве теоремы 14 в представлении (0.4)

$$h_0\doteq\frac{1}{w_1},\quad h_k\doteq\frac{w_k^2}{w_{k-1}w_{k+1}}\quad(k=1,\dots,n-1),\quad h_n\doteq\frac{w_n}{w_{n-1}},$$

где $w_k\doteq[u;1,\dots,k]$, $k=1,\dots,n$. Согласно лемме 14 $\{z_k\}_{k=1}^n$, где $z_k=\dfrac{[u;\,1,\dots,n\setminus n-k+1]}{[u;\,1,\dots,n]}$, — ФСР уравнения (8.4), которая по теореме 24 является D_J-системой. Таковой же является и система $\{y_k\}_{k=1}^n$, где $y_k=z_{n-k+1}$. Обозначим

$$W_k\doteq[y:1,\dots,k],\quad H_k\doteq\frac{W_k}{W_{k-1}\cdot W_{k+1}},\quad k=1,\dots,n-1,\quad H_0\doteq\frac{1}{W_1},\quad H_n\doteq\frac{W_n}{W_{n-1}}.$$

С учетом равенств (8.5) $H_k=h_{n-k}$, $k=0,\dots,n$ и по теореме 14

$$L^+y=(-1)^nH_n\frac{d}{dt}H_{n-1}\frac{d}{dt}\dots\frac{d}{dt}H_0y=(-1)^nh_0\frac{d}{dt}h_1\frac{d}{dt}\dots\frac{d}{dt}h_ny.\qquad\square$$

Замечание 7. Если имеет место лишь принадлежность $L\in\mathcal{L}(J)$, то утверждения леммы 14 и теорем 25 и 26, а также их доказательства остаются в силе (с точностью до некоторых обозначений и несущественных деталей); см. по этому поводу [13, 44].

§ 9. Связь между различными классами уравнений

Здесь рассматриваются различные типы неосцилляции и изучаются соотношения между соответствующими классами неосцилляционных уравнений. Теоремы 10 и 11, устанавливающие связь между неосцилляцией на интервале, полуинтервале, отрезке, примыкают к утверждениям этого параграфа.

1. Начнем со следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 15. *Если* $L \notin \mathfrak{T}([a,b])$ $([a,b] \subset I)$, *то найдутся такие числа* $\tau \in (a,b]$ *и* r $(1 \leqslant r \leqslant n-1)$ *и такое решение* y *уравнения* (0.1), *что*

$$\Phi(y,\, a) \geqslant n-r, \quad \Phi(y,\, \tau) \geqslant r, \quad y(t)>0 \quad (t \in (a,\tau)). \tag{9.1}$$

Доказательство. Пусть $\{u_{a,k}\}_{k=1}^{n}$ — ФСР уравнения (0.1), удовлетворяющая условиям (2.12), $x_k \doteq u_{a,k}$, $w_k = [x;1,\ldots,k]$, $k=1,\ldots,n$. В силу леммы 5 и теоремы 12 найдется h такое, что $h>0$, $w_k(t) \neq 0$, $t \in [a,a+h]$, $k=1,\ldots,n-1$. Если $w_k(t) \neq 0$ для всех $t \in [a,b]$, то полагаем τ_k равным правому концу I; в противном случае

$$\tau_k \doteq \min_{t \in [a+h,b]} \{t : w_k(t)=0\}, \qquad \tau \doteq \min_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \tau_k.$$

Пусть r — наименьший из индексов, на котором достигается этот минимум. Из этих определений вытекает, что $L \in \mathfrak{T}([a,\tau))$, $w_r(\tau)=0$.

При $r=1$ функция $y=x_1$ удовлетворяет условиям (9.1). Пусть $r \geqslant 2$. Тогда

$$w_k(t) \neq 0 \quad (t \in (a,\tau], \quad k=1,\ldots,r-1). \tag{9.2}$$

Полагаем

$$u(t) \doteq \begin{vmatrix} x_1(t) & \cdots & x_r(t) \\ x_1(\tau) & \cdots & x_r(\tau) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(r-2)}(\tau) & \cdots & x_r^{(r-2)}(\tau) \end{vmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$\Phi(u,\, a) \geqslant n-r, \quad \Phi(u,\, \tau) \geqslant r, \tag{9.3}$$

а так как $u = c_1x_1 + \ldots + c_rx_r$, где $c_r = w_{r-1} \neq 0$, то $u(t) \neq 0$, $t \in [a,\tau]$. Положим $L_{r-1}x \doteq \dfrac{[x_1,\ldots,x_{r-1},x]}{w_{r-1}}$. Так как $L_{r-1}x_k = 0$ $(k=1,\ldots,r-1)$, то в силу (9.2) и теоремы 14 $L_{r-1}x = h_{r-1}\frac{d}{dt}\ldots h_1\frac{d}{dt}h_0\,x$, где $h_i(t)>0$ $(t \in (a,\tau),\ i=1,\ldots,r-1)$.

Предположим, что $u(c)=0$ при некотором $c \in (a,\tau)$. В силу (9.3) $\Phi(u,\,[c,\tau]) \geqslant r+1$, а по следствию 2 найдется точка $d \in (c,\tau)$, в которой $(L_{r-1}u)(d)=0$. Но $L_{r-1}u = w_{r-1}L_{r-1}x_r = w_r$, поэтому $w_r(d)=0$. Полученное противоречие с определением τ и r означает, что $u(t) \neq 0$ для $t \in (a,\tau)$.

Если $u(t)>0$, то полагаем $y=u$, в противном случае $y=-u$. □

Замечание 8. Как видно из доказательства, в (9.3) (а значит, и в (9.1)) на самом деле имеет место равенство: $\Phi(u,\, a) = n-r$, $\big(\Phi(u,\, a) = n-r\big)$.

2. Пусть $J \subset I$ — промежуток. Обозначим через $\mathfrak{T}(k_1,\ldots,k_m;\, J)$ $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} k_i \geqslant n\right)$ множество выражений L (см. (0.1)), обладающих свойством: ни для каких $t_1,\ldots,t_m$ $(t_1 < \ldots < t_m)$ не существует таких нетривиальных решений u уравнения (0.1), что

$$\Phi(u,\, t_i) \geqslant k_i \quad (i=1,\ldots,m)$$

(см. [50]). Очевидно, что при любых $k_1,\ldots,k_m$ таких, что $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i \geqslant n$,

$$\mathfrak{T}(J) \subset \mathfrak{T}(k_1,\ldots,k_m;\, J). \tag{9.4}$$

Заметим также, что условие $L \in \mathfrak{T}(n-1,1;\, J)$ достаточно для положительности функции Коши уравнения (0.1).

Теорема 27. *Имеет место представление* $\mathfrak{T}(J)=\bigcap\limits_{k=1}^{n-1}\mathfrak{T}(n-k,k;\,J)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай $J=[a,b]$. Согласно (9.4) осталось доказать включение $\bigcap\limits_{k=1}^{n-1}\mathfrak{T}(n-k,k;\,J)\subset\mathfrak{T}(J)$. Пусть $L\in\bigcap\limits_{k=1}^{n-1}\mathfrak{T}(n-k,k;\,J)$. Предположим, что $L\notin\mathfrak{T}(J)$. Тогда по лемме 15 существует такое решение y уравнения (0.1), что $\Phi(y,\,a)\geqslant n-r$, $\Phi(y,\,\tau)\geqslant r$ при некоторых $\tau\in[a,b]$ и r $(1\leqslant r\leqslant n-1)$. Однако это противоречит принадлежности $L\in\mathfrak{T}(n-r,r;\,J)$. Следовательно, имеет место требуемое включение.

