ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 1

УДК 517.518.6

© *Л. И. Данилов*

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВЕЙЛЮ СЕЧЕНИЙ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ [1]

Рассмотрен класс почти периодических по Вейлю функций, для которых множество ε-почти периодов, определяемых с помощью псевдометрики Вейля, относительно плотно при всех $\varepsilon > 0$. Для этого класса функций при некоторых дополнительных ограничениях доказано существование почти периодических сечений многозначных почти периодических отображений.

Ключевые слова: почти периодическая функция, сечение, многозначное отображение.

Введение

В [1, 2] в связи с исследованием почти периодических (п. п.) дифференциальных включений был поставлен вопрос о существовании п. п. по Вейлю и п. п. по Безиковичу сечений многозначных отображений $\mathbb{R} \ni t \to F(t) \subseteq \mathcal{H}$ с замкнутыми образами в банаховом пространстве $\mathcal{H}$. Известно, что п. п. по Бору многозначные отображения могут не иметь п. п. по Бору сечений [3, 4]. С другой стороны, у п. п. по Степанову многозначных отображений всегда существуют п. п. по Степанову сечения. Впервые это было доказано в [5] на основе результатов Фришковского [6]. Другое доказательство, использующее равномерную аппроксимацию п. п. по Степанову функций элементарными п. п. по Степанову функциями, приведено в [4]. В [7] предложен также вариант доказательства, в котором используются «овыпукливание» задачи и теорема Майкла. Существование п. п. по Вейлю и п. п. по Безиковичу сечений у многозначных п. п. (соответственно по Вейлю и по Безиковичу) отображений было доказано в [8] и [9]. П. п. по Степанову и п. п. по Вейлю сечения имеются также у многозначных отображений, которые являются носителями п. п. мерозначных функций (но сами могут не быть почти периодическими) [10, 11]. В настоящей работе (при некоторых дополнительных ограничениях) дается положительный ответ на вопрос (см. [2]) о существовании п. п. по Вейлю сечений многозначных п. п. по Вейлю отображений, когда рассматривается другой класс п. п. функций, определяемый не с помощью замыкания в псевдометрике Вейля множества тригонометрических многочленов (или множества п. п. по Степанову функций), а как класс функций, для которых ε-почти периоды в псевдометрике Вейля для всех $\varepsilon > 0$ относительно плотны.

В § 1 приведены определения и некоторые утверждения о п. п. функциях, которые используются в дальнейшем. Большинство утверждений о п. п. функциях можно найти в [12, 13]. Многие свойства п. п. по Вейлю функций приведены также в [14]. Разные классы п. п. по Вейлю функций и соотношения между ними подробно рассмотрены в [15]. Основным результатом работы является теорема 2, сформулированная в § 1. Доказательство этой теоремы приведено в § 4. В § 2 собраны вспомогательные результаты. В § 3 доказывается теорема 7 из § 2.

§ 1. Определения, обозначения и основное утверждение

Пусть (U, ρ) — полное метрическое пространство, *meas* — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Функция $f : \mathbb{R} \to U$ называется *элементарной*, если существуют точки $x_j \in U$ и попарно непересекающиеся измеримые по Лебегу множества $T_j \subseteq \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\operatorname{meas} \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_j T_j = 0$ и $f(t) = x_j$ при $t \in T_j$. Обозначим такую функцию через $f(\cdot) = \mathbb{F}(\{x_j\}, \{T_j\}; \cdot)$. Для произвольных функций $f_j : \mathbb{R} \to U$, $j \in \mathbb{N}$, пусть $\mathbb{F}(\{f_j\}, \{T_j\}; \cdot)$ — функция, совпадающая с $f_j(\cdot)$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09–01–00403).

на множествах T_j (функции f_j и множества T_j будут нумероваться в дальнейшем также с помощью нескольких индексов, при этом можно рассматривать и конечное число множеств T_j, которые всегда можно дополнить пустыми множествами до счетной совокупности). Функция $f:\mathbb{R}\to U$ (сильно) *измерима*, если для любого $\varepsilon>0$ существует элементарная функция $f_\varepsilon:\mathbb{R}\to U$ такая, что $\rho(f(t),f_\varepsilon(t))<\varepsilon$ при почти всех (п. в.) $t\in\mathbb{R}$. Совокупность измеримых функций $f:\mathbb{R}\to U$ обозначим через $M(\mathbb{R},U)$, при этом функции, совпадающие при п. в. $t\in\mathbb{R}$, отождествляются (поэтому измеримые функции и в том числе элементарные функции $\mathbb{F}(\{x_j\},\{T_j\};\cdot)$, а также функции $\mathbb{F}(\{f_j\},\{T_j\};\cdot)$ могут не определяться на множествах нулевой меры). Пусть $(L^\infty(\mathbb{R},U),D^{(\rho)}_\infty)$ — метрическое пространство в существенном ограниченных измеримых функций $f:\mathbb{R}\to U$ с метрикой

$$D^{(\rho)}_\infty(f,g)=\operatorname*{ess\,sup}_{t\,\in\,\mathbb{R}}\rho(f(t),g(t))\,,\quad f,g\in L^\infty(\mathbb{R},U)\,.$$

Фиксируем точку $x_0\in U$. Пусть при $p\geqslant 1$

$$M_p(\mathbb{R},U)=\Big\{f\in M(\mathbb{R},U):\sup_{\xi\,\in\,\mathbb{R}}\int_\xi^{\xi+1}\rho^p(f(t),x_0)\,dt<+\infty\Big\}\,.$$

На множестве $M_p(\mathbb{R},U)$ для всех $l>0$ определяются метрики

$$D^{(\rho)}_{p,\,l}(f,g)=\left(\sup_{\xi\,\in\,\mathbb{R}}\ \frac{1}{l}\int_\xi^{\xi+l}\rho^p(f(t),g(t))\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\quad f,g\in M_p(\mathbb{R},U).$$

При $l_1\geqslant l$ справедливы оценки

$$\left(\frac{l}{l_1}\right)^{\frac{1}{p}}D^{(\rho)}_{p,\,l}(f,g)\leqslant D^{(\rho)}_{p,\,l_1}(f,g)\leqslant\left(1+\frac{l}{l_1}\right)^{\frac{1}{p}}D^{(\rho)}_{p,\,l}(f,g),$$

поэтому все метрики $D^{(\rho)}_{p,\,l}$, $l>0$, эквивалентны и существует предел

$$D^{(\rho)}_p(f,g)=\lim_{l\,\to\,+\infty}D^{(\rho)}_{p,\,l}(f,g)=\inf_{l\,>\,0}D^{(\rho)}_{p,\,l}(f,g),\quad f,g\in M_p(\mathbb{R},U),$$

который является псевдометрикой на $M_p(\mathbb{R},U)$.

Если $U=(\mathcal{H},\|.\|)$ — банахово пространство ($\rho(x,y)=\rho_{\mathcal{H}}(x,y)=\|x-y\|$, $x,y\in\mathcal{H}$; $\rho_{\mathbb{R}}(x,y)=|x-y|$, $x,y\in\mathbb{R}$), то для функций $f\in L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{H})$ определена норма

$$\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{t\,\in\,\mathbb{R}}\|f(t)\|\,,$$

а для функций $f\in M_p(\mathbb{R},\mathcal{H})$, $p\geqslant 1$, определены нормы

$$\|f\|_{p,\,l}=\left(\sup_{\xi\,\in\,\mathbb{R}}\ \frac{1}{l}\int_\xi^{\xi+l}\|f(t)\|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\quad l>0,$$

и полунорма

$$\|f\|_p=\lim_{l\,\to\,+\infty}\|f\|_{p,\,l}\,.$$

В дальнейшем удобно предполагать, что $(\mathcal{H},\|.\|)$ — комплексное банахово пространство. Если банахово пространство $(\mathcal{H},\|.\|)$ вещественное, то можно рассматривать его комплексификацию $\mathcal{H}+i\mathcal{H}$, отождествляя пространство $\mathcal{H}$ с вещественным подпространством (норма $\|.\|_{\mathcal{H}+i\mathcal{H}}$ на вещественном подпространстве $\mathcal{H}$ совпадает с исходной нормой).

Множество $T\subseteq\mathbb{R}$ называется *относительно плотным*, если существует число $a>0$ такое, что $[\xi,\xi+a]\cap T\neq\varnothing$ для всех $\xi\in\mathbb{R}$. Совокупность относительно плотных множеств $T\subseteq\mathbb{R}$ будем обозначать через $\mathcal{S}_{\rm rd}$. Число $\tau\in\mathbb{R}$ называется $(\varepsilon,D^{(\rho)}_\infty)$ *-почти периодом* (или просто ε*-почти периодом*) функции $f \in L^\infty(\mathbb{R},U)$, $\varepsilon > 0$, если $D^{(\rho)}_\infty(f(\cdot),f(\cdot+\tau)) < \varepsilon$. Непрерывная ограниченная функция $f : \mathbb{R} \to U$ принадлежит пространству $CAP(\mathbb{R},U)$ *п. п. по Бору* функций, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $(\varepsilon, D^{(\rho)}_\infty)$-почти периодов функции f относительно плотно. Число $\tau \in \mathbb{R}$ называется $(\varepsilon, D^{(\rho)}_{p,l})$ *-почти периодом* (соответственно $(\varepsilon, D^{(\rho)}_p)$ *-почти периодом*) функции $f \in M_p(\mathbb{R},U)$, если $D^{(\rho)}_{p,l}(f(\cdot),f(\cdot+\tau)) < \varepsilon$ (соответственно $D^{(\rho)}_p(f(\cdot),f(\cdot+\tau)) < \varepsilon$). Функция $f \in M_p(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, принадлежит пространству $S_p(\mathbb{R},U)$ *п. п. по Степанову* функций *степени* p, если для любого $\varepsilon > 0$ относительно плотно множество $(\varepsilon, D^{(\rho)}_{p,1})$-почти периодов функции f (вместо метрики $D^{(\rho)}_{p,1}$ можно использовать любую метрику $D^{(\rho)}_{p,l}$, $l > 0$). Функция $f \in M_p(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, принадлежит пространству $W_p(\mathbb{R},U)$ *п. п. по Вейлю* функций *степени* p, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $l = l(\varepsilon,f) > 0$ такое, что множество $(\varepsilon, D^{(\rho)}_{p,l})$-почти периодов функции f относительно плотно. Функция $f \in M_p(\mathbb{R},U)$ принадлежит пространству $W_p(\mathbb{R},U)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f_\varepsilon \in S_p(\mathbb{R},U)$ такая, что $D^{(\rho)}_p(f,f_\varepsilon) < \varepsilon$. Если $U = (\mathcal{H},\|.\|)$ — банахово пространство, то в качестве функций f_ε можно выбирать тригонометрические многочлены

$$f_\varepsilon(t) = \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} h^{(\varepsilon)}_j e^{i\lambda^{(\varepsilon)}_j t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $h^{(\varepsilon)}_j \in \mathcal{H}$, $\lambda^{(\varepsilon)}_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,\dots,N(\varepsilon)$. Множество $W_p(\mathbb{R},U)$ замкнуто в псевдометрическом пространстве $(M_p(\mathbb{R},U), D^{(\rho)}_p)$. Справедливы вложения $S_p(\mathbb{R},U) \subseteq W_p(\mathbb{R},U)$, $W_{p_1}(\mathbb{R},U) \subseteq W_p(\mathbb{R},U)$, $1 \leqslant p \leqslant p_1$.

Будем далее обозначать через $\mathcal{P}^{(\rho)}_p(\varepsilon;f)$ множество $(\varepsilon, D^{(\rho)}_p)$-почти периодов функции $f \in M_p(\mathbb{R},U)$. Функция $f \in M_p(\mathbb{R},U)$ принадлежит пространству $\widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $(\varepsilon, D^{(\rho)}_p)$-почти периодов функции f относительно плотно ($\mathcal{P}^{(\rho)}_p(\varepsilon;f) \in \mathcal{S}_{\rm rd}$). Если $1 \leqslant p \leqslant p_1$, то $\widetilde{W}_{p_1}(\mathbb{R},U) \subseteq \widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$ и для любой функции $f \in \widetilde{W}_{p_1}(\mathbb{R},U)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ выполняется вложение $\mathcal{P}^{(\rho)}_{p_1}(\varepsilon;f) \subseteq \mathcal{P}^{(\rho)}_p(\varepsilon;f)$. Для всех $p \geqslant 1$ имеем $W_p(\mathbb{R},U) \subseteq \widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$, при этом в общем случае пространство $\widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$ не совпадает с пространством $W_p(\mathbb{R},U)$. Например, для функции $f(t) = \sin\sqrt{|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, справедливо включение $f \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, но $f \notin W_p(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (при всех $p \geqslant 1$). Множество $\widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$ замкнуто в псевдометрическом пространстве $(M_p(\mathbb{R},U), D^{(\rho)}_p)$. В ряде недавних статей почти периодическими по Вейлю функциями степени p называются функции из пространства $\widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$ (см., например, [2, 15]), а для функций $f \in W_p(\mathbb{R},U)$ используется название «equi-Weyl almost periodic functions». В данной работе функции $f \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$ также называются *п. п. по Вейлю* функциями *степени* p, но будет уточняться, какому именно из рассматриваемых пространств ($W_p(\mathbb{R},U)$ или $\widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$) они принадлежат.