При $J=(a,b)$ утверждение следует из представления

$$\mathfrak{T}((a,b))=\bigcap_{k=p}^{\infty}\mathfrak{T}\left(\left[a+\frac{1}{k},\,b-\frac{1}{k}\right]\right)$$

при некотором $p\in\mathbb{N}$. Точно так же рассуждаем и при $J=[a,b)$ или $J=(a,b]$. $\square$

3. Пусть $J\subset I$ — промежуток. Обозначим

$$\widehat{\mathfrak{T}}(J)\doteq\{L:\ Lx=0,\ x(t)\neq 0,\quad \Psi(x,J)\leqslant n-1\}.$$

Таким образом, $L\in\widehat{\mathfrak{T}}(J)$, если любое нетривиальное решение уравнения (0.1) имеет на J не более $n-1$ геометрически различных нулей.

Непосредственно из определений видим: $\mathfrak{T}(J)\subset\widehat{\mathfrak{T}}(J)=\mathfrak{T}(\underbrace{1,\dots,1}_{n};\,J)$.

Теорема 28. *Пусть* $J\subset I$ *— открытый или полуоткрытый интервал. Тогда* $\widehat{\mathfrak{T}}(J)=\mathfrak{T}(J)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Осталось доказать включение $\widehat{\mathfrak{T}}(J)\subset\mathfrak{T}(J)$.

Пусть сначала $J=(a,b)$. Предположим, что $L\in\widehat{\mathfrak{T}}(J)$, но $L\notin\mathfrak{T}(J)$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество нетривиальных решений x уравнения (0.1) таких, что $\Phi(x,\,J)\geqslant n$. Пусть

$$r\doteq\max_{x\in\mathfrak{M}}\Psi(x,J),\qquad \Psi(v,J)=r,\quad v\in\mathfrak{M};\quad (a<)\,t_1,\dots,t_r\,(<b)\ —$$

геометрически различные нули v, $\quad k_i\doteq\Phi(v,\,t_i)$, $\quad\sum\limits_{i=1}^{r}k_i\geqslant n$. Очевидно, $r\leqslant n-1$. Пусть t_0 и t_{r+1} таковы, что $a<t_0<t_1$, $t_r<t_{r+1}<b$.

Рассмотрим сначала случай $r=n-1$.

Пусть k_{i_0} $(1\leqslant i_0\leqslant n-1)$ — четное число. Не ограничивая общности, можно считать, что $v^{(k_{i_0})}(t_{i_0})>0$. Тогда $v(t)>0$ вблизи t_{i_0}, $t\neq t_{i_0}$. Определим решение y уравнения (0.1) краевыми условиями

$$\Phi(y,\,t_i)\geqslant 1,\qquad i=1,\dots,r+1,\quad i\neq i_0,\quad y(t_{i_0})=1. \tag{9.5}$$

Неравенства здесь определяют подпространство решений размерности не менее 1, при этом равенство $y(t_{i_0})=0$ означало бы, что $\Psi(y,J)\geqslant n$, то есть $L\notin\widehat{\mathfrak{T}}(J)$. Это означает, что решение задачи (0.1), (9.5) существует.

Положим $z_\mu\doteq v-\mu y$, $\quad\mu>0$. Тогда $\Phi(z_\mu,\,t_i)\geqslant 1$, $i=1,\dots,r$, $i\neq i_0$. Сопоставляя $z_\mu(t_{i_0})=-\mu<0$ со знаком $v(t)$ вблизи t_{i_0}, видим, что z_μ имеет при достаточно малом μ не менее двух различных нулей вблизи t_{i_0}. В итоге $\Phi(z_\mu,J)\geqslant r-1+2=n$, что противоречит принадлежности $L\in\widehat{\mathfrak{T}}(J)$.

Пусть все k_i нечетные. Тогда хотя бы одно из них $\geqslant 3$; пусть $k_{i_0}\geqslant 3$. Теперь подчиним решение y начальным условиям

$$y^{(j)}(t_{i_0})=0,\quad j=0,1,\dots,n-1,\quad j\neq k_{i_0}-1,\quad y^{(k_{i_0}-1)}(t_{i_0})=1. \tag{9.6}$$

Так как v меняет знак во всех t_i, то при достаточно малом μ z_μ обладает свойствами: z_μ имеет не менее чем по одному нулю в окрестности каждой из точек t_i и, кроме того, k_{i_0}-кратный нуль в точке t_{i_0}. Таким образом, $\Phi(z_\mu, J) \geqslant n-2+k_{i_0} > n$; это значит, что $z_\mu \in \mathfrak{M}$, причем $\Psi(z_\mu, J) \geqslant n-1+1 = n$. Это снова противоречит принадлежности $L \in \widehat{\mathfrak{T}}(J)$.

Рассмотрим случай $r < n-1$.

Предположим, что

$$k_i = 1, \quad i = 1,\ldots,r, \quad i \neq i_0,, \quad k_{i_0} > 1$$

(это значит, что на самом деле $k_{i_0} \geqslant 3$). Пусть y снова есть решение задачи Коши (0.1), (9.6). Повторяя приведенные в предыдущем случае рассуждения, получим, что при достаточно малом μ $z_\mu \in \mathfrak{M}$, но $\Psi(z_\mu, J) \geqslant r+1$. Это противоречие с определением числа r говорит о невозможности предположенного.

Осталось рассмотреть случай, когда по крайней мере два из k_i больше 1. Пусть $k_{i_0} \geqslant 2$. Определим числа l_i, $i = 1,\ldots,r+1$ условиями

$$1 \leqslant l_i \leqslant k_i,\ \ i = 1,\ldots,r,\ \ i \neq i_0,\ \ l_{i_0} = k_{i_0} - 2k,\ \ (k \geqslant 1),\ \ l_{r+1} = 1,\ \ \sum_{i=1}^{r+1} l_i = n-1$$

и построим решение уравнения (0.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\Phi(y,\, t_i) \geqslant l_i, \quad i = 1,\ldots,r+1, \qquad y^{(l_{i_0})}(t_{i_0}) = 1. \tag{9.7}$$

Неравенства определяют подпространство решений уравнения (0.1) размерности $\geqslant 1$. Если бы выполнялось равенство $y^{(l_{i_0})}(t_{i_0}) = 0$, то оказалось бы, что $y \in \mathfrak{M}$, $\Psi(y, J) \geqslant r+1$. Это противоречие с определением числа r означает, что задача (0.1), (9.7) разрешима. Теперь $z_\mu = v - \mu y$ при достаточно малом $\mu > 0$ обладает свойствами: $\sum\limits_{i=1}^{r} \Phi(z_m u, t_i) \geqslant n-2$; z_μ имеет в окрестности t_{i_0} два различных и отличных от t_{i_0} нуля. Следовательно, $\Phi(z_m u, J) \geqslant n$, т. е. $z_m u \in \mathfrak{M}$. При этом $\Psi(z_\mu, J) \geqslant r+1$. Полученное противоречие с определением числа r завершает рассмотрение случая $J = (a,b)$.

Так как

$$\mathfrak{T}\big([a,b)\big) \subset \widehat{\mathfrak{T}}\big([a,b)\big) \subset \widehat{\mathfrak{T}}\big((a,b)\big) \subset \mathfrak{T}\big((a,b)\big) = \mathfrak{T}\big([a,b)\big)$$

(см. теорему 10), то $\mathfrak{T}\big([a,b)\big) = \widehat{\mathfrak{T}}\big([a,b)\big) \quad \Big(= \widehat{\mathfrak{T}}\big((a,b)\big)\Big)$.

Точно так же рассуждаем в случае $J = (a,b]$. □

Следствие 5. *Если* $L \notin \mathfrak{T}\big([a,b)\big)$, *то уравнение* (0.1) *имеет нетривиальное решение, имеющее на* $[a,b]$ n *геометрически различных нулей.*

Замечание 9. Как показывает следующий пример, в случае если $J = [a,b]$, утверждение теоремы не имеет места.

Пусть $Lx \doteq x^{IV} + x''$. Марковскую на $(0,2\pi)$ систему решений уравнения $Lx = 0$ образуют функции $t - \sin t$, $1 - \cos t$, t, 1, поэтому $L \in \mathfrak{T}\big((0,2\pi)\big) = \mathfrak{T}\big([0,2\pi)\big)$. Однако $L \notin \mathfrak{T}\big([0,2\pi]\big)$, так как решение $x(t) = 1 - \cos t$ имеет двукратный нуль в точках $t = 0$ и $t = 2\pi$, $\Phi(x, [0,2\pi]) = 4$. Это же решение показывает, что $L \notin \mathfrak{T}\big(2,2;[0,2\pi]\big)$. Тем не менее $L \in \widehat{\mathfrak{T}}\big([0,2\pi]\big)$, так как не существует нетривиального решения уравнения $Lx = 0$, имеющего 4 простых нуля: краевая задача для уравнения $Lx = 0$ с условиями

$$l_1 x \doteq x(0) = 0,\ \ l_2 x \doteq x(t_1) = 0,\ \ l_3 x \doteq x(t_2) = 0,\ \ l_4 x \doteq x(2\pi) = 0$$

$(0 < t_1 < t_2 < 2\pi)$ имеет лишь тривиальное решение, потому что ее определитель

$$\det(l_i x_k)_{i,k=1}^4 = 4 \sin\frac{t_1}{2} \cdot \sin\frac{t_2}{2} \cdot \sin\frac{t_2 - t_1}{2} > 0$$

(здесь $x_1(t)=1$, $x_2(t)=t$, $x_3(t)=\cos t$, $x_4(t)=\sin t$).

Интересно отметить также, что $L\in\mathfrak{T}\bigl(1,2,1;[0,2\pi]\bigr)$, так как в этом случае определитель

$$\det(l_ix_k)_{i,k=1}^4=2\pi(1-\cos t_0)>0$$

для любого $t_0\in(0,2\pi)$ $(l_2x\doteq x(t_0),\ l_3x\doteq x'(t_0),\ l_1,\ l_4$ такие же, как выше).

4. Свойство неосцилляции уравнения (0.1) на отрезке является грубым. Покажем это.

Пусть $J=[a,b]\subset I$. Рассмотрим линейное пространство

$$\mathfrak{N}(J)\doteq\{L:\ Lx=x^{(n)}+\sum_{k=1}^{n}p_{n-k}x^{(k)},\quad p_k\in\mathbb{L}_1[a,b],\ k=1,\ldots,n\}.$$

Определим на $\mathfrak{N}(J)$ метрику равенством

$$\rho(L_1,L_2)\doteq\sum_{k=1}^{n}\int_a^b|p_{k,1}(t)-p_{k,2}(t)|\,dt\quad\left(L_ix=x^{(n)}+\sum_{k=1}^{n}p_{n-k,i}x^{(k)},\ i=1,2\right),$$

которая превращает $\mathfrak{N}(J)$ в полное метрическое пространство.

Как известно (см. [32, с. 70], [42]), сходимость последовательности $\{L_m\}_{m=1}^{\infty}\subset\mathfrak{N}(J)$ к $L\in\mathfrak{N}(J)$ в смысле $\rho(L_m,L)\to0$ при $m\to\infty$ влечет равномерную сходимость производных $x_m^{(j)}$, $j=0,\ldots,n-1$, решений уравнений $L_mx=0$, $m=1,2,\ldots$ к производным решения $x^{(j)}$, $j=0,\ldots,n-1$, уравнения $Lx=0$.

Теорема 29. *Пусть* $J=[a,b]\subset I$. *Множество* $\mathfrak{T}(J)\subset\mathfrak{N}(J)$ *открыто и связно.*

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{T}(J)$ не является открытым и $L\in\mathfrak{T}(J)$. Тогда для любого натурального m существует $L_m\in\mathfrak{N}(J)$ такое, что

$$\rho(L_m,L)<\frac{1}{m},\quad\text{но}\quad L_m\notin\mathfrak{T}(J).\tag{9.8}$$

По теореме 12 существует M_J^+-система $\{u_k\}_{k=1}^n$ решений уравнения $Lx=0$. Следовательно, выполняются неравенства $w_k(t)\doteq[u;1,\ldots,k](t)>0$, $t\in J$, $k=1,\ldots,n$. Определим системы $\{u_{k,m}\}_{k=1}^n$ решений уравнений $L_mx=0$, $m=1,2,\ldots$ начальными условиями

$$u_{k,m}^{(j)}(a)=u_k^{(j)}(a)\quad(j=0,\ldots,n-1,\ k=1,\ldots,n,\ m=1,2,\ldots).$$

Как отмечалось выше, $u_{k,m}^{(j)}(t)\to u_k^{(j)}(t)$ $(m\to\infty,\ \ j=0,\ldots,n-1,\ k=1,\ldots,n)$ равномерно на J, а значит, и $[u_m;1,\ldots,k](t)\to w_k(t)$ $(m\to\infty,\ k=1,\ldots,n)$ равномерно на J. Следовательно, найдется такое натуральное N, что при $m>N$ $[u_m;1,\ldots,k](t)>0$, $k=1,\ldots,n$, $t\in J$, т. е. $\{u_{k,m}\}_{k=1}^n$ — M_J^+-системы при $m>N$. По теореме 12 $L_m\in\mathfrak{T}(J)$ при $m>N$. Это противоречие с (9.8) означает, что $\mathfrak{T}(J)$ открыто в $\mathfrak{N}(J)$.

Если $L_i\in\mathfrak{T}(J)$, $i=1,2$, то по теореме 14

$$L_i=h_{n,i}\frac{d}{dt}h_{n-1,i}\frac{d}{dt}\,\ldots\,\frac{d}{dt}h_{0,i},$$

где $h_{k,i}(t)>0$, $t\in J$, $h_{k,i}$ абсолютно непрерывны на $J\,(k=1,\ldots,\ n-1)$, $h_{n,i}$ суммируемы на J, $h_{n,i}(t)>0$ п. в. $(i=1,2)$. Выражения L_i могут быть связаны между собой выражением

$$\widetilde{L}_\lambda=g_{n,\lambda}h_{n,2}\frac{d}{dt}g_{n-1,\lambda}h_{n-1,2}\frac{d}{dt}\,\cdots\,\frac{d}{dt}g_{0,\lambda}h_{0,2},$$

где

$$g_{k,\lambda}\doteq\left(\frac{h_{k,1}}{h_{k,2}}\right)^{\lambda},\quad k=0,\ldots,n,\quad 0\leqslant\lambda\leqslant1.\quad\Box$$

Замечание 10. Множество $\mathfrak{T}\bigl([a,b)\bigr)$ может не быть открытым.

В самом деле, $L\doteq\frac{d^2}{dt^2}+1\in\mathfrak{T}\bigl([0,\pi)\bigr)$, но $L_\varepsilon\doteq\frac{d^2}{dt^2}+(1+\varepsilon)\notin\mathfrak{T}\bigl([0,\pi)\bigr)$ при любом $\varepsilon>0$.

§ 10. Знакоопределенность функции Грина классической задачи Валле Пуссена

1. Рассмотрим полуоднородную краевую задачу

$$(Lx)(t) = f(t), \quad t \in [a,b] \subset I, \tag{10.1}$$

$$\Phi(x, a_i) \geqslant \mu_i, \quad i = 1, \ldots, \nu+1, \quad \sum_{i=0}^{\nu+1} \mu_i = n \tag{10.2}$$

$(0 \leqslant \nu \leqslant n-1, \quad a \leqslant a_0 < a_1 < \ldots < a_{\nu+1} \leqslant b)$.

Приведём для удобства читателя определение функции Грина задачи Валле Пуссена (10.1), (10.2) ([39, с.195], см. также, например, [3]).