На пространстве U определим также метрику $\rho'(x,y) = \min\{1,\rho(x,y)\}$, $x,y \in U$, эквивалентную метрике ρ в смысле порождаемой топологии; (U,ρ') — полное метрическое пространство. Пусть $W(\mathbb{R},U) \doteq W_1(\mathbb{R},(U,\rho'))$ — пространство *п. п. по Вейлю* функций $f : \mathbb{R} \to U$ степени 1 со значениями в метрическом пространстве (U,ρ'). Аналогично определяется пространство $\widetilde{W}(\mathbb{R},U) \doteq \widetilde{W}_1(\mathbb{R},(U,\rho'))$. При этом $W_1(\mathbb{R},U) \subseteq W(\mathbb{R},U)$ и $\widetilde{W}_1(\mathbb{R},U) \subseteq \widetilde{W}(\mathbb{R},U)$. Если $f \in \widetilde{W}_1(\mathbb{R},U)$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ справедливо вложение $\mathcal{P}^{(\rho)}_1(\varepsilon;f) \subseteq \mathcal{P}^{(\rho')}_1(\varepsilon;f)$.

Обозначим через $\mathrm{cl}_b\, U = \mathrm{cl}_b\,(U,\rho)$ совокупность непустых замкнутых ограниченных подмножеств $A \subseteq U$. На $\mathrm{cl}_b\, U$ определяется метрика Хаусдорфа

$$\mathrm{dist}\,(A,B) = \mathrm{dist}_\rho(A,B) = \max\,\{\sup_{x\in A}\rho(x,B), \sup_{x\in B}\rho(x,A)\}, \quad A,B \in \mathrm{cl}_b\, U,$$

где $\rho(x,F) = \inf\limits_{y\in F}\rho(x,y)$ — расстояние от точки $x \in U$ до непустого множества $F \subseteq U$. Пусть $\mathrm{cl}\, U = \mathrm{cl}\,(U,\rho) = \mathrm{cl}_b\,(U,\rho')$ — совокупность непустых замкнутых подмножеств $A \subseteq U$

и $\mathrm{dist}_{\rho'}$ — метрика Хаусдорфа на $\mathrm{cl}\,U$, соответствующая метрике ρ'. Метрические пространства $(\mathrm{cl}_b\,U,\mathrm{dist})$ и $(\mathrm{cl}\,U,\mathrm{dist}_{\rho'})$ являются полными. Совокупность непустых компактных подмножеств $A\subseteq U$ обозначим через $\mathrm{cl}_c\,U=\mathrm{cl}_c\,(U,\rho)$, при этом $\mathrm{cl}_c\,(U,\rho)=\mathrm{cl}_c\,(U,\rho')$. Так как $\mathrm{dist}'(A,B)\doteq\min\{1,\mathrm{dist}\,(A,B)\}=\mathrm{dist}_{\rho'}(A,B)$ для всех $A,B\in\mathrm{cl}_b\,U$, то вложение $(\mathrm{cl}_b\,U,\mathrm{dist}')\subseteq(\mathrm{cl}\,U,\mathrm{dist}_{\rho'})$ изометрично.

Пространства $W(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)\doteq W_1(\mathbb{R},(\mathrm{cl}_b\,U,\mathrm{dist}'))$ и $W_p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$, $p\geqslant 1$, *п. п. по Вейлю многозначных отображений* $F:\mathbb{R}\to\mathrm{cl}_b\,U$ определяются как соответствующие пространства п. п. по Вейлю функций со значениями в (полном) метрическом пространстве $(\mathrm{cl}_b\,U,\mathrm{dist})$. Пусть $W(\mathbb{R},\mathrm{cl}\,U)\doteq W_1(\mathbb{R},(\mathrm{cl}\,U,\mathrm{dist}_{\rho'}))$. Справедливы вложения $W_1(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)\subseteq W(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)\subseteq W(\mathbb{R},\mathrm{cl}\,U)$. Аналогично определяются пространства $\widetilde{W}_p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$, $p\geqslant 1$, и $\widetilde{W}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)\doteq\widetilde{W}_1(\mathbb{R},(\mathrm{cl}_b\,U,\mathrm{dist}'))$ *п. п. по Вейлю многозначных отображений* $F:\mathbb{R}\to\mathrm{cl}_b\,U$. Положим $\widetilde{W}(\mathbb{R},\mathrm{cl}\,U)\doteq\widetilde{W}_1(\mathbb{R},(\mathrm{cl}\,U,\mathrm{dist}_{\rho'}))$. Также имеем $\widetilde{W}_p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)\subseteq\widetilde{W}_1(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)\subseteq\widetilde{W}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)\subseteq\widetilde{W}(\mathbb{R},\mathrm{cl}\,U)$, при этом $W_p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)\subseteq\widetilde{W}_p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$, $W(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)\subseteq\widetilde{W}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$, $W(\mathbb{R},\mathrm{cl}\,U)\subseteq\widetilde{W}(\mathbb{R},\mathrm{cl}\,U)$.

Обозначим через $M^\sharp_p(\mathbb{R},U)$ множество функций $f\in M_p(\mathbb{R},U)$, для которых

$$\lim_{\delta\to+0}\ \lim_{l_0\to+\infty}\ \sup_{l\geqslant l_0}\ \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{l}\sup_{T\subseteq[\xi,\xi+l]\,:\,\mathrm{meas}\,T\leqslant\delta l}\int_T\rho^p(f(t),x_0)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}=0.$$

Множество $M^\sharp_p(\mathbb{R},U)$ (как и множество $M_p(\mathbb{R},U)$) не зависит от выбора точки $x_0\in U$. Имеет место равенство (см., например, [8])

$$W_p(\mathbb{R},U)=W(\mathbb{R},U)\bigcap M^\sharp_p(\mathbb{R},U),\quad p\geqslant 1.$$

Для произвольного измеримого (по Лебегу) множества $T\subseteq\mathbb{R}$ обозначим

$$\varkappa_W(T)\doteq\|\chi_T\|_1=\lim_{l\to+\infty}\ \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\ \frac{1}{l}\ \mathrm{meas}\,[\xi,\xi+l]\bigcap T$$

(где χ_T — характеристическая функция множества T). Если $T_j\subseteq\mathbb{R}$, $j=1,\dots,n$, — измеримые множества, то

$$\varkappa_W\left(\bigcup_{j=1}^n T_j\right)\leqslant\sum_{j=1}^n\varkappa_W(T_j)\,.$$

Пусть $M^*_p(\mathbb{R},U)$ — множество функций $f\in M_p(\mathbb{R},U)$ таких, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех измеримых множеств $T\subseteq\mathbb{R}$, для которых $\varkappa_W(T)<\delta$, справедливо неравенство

$$\lim_{l\to+\infty}\ \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\ \frac{1}{l}\int_{[\xi,\xi+l]\cap T}\rho^p(f(t),x_0)\,dt<\varepsilon^p\,.$$

Множество $M^*_p(\mathbb{R},U)$ также не зависит от выбора точки $x_0\in U$.

Лемма 1. *Справедливо равенство $M^*_p(\mathbb{R},U)=M^\sharp_p(\mathbb{R},U)$. Более того, множество $M^*_p(\mathbb{R},U)$ совпадает также с замыканием множества $L^\infty(\mathbb{R},U)$ в псевдометрическом пространстве $(M_p(\mathbb{R},U),D^{(\rho)}_p)$.*

Доказательство. Пусть $f\in M_p(\mathbb{R},U)$. Для любой функции $g\in L^\infty(\mathbb{R},U)$ и любого измеримого множества $T\subseteq\mathbb{R}$ имеем

$$\lim_{l\to+\infty}\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\ \frac{1}{l}\int_{[\xi,\xi+l]\cap T}\rho^p(f(t),x_0)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\tag{1.1}$$

$$\leqslant D^{(\rho)}_p(f,g)+\lim_{l\to+\infty}\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\ \frac{1}{l}\int_{[\xi,\xi+l]\cap T}\rho^p(g(t),x_0)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant D_p^{(\rho)}(f,g)+\varkappa_W^{\frac{1}{p}}(T)\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\rho(g(t),x_0).$$

Также для любой функции $g\in L^\infty(\mathbb{R},U)$ и любого числа $\delta\in(0,1]$ выполняется оценка

$$\lim_{l_0\to+\infty}\ \sup_{l\geqslant l_0}\ \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{l}\sup_{T\subseteq[\xi,\xi+l]\,:\,\operatorname{meas}T\leqslant\delta l}\int_T\rho^p(f(t),x_0)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant \tag{1.2}$$

$$\leqslant D_p^{(\rho)}(f,g)+\delta^{\frac{1}{p}}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\rho(g(t),x_0)\,.$$

Из (1.1) и (1.2) (при $\delta\to+0$) непосредственно следует, что каждая функция $f\in M_p(\mathbb{R},U)$, принадлежащая замыканию множества $L^\infty(\mathbb{R},U)$, содержится в множествах $M_p^*(\mathbb{R},U)$ и $M_p^\sharp(\mathbb{R},U)$. Для функции $f\in M_p(\mathbb{R},U)$ и числа $a>0$ обозначим $T_a=\{t\in\mathbb{R}:\rho(f(t),x_0)>a\}$,

$$f_a(t)=\begin{cases}x_0\,, & \text{если } t\in T_a\,,\\ f(t)\,, & \text{если } t\in\mathbb{R}\setminus T_a\,.\end{cases}$$

Справедливы оценки

$$\operatorname{meas}\,[\xi,\xi+l]\bigcap T_a\ \leqslant\ a^{-p}\int_\xi^{\xi+l}\rho^p(f(t),x_0)\,dt\,,\quad l>0,\quad \xi\in\mathbb{R}\,, \tag{1.3}$$

$$\varkappa_W(T_a)\leqslant a^{-p}\lim_{l\to+\infty}\ \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\ \frac{1}{l}\int_\xi^{\xi+l}\rho^p(f(t),x_0)\,dt\,. \tag{1.4}$$

Если $f\in M_p^\sharp(\mathbb{R},U)$, то с помощью оценки (1.3) и определения множества $M_p^\sharp(\mathbb{R},U)$ получаем, что $D_p^{(\rho)}(f,f_a)\to 0$ при $a\to+\infty$, поэтому (так как $f_a\in L^\infty(\mathbb{R},U)$, $a>0$) каждая функция $f\in M_p^\sharp(\mathbb{R},U)$ содержится в замыкании множества $L^\infty(\mathbb{R},U)$. Если $f\in M_p^*(\mathbb{R},U)$, то из (1.4) следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое (достаточно большое) число $a>0$, что

$$D_p^{(\rho)}(f,f_a)=\lim_{l\to+\infty}\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\ \frac{1}{l}\int_{[\xi,\xi+l]\cap T_a}\rho^p(f(t),x_0)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon\,. \tag{1.5}$$

Оценка (1.5) означает, что каждая функция $f\in M_p^*(\mathbb{R},U)$ также содержится в замыкании множества $L^\infty(\mathbb{R},U)$. $\square$

Функции $f\in\widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$ (в отличие от функций из пространства $W_p(\mathbb{R},U)$) могут не принадлежать множеству $M_p^*(\mathbb{R},U)$. Например, для функции

$$f(t)=\begin{cases}|n|^{\frac{1}{p}}\,, & \text{если } t\in[n,n+\frac{1}{|n|}),\ n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\,,\\ 0 & \text{в противном случае}\,,\end{cases}$$

справедливо включение $f\in M_p(\mathbb{R},\mathbb{R})\backslash M_p^*(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $D_p^{(\rho_{\mathbb{R}})}(f(\cdot),f(\cdot+m))=0$ для всех $m\in\mathbb{Z}$, поэтому $f\in\widetilde{W}_p(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Пусть $M^c(\mathbb{R},U)=M^c(\mathbb{R},(U,\rho))$ — множество функций $f\in M(\mathbb{R},U)$ таких, что для любых $\varepsilon,\delta>0$ существует компакт $K_{\varepsilon,\delta}\in\operatorname{cl}_c U$ такой, что

$$\varkappa_W(\{t\in\mathbb{R}:\rho(f(t),K_{\varepsilon,\delta})\geqslant\varepsilon\})<\delta\,.$$

Так как $\operatorname{cl}_c(U,\rho)=\operatorname{cl}_c(U,\rho')$, то $M^c(\mathbb{R},(U,\rho))=M^c(\mathbb{R},(U,\rho'))$. Если $f\in M(\mathbb{R},U)$, $A\in\operatorname{cl}U$ и $f(t)\in A$ п. в., то $f\in M^c(\mathbb{R},U)$ тогда и только тогда, когда $f\in M^c(\mathbb{R},(A,\rho))$. Множество $M^c(\mathbb{R},U)$ замкнуто в псевдометрическом пространстве $(M(\mathbb{R},U),D_1^{(\rho')})$. Также в псевдометрическом пространстве $(M_p(\mathbb{R},U),D_p^{(\rho)})$ замкнуто множество $M_p(\mathbb{R},U)\cap M^c(\mathbb{R},U)$, где $p\geqslant 1$.