Функция $G : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ называется функцией Грина краевой задачи (10.1), (10.2), если

а) функция G непрерывна вместе с частными производными по первому аргументу до порядка $n-2$ включительно в квадрате $[a,b]^2$;

б) $\dfrac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}$ абсолютно непрерывна в треугольниках $a \leqslant s < t \leqslant b$ и $a \leqslant t < s \leqslant b$, причем $\dfrac{\partial^{n-1} G(s+,s)}{\partial t^{n-1}} - \dfrac{\partial^{n-1} G(s-,s)}{\partial t^{n-1}} = 1$;

в) $LG(\cdot, s) = 0$ для $t \in [a,s)$ и $t \in (s,b]$;

г) $\Phi(G(\cdot,s), a_i) \geqslant \mu_i, \quad i = 1, \ldots, \nu+1$.

Как отмечалось во введении, если $L \in \mathfrak{T}\big([a,b]\big)$, то задача (10.1), (10.2) однозначно разрешима при любой f, локально суммируемой на I. Следовательно, существует её функция Грина G; решение x этой задачи имеет представление

$$x(t) = \int_a^b G(t,s) f(s)\, ds. \tag{10.3}$$

2. Обозначим $\pi(t) \doteq \operatorname{sign} \prod\limits_{i=0}^{\nu+1} (t-a_i)^{\mu_i} \quad (t \in [a,b])$.

Лемма 16. *Пусть* $L \in \mathfrak{T}\big([a,b]\big)$, f *непрерывна и* $f(t) > 0$ *на* $[a,b]$. *Тогда решение* x *задачи* (10.1), (10.2) *удовлетворяет неравенству*

$$\pi(t)x(t) > 0 \quad (t \in [a,b], \ t \neq a_i, \ i = 0, \ldots, \nu+1). \tag{10.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_{\nu+1} < b$, ибо в противном случае по теореме 11 можно перейти к отрезку $[a, b_1]$, где $b_1 > b$. Так как $\Phi(x, [a,b]) \geqslant n$, то по теореме 16 $x(t) \neq 0$ при $t \neq a_i$ и $\Phi(x, a_i) = \mu_i$, $i = 0, \ldots, \nu+1$. Но тогда имеются только две возможности: либо выполняются неравенства (10.4), либо противоположные строгие неравенства. Поэтому достаточно определить знак x в промежутке $(a_{\nu+1}, b)$.

Предположим, что, вопреки требуемому:

$$x(t) < 0 \quad \text{при} \quad a_{\nu+1} < t < b. \tag{10.5}$$

Пусть

$$x^{(\mu_{\nu+1})} = \gamma \quad (\text{как установлено выше} \quad \gamma \neq 0). \tag{10.6}$$

Решение задачи (10.1), (10.2) можно рассматривать как решение однородного уравнения порядка $n+1$

$$L_{n+1} x \doteq \frac{d}{dt} \frac{1}{f} Lx = 0 \tag{10.7}$$

при краевых условиях (10.2), (10.6). Выражение L_{n+1} может быть факторизовано в виде (0.4), поэтому в силу теоремы 14 уравнение (10.7) неосцилляционно на $[a,b]$.

Пусть $a_0 < \tau < a_{\nu+1}$. Устремив $a_0 \to \tau-$, $a_{\nu+1} \to \tau+$, окажемся в условиях леммы 6, согласно которой $x \to \widetilde{x}$ (в смысле сходимости, описанной в лемме 6), где $\widetilde{x}$ — решение уравнения (10.7) при начальных условиях

$$\Phi(\widetilde{x},\tau) = n, \quad \widetilde{x}^{(n)}(\tau) = (L\widetilde{x})(\tau) = f(\tau) > 0. \tag{10.8}$$

Согласно предположению (10.5) $\widetilde{x}(t) \leqslant 0$ при $t > \tau$. С другой стороны, из неосцилляции уравнения (10.7) и начальных условий (10.8) получаем, что $\widetilde{x}(t) > 0$ при $t > \tau$. Следовательно, предположение (10.5) не выполняется, а имеют место строгие неравенства (10.4). □

3. Пусть $g(t) = G(t,s)$ $\quad (s \in [a,b])$ — произвольное сечение функции Грина задачи (10.1), (10.2); если $L \in \mathfrak{T}([a,b])$, то имеет место представление (0.4) и можно определить L_k по формулам (3.1).

Лемма 17. Если $L \in \mathfrak{T}\big([a,b]\big)$, то

$$\Psi\big(L_{n-2}g, [a,b]\big) \leqslant 2. \tag{10.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теоремы 12 и 14 и определение $G(t,s)$ позволяют получить уравнение второго порядка, которому удовлетворяет функция $v = L_{n-2}g$:

$$h_n \frac{d}{dt} h_{n-1} \frac{d}{dt} v = 0 \qquad (t \in [a,s) \cup (s,b]).$$

Отсюда следует, что

$$v(t) = \tilde{C}_1 + \int_a^t \frac{C_1\, d\tau}{h_{n-1}}(\tau), \quad t \in [a,s),$$
$$v(t) = \tilde{C}_2 - \int_t^b \frac{C_2\, d\tau}{h_{n-1}}(\tau), \quad t \in (s,b],$$

где C_i и $\tilde{C}_i$ — постоянные.

Если $C_1 = C_2 = 0$, то функция $(L_{n-1}g)(t) \equiv 0$ на $[a,b]$, что противоречит определению функции Грина. Значит, этот случай невозможен.

Если $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, то $v(t)$ постоянна (или тождественно равна нулю) на $[a,s)$, $v(t)$ может иметь в $(s,b]$ не более одного нуля.

Если $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$, то $v(t)$ может иметь в $[a,s)$ не более одного нуля, $v(t)$ постоянна (или тождественно равна нулю) на $(s,b]$.

Наконец, если $C_1 \cdot C_2 \neq 0$, то $v(t)$ в $[a,s)$ и в $(s,b]$ может иметь не более чем по одному нулю.

Следовательно, во всех случаях имеет место оценка (10.9). □

Теорема 30. *Пусть* $L \in \mathfrak{T}\big([a,b]\big)$ $\quad (a,b \in I)$. *Тогда*

$$\pi(t)G(t,s) \geqslant 0 \qquad (t,s \in [a,b]), \tag{10.10}$$

причем

$$G(t,s) = 0 \quad \text{при} \quad a \leqslant s \leqslant a_0,\ s \leqslant t \leqslant b, \tag{10.11}$$

$$G(t,s) = 0 \quad \text{при} \quad b \geqslant s \geqslant a_{\nu+1},\ a \leqslant t \leqslant s, \tag{10.12}$$

$$\pi(t)G(t,s) > 0 \quad \text{при} \quad s \in (a_0,\, a_{\nu+1}),\ t \neq a_i,\ i = 0,\, \dots\, ,\nu+1, \tag{10.13}$$

$$G(t,s) > 0 \quad \text{при} \quad b \geqslant t > s \geqslant a_{\nu+1}, \tag{10.14}$$

$$(-1)^n G(t,s) > 0 \quad \text{при} \quad a \leqslant t < s \leqslant a_0, \tag{10.15}$$

$$\Phi(G(\cdot,s),\, a_i) = \mu_i \quad \text{при} \quad s \in (a_0,\, a_{\nu+1}),\ i = 0, \dots, \nu+1$$

(*если* $a_0 = a$ $\big(a_{\nu+1} = b\big)$, *то соотношения* (10.15) $\big($(10.14)$\big)$ *отсутствуют, а* (10.11) $\big($(10.12)$\big)$ *выполняется при* $s = a$ $(s = b)$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что

$$\pi(t_0)G(t_0,s_0)<0 \quad \text{при} \quad (t_0,s_0)\in[a,b],\ t_0\neq a_i,\ i=0,\dots,\nu+1.$$

В силу непрерывности неравенство $\pi(t_0)G(t_0,s)<0$ выполнено и для $s\in(s_0-2h,s_0+2h)$ при некотором $h>0$. Выберем непрерывную $f(t)>0$ так, чтобы $f(t)=1$ при $t\in(s_0-h,s_0+h)$, $f(t)=\varepsilon$ при $t\notin(s_0-2h,s_0+2h)$, $\varepsilon\leqslant f(t)\leqslant 1$ при $t\in[s_0-2h,s_0-h]\cup[s_0+h,s_0+2h]$. Тогда из представления решения задачи (10.1), (10.2) по формуле (10.3) следует, что при достаточно малом $\varepsilon>0$ $\pi(t_0)x(t_0)<0$, что противоречит лемме 16. Следовательно, выполняется (10.10).

В силу теоремы 11 можно считать, что $a<a_0$, $b>a_{\nu+1}$. Пусть $s<a_0$. Предположим, что $G(t_0,s)\neq 0$ при каком-нибудь $t_0\in(s,b]$. Тогда сечение $g(t)=G(t,s)$, как решение однородного уравнения (0.1) на $(s,b]$, имеет на этом полуинтервале не менее n нулей (см. п. г) определения функции Грина). Это противоречие с неосцилляцией доказывает (10.11).

Равенство (10.12) доказывается точно так же.

Предположим, что

$$G(t_0,s_0)=0, \quad s_0\in(a_0,\,a_{\nu+1}), \quad t_0\in[a,b]\setminus\{a_0,\dots,a_{\nu+1}\}.$$

Тогда $\Phi(G(t,s_0),[a,b])\geqslant n+1$ и из следствия 2 получаем, что $\Psi(L_{n-2}G(\cdot,s_0),[a,b])\geqslant n-3$; но это противоречит лемме 17. Значит,

$$G(t,s)\neq 0, \quad s\in(a_0,\,a_{\nu+1}),\ t\in[a,b]\setminus\{a_0,\dots,a_{\nu+1}\}.$$

Это совместно с (10.10) приводит к (10.13).

Точно так же опровергается предположение $\Phi(G(\cdot,s),\,a_i)>\mu_i$ при каком-нибудь i $(0\leqslant i\leqslant\nu+1)$.

Пусть $s>a_{\nu+1}$, $g(t)=G(t,s)$. Из равенства 10.12 и определения функции Грина следует $g^{(j)}(s)=0$ $(j=0,\dots,n-2)$, $g^{(n-1)}(s+)=1$. Значит, $g(t)>0$ при $t>s$, то есть выполнено неравенство (10.14).

Точно так же получим (10.15) (здесь $g^{(n-1)}(s-)=-1$). □

Следствие 6. *Пусть* $L\in\mathfrak{T}\big([a,b]\big)$ $(a,b\in I)$, *функция* f *суммируема и* $f(t)\geqslant 0$ *п. в. в* $[a,b]$, *причем* $f(t)>0$ *на множестве положительной меры. Тогда решение* x *задачи* (10.1), (10.2) *удовлетворяет неравенству*

$$\pi(t)\,x(t)>0, \quad t\in[a,b]\setminus\{a_0,\dots,a_{\nu+1}\},$$

причем $\Phi(x,a_i)=\mu_i$ $(i=0,\dots,\nu+1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение следует из представления (10.3).

Следствие 7. *Пусть* $L\in\mathfrak{T}\big([a,b]\big)$ $(a,b\in I)$,

$$u,v\in C_*^{n-1}([a,b]), \quad u^{(j)}(a_i)=v^{(j)}(a_i), \quad j=0,\dots,k_i-1, \quad i=0,\dots,\nu+1.$$

Тогда если

$$(Lu)(t)\geqslant(Lv)(t) \quad \text{п. в. на} \quad [a,b], \tag{10.16}$$

то

$$\pi(t)\,u(t)\geqslant\pi(t)\,v(t), \quad t\in[a,b]. \tag{10.17}$$

При этом, если неравенство (10.16) *строгое на множестве положительной меры, то и неравенство* (10.17) *строгое для* $t\in(a,a_0)$ *(если* $a<a_0$*),* $t\in(a_i,a_{i+1})$, $i=0,\dots,\nu$, $t\in(a_{\nu+1},b)$ *(если* $a_{\nu+1}<b$*).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение следует из представления (10.3), примененного к разности $\eta=u-v$.

§ 11. Теорема Беллмана о разрешимости задачи с интегральными краевыми условиями

1. Обобщим понятие чебышевской системы на непрерывные функции. Система непрерывных функций

$$\{u_k\}_{k=1}^m \tag{11.1}$$

называется *слабо чебышевской* на J, если $\Psi\left(\sum\limits_{k=1}^m c_k u_k, J\right) \leqslant m-1$ при любых значениях c_k. Очевидно, всякая чебышевская система является слабо чебышевской.

Лемма 18. *Для того чтобы система непрерывных функций* (11.1) *была слабо чебышевской на* $[a,b]$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\Delta\begin{pmatrix} u_1 \dots u_m \\ t_1 \dots t_m \end{pmatrix} \doteq \det\,(u_i(t_k))_{i,k=1}^m \neq 0$ *для любой системы точек* t_i, *удовлетворяющих неравенствам* $a \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant b$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство нулю определителя $\Delta\begin{pmatrix} u_1 \dots u_m \\ t_1 \dots t_m \end{pmatrix}$ эквивалентно существованию нетривиального решения $c_1^*, \dots, c_m^*$ у системы $\sum\limits_{k=1}^m c_i u_i(t_k) = 0$, $i = 1, \dots, m$, что в свою очередь эквивалентно тому, что линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^m c_i^* u_i(t)$ имеет на $[a,b]$ не менее m геометрически различных нулей (в точках t_i, $i = 1, \dots, m$). Но это противоречит определению слабо чебышевской системы. □

Лемма 19 ([8, с. 72], [24, с. 218]). *Пусть* $\{u_k\}_{k=1}^m$, $\{v_k\}_{k=1}^m$ *— две системы интегрируемых на* $[a,b]$ (*в собственном смысле*) *функций. Тогда*

$$\det\left(\int_a^b u_i(t)v_k(t)\,dt\right)_{i,k=1}^m = \frac{1}{m!}\underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{m} \Delta\begin{pmatrix} u_1 \dots u_m \\ t_1 \dots t_m \end{pmatrix} \cdot \Delta\begin{pmatrix} v_1 \dots v_m \\ t_1 \dots t_m \end{pmatrix} dt_1 \cdots dt_m =$$

$$= \int\limits_{a\leqslant t_1<\ldots<t_m\leqslant b}\!\!\!\cdots\!\!\!\int \Delta\begin{pmatrix} u_1 \dots u_m \\ t_1 \dots t_m \end{pmatrix} \cdot \Delta\begin{pmatrix} v_1 \dots v_m \\ t_1 \dots t_m \end{pmatrix} dt_1 \cdots dt_m.$$

2. Рассмотрим задачу об отыскании решения уравнения (10.1), удовлетворяющего краевым условиям

$$l_i u \doteq \int_a^b g_i(t)\,u(t)\,dt = \gamma_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{11.2}$$

где g_i $(i = 1, \dots, n)$ — непрерывные функции.