Из определения множества $M^c(\mathbb{R},U)$ непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* $f \in M^c(\mathbb{R}, U)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся точки* $x_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$, *такие, что*

$$\varkappa_W\,(\{t \in \mathbb{R} : \rho(f(t), \bigcup_{j=1}^{N} \{x_j\}) \geqslant \varepsilon\}) \to 0 \quad \textit{при} \quad N \to +\infty.$$

Определение 1. Полное метрическое пространство (U, ρ) обладает *свойством Гейне – Бореля*, если $\mathrm{cl}_b\, U = \mathrm{cl}_c\, U$.

Примерами пространств, обладающих свойством Гейне – Бореля, являются конечномерные линейные пространства $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, с любыми нормами, а также соответствующие им пространства $(\mathrm{cl}_b\, \mathbb{R}^n, \mathrm{dist})$.

Если $f \in M_1(\mathbb{R}, U)$, то $\varkappa_W\,(\{t \in \mathbb{R} : \rho(f(t), x_0) \geqslant a\}) \to 0$ при $a \to +\infty$. Поэтому для метрического пространства (U, ρ), обладающего свойством Гейне – Бореля, имеет место вложение $M_1(\mathbb{R}, U) \subseteq M^c(\mathbb{R}, U)$.

Лемма 3. *Для полного метрического пространства* (U, ρ) *следующие условия эквивалентны:*

1) *пространство* (U, ρ) *обладает свойством Гейне – Бореля,*
2) $\widetilde{W}_1(\mathbb{R}, U) \subseteq M^c(\mathbb{R}, U)$,
3) $\widetilde{W}_1(\mathbb{R}, U) \cap L^\infty(\mathbb{R}, U) \subseteq M^c(\mathbb{R}, U)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если пространство (U, ρ) обладает свойством Гейне – Бореля, то $\widetilde{W}_1(\mathbb{R}, U) \subseteq M_1(\mathbb{R}, U) \subseteq M^c(\mathbb{R}, U)$. Поэтому из 1) следует 2). Условие 3) непосредственно вытекает из 2). Предположим теперь, что выполнено условие 3), но пространство (U, ρ) не обладает свойством Гейне – Бореля. Тогда найдутся множество $A \in \mathrm{cl}_b\, U$, число $\varepsilon > 0$ и точки $x_j \in A$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\rho(x_j, x_k) \geqslant \varepsilon$ для всех $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$. Определим функцию

$$f(t) = \begin{cases} x_1\,, & \text{если } t \leqslant 1\,, \\ x_j\,, & \text{если } (j-1)^2 < t \leqslant j^2\,, \ \ j \in \mathbb{N} \backslash \{1\}\,. \end{cases}$$

Имеем $f \notin M^c(\mathbb{R}, U)$. С другой стороны, $D_1^{(\rho)}(f(\cdot), f(\cdot + \tau)) = 0$ при всех $\tau \in \mathbb{R}$, поэтому $f \in \widetilde{W}_1(\mathbb{R}, U) \cap L^\infty(\mathbb{R}, U)$. Полученное противоречие показывает, что выполнено условие 1). $\square$

Обозначим

$$\widetilde{W}_p^c(\mathbb{R}, U) \doteq \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U) \bigcap M^c(\mathbb{R}, U)\,, \quad p \geqslant 1\,, \quad \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, U) \doteq \widetilde{W}(\mathbb{R}, U) \bigcap M^c(\mathbb{R}, U)\,.$$

Справедливы вложения $W_p(\mathbb{R}, U) \subseteq \widetilde{W}_p^c(\mathbb{R}, U)$, $W(\mathbb{R}, U) \subseteq \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, U)$ [8].

Последовательность $\tau_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, называется f*-возвращающей* для функции f из $W(\mathbb{R}, U)$, если $D_1^{(\rho')}(f(\cdot), f(\cdot + \tau_j)) \to 0$ при $j \to +\infty$. Если функция f принадлежит одному из пространств $W_p(\mathbb{R}, U)$, $S(\mathbb{R}, U)$, $S_p(\mathbb{R}, U)$ или $CAP(\mathbb{R}, U)$, то псевдометрику $D_1^{(\rho')}$ в определении f-возвращающих последовательностей можно заменить на псевдометрику $D_p^{(\rho)}$ или метрику $D_{1,1}^{(\rho')}$, $D_{p,1}^{(\rho)}$ или $D_\infty^{(\rho)}$ соответственно. При такой замене множество f-возвращающих последовательностей не меняется [14]. Последовательность $\tau_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, является f-возвращающей для функции $f \in W(\mathbb{R}, U)$ (соответственно для функции $f \in W_p(\mathbb{R}, U)$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $l = l(\varepsilon, f) > 0$ и $j_0 \in \mathbb{N}$ такие, что все числа τ_j, для которых $j \geqslant j_0$, являются $(\varepsilon, D_{1,l}^{(\rho')})$-почти периодами (соответственно $(\varepsilon, D_{p,l}^{(\rho)})$-почти периодами) функции f [14].

Для функции $f \in W(\mathbb{R}, U)$ через $\mathrm{Mod}\, f$ обозначается модуль (группа по сложению) таких чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, что $e^{i\lambda\tau_j} \to 1$ при $j \to +\infty$ (где $i^2 = -1$) для любой f-возвращающей последовательности τ_j. Если $D_1^{(\rho')}(f(\cdot), y_0(\cdot)) \neq 0$ для всех постоянных функций $y_0(t) \equiv y_0 \in U$, $t \in \mathbb{R}$, то $\mathrm{Mod}\, f$ — счетный модуль (в противном случае $\mathrm{Mod}\, f = \{0\}$). Если $\tau_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, и $e^{i\lambda\tau_j}\to 1$ при $j\to+\infty$ для всех $\lambda\in \operatorname{Mod} f$, где $f\in W(\mathbb{R},U)$, то последовательность τ_j является f-возвращающей.

Пусть $f\in W(\mathbb{R},\mathcal{H})$, где $(\mathcal{H},\|.\|)$ — (комплексное) банахово пространство. Тогда (см., например, [12]) для любого $\lambda\in\mathbb{R}$ существует среднее значение

$$\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}e^{-i\lambda t}f(t)\,dt=M\{e^{-i\lambda t}f(t)\}\,. \tag{1.6}$$

Число $\lambda\in\mathbb{R}$ называется *показателем Фурье* функции $f\in W_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$, если $M\{e^{-i\lambda t}f(t)\}\neq 0$. При этом $\operatorname{Mod} f$ совпадает с *модулем частот* (показателей Фурье) функции f, то есть с наименьшим модулем (группой по сложению) в $\mathbb{R}$, содержащим все показатели Фурье функции f.

Для функций $f\in\widetilde{W}_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$ средние значения (1.6) могут не существовать. Например, рассмотрим функцию

$$f(t)=\begin{cases}0\,, & \text{если } t\leqslant 1\,,\\ (-1)^k\,, & \text{если } 3^{k-1}<t\leqslant 3^k\,,\ \ k\in\mathbb{N}\,,\end{cases}$$

принадлежащую пространству $\widetilde{W}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Для нее не существует среднее значение (1.6) при $\lambda=0$ (и $M\{e^{-i\lambda t}f(t)\}=0$ при $\lambda\neq 0$).

Если $\Lambda_j\subseteq\mathbb{R}$ — произвольные модули (где индекс j принадлежит любому непустому индексному множеству), то через $\sum\limits_j\Lambda_j$ (или $\Lambda_1+\ldots+\Lambda_n$ для конечного множества модулей Λ_j, $j=1,\ldots,n$) обозначается наименьший модуль в $\mathbb{R}$, содержащий все множества Λ_j.

Теорема 1 (см. [8]). *Пусть (U,ρ) — полное метрическое пространство, $g\in W(\mathbb{R},U)$, $F\in W(\mathbb{R},\operatorname{cl}U)$. Тогда для любой неубывающей функции $\eta:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, для которой $\eta(0)=0$ и $\eta(t)>0$ при $t>0$, существует функция $f\in W(\mathbb{R},U)$ такая, что $\operatorname{Mod} f\subseteq\operatorname{Mod} g+\operatorname{Mod} F$, $f(t)\in F(t)$ п. в. и $\rho(f(t),g(t))\leqslant\rho(g(t),F(t))+\eta(\rho(g(t),F(t)))$ п. в. Если, кроме того, $F\in W_p(\mathbb{R},\operatorname{cl}_b U)$ для некоторого $p\geqslant 1$, то функция f принадлежит пространству $W_p(\mathbb{R},U)$.*

В теореме 1 утверждается существование п. п. по Вейлю сечений $f\in W(\mathbb{R},U)$ многозначных п. п. по Вейлю отображений $F\in W(\mathbb{R},\operatorname{cl}U)$. В следующей теореме 2, которая является основным результатом данной работы, содержится аналогичное утверждение о существовании п. п. по Вейлю сечений $f\in\widetilde{W}^c(\mathbb{R},U)$ многозначных п. п. по Вейлю отображений $F\in\widetilde{W}^c(\mathbb{R},\operatorname{cl}U)$. Теорема 2 была ранее анонсирована в [16].

Теорема 2. *Пусть (U,ρ) — полное метрическое пространство, $g\in\widetilde{W}^c(\mathbb{R},U)$, $F\in\widetilde{W}^c(\mathbb{R},\operatorname{cl}U)$ и $\mathcal{T}(\delta)\doteq\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\delta;g)\cap\mathcal{P}_1^{(\operatorname{dist}_{\rho'})}(\delta;F)\in\mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$ для всех $\delta>0$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ и любой функции $h\in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ с плотным в $\mathbb{R}$ модулем частот $\operatorname{Mod}h$ (для нее $\mathcal{T}(\delta)\cap\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\delta;h)\in\mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$ для всех $\delta>0$) найдется функция $f_\varepsilon\in\widetilde{W}^c(\mathbb{R},U)$ такая, что $f_\varepsilon(t)\in F(t)$ п. в., $\rho(f_\varepsilon(t),g(t))<\rho(g(t),F(t))+\varepsilon$ п. в. и для любого $\delta'>0$ существует такое число $\delta>0$, что $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\delta';f_\varepsilon)\supseteq\mathcal{T}(\delta)\cap\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\delta;h)$. Если, кроме того, $F\in M_p^*(\mathbb{R},\operatorname{cl}_b U)$ для некоторого $p\geqslant 1$, то $f_\varepsilon\in\widetilde{W}^c(\mathbb{R},U)\cap M_p^*(\mathbb{R},U)\subseteq\widetilde{W}_p^c(\mathbb{R},U)$.*

Доказательство теоремы 2 приведено в § 4.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Для множеств $T,T_1,T_2\subseteq\mathbb{R}$ обозначим $-T=\{-t:t\in T\}$, $T_1+T_2=\{t_1+t_2:t_1\in T_1,\ t_2\in T_2\}$.