Теорема 31. *Если* $L \in \mathfrak{T}\big([a,b]\big)$ *и функции* g_i $(i = 1, \dots, n)$ *образуют слабо чебышевскую на* $[a,b]$ *систему , то краевая задача* (10.1), (11.2) *однозначно разрешима при любых правых частях* f, γ_i, $i = 1, \dots, n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{u_k\}_{k=1}^n$ — произвольная ФСР уравнения (0.1), u^* — какое-либо частное решение неоднородного уравнения (10.1). Тогда общее решение y уравнения (10.1) дается формулой $y = \sum\limits_{k=1}^n c_k u_k + u^*$; чтобы удовлетворить условиям (11.2), надо чтобы

$$l_i y = \sum_{k=1}^n c_k l_i u_k + l_i u^* = \gamma_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Эти равенства представляют собой систему линейных уравнений относительно c_k, $(k = 1,\ldots,n)$, определитель которой в силу леммы 19 есть

$$\Lambda \doteq \det\,(l_i u_k)_{i,k=1}^n = \det\,\left(\int_a^b g_i(t)\,u_k(t)\,dt\right)_{i,k=1}^n =$$
$$= \int\limits_{a\leqslant t_1<\ldots<t_n\leqslant b}\!\!\!\cdots\!\int \Delta\left(\begin{array}{c} g_1\ldots g_n \\ t_1\ldots t_n\end{array}\right)\cdot\Delta\left(\begin{array}{c} u_1\ldots u_n \\ t_1\ldots t_n\end{array}\right)dt_1\cdots dt_n.$$

Так как $L\in\mathfrak{T}\bigl([a,b]\bigr)$, то $\{u_k\}_{k=1}^n$ — чебышевская на $[a,b]$ система, а по условию теоремы $\{g_i\}_{i=1}^n$ — слабо чебышевская на $[a,b]$ система непрерывных функций. В силу леммы 18 $\Lambda\neq 0$; следовательно, указанная система уравнений имеет единственное решение $(c_1,\ldots,c_n)$. Это эквивалентно однозначной разрешимости задачи (10.1), (11.2). □

§ 12. Заключительные замечания. Неосцилляция системы

Невозможно перечислить все работы, посвященные исследованию неосцилляции скалярного линейного однородного дифференциального уравнения. Кроме уже отмеченных, укажем еще на работу [50], а также на работы, посвященные неосцилляции квазидифференциальных уравнений [51]–[55], [58]. Ряд работ посвящен различным модификациям понятия неосцилляции (в них вместо *сопряженных точек* (conjugate points) рассматриваются *фокусные точки* (focal points)) [56, 57], [59]–[62], в работе [63] исследуются условия неосцилляции однородного (дифференциального или разностного) уравнения относительно системы функционалов.

Из большого числа работ, посвященных иследованию и применению неосцилляции конечно-разностных уравнений, отметим лишь следующие: [64]–[68]. Отметим особо, что в последней работе получен конечно-разностный аналог критерия Хартмана–Левина (см. §5). Отметим также работу [69], в которой передоказаны результаты работ [64, 65, 67, 68].

Остановимся несколько подробнее на вопросе о введении понятия неосцилляции для системы (0.2) однородных линейных уравнений первого порядка с локально суммируемыми коэффициентами. Понятие точки, сопряженной к точке $a\in I$ (отсутствие которой в промежутке $[a,b]$ и называется неосцилляцией на $[a,b]$), введенное в ряде работ (см., например, [70]–[75]) для линейных систем более высокого (в основном четного) порядка, для системы (0.2) не годится, так как каждая система вида (0.2) оказывается неосцилляционной; такая неосцилляция ничего не дает.

В работе Нехари [76] вводятся следущие понятия сопряженной точки.

Точка $b>a$ называется *сопряженной* к $a\in I$ точкой (*первого рода*), если существует такое нетривиальное решение $x=(x_1,\ldots,x_n)$ системы (0.2), что при некотором k $(1\leqslant k\leqslant n-1)$

$$x_1(a)=\ldots=x_k(a)=x_{k+1}(b)=\ldots=x_n(b)=0.$$

Для системы (0.2), соответствующей скалярному уравнению (0.1), такое определение близко к определению фокусной точки.

Точка $b>a$ называется сопряженной к $a\in I$ точкой (*второго рода*, см. [76]), если существует такое нетривиальное решение $x=(x_1,\ldots,x_n)$ системы (0.2), что при некотором k $(1\leqslant k\leqslant n-1)$

$$x_1(a)=\ldots=x_k(a)=0,\quad x_1(b)=\ldots=x_{n-k}(b)=0.$$

Для системы (0.2), соответствующей скалярному уравнению (0.1), отсутствие такой точки на $[a,b]$ в силу теоремы 27 означает неосцилляцию на $[a,b]$. Будем называть такую неосцилляцию N-неосцилляцией.

Предлагаем здесь следующее определение неосцилляции системы (0.2).

Пусть $t_1 < \ldots < t_m$, $t_i \in I$. Задачу об отыскании решения x системы (0.2), удовлетворяющего условиям

$$x_i(t_j) = 0, \quad i = 1, \ldots, \mu_j, \quad j = 1, \ldots, m \qquad \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j = n\right), \tag{12.1}$$

назовем задачей Валле Пуссена. Систему (0.2) назовем VP-неосцилляционной на промежутке $J \subset I$, если при любом m $(2 \leqslant m \leqslant n)$ и любом расположении точек $t_i \in J$ задача Валле Пуссена (0.2), (12.1) однозначно разрешима.

Для системы (0.2), соответствующей скалярному уравнению (0.1), такое определение неосцилляции в силу теоремы 27 эквивалентно отсутствию в J сопряженной точки второго рода, т. е. для таких систем предлагаемое определение VP-неосцилляции совпадает с определением N-неосцилляции. Очевидно, что оба определения совпадают для любых систем при $n = 2$. В общем случае VP-неосцилляция влечет N-неосцилляцию. Ниже мы покажем, что кроме уже отмеченных случаев обратная импликация, вообще говоря, не имеет места.

Пусть $U = (u_{ik})$ — фундаментальная матрица системы (0.2), нормированная в точке $a \in I$ и

$$\Lambda\begin{pmatrix} t_1 \ldots t_m \\ \mu_1 \ldots \mu_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}(t_1) & \ldots & u_{1n}(t_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{\mu_1,1}(t_1) & \ldots & u_{\mu_1,n}(t_1) \\ u_{11}(t_2) & \ldots & u_{1n}(t_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{\mu_2,1}(t_2) & \ldots & u_{\mu_2,n}(t_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{11}(t_m) & \ldots & u_{1n}(t_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{\mu_m,1}(t_m) & \ldots & u_{\mu_m,n}(t_m) \end{pmatrix}.$$

Теорема 32. *Для того чтобы система* (0.2) *была* VP*-неосцилляционной на* $[a, b] \subset I$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\Delta\begin{pmatrix} t_1 \ldots t_m \\ \mu_1 \ldots \mu_m \end{pmatrix} \doteq \det \Lambda\begin{pmatrix} t_1 \ldots t_m \\ \mu_1 \ldots \mu_m \end{pmatrix} \neq 0,$$

$a \leqslant t_1 < \ldots < t_m \leqslant b$, $2 \leqslant m \leqslant n$; *в частности, для того чтобы система* (0.2) *была* N*-неосцилляционной на* $[a, b] \subset I$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\Delta\begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ k & n-k \end{pmatrix} \neq 0$, $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$, $\quad k = 1, \ldots, n-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим краевые условия (12.1) в общее решение $x = Uc$, где $c \in \mathbb{R}^n$ — произвольный постоянный вектор. В итоге придем к системе $\Lambda\begin{pmatrix} t_1 \ldots t_m \\ \mu_1 \ldots \mu_m \end{pmatrix} c = 0$ линейных уравнений относительно вектора c. Эта система (а вместе с ней и задача (0.2), (12.1)) однозначно разрешима, т. е. имеет только нулевое решение в том и только том случае, если $\Delta\begin{pmatrix} t_1 \ldots t_m \\ \mu_1 \ldots \mu_m \end{pmatrix} \neq 0$. □

Приведем 2 примера, которые показывают, что N-неосцилляционная система может не быть VP-неосцилляционной.