Пусть $\mathbf{T}$ — совокупность многозначных отображений $(0,+\infty)\ni\delta\to\mathcal{T}(\delta)\subseteq\mathbb{R}$ таких, что $\mathcal{T}(\delta)\in\mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$, $\mathcal{T}(\delta)=-\mathcal{T}(\delta)$ и $\mathcal{T}(\delta_1)+\mathcal{T}(\delta_2)\subseteq\mathcal{T}(\delta_1+\delta_2)$ для всех $\delta,\delta_1,\delta_2>0$. Из этих условий следует, что $0\in\mathcal{T}(\delta)$ для всех $\delta>0$ и $\mathcal{T}(\delta_1)\subseteq\mathcal{T}(\delta_2)$ при $0<\delta_1\leqslant\delta_2$.

Для любой функции $f \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$, $p \geqslant 1$, имеет место включение $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f) \in \mathbf{T}$.

Если $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$ и $(0, +\infty) \ni \delta \to \mathcal{T}'(\delta) \subseteq \mathbb{R}$ — произвольное многозначное отображение, то будем писать $\mathcal{T}'(\cdot) \prec \mathcal{T}(\cdot)$, если для любого $\delta' > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что $\mathcal{T}'(\delta') \supseteq \mathcal{T}(\delta)$.

Если $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$ и $(0, +\infty) \ni \delta \to \mathcal{T}'_\alpha(\delta) \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, — произвольное семейство многозначных отображений, то будем писать $\mathcal{T}'_\alpha(\cdot) \underset{\alpha}{\prec} \mathcal{T}(\cdot)$, если для любого $\delta' > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что $\mathcal{T}'_\alpha(\delta') \supseteq \mathcal{T}(\delta)$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Для семейства многозначных отображений $(0, +\infty) \ni \delta \to \mathcal{T}'_\alpha(\delta) \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, через $\bigcap\limits_\alpha \mathcal{T}_\alpha(\cdot)$ обозначается многозначное отображение, принимающее значения $\bigcap\limits_\alpha \mathcal{T}_\alpha(\delta)$, $\delta > 0$.

Если $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$ и $(0, +\infty) \ni \delta \to \mathcal{T}_j'(\delta) \subseteq \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, N$ (где $N \in \mathbb{N}$), — многозначные отображения, для которых $\mathcal{T}_j'(\cdot) \prec \mathcal{T}(\cdot)$, то также $\bigcap\limits_{j=1}^N \mathcal{T}_j'(\cdot) \prec \mathcal{T}(\cdot)$.

Для конечного множества функций $f_j \in W_{p_j}(\mathbb{R}, (U_j, \rho_j))$, $j = 1, \ldots, N$, где $p_j \geqslant 1$ и (U_j, ρ_j) — (полные) метрические пространства, справедливо включение $\bigcap\limits_{j=1}^N \mathcal{P}_{p_j}^{(\rho_j)}(\cdot; f_j) \in \mathbf{T}$. При этом если $f \in W_p(\mathbb{R}, U)$, $p \geqslant 1$, то следующие три условия эквивалентны (см. [14]):

1) $\operatorname{Mod} f \subseteq \sum\limits_{j=1}^N \operatorname{Mod} f_j$,

2) каждая f_j-возвращающая для всех $j = 1, \ldots, N$ последовательность $\tau_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, является f-возвращающей,

3) $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f) \prec \bigcap\limits_{j=1}^N \mathcal{P}_{p_j}^{(\rho_j)}(\cdot; f_j)$.

В частности, для любых функций $f \in W_p(\mathbb{R}, U)$ и $f \in W_{p_1}(\mathbb{R}, (U_1, \rho_1))$ условие $\operatorname{Mod} f \subseteq \operatorname{Mod} f_1$ эквивалентно условию $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f) \prec \mathcal{P}_{p_1}^{(\rho_1)}(\cdot; f_1)$.

Лемма 4. *Пусть* $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$ *и* $f \in W_p(\mathbb{R}, U)$. *Тогда* $\mathcal{T}(\cdot) \cap \mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f) \in \mathbf{T}$.

Доказательство. Достаточно показать, что при всех $\delta > 0$ выполнено включение $\mathcal{T}(\delta) \cap \mathcal{P}_p^{(\rho)}(\delta; f) \in \mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$. Выберем произвольное число $\delta > 0$. Так как $f \in W_p(\mathbb{R}, U)$, то найдутся числа $N \in \mathbb{N}$, $b_j > 0$, где $j = 1, \ldots, N$, и $M \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ такие, что каждое число

$$\tau' \in \bigcap_{j=1}^N \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \big((k - \tfrac{1}{M}) b_j, (k + \tfrac{1}{M}) b_j\big)$$

является $(\delta, D_p^{(\rho)})$-почти периодом функции f [12]. Для всех чисел $m_j \in \{1, \ldots, M\}$, где $j = 1, \ldots, N$, определим множества

$$T(m_1, \ldots, m_N) = \bigcap_{j=1}^N \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \big[(k + \tfrac{m_j - 1}{M}) b_j, (k + \tfrac{m_j}{M}) b_j\big).$$

В каждом множестве $\mathcal{T}(\frac{\delta}{2}) \cap T(m_1, \ldots, m_N)$ фиксируем некоторое число $\widetilde{\tau}(m_1, \ldots, m_N)$ (если такое число существует, а при $m_1 = \ldots = m_N = 1$ оно существует и, более того, можно считать, что $\widetilde{\tau}(1, \ldots, 1) = 0$). Тогда для любого $\tau \in \mathcal{T}(\frac{\delta}{2})$ найдутся числа $m_j = m_j(\tau)$, $j = 1 \ldots, N$, такие, что число $\widetilde{\tau}(m_1(\tau), \ldots, m_N(\tau))$ существует и

$$\tau - \widetilde{\tau}(m_1(\tau), \ldots, m_N(\tau)) \in \bigcap_{j=1}^N \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \big((k - \tfrac{1}{M}) b_j, (k + \tfrac{1}{M}) b_j\big).$$

Следовательно, $\tau - \widetilde{\tau}(m_1(\tau), \ldots, m_N(\tau)) \in \mathcal{P}_p^{(\rho)}(\delta; f)$. С другой стороны,

$$\tau - \widetilde{\tau}(m_1(\tau), \ldots, m_N(\tau)) \in \mathcal{T}(\frac{\delta}{2}) + \mathcal{T}(\frac{\delta}{2}) \subseteq \mathcal{T}(\delta),$$

и относительно плотно множество $\{\tau - \widetilde{\tau}(m_1(\tau),\dots,m_N(\tau)) : \tau \in \mathcal{T}(\frac{\delta}{2})\}$ (так как имеется только конечное множество чисел $\widetilde{\tau}(m_1,\dots,m_N)$ при разных $m_j \in \{1,\dots,M\}$, $j=1,\dots,N$). Поэтому $\mathcal{T}(\delta)\cap\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\delta;f)\in\mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$. $\square$

Теорема 3. *Если* $f\in\widetilde{W}(\mathbb{R},U)\cap M_p^*(\mathbb{R},U)$, $p\geqslant 1$, *то* $f\in\widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot;f)\prec\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot;f)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f\in\widetilde{W}(\mathbb{R},U)\cap M_p^*(\mathbb{R},U)$, $\delta'>0$. Выберем число $\Delta'>0$ такое, что для любого измеримого множества $T\subseteq\mathbb{R}$, для которого $\varkappa_W(T)<\Delta'$, выполняется неравенство

$$\lim_{l\to+\infty}\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\ \frac{1}{l}\int_{[\xi,\xi+l]\cap T}\rho^p(f(t),x_0)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{\delta'}{3}\,.$$

Положим $\Delta=\min\{1,\frac{\delta'}{3}\}$, $\delta=\Delta'\Delta$. Пусть $\tau\in\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\delta;f)$, то есть

$$\lim_{l\to+\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\ \frac{1}{l}\int_{\xi}^{\xi+l}\rho'(f(t),f(t+\tau))\,dt<\delta\,.$$

Для выбранного числа Δ обозначим $T_\Delta(\tau)=\{t\in\mathbb{R}:\rho(f(t),f(t+\tau))\geqslant\Delta\}$. Так как

$$\varkappa_W(T_\Delta(\tau))=\lim_{l\to+\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\ \frac{1}{l}\ \mathrm{meas}\,[\xi,\xi+l]\cap T_\Delta(\tau)\leqslant$$

$$\leqslant\tfrac{1}{\Delta}\lim_{l\to+\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\ \frac{1}{l}\int_{\xi}^{\xi+l}\rho'(f(t),f(t+\tau))\,dt<\tfrac{\delta}{\Delta}=\Delta',$$

то справедливы оценки

$$D_p^{(\rho)}(f(\cdot),f(\cdot+\tau))=\lim_{l\to+\infty}\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\ \frac{1}{l}\int_{\xi}^{\xi+l}\rho^p(f(t),f(t+\tau))\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{l\to+\infty}\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\ \frac{1}{l}\int_{[\xi,\xi+l]\cap T_\Delta(\tau)}\rho^p(f(t),f(t+\tau))\,dt\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\lim_{l\to+\infty}\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\ \frac{1}{l}\int_{[\xi,\xi+l]\setminus T_\Delta(\tau)}\rho^p(f(t),f(t+\tau))\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{l\to+\infty}\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\ \frac{1}{l}\int_{[\xi,\xi+l]\cap T_\Delta(\tau)}\rho^p(f(t),x_0)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\lim_{l\to+\infty}\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\ \frac{1}{l}\int_{[\xi,\xi+l]\cap T_\Delta(\tau)}\rho^p(f(t+\tau),x_0)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}+\Delta<\frac{\delta'}{3}+\frac{\delta'}{3}+\frac{\delta'}{3}=\delta'.$$

Следовательно, $\tau\in\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\delta';f)$. Из произвольности выбора числа $\tau\in\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\delta;f)$ получаем, что $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\delta';f)\supseteq\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\delta;f)$. Так как число $\delta'>0$ также можно выбирать произвольно, то $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot;f)\prec\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot;f)$. Отсюда и из включения $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\delta;f)\in\mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$, которое справедливо для всех $\delta>0$, следует, что $f\in\widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$. $\square$

Так как $L^\infty(\mathbb{R},U)\subseteq M_p^*(\mathbb{R},U)$ для всех $p\geqslant 1$, то из теоремы 3, в частности, следует, что для всякой функции $f\in\widetilde{W}(\mathbb{R},U)\cap L^\infty(\mathbb{R},U)$ имеем $f\in\widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$ и, более того, $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot;f)\prec\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot;f)$ (для всех $p\geqslant 1$).

Лемма 5. *Пусть* $\mathcal{T}(\cdot)\in\mathbf{T}$, $f\in\widetilde{W}(\mathbb{R},U)$, $g\in\widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$ *при некотором* $p\geqslant 1$ *и* $\rho(f(\cdot),g(\cdot))\in L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Предположим, что* $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot;f)\prec\mathcal{T}(\cdot)$ *и* $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot;g)\prec\mathcal{T}(\cdot)$. *Тогда* $f\in\widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$ *и* $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot;f)\prec\mathcal{T}(\cdot)$.