1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p(t) \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, где p будет выбрана позднее. Здесь

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{t-a} & (t-a)e^{t-a} & \left(\frac{(t-a)^2}{2} + \int_a^t p(s)\,ds\right)e^{t-a} \\ 0 & e^{t-a} & (t-a)e^{t-a} \\ 0 & 0 & e^{t-a} \end{pmatrix},$$

$\Delta\begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = C_1\Big(\frac{(t_2-t_1)^2}{2}+\int_{t_1}^{t_2} p(s)\,ds\Big)$, $\Delta\begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = C_2\Big(\frac{(t_2-t_1)^2}{2}-\int_{t_1}^{t_2} p(s)\,ds\Big)$, где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$. Пусть $0 < a < c < b$, $p(t) = -t$. Тогда

$$\Delta\begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -C_1 t_1(t_2-t_1) < 0, \quad \Delta\begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = C_2 t_2(t_2-t_1) > 0 \quad (a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b).$$

Таким образом, имеет место N-неосцилляция на $[a,b]$ при любом $b > a$. Так как

$$\Delta\begin{pmatrix} a & c & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e^{c-a} & (c-a)e^{c-a} & \Big(\frac{(c-a)^2}{2}+\int_a^c p(s)\,ds\Big)e^{c-a} \\ e^{b-a} & (b-a)e^{b-a} & \Big(\frac{(b-a)^2}{2}+\int_a^b p(s)\,ds\Big)e^{b-a} \end{vmatrix} = 0$$

при $p(t) = -t$ и любом $c \in (a,b)$, то VP-неосцилляции на $[a,b]$ здесь нет.

2. Пусть теперь $A = \begin{pmatrix} 1 & p(t) & 0 \\ 0 & 1 & q(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Здесь

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{t-a} & e^{t-a}\int_a^t p(s)\,ds & e^{t-a}\int_a^t p(s)\,ds\int_a^s q(\tau)\,d\tau \\ 0 & e^{t-a} & e^{t-a}\int_a^t q(\tau)\,d\tau \\ 0 & 0 & e^{t-a} \end{pmatrix},$$

$$\Delta\begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = C_1\int_{t_1}^{t_2} p(s)\,ds\int_{t_1}^{s} q(\tau)\,d\tau, \qquad \Delta\begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= C_2\int_{t_1}^{t_2} p(s)\,ds\int_{s}^{t_2} q(\tau)\,d\tau, \qquad \Delta\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= C_3\int_{t_1}^{t_3} p(s)\,ds\int_{t_1}^{t_2} p(\sigma)\,d\sigma\int_{s}^{\sigma} q(\tau)\,d\tau, \quad \text{где} \quad C_i > 0,\ i = 1,2,3.$$

Если функции p и q сохраняют строгий знак на $[a,b]$, то здесь имеет место VP-неосцилляция на $[a,b]$. Если же $p(t) = q(t) = \sin\frac{\pi(t-a)}{c-a}$ и при этом $a < c < b$, $b-a = 3(c-a)$, то N-неосцилляция на $[a,b]$ при некотором $b > a$ имеет место, а VP-неосцилляция на этом отрезке отсутствует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин А. Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = 0$ // УМН. — 1969. — Т. XXIV. — Вып. 2 . — С. 43–46.
2. Hartman P. Principal solutions of disconjugate n-th order linear differential equations // Amer. J. Math. — 1969. — Vol. 91. — № 2. — P. 306–362.
3. Coppel W. A. Disconjugacy. Lecture Notes in Math. — Berlin. Heidelberg. New York: Springer–Verlag. 1971. — Vol. 220. — 170 p.
4. Muldowney J. S. Comparison theorems for linear boundary problems // SIAM J. Math. Anal. — 1978. — Vol. 9. — № 9. — P. 943–955.
5. Wintner A. On the non-existence of conjugate points // Amer. J. Math. —1951. — № 73. — P. 368–380.
6. Polia G. On the mean value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation // Trans. Amer. J. Math. Soc. — 1922. — Vol. 24. — P. 312–324.
7. Mammana G. Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotto di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenzi ali lineari // Math. L. — 1931. — № 33. — P. 186–231.
8. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1. — М.: Наука, 1978. — 391 с.
9. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. — М.: Наука, 1978. — 431 с.

10. Чичкин Е. С. Теорема о дифференциальном неравенстве для многоточечных краевых задач // Изв. вузов. Матем. — 1962. — № 2. — С. 170–179.
11. Покорный Ю. В. О неклассической задаче Валле Пуссена // Дифференц. уравнения. — 1978. — Т. 14. — № 6. — С. 1018–1027.
12. Дерр В. Я. К обобщенной задаче Валле Пуссена // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23. — № 11. — С. 1861–1872.
13. Дерр В. Я. Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Известия Института математики и информатики. — УдГУ. Ижевск, 1999. — Вып. 1 (16). — С. 3–105.
14. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.–Л., 1952. — 232 с.
15. Азбелев Н. В., Цалюк З. Б. О задаче Чаплыгина // Укр. мат. журн. — 1958. — Т. 10. — № 1. — С. 3–11.
16. Азбелев Н. В., Хохряков А. Я., Цалюк З. Б. Теоремы о дифференциальном неравенстве для краевых задач // Матем. сб. — 1962. — Т. 59 (101). — № 4 — С. 125–144.
17. Bellman R. A note on the identification of linear systems // Proc. Amer. Math. Soc. — 1966. — Vol. 17. — № 1. — P. 68–71.
18. Юберев Н. Н. О линейной периодической краевой задаче для уравнений в конечных разностях // Дифференц. уравнения. — 1966. — Т. 2. — № 6. — С. 784–790.
19. Тонков Е. Л., Хохряков А. Я., Юберев Н. Н. О функции Грина периодической краевой задачи и существовании периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Труды ТИХМа. — Тамбов. — 1968. — Вып. 2. — С. 16–20.
20. Юберев Н. Н. О сохранении знака функции Грина периодической краевой задачи для разностного уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. — 1968. — Т. 3. — № 2. — С. 269–275.
21. Комленко Ю. В., Тонков Е. Л. Периодическая краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка // Докл. АН СССР. — 1968. — Т. 179. — № 1. — С. 17–19.
22. Тонков Е. Л. О периодическом уравнении второго порядка // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 184. — № 21. — С. 296–299.
23. Тонков Е. Л. Линейное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами // Матем. физика. Республ. межведомств. сб. — Киев, 1978. — № 24. — С. 58–69.
24. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. — М.–Л., 1950. — 359 с.
25. Левин А. Ю., Степанов Г. Д. Одномерные краевые задачи с оператором, не повышающим числа перемен знака // Сибирский матем. журнал. — 1976. — Т. 17. — № 3. — С. 606–626. — № 4. — С. 813–830.
26. Степанов Г. Д. Многоточечные краевые задачи с функциями Грина, приводимыми к знакорегулярному виду // ЯрГУ. — Ярославль, 1988. – 25 с. – Деп. в ВИНИТИ 09.06.1988, № 3044-В88.
27. Степанов Г. Д. Эффективные критерии сильной знакорегулярности и осцилляционное свойство функций Грина двухточечных краевых задач // Матем. сб. — 1997. — Т. 188. — №11. — С. 121–159.
28. Тонков Е. Л. Неосцилляция и число переключений в линейной нестационарной системе, оптимальной по быстродействию // Дифференц. уравнения. — 1973. — Т. 9. — № 12. — С. 2180–2185.
29. Тонков Е. Л. К вопросу о неосцилляции линейной системы // Нелинейные колебания и теория управления. — УдГУ. Ижевск, 1982. — Вып. 4. — С. 62–74.
30. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений: Учеб. для вузов. — 8-е изд. — М.: Наука, 1959. — 468 с.
31. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.
32. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: И.–Л., 1958. — 474 с.
33. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: И.–Л., 1953. — Т. 1. — 346 с.
34. Комленко Ю. В. О некоторых критериях неосцилляции и ограниченности решений линейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. — 1965. — Т. 164. — № 2. — С. 270–272.
35. Комленко Ю. В. Условия разрешимости некоторых краевых задач для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка // Докл. АН СССР. — 1967. — Т. 174. — № 5. — С. 1018–1020.
36. Swanson C. A. Comparison and oscillation theory for linear differential equation. — New-York: Academic Press., 1967. — 222 p.
37. de la Valle-Poussin Ch. I. Sur l' equation differentielle du second ordre //Journ. Math Pur et. Appl. — 1929. — Vol. 9. — № 8. — P. 125–144.

38. Азбелев Н. В., Цалюк З. Б. К вопросу о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка // Матем. сб. — 1960. — Т. 51 (92). — № 4. — С. 475–486.
39. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Физматлит, 1961. — 703 с.
40. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 575 с.
41. Дерр В. Я. Об одном свойстве декартовых систем функций // Проблемы современной теории периодических движений. — Ижевск, 1980. — № 4. — С. 9–12.
42. Левин А. Ю. Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения // Вестник Ярославского ун-та. —1973. — Вып. 5. — С. 105–182.
43. Дерр В. Я. Неосцилляция решений квазидифференциального уравнения // Нелинейные колебания и теория управления. — УдГУ. Ижевск, 1982. — Вып. 4. — С. 52–61.
44. Дерр В .Я. Квазидифференциальные уравнения: неосцилляция решений / УдГУ. — Ижевск, 1984. — 54 с. — Деп. в ВИНИТИ 03.03.1984, № 1749-84.
45. Кондратьев В. А. О колеблемости решений линейных уравнений третьего и четвертого порядка // Труды Моск. матем. о-ва. — 1959. — Т. 8. — С. 259–281.
46. Кондратьев В. А. О колеблемости решений уравнения $y^{(n)} + p(x)y = 0$ // Труды Моск. матем. о-ва. — 1961. — Т. 10. — С. 419–436.
47. Бессмертных Г. А., Левин А. Ю. О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной // Доклады АН СССР. — 1962. — Т. 144. — № 3. — С. 71–74.
48. Левин А. Ю. О распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения // Докл. АН СССР, — 1964. — Т. 156. — № 6. — С. 1281–1284.
49. Зайцева Г. С. О многоточечной краевой задаче // Доклады АН СССР. — 1967. Т. 176. — № 4. — С. 763–765.
50. Ridenhour J. R. On the zeros of solutions of Nth order linear differential equations // J. of Differential equations. — 1974. — Vol. 6. — P. 45–71.
51. Nehari Z. Disconjugacy criteria for linear differential equations // J. Diff. Equations. — 1968. — Vol. 4. — P. 604–611.
52. Nehari Z. Disconjugate linear differential operators //Trans. Amer. J. Math. Soc. — 1969. — Vol. 129. — P. 500–516.
53. Nicolson L. S. Disconjugate systems of linear differential equations // J. of Different. Equat. — 1970. — № 7. — P. 570–583.
54. Trench W. F. Canonical forms and principal systems for general disconjugate equations // Trans. Amer. J. Math. Soc. — 1974. — Vol. 189. — P. 319–327.
55. Trench W. F. Asymptotic theory perturbed general disconjugate equations // Hiroshima Math. J. — 1982. — Vol. 12. — P. 43–58.
56. Ridenhour J. R. On the continuity of conjugate point functions // SIAM J. Appl. Math. — 1974. — Vol. 27. — № 4. — P. 531–538.
57. Elias U. The extremal solutions of the equation $Ly+p(x)y=0$ // J. of Math. anal. and appl. — 1975. — № 55. — P. 253–265.
58. Kusano T., Naito M. Oscillation criteria of general linear ordinary differential equations // Pacific J. of Math. — 1981. — Vol. 92. — № 2. — P. 345–358.
59. Elias U. Focal points for a linear differential equation whose coefficients are of constant signes // Trans. Amer. J. Math. Soc. — 1979. — Vol. 249. — № 1. — P. 187–202.
60. Henderson J. Existense of solutions of right focal point boundary value problems for ordinary differential equations // Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Appl. — 1981. — Vol. 5. — № 9. — P. 989–1002.
61. Henderson J. Uniqueness of solutions of right focal point boundary value problems for ordinary differential equations //J. of Different. Equat. — 1981. — Vol. 41. — P. 218–227.
62. Leighton W. Some oscillation theory // ZAMM. — 1983. — Vol. 63. — № 7. — P. 303–315.
63. Дерр В .Я. Критерий неосцилляции решений относительно системы функционалов // Доклады АН СССР. — 1981. — Т. 260. — № 5. — С. 1047–1051.
64. Тептин А. Л. Теоремы о разностных неравенствах для n-точечных разностных краевых задач // Матем. сб. — 1963. — Т. 62 (104). — № 3. — С. 345–370.
65. Тептин А. Л. Об оценке промежутка неосцилляции разностного уравнения и разностных краевых задачах // Дифференц. уравнения. — 1966. — Т. 2. — № 11. — С. 1449–1468.
66. Гусельникова Г. В., Дерр В .Я. Достаточный признак неосцилляционности одного разностного уравнения // Изв. вузов. Матем. — 1973. — № 7. — С. 25–31.
67. Дерр В .Я. Критерий неосцилляции линейного разностного уравнения // Дифференц. уравнения. — 1976. — Т. 12. — № 4. — С. 747–750.

68. Айзикович А. А. Критерий неосцилляции решений разностного уравнения // Дифференц. уравнения. — 1981. — Т. 17. — № 12. — С. 2201–2211.
69. Hartman P. Difference equations: disconjugacy, principal solutions, Green's functions, complete monotonicity // Trans. Amer. Math. Soc. — 1978. — Vol. 246. — P. 1–30.
70. Мартынов В. В. Условия дискретности и непрерывности спектра в случае самосопряженной системы дифференциальных уравнений четного порядка // Дифференц. уравнения. — 1965. — Т. 1. — № 8. — С. 1578–1591.
71. Tomastik E, C. Oscillation criteria of nonlinear matrix differential inequalities // Proc. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 19. — P. 1427–1431.
72. Tomastik E, C. Conjugate and focal points of second order systems // SIAM J. Math. anal. — 1981. — Vol. 12. — № 3. — P. 314–320.
73. Бугир М. К. О разложении Д. Пойя–Г. Маммана для системы уравнений // Дифференц. уравнения. — 1972. — Т. 8. — № 3. — С. 529–530.
74. Levis R. T. Conjugate points of vector-matrix differential equations // Trans. Amer. J. Math. Soc. — 1977. — Vol. 231. — P. 167–178.
75. Ahmad S., Salazar J. A. Conjugate points and second order system // J. of Math. anal. and appl. — 1981. — Vol. 84. — P. 63–72.
76. Nehari Z. Conjugate points, triangular matrices, and Riccati equations // Trans. Amer. J. Math. Soc. — 1974. — Vol. 199. — P. 181–197.

Поступила в редакцию 01.09.08

V. Ya. Derr

Disconjugacy of solutions of linear differential equations

It is an expository article devoted to the disconjugacy theory for decisions of the homogeneous differential equation of n-th order. We give new proofs of some basic results of this theory, such as sufficient conditions for disconjugacy, some implications from disconjugacy, properties of disconjugate equations. We also give new sufficient conditions of disconjugacy for second order differential equations.

Keywords: disconjugacy, conjugate points, factorization, generalized Rolle's Theorem, multi-point Vallee Poussin's boundary value problem, Green's function.

Mathematical Subject Classifications: 34K11

Дерр Василий Яковлевич, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: derr@uni.udm.ru