Доказательство. Так как $g \in M_p(\mathbb{R},U)$, то также справедливо $f \in M_p(\mathbb{R},U)$. Обозначим

$$C = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} \rho(f(t),g(t)).$$

Выберем любое число $\delta' \in (0,1]$ и положим $\delta'' = (1+3^{p-1}(1+2C^p))^{-\frac{1}{p}}\delta'$. Определим множества $T_{\delta''}(\tau) = \{t \in \mathbb{R} : \rho(f(t),f(t+\tau)) \geqslant \delta''\}$, $\tau \in \mathbb{R}$. Для всех $l>0$ и $\xi \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$ (так как $\delta'' \in (0,1)$) имеем

$$\frac{1}{l}\ \mathrm{meas}\ [\xi,\xi+l] \cap T_{\delta''}(\tau) \leqslant \frac{1}{l\delta''} \int_{\xi}^{\xi+l} \rho'(f(t),f(t+\tau))\,dt < \frac{1}{\delta''}\ D_{1,l}^{(\rho')}(f(\cdot),f(\cdot+\tau))\,,$$

поэтому

$$D_{p,l}^{(\rho)}(f(\cdot),f(\cdot+\tau)) = \frac{1}{l}\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \int_{\xi}^{\xi+l} \rho^p(f(t),f(t+\tau))\,dt \leqslant \tag{2.1}$$

$$\leqslant \frac{1}{l}\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \int_{[\xi,\xi+l]\cap T_{\delta''}(\tau)} \rho^p(f(t),f(t+\tau))\,dt + \frac{1}{l}\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \int_{[\xi,\xi+l]\setminus T_{\delta''}(\tau)} \rho^p(f(t),f(t+\tau))\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{l}\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \int_{[\xi,\xi+l]\cap T_{\delta''}(\tau)} 3^{p-1}\big(\rho^p(f(t),g(t)) + \rho^p(g(t),g(t+\tau)) + \rho^p(f(t+\tau),g(t+\tau))\big)\,dt +$$

$$+ (\delta'')^p \leqslant 2\cdot 3^{p-1}C^p\ \Big(\frac{1}{l}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\ \mathrm{meas}\ [\xi,\xi+l]\cap T_{\delta''}(\tau)\Big) +$$

$$+ 3^{p-1}\,\frac{1}{l}\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \int_{\xi}^{\xi+l} \rho^p(g(t),g(t+\tau))\,dt + (\delta'')^p \leqslant$$

$$\leqslant 2\cdot 3^{p-1}C^p(\delta'')^{-1}D_{1,l}^{(\rho')}(f(\cdot),f(\cdot+\tau)) + 3^{p-1}\big(D_{p,l}^{(\rho)}(g(\cdot),g(\cdot+\tau))\big)^p + (\delta'')^p.$$

Для числа δ'' найдется число $\delta > 0$ такое, что

$$\mathcal{P}_1^{(\rho')}((\delta'')^{p+1};f) \bigcap \mathcal{P}_p^{(\rho)}(\delta'';g) \supseteq \mathcal{T}(\delta).$$

Тогда для любого $\tau \in \mathcal{T}(\delta)$ из оценок (2.1) при $l \to +\infty$ вытекает оценка $D_p^{(\rho)}(f(\cdot),f(\cdot+\tau)) \leqslant \delta'$ и, следовательно, $\mathcal{T}(\delta) \subseteq \mathcal{P}_p^{(\rho)}(\delta';f)$. Так как число $\delta' \in (0,1]$ можно выбирать произвольно, то последнее вложение означает, что $f \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot;f) \prec \mathcal{T}(\cdot)$. □

Следующие три простые леммы приведены без доказательства.

Лемма 6. *Пусть* $f \in \widetilde{W}(\mathbb{R},U)$. *Тогда* $\rho(f(\cdot),x) \in \widetilde{W}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *для всех* $x \in U$ *и, более того, для всех* $\delta > 0$

$$\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\delta;f) \subseteq \mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathbb{R}})}(\delta;\rho(f(\cdot),x)).$$

Лемма 7. *Пусть* $f_\alpha, f_{\alpha,j} \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$, $j \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, $p \geqslant 1$, *и*

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} D_p^{(\rho)}(f_\alpha,f_{\alpha,j}) \to 0$$

при $j \to +\infty$. *Если* $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$ *и* $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot;f_{\alpha,j}) \underset{\alpha}{\prec} \mathcal{T}(\cdot)$ *для всех* $j \in \mathbb{N}$, *то* $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot;f_\alpha) \underset{\alpha}{\prec} \mathcal{T}(\cdot)$.

Из леммы 7, в частности, получаем, что для любых многозначного отображения $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$ и функций $f, f_j \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$, $j \in \mathbb{N}$, для которых $D_p^{(\rho)}(f,f_j) \to 0$ при $j \to +\infty$ и $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot;f_j) \prec \mathcal{T}(\cdot)$ для всех $j \in \mathbb{N}$, также справедливо $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot;f) \prec \mathcal{T}(\cdot)$.

Лемма 8. *Пусть* (U,ρ) *и* (V,ρ_V) — (*полные*) *метрические пространства. Предположим, что для функции* $\mathcal{F}:U\to V$ *выполняется оценка* $\rho_V(\mathcal{F}(x_1),\mathcal{F}(x_2))\leqslant C\rho(x_1,x_2)$, $x_1,x_2\in U$, *где* $C\geqslant 0$. *Тогда для любой функции* $f\in\widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$, $p\geqslant 1$, *имеем* $\mathcal{F}(f(\cdot))\in\widetilde{W}_p(\mathbb{R},V)$. *Если* $\mathcal{T}(\cdot)\in\mathbf{T}$ *и* $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot;f)\prec\mathcal{T}(\cdot)$, *то также* $\mathcal{P}_p^{(\rho_V)}(\cdot;\mathcal{F}(f))\prec\mathcal{T}(\cdot)$. *Если* $f_\alpha\in\widetilde{W}_p(\mathbb{R},U)$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, *и* $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot;f_\alpha)\underset{\alpha}{\prec}\mathcal{T}(\cdot)$, *то также* $\mathcal{P}_p^{(\rho_V)}(\cdot;\mathcal{F}(f_\alpha))\underset{\alpha}{\prec}\mathcal{T}(\cdot)$.

Лемма 8 (при $p=1$) справедлива также для пространств (U,ρ') и (V,ρ'_V) (с заменой константы C на константу $\max\{1,C\}$), поэтому для каждой функции $f\in\widetilde{W}(\mathbb{R},U)$ имеем $\mathcal{F}(f(\cdot))\in W(\mathbb{R},V)$ и выполняются аналоги остальных утверждений леммы.

Для $y\in(\mathcal{H},\|.\|)$ обозначим

$$\operatorname{sign} y=\begin{cases}\|y\|^{-1}y\,, & \text{если } y\neq 0,\\ 0\,, & \text{если } y=0.\end{cases}$$

Если $a>0$ и $y\in\mathcal{H}$, то положим

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(a;y)=\begin{cases}a^{-1}y\,, & \text{если } \|y\|\leqslant a,\\ \|y\|^{-1}y\,, & \text{если } \|y\|>a.\end{cases}$$

Для всех $y_1,y_2\in\mathcal{H}$ имеет место оценка

$$\|\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(a;y_1)-\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(a;y_2)\|\leqslant\frac{2}{a}\,\|y_1-y_2\|\,.$$

Лемма 9. *Пусть* $f_\alpha\in\widetilde{W}(\mathbb{R},(\mathcal{H},\|.\|))$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, $\mathcal{T}(\cdot)\in\mathbf{T}$ *и* $\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\cdot;f_\alpha)\underset{\alpha}{\prec}\mathcal{T}(\cdot)$. *Предположим, что*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\ \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}}\ \varkappa_W\left(\{t\in\mathbb{R}:\|f_\alpha(t)\|\leqslant\varepsilon\}\right)=0\,. \tag{2.2}$$

Тогда $\operatorname{sign} f_\alpha(\cdot)\in\widetilde{W}_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$ *и* $\varkappa_W(\{t\in\mathbb{R}:f_\alpha(t)=0\})=0$, $\alpha\in\mathfrak{A}$. *Более того,* $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathcal{H}})}(\cdot;\operatorname{sign} f_\alpha)\underset{\alpha}{\prec}\mathcal{T}(\cdot)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.2) следует, что $\varkappa_W(\{t\in\mathbb{R}:f_\alpha(t)=0\})=0$ для всех $\alpha\in\mathfrak{A}$. Определим функции $f_{\alpha,j}(\cdot)=\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(j^{-1};f_\alpha(\cdot))$, $j\in\mathbb{N}$. Из леммы 8 (и утверждения после нее) получаем, что $f_{\alpha,j}\in\widetilde{W}(\mathbb{R},\mathcal{H})$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, и $\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\cdot;f_{\alpha,j})\underset{\alpha}{\prec}\mathcal{T}(\cdot)$, $j\in\mathbb{N}$. Так как $\|f_{\alpha,j}\|_\infty\leqslant 1$, то $f_{\alpha,j}\in\widetilde{W}(\mathbb{R},\mathcal{H})\cap L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{H})\subseteq\widetilde{W}_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, и $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathcal{H}})}(\cdot;f_{\alpha,j})\underset{\alpha}{\prec}\mathcal{T}(\cdot)$, $j\in\mathbb{N}$ (см. теорему 3). С другой стороны, $\operatorname{sign} f_\alpha(\cdot)\in L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{H})\subseteq M_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$ и

$$\|\operatorname{sign} f_\alpha-f_{\alpha,j}\|_1\leqslant\varkappa_W\left(\{t\in\mathbb{R}:\|f_\alpha(t)\|<j^{-1}\}\right),\quad \alpha\in\mathfrak{A}\,,$$

поэтому $\lim\limits_{j\to+\infty}\ \sup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}}\ \|\operatorname{sign} f_\alpha-f_{\alpha,j}\|_1=0$. Теперь из леммы 7 вытекает, что для всех $\alpha\in\mathfrak{A}$ справедливо включение $\operatorname{sign} f_\alpha(\cdot)\in\widetilde{W}_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathcal{H}})}(\cdot;\operatorname{sign} f_\alpha)\underset{\alpha}{\prec}\mathcal{T}(\cdot)$. □

Лемма 10. *Пусть* $f_1,f_2\in\widetilde{W}(\mathbb{R},\mathcal{H})$, $\mathcal{T}(\cdot)\in\mathbf{T}$ *и* $\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\cdot;f_j)\prec\mathcal{T}(\cdot)$ *при* $j=1,2$. *Тогда* $f_1+f_2\in\widetilde{W}(\mathbb{R},\mathcal{H})$ *и* $\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\cdot;f_1+f_2)\prec\mathcal{T}(\cdot)$.

Для доказательства леммы 10 достаточно воспользоваться вложением

$$\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\delta_1;f_1)\bigcap\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\delta_2;f_2)\subseteq\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\delta_1+\delta_2;f_1+f_2),$$

справедливым для всех функций $f_1,f_2\in\widetilde{W}(\mathbb{R},\mathcal{H})$ и чисел $\delta_1,\delta_2>0$.

Обозначим через $\widetilde{W}(\mathbb{R})$ совокупность множеств $T\subseteq\mathbb{R}$, для которых $\chi_T\in\widetilde{W}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Лемма 11. *Пусть* $f\in\widetilde{W}(\mathbb{R},\mathcal{H})$, $T\in\widetilde{W}(\mathbb{R})$. *Предположим, что* $\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\cdot;f)\cap\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;\chi_T)\in\mathbf{T}$. *Тогда* $\chi_T f\in\widetilde{W}(\mathbb{R},\mathcal{H})$ *и для любых* $\delta_1,\delta_2>0$

$$\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\delta_1;f)\bigcap\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\delta_2;\chi_T)\subseteq\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\delta_1+\delta_2;\chi_T f)\,.$$

Доказательство. Действительно, пусть $\tau\in\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\delta_1;f)\cap\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\delta_2;\chi_T)$. Тогда

$$D_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\chi_T(\cdot)f(\cdot),\chi_T(\cdot+\tau)f(\cdot+\tau))\;=$$
$$=\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{l}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\int_\xi^{\xi+l}\min\{1,\|\chi_T(t)f(t)-\chi_T(t+\tau)f(t+\tau)\|\}\,dt\;\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{l}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\int_\xi^{\xi+l}\min\{1,\|(\chi_T(t)-\chi_T(t+\tau))f(t)\|\}\,dt\,+$$
$$+\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{l}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\int_\xi^{\xi+l}\min\{1,\|\chi_T(t+\tau)(f(t)-f(t+\tau))\|\}\,dt\;\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{l}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\int_\xi^{\xi+l}|\chi_T(t)-\chi_T(t+\tau)|\,dt+\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{l}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\int_\xi^{\xi+l}\min\{1,\|f(t)-f(t+\tau)\|\}\,dt\;=$$
$$=\|\chi_T(t)-\chi_T(t+\tau)\|_1+D_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(f(\cdot),f(\cdot+\tau))<\delta_1+\delta_2$$

и, следовательно, $\tau\in\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\delta_1+\delta_2;\chi_T f)$. Так как числа $\delta_1,\delta_2>0$ можно выбирать произвольно, то $\chi_T f\in\widetilde{W}(\mathbb{R},\mathcal{H})$. □

Следующая лемма 12 является следствием леммы 11.

Лемма 12. *Пусть* $f\in\widetilde{W}(\mathbb{R},\mathcal{H})$, $T\in\widetilde{W}(\mathbb{R})$, $\mathcal{T}(\cdot)\in\mathbf{T}$, $\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\cdot;f)\prec\mathcal{T}(\cdot)$, $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;\chi_T)\prec\mathcal{T}(\cdot)$. *Тогда* $\chi_T f\in\widetilde{W}(\mathbb{R},\mathcal{H})$ *и* $\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\cdot;\chi_T f)\prec\mathcal{T}(\cdot)$.

Лемма 13. *Пусть* $\mathcal{T}(\cdot)\in\mathbf{T}$ *и* $T_j\in\widetilde{W}(\mathbb{R})$, $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;\chi_{T_j})\prec\mathcal{T}(\cdot)$, $j=1,2$. *Тогда множества* $T_1\cap T_2$, $T_1\cup T_2$ *и* $T_1\backslash T_2$ *принадлежат* $\widetilde{W}(\mathbb{R})$ *и* $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;\chi_{T_1\cap T_2})\prec\mathcal{T}(\cdot)$, $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;\chi_{T_1\cup T_2})\prec\mathcal{T}(\cdot)$ *и* $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;\chi_{T_1\backslash T_2})\prec\mathcal{T}(\cdot)$.

Доказательство. Для любого множества $T\in\widetilde{W}(\mathbb{R})$, для которого $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;\chi_T)\prec\mathcal{T}(\cdot)$, имеем $\chi_{\mathbb{R}\backslash T}(\cdot)=1-\chi_T(\cdot)\in\widetilde{W}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, при этом $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\delta;\chi_{\mathbb{R}\backslash T})=\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\delta;\chi_T)$ для всех $\delta>0$. Следовательно, также $\mathbb{R}\backslash T\in\widetilde{W}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;\chi_{\mathbb{R}\backslash T})\prec\mathcal{T}(\cdot)$. Отсюда получаем (так как $T_1\cup T_2=\mathbb{R}\backslash((\mathbb{R}\backslash T_1)\cap(\mathbb{R}\backslash T_2))$ и $T_1\backslash T_2=T_1\cap(\mathbb{R}\backslash T_2)$), что достаточно рассмотреть только случай множества $T_1\cap T_2$. Но в этом случае из леммы 12 следует, что $\chi_{T_1\cap T_2}(\cdot)=\chi_{T_1}(\cdot)\chi_{T_2}(\cdot)\in\widetilde{W}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;\chi_{T_1\cap T_2})\prec\mathcal{T}(\cdot)$. □

Пусть $\mathcal{T}(\cdot)\in\mathbf{T}$. Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{M}}^{(W)}\{\mathcal{T}(\cdot)\}$ совокупность последовательностей $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ попарно непересекающихся множеств $T_j\in\widetilde{W}(\mathbb{R})$ (которые могут быть пустыми) таких, что $\operatorname{meas}\mathbb{R}\backslash\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}}T_j=0$, $\varkappa_W(\mathbb{R}\backslash\bigcup\limits_{j\leqslant N}T_j)\to 0$ при $N\to+\infty$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;\chi_{T_j})\prec\mathcal{T}(\cdot)$ для каждого $j\in\mathbb{N}$ (тогда из лемм 7 и 13 следует, что также $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;\chi_{T_j})\underset{j}{\prec}\mathcal{T}(\cdot)$).

Если $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in\widetilde{\mathfrak{M}}^{(W)}\{\mathcal{T}(\cdot)\}$, где $\mathcal{T}(\cdot)\in\mathbf{T}$, то (в силу лемм 7 и 13) для любого множества $J\subseteq\mathbb{N}$ справедливо включение $T(J)\doteq\bigcup\limits_{j\in J}T_j\in\widetilde{W}(\mathbb{R})$ ($T(\varnothing)=\varnothing$) и, более того, $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;\chi_{T(J)})\underset{J\subseteq\mathbb{N}}{\prec}\mathcal{T}(\cdot)$.

Если $\{T_j^{(l)}\}_{j\in\mathbb{N}}\in\widetilde{\mathfrak{M}}^{(W)}\{\mathcal{T}(\cdot)\}$, $l=1,2$, то также

$$\{T_{j_1}^{(1)}\bigcap T_{j_2}^{(2)}\}_{j_1,j_2\in\mathbb{N}}\in\widetilde{\mathfrak{M}}^{(W)}\{\mathcal{T}(\cdot)\}\,. \tag{2.3}$$

Лемма 14. *Пусть* $f_j \in M^c(\mathbb{R},U)$, $T_j \subseteq \mathbb{R}$ *— попарно непересекающиеся измеримые множества,* $j \in \mathbb{N}$, *для которых* $\operatorname{meas} \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} T_j = 0$ *и* $\varkappa_W(\mathbb{R}\setminus \bigcup\limits_{j\leqslant N} T_j) \to 0$ *при* $N \to +\infty$. *Тогда* $\mathbb{F}(\{f_j\},\{T_j\};\cdot) \in M^c(\mathbb{R},U)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon, \delta > 0$. Выберем $N \in \mathbb{N}$ так, что $\varkappa_W(\mathbb{R}\setminus \bigcup\limits_{j\leqslant N} T_j) < \frac{\delta}{2}$. Для каждого $j = 1,\dots,N$ найдется компактное множество $K_j \in \mathrm{cl}_c U$ такое, что

$$\varkappa_W(\{t \in \mathbb{R} : \rho(f_j(t),K_j) \geqslant \varepsilon\}) < \frac{\delta}{2N}\,.$$

Тогда $K \doteq \bigcup\limits_{j=1}^{N} K_j \in \mathrm{cl}_c U$ и

$$\varkappa_W(\{t\in\mathbb{R} : \rho(\mathbb{F}(\{f_j\},\{T_j\};t),K) \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \varkappa_W(\mathbb{R}\setminus \bigcup_{j\leqslant N} T_j) + \\ + \sum_{j=1}^{N} \varkappa_W(\{t\in\mathbb{R} : \rho(f_j(t),K_j) \geqslant \varepsilon\}) < \delta\,.$$

Лемма 15. *Пусть* $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \widetilde{\mathfrak{M}}^{(W)}\{\mathcal{T}(\cdot)\}$, *где* $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$, $f_j \in \widetilde{W}(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot;f_j) \prec \mathcal{T}(\cdot)$ *для каждого* $j \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\mathbb{F}(\{f_j\},\{T_j\};\cdot) \in \widetilde{W}(\mathbb{R},U)$ *и* $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot;\mathbb{F}(\{f_j\},\{T_j\};\cdot)) \prec \mathcal{T}(\cdot)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всех $N \in \mathbb{N}$ определим функции $f(N;t)$, $t \in \mathbb{R}$, совпадающие с функциями $f_j(t)$ при $t \in T_j$, $j = 1,\dots,N$, и такие, что $f(N;t) = x_0 \in U$ при $t \in \mathbb{R}\setminus \bigcup\limits_{j\leqslant N} T_j$. Из лемм 10 и 12 (а также из теоремы Фреше об изометрическом вложении метрического пространства в некоторое банахово пространство) следует, что $f(N;\cdot) \in \widetilde{W}(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot;f(N;\cdot)) \prec \mathcal{T}(\cdot)$. С другой стороны, справедливо вложение $\mathbb{F}(\{f_j\},\{T_j\};\cdot) \in M(\mathbb{R},U)$ и

$$D_1^{(\rho')}(\mathbb{F}(\{f_j\},\{T_j\};\cdot), f(N;\cdot)) \leqslant \varkappa_W(\mathbb{R}\setminus \bigcup_{j\leqslant N} T_j)\,, \quad N \in \mathbb{N}\,.$$

Так как $\varkappa_W(\mathbb{R}\setminus \bigcup\limits_{j\leqslant N} T_j) \to 0$ при $N \to +\infty$, то из леммы 7 получаем, что $\mathbb{F}(\{f_j\},\{T_j\};\cdot) \in \widetilde{W}(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot;\mathbb{F}(\{f_j\},\{T_j\};\cdot)) \prec \mathcal{T}(\cdot)$. □

Лемма 16. *Пусть* $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \widetilde{\mathfrak{M}}^{(W)}\{\mathcal{T}(\cdot)\}$, *где* $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$, *и* $x_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\mathbb{F}(\{x_j\},\{T_j\};\cdot) \in \widetilde{W}^c(\mathbb{R},U)$ *и* $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot;\mathbb{F}(\{x_j\},\{T_j\};\cdot)) \prec \mathcal{T}(\cdot)$.

Лемма 16 является следствием лемм 14 и 15.

Теорема 4. *Пусть* $f \in \widetilde{W}^c(\mathbb{R},U)$ *и* $h \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *— любая функция с плотным в* $\mathbb{R}$ *(счетным) модулем частот* $\mathrm{Mod}\,h$. *Обозначим* $\mathcal{T}(\cdot) \doteq \mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot;f) \cap \mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;h)$. *Тогда* $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся последовательность* $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \widetilde{\mathfrak{M}}^{(W)}\{\mathcal{T}(\cdot)\}$ *и точки* $x_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$, *такие, что* $\rho(f(t),x_j) < \varepsilon$ *при всех* $t \in T_j$, $j \in \mathbb{N}$ *(из леммы* 16 *следует, что* $\mathbb{F}(\{x_j\},\{T_j\};\cdot) \in \widetilde{W}^c(\mathbb{R},U)$ *и* $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot;\mathbb{F}(\{x_j\},\{T_j\};\cdot)) \prec \mathcal{T}(\cdot)$ *). Если, более того,* $f \in \widetilde{W}_p^c(\mathbb{R},U)$ *при некотором* $p \geqslant 1$, *то* $\mathcal{T}'(\cdot) \doteq \mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot;f) \cap \mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;h) \in \mathbf{T}$, $\mathcal{T}(\cdot) \prec \mathcal{T}'(\cdot)$, $\mathbb{F}(\{x_j\},\{T_j\};\cdot) \in \widetilde{W}_p^c(\mathbb{R},U)$ *и* $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot;\mathbb{F}(\{x_j\},\{T_j\};\cdot)) \prec \mathcal{T}'(\cdot)$.

Доказательство теоремы 4 приведено в конце этого параграфа. Теорема 4 существенно используется при доказательстве теоремы 2.

Следствие 1. *Функция* $f \in M(\mathbb{R},U)$ *принадлежит пространству* $\widetilde{W}^{\,c}(\mathbb{R},U)$ *тогда и только тогда, когда для каждого* $\varepsilon>0$ *найдутся многозначное отображение* $\mathcal{T}^{(\varepsilon)}(\cdot)\in\mathbf{T}$, *последовательность* $\{T_j^{(\varepsilon)}\}_{j\in\mathbb{N}}\in\widetilde{\mathfrak{M}}^{(W)}\{\mathcal{T}^{(\varepsilon)}(\cdot)\}$ *и точки* $x_j^{(\varepsilon)}\in U$, $j\in\mathbb{N}$, *такие, что*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\rho(f(t),\mathbb{F}(\{x_j^{(\varepsilon)}\},\{T_j^{(\varepsilon)}\};\cdot))<\varepsilon\,.$$

При этом для функции $f\in\widetilde{W}^{\,c}(\mathbb{R},U)$ *можно многозначные отображения* $\mathcal{T}^{(\varepsilon)}(\cdot)$ *выбрать так, что* $\mathcal{T}(\cdot)\doteq\bigcap\limits_{\varepsilon>0}\mathcal{T}^{(\varepsilon)}(\cdot)\in\mathbf{T}$ (*в этом случае* $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot;f)\prec\mathcal{T}(\cdot)$).

Пусть $W(\mathbb{R})$ — совокупность множеств $T\subseteq\mathbb{R}$, для которых $\chi_T\in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Для множеств $T\in W(\mathbb{R})$ обозначим $\operatorname{Mod}T\doteq\operatorname{Mod}\chi_T$. Если Λ — произвольный модуль в $\mathbb{R}$, то пусть $\mathfrak{M}^{(W)}(\Lambda)$ — совокупность последовательностей $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ попарно непересекающихся множеств $T_j\in W(\mathbb{R})$, для которых $\operatorname{Mod}T_j\subseteq\Lambda$, $\operatorname{meas}\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}}T_j=0$ и $\varkappa_W(\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{j\leqslant N}T_j)\to 0$ при $N\to+\infty$.

Если $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{M}^{(W)}(\Lambda)$ и $x_j\in U$, $j\in\mathbb{N}$, — произвольные точки, то $\mathbb{F}(\{x_j\},\{T_j\};\cdot)\in W(\mathbb{R},U)$ и $\operatorname{Mod}\mathbb{F}(\{x_j\},\{T_j\};\cdot)\subseteq\Lambda$ [8]. В [8] также приведена следующая теорема, на которой основывается доказательство теоремы 1 и аналогом которой (для функций из пространства $\widetilde{W}^{\,c}(\mathbb{R},U)$) является теорема 4.

Теорема 5. *Пусть* $f\in W(\mathbb{R},U)$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *найдутся последовательность* $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{M}^{(W)}(\operatorname{Mod}f)$ *и точки* $x_j\in U$, $j\in\mathbb{N}$, *такие, что* $\rho(f(t),x_j)<\varepsilon$ *при всех* $t\in T_j$.

При доказательстве теоремы 5 используется либо теорема 6 (см. [8]), либо лемма 17 (как это сделано в [17]).

Пусть $\mathcal{A}$ — совокупность таких множеств $\mathbb{M}\subset M(\mathbb{R},\mathbb{R})$, что для любого $\varepsilon>0$ можно найти числа $l=l(\varepsilon,\mathbb{M})>0$ и $\tau_0=\tau_0(\varepsilon,\mathbb{M})>0$ такие, что

$$\sup_{f\in\mathbb{M}}\ \sup_{\tau\in[0,\tau_0]}\ D_{1,\,l}^{(\rho'_{\mathbb{R}})}(f(\cdot),f(\cdot+\tau))<\varepsilon\,.$$

Если $\mathbb{M}\in\mathcal{A}$, то

$$\lim_{\tau_0\to+0}\ \sup_{f\in\mathbb{M}}\ \sup_{\tau\in[0,\tau_0]}\ D_1^{(\rho'_{\mathbb{R}})}(f(\cdot),f(\cdot+\tau))=0\,.$$

Для любой функции $f\in W(\mathbb{R},\mathbb{R})$ одноэлементное множество $\{f\}$ принадлежит $\mathcal{A}$ [12].

Теорема 6. *Пусть* $\mathbb{M}\in\mathcal{A}$, $\Delta>0$, $\mathbb{T}>0$ *и* $\delta\in(0,1]$. *Тогда существует периодическая с периодом* $\mathbb{T}$ *непрерывная функция* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *зависящая от* $\mathbb{M}$, Δ, $\mathbb{T}$, *но не от числа* δ, *для которой* $\|g\|_\infty<\Delta$, *и числа* $\varepsilon=\varepsilon(\delta,\Delta)>0$ *и* $l=l(\delta,\Delta,\mathbb{M})>0$ *такие, что для всех* $\lambda\in\mathbb{R}$ *и всех* $f\in\mathbb{M}$

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\ \frac{1}{l}\ \operatorname{meas}\{t\in[\xi,\xi+l]:|f(t)+g(t)-\lambda|\leqslant\varepsilon\}<\delta\,.$$

Теорема 6 была доказана в [8] для множеств $\mathbb{M}\subset W(\mathbb{R},\mathbb{R})$, но ее доказательство без каких-либо существенных изменений переносится и на случай произвольных множеств $\mathbb{M}\subset M(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (для которых $\mathbb{M}\in\mathcal{A}$).

Лемма 17 (см. [17]). *Пусть* $f\in W(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Тогда множество чисел* $\lambda\in\mathbb{R}$, *для которых*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\ \varkappa_W(\{t\in\mathbb{R}:|f(t)-\lambda|\leqslant\varepsilon\})>0\,,$$

не более чем счетно.

Для произвольного измеримого множества $T \subseteq \mathbb{R}$ обозначим

$$\varkappa_S\,(T) \doteq \|\chi_T\|_{1,\,1} = \sup_{\xi\,\in\,\mathbb{R}}\ \text{meas}\ [\xi, \xi+1]\bigcap T\,.$$

Определение 2. Функция $f \in M(\mathbb{R},\mathcal{H})$ обладает $\sigma^{(S)}$*-свойством* (или просто σ*-свойством* (см. [18, с. 502])), если $\lim\limits_{\varepsilon\,\to\,+0}\ \varkappa_S\,(\{t\in\mathbb{R}:\|f(t)\|\leqslant\varepsilon\}) = 0.$

Определение 3. Функция $f \in M(\mathbb{R},\mathcal{H})$ обладает $\sigma^{(W)}$*-свойством*, если

$$\lim_{\varepsilon\,\to\,+0}\ \varkappa_W\,(\{t\in\mathbb{R}:\|f(t)\|\leqslant\varepsilon\}) = 0\,.$$

Если функция $f\in S(\mathbb{R},\mathcal{H})$ обладает $\sigma^{(S)}$-свойством, то $\operatorname{sign} f\in S_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$ и $\operatorname{Mod}\operatorname{sign} f\subseteq \operatorname{Mod} f$ [18, 4]. Аналогично, если функция $f\in W(\mathbb{R},\mathcal{H})$ обладает $\sigma^{(W)}$-свойством, то $\operatorname{sign} f\in W_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$ и $\operatorname{Mod}\operatorname{sign} f\subseteq\operatorname{Mod} f$ [14, 8]. Из леммы 9 следует, что для функций $f\in\widetilde{W}(\mathbb{R},\mathcal{H})$, обладающих $\sigma^{(W)}$-свойством, имеет место включение $\operatorname{sign} f\in\widetilde{W}_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathcal{H}})}(\cdot;\operatorname{sign} f)\prec\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\cdot;f)$. Не всякая функция $f\in S(\mathbb{R},\mathcal{H})$ обладает $\sigma^{(S)}$-свойством (как и не всякая функция $f\in W(\mathbb{R},\mathcal{H})$ обладает $\sigma^{(W)}$-свойством). В [4] приведен пример функции $f\in CAP\,(\mathbb{R},\mathbb{R})$ такой, что $|f(t)|<1$ при всех $t\in\mathbb{R}$ и $\operatorname{sign}(f(\cdot)-\lambda)\notin S_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ для всех $\lambda\in(-1,1)$, при этом множества $\{t\in\mathbb{R}:f(t)=\lambda\}$ счетны и не имеют конечных предельных точек, следовательно, функция $f(\cdot)-\lambda$ для всех $\lambda\in(-1,1)$ не обладает $\sigma^{(S)}$-свойством. Лемма 17 означает, что для функции $f\in W(\mathbb{R},\mathbb{R})$ найдется не более чем счетное множество $\mathfrak{N}(f)\subset\mathbb{R}$ такое, что функция $f(\cdot)-\lambda$ обладает $\sigma^{(W)}$-свойством для всех $\lambda\in\mathbb{R}\backslash\mathfrak{N}(f)$. Из теоремы 6 следует, что для любой функции $f\in W(\mathbb{R},\mathbb{R})$ найдется непрерывная периодическая функция $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ с заданным периодом $\mathbb{T}$ и со сколь угодно малой нормой $\|g\|_\infty$ такая, что функция $f(\cdot)+g(\cdot)-\lambda$ обладает $\sigma^{(W)}$-свойством для всех $\lambda\in\mathbb{R}$.

Выберем любые числа $a_j>0$, $j\in\mathbb{N}$, для которых $a_{j+1}\,(a_1+\ldots+a_j)^{-1}\to+\infty$ при $j\to+\infty$, и пусть $x_j\in\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$, — любая последовательность, множество предельных точек которой совпадает со всей вещественной прямой $\mathbb{R}$. Определим функцию

$$f(t)=\begin{cases} x_1\,, & \text{если } t\in[-a_1,a_1]\,,\\ x_j\,, & \text{если } t\in[-a_j,a_j]\setminus[-a_{j-1},a_{j-1}]\,,\quad j\in\mathbb{N}\backslash\{1\}\,.\end{cases}$$

Для нее справедливо включение $f\in\widetilde{W}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, при этом для всех $\lambda\in\mathbb{R}$ функция $f(\cdot)-\lambda$ не обладает $\sigma^{(W)}$-свойством. Более того, для всех $\lambda\in\mathbb{R}$ и всех $\varepsilon>0$

$$\varkappa_W\,(\{t\in\mathbb{R}:|f(t)-\lambda|\leqslant\varepsilon\})=1\,.$$

Приведем также пример функции $f\in\widetilde{W}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ такой, что $f(t)\in\{0,1\}$ при всех $t\in\mathbb{R}$ и

$$D_1^{(\rho'_{\mathbb{R}})}(f(\cdot),f(\cdot+\tau_j)) = D_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(f(\cdot),f(\cdot+\tau_j)) = 1$$

для некоторой последовательности $\tau_j\to+0$, $j\in\mathbb{N}$. Выберем для всех $j\in\mathbb{N}$ какие-либо числа $k(j)\in\mathbb{N}$ так, чтобы для всех $k\in\mathbb{N}$ множество $\{j\in\mathbb{N}:k(j)=k\}$ было бесконечным. Положим

$$f(t)=\begin{cases} 0\,, & \text{если } t\in[0,1)\,,\\ 1\,, & \text{если } t\in[-1,0)\,,\\ \frac12\,(1+(-1)^{[2^{\,k(j)}t]})\,, & \text{если } t\in[2^{\,j-1},2^j)\,\cup\,[-2^j,-2^{\,j-1})\,,\quad j\in\mathbb{N}\,,\end{cases}$$

где $[\xi]$ — целая часть числа $\xi\in\mathbb{R}$. Так как $D_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(f(\cdot),f(\cdot+m))=0$ для всех $m\in\mathbb{Z}$, то $f\in\widetilde{W}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. При этом $D_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(f(\cdot),f(\cdot+\tau_j))=1$ для всех $\tau_j=2^{-j}$, $j\in\mathbb{N}$.

Теорема 7. *Пусть* $f_\alpha \in \widetilde{W}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\Delta > 0$ *и* Λ — *счетный плотный в* $\mathbb{R}$ *модуль. Предположим, что*

$$\mathcal{T}(\cdot) \doteq \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathbb{R}})}(\cdot; f_\alpha) \in \mathbf{T}\,. \tag{2.4}$$

Тогда найдется функция $g \in S_1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (*зависящая от* Δ, Λ *и* $\mathcal{T}(\cdot)$) *такая, что* $\operatorname{Mod} g \subseteq \Lambda$, $\|g\|_\infty < \Delta$ *и*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \varkappa_W \left(\{t \in \mathbb{R} : |f_\alpha(t) + g(t)| \leqslant \varepsilon\}\right) = 0\,. \tag{2.5}$$

Доказательство теоремы 7 приведено в § 3.

Пусть $f \in \widetilde{W}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Тогда для индексного множества $\mathfrak{A} = \mathbb{R}$ и функций $f_\alpha(\cdot) = f(\cdot) - \alpha$ справедливо включение (2.4). Поэтому из теоремы 7 получаем, что для любого счетного плотного в $\mathbb{R}$ модуля Λ найдется функция $g \in S_1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ со сколь угодно малой нормой $\|g\|_\infty$, для которой $\operatorname{Mod} g \subseteq \Lambda$, и такая, что функция $f(\cdot) + g(\cdot) - \lambda$ обладает $\sigma^{(W)}$-свойством для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ (из лемм 4 и 10 следует, что $f + g \in \widetilde{W}(\mathbb{R},\mathbb{R})$).

Для метрических пространств (U,ρ) и (V,ρ_V) обозначим через $C(U,V)$ метрическое пространство непрерывных функций $\mathcal{F} : U \to V$ с метрикой

$$d_{C(U,V)} = \sup_{x \in U} \min\,\{1, \rho_V(\mathcal{F}_1(x), \mathcal{F}_2(x))\}, \quad \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in C(U,V).$$

Теорема 8 (см. [14]). *Пусть* (U,ρ) *и* (V,ρ_V) — *полные метрические пространства. Предположим, что функция* $t \to \mathcal{F}(\cdot;t) \in C(U,V)$ *принадлежит* $W_1(\mathbb{R},(C(U,V),d_{C(U,V)}))$ *и* $f \in W(\mathbb{R},U)$. *Тогда* $\mathcal{F}(f(\cdot);\cdot) \in W(\mathbb{R},V)$ *и* $\operatorname{Mod}\mathcal{F}(f(\cdot);\cdot) \subseteq \operatorname{Mod}\mathcal{F}(\cdot;\cdot) + \operatorname{Mod} f(\cdot)$.

При доказательстве теоремы 8 используется теорема 5. Доказательство следующей теоремы, обобщающей лемму 8, опирается на теорему 4 и во многом аналогично доказательству теоремы 8 (см. [14]).

Теорема 9. *Пусть* (U,ρ) *и* (V,ρ_V) — *полные метрические пространства. Предположим, что функция* $t \to \mathcal{F}(\cdot;t) \in C(U,V)$ *принадлежит пространству* $\widetilde{W}_1^{\,c}(\mathbb{R},(C(U,V),d_{C(U,V)}))$, $f \in \widetilde{W}^{\,c}(\mathbb{R},U)$ *и при этом* $\mathcal{T}(\cdot) \doteq \mathcal{P}_1^{(d_{C(U,V)})}(\cdot;\mathcal{F}(\cdot;\cdot)) \cap \mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot;f) \in \mathbf{T}$. *Тогда* $\mathcal{F}(f(\cdot);\cdot) \in \widetilde{W}^{\,c}(\mathbb{R},V)$ *и* $\mathcal{P}_1^{(\rho'_V)}(\cdot;\mathcal{F}(f(\cdot);\cdot)) \prec \mathcal{T}(\cdot) \cap \mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathbb{R}})}(\cdot;h)$ *для любой функции* $h \in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *с плотным в* $\mathbb{R}$ *(счетным) модулем частот* $\operatorname{Mod} h$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. Включение $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$ следует из леммы 4. В силу леммы 2 существуют точки $x_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\rho(f(t), \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{x_j\}) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.6}$$

при п. в. $t \in \mathbb{R}$ и

$$\lim_{N \to +\infty} \varkappa_W \left(\{t \in \mathbb{R} : \rho(f(t), \bigcup_{j \leqslant N} \{x_j\}) \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\}\right) = 0\,. \tag{2.7}$$

Обозначим $g_j(t) = \rho(f(t),x_j) - \frac{2}{3}\varepsilon$, $t \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$. Из леммы 6 получаем, что $g_j \in \widetilde{W}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathbb{R}})}(\cdot;g_j) \underset{j}{\prec} \mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot;f)$, поэтому также $\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathbb{R}})}(\cdot;g_j) \underset{j}{\prec} \mathcal{T}(\cdot)$. В соответствии с теоремой 7 найдем функцию $g \in S_1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (зависящую от ε, $\operatorname{Mod} h$ и функции f (а также от выбора точек x_j, $j \in \mathbb{N}$, который в свою очередь зависит от числа ε и функции f)) такую, что $\operatorname{Mod} g \subseteq \operatorname{Mod} h$ (тогда $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;g) \prec \mathcal{T}(\cdot)$), $\|g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ и

$$\lim_{\widetilde{\varepsilon} \to +0} \sup_{j \in \mathbb{N}} \varkappa_W \left(\{t \in \mathbb{R} : |g_j(t) + g(t)| \leqslant \widetilde{\varepsilon}\}\right) = 0\,. \tag{2.8}$$

Из лемм 4 и 10 следует $g_j+g\in\widetilde{W}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $j\in\mathbb{N}$. Так как $\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathbb{R}})}(\cdot;g_j)\underset{j}{\prec}\mathcal{T}(\cdot)$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;g)\prec\mathcal{T}(\cdot)$, то, учитывая лемму 10, получаем $\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathbb{R}})}(\cdot;g_j+g)\underset{j}{\prec}\mathcal{T}(\cdot)$. Теперь из (2.8) и леммы 9 вытекает справедливость включений $\operatorname{sign}(g_j(\cdot)+g(\cdot))\in\widetilde{W}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (и $\varkappa_W(\{t\in\mathbb{R}:g_j(t)+g(t)=0\})=0$), $j\in\mathbb{N}$. Более того, $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;\operatorname{sign}(g_j(\cdot)+g(\cdot)))\underset{j}{\prec}\mathcal{T}(\cdot)$.

Обозначим $T'_j=\{t\in\mathbb{R}:g_j(t)+g(t)<0\}$, $j\in\mathbb{N}$. Тогда (это следует, в частности, из леммы 8) $T'_j\in\widetilde{W}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;\chi_{T'_j})\underset{j}{\prec}\mathcal{T}(\cdot)$. Если $t\in T'_j$, то $\rho(f(t),x_j)<\varepsilon$. При п. в. $t\in\mathbb{R}\backslash T'_j$ имеем $\rho(f(t),x_j)>\frac{\varepsilon}{3}$. Поэтому (см. (2.6)) $\operatorname{meas}\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}}T'_j=0$ и из (2.7) вытекает, что $\varkappa_W(\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{j\leqslant N}T'_j)\to 0$ при $N\to+\infty$. Обозначим $T_1=T'_1$ и $T_j=T'_j\setminus\bigcup\limits_{k<j}T'_k$ при $j\geqslant 2$. В силу леммы 13 $T_j\in\widetilde{W}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;\chi_{T_j})\prec\mathcal{T}(\cdot)$ для всех $j\in\mathbb{N}$. Кроме того, $\bigcup\limits_{j\leqslant N}T_j=\bigcup\limits_{j\leqslant N}T'_j$, $N\in\mathbb{N}$, поэтому $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in\widetilde{\mathfrak{M}}^{(W)}(\mathcal{T}(\cdot))$ (и, следовательно, $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;\chi_{T_j})\underset{j}{\prec}\mathcal{T}(\cdot)$). Так как $T_j\subseteq T'_j$, $j\in\mathbb{N}$, то для всех $t\in T_j$ имеем $\rho(f(t),x_j)<\varepsilon$. Из леммы 16 получаем, что $\mathbb{F}(\{x_j\},\{T_j\};\cdot)\in\widetilde{W}^{\,c}(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot;\mathbb{F}(\{x_j\},\{T_j\};\cdot))\prec\mathcal{T}(\cdot)$. Предположим теперь, что $f\in\widetilde{W}_p^{\,c}(\mathbb{R},U)$ при некотором $p\geqslant 1$. Тогда из леммы 4 следует

$$\mathcal{T}'(\cdot)=\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot;f)\bigcap\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;h)\in\mathbf{T}$$

(при этом $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot;f)\prec\mathcal{T}'(\cdot)$). Так как $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\delta;f)\subseteq\mathcal{P}_p^{(\rho')}(\delta;f)$ для всех $\delta>0$, то $\mathcal{T}(\cdot)\prec\mathcal{T}'(\cdot)$. С другой стороны, $\rho(f(\cdot),\mathbb{F}(\{x_j\},\{T_j\};\cdot))\in L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, поэтому из леммы 5 получаем, что $\mathbb{F}(\{x_j\},\{T_j\};\cdot)\in\widetilde{W}_p^{\,c}(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot;\mathbb{F}(\{x_j\},\{T_j\};\cdot))\prec\mathcal{T}'(\cdot)$. Теорема 4 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 7

Сформулируем предварительно простую лемму, которая используется при доказательстве теоремы 7.

Лемма 18. *Если* $a_j\in\{-1,0,1\}$, $j\in\mathbb{N}$, *то для всех* $k\in\mathbb{N}$

$$\Big|\sum_{j=1}^{+\infty}3^{-j}a_j\Big|\geqslant\frac{1}{2}\,3^{-k}|a_k|\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 7. Не ограничивая общности, будем считать, что $\Delta\in(0,1]$. Для $b>0$ и $\theta>0$ положим

$$g(\theta,b;t)=\begin{cases}1\,, & \text{если } t\in[0,b)\cup[2b,(2+\theta)b)\,,\\ -1\,, & \text{если } t\in[b,2b)\,,\end{cases}$$

и продолжим функцию $g(\theta,b;\cdot)$ периодически с периодом $(2+\theta)b$ на всю вещественную прямую $\mathbb{R}$. При этом

$$g(\theta,b;t+b)-g(\theta,b;t)=\begin{cases}-2 & \text{при } t\in[0,b)\,,\\ 2 & \text{при } t\in[b,2b)\,,\\ 0 & \text{при } t\in[2b,(2+\theta)b)\end{cases}$$

и функция $g(\theta,b;\,.+b)-g(\theta,b;\cdot)$ также периодична с периодом $(2+\theta)b$. Откуда, в частности, следует, что

$$\varkappa_W(\{t\in\mathbb{R}:g(\theta,b;t+b)-g(\theta,b;t)\})=\frac{\theta}{2+\theta}\,. \tag{3.1}$$

Определим числа $\varepsilon_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$. Если $k^2 \leqslant j < (k+1)^2$, $k \in \mathbb{N}$, то положим

$$\varepsilon_j = \Delta_k \doteq 3^{-2k(k^2+2k+2)}\Delta\,.$$

Пусть $\delta_j = 2^{-j}\varepsilon_j$. Выберем числа $\tau_j \in \mathcal{T}(\delta_j)$ (зависящие от Δ и многозначного отображения $\mathcal{T}(\cdot)$, но не от индекса $\alpha \in \mathfrak{A}$) исходя из неравенств $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \ldots$. Так как $\tau_j \in \mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathbb{R}})}(\delta_j; f_\alpha)$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$, то

$$D_1^{(\rho'_{\mathbb{R}})}(f_\alpha(\cdot), f_\alpha(\cdot+\tau_j)) < \delta_j\,, \quad \alpha \in \mathfrak{A}\,.$$

Поэтому существуют числа $l_j = l_j(\alpha) > 0$ (зависящие также от Δ и многозначного отображения $\mathcal{T}(\cdot)$) такие, что числа τ_j являются $(\delta_j, D_{1,l}^{(\rho')})$-почти периодами функций f_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, для всех $l \geqslant l_j(\alpha)$.

Для $l > 0$ и $\xi \in \mathbb{R}$ определим множества

$$A_j^\alpha(l,\xi) = \{t \in [\xi, \xi+l] : |f_\alpha(t) - f_\alpha(t+\tau_j)| < \varepsilon_j\}\,, \quad j \in \mathbb{N}\,,\ \alpha \in \mathfrak{A}\,.$$

Так как $\varepsilon_j \in (0,1)$, то при $l \geqslant l_j(\alpha)$ (при всех $\xi \in \mathbb{R}$) имеем

$$\frac{\varepsilon_j}{l}\ \mathrm{meas}\ [\xi, \xi+l] \setminus A_j^\alpha(l,\xi) \leqslant D_{1,l}^{(\rho')}(f_\alpha(\cdot), f_\alpha(\cdot+\tau_j)) < \delta_j = 2^{-j}\varepsilon_j\,.$$

Откуда

$$\frac{1}{l}\ \mathrm{meas}\ [\xi, \xi+l] \setminus A_j^\alpha(l,\xi) < 2^{-j}\,. \tag{3.2}$$

Для всех $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathfrak{N}_k$ множество упорядоченных пар $\{m, m'\}$ чисел $m, m' \in \{0, 1, \ldots, 2k\}$, для которых $m < m'$. При $\{m, m'\} \in \mathfrak{N}_k$ положим $s_k(m,m') = 2k^3 + m + (2k+1)m'$ и выберем числа $\theta^{(k)}_{m,m'} > 0$ так, что

$$\theta^{(k)}_{m,m'}\,(2 + \theta^{(k)}_{m,m'})^{-1} < 2^{-s_k(m,m')}\,, \tag{3.3}$$

$$2\pi\,(2 + \theta^{(k)}_{m,m'})^{-1}(\tau_{k^2+m'} - \tau_{k^2+m})^{-1} \in \Lambda\,. \tag{3.4}$$

Для разных упорядоченных пар $\{m, m'\} \in \mathfrak{N}_k$ числа $s_k(m,m')$ разные и $2k^3 < s_k(m,m') < 2(k+1)^3$. Определим функции

$$g^{(k)}_{m,m'}(t) = g(\theta^{(k)}_{m,m'}, \tau_{k^2+m'} - \tau_{k^2+m}\,; t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,\ \{m, m'\} \in \mathfrak{N}_k\,,$$

$$g(t) = 4\Delta \sum_{k \in \mathbb{N}} \ \sum_{\{m,m'\} \in \mathfrak{N}_k} 3^{-s_k(m,m')}\, g^{(k)}_{m,m'}(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Имеем $g^{(k)}_{m,m'}(t) \in \{-1, 1\}$ и

$$|g(t)| < 4\Delta \sum_{j=2}^{+\infty} 3^{-j} = \frac{2\Delta}{3} < \Delta$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. Так как $g^{(k)}_{m,m'}$ — периодические функции с периодами $(2 + \theta^{(k)}_{m,m'})(\tau_{k^2+m'} - \tau_{k^2+m})$ (следовательно, $\mathrm{Mod}\, g^{(k)}_{m,m'} \subseteq \Lambda$ (см. (3.4)), то $g \in S_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и

$$\mathrm{Mod}\, g \subseteq \sum_{k \in \mathbb{N},\ \{m,m'\} \in \mathfrak{N}_k} \mathrm{Mod}\, g^{(k)}_{m,m'} \subseteq \Lambda\,.$$

Для $k\in\mathbb N$ и $\{m,m'\}\in\mathfrak N_k$ из (3.1) и (3.3) вытекает оценка

$$\varkappa_W\left(\{t\in\mathbb R: g^{(k)}_{m,m'}(t+\tau_{k^2+m'})=g^{(k)}_{m,m'}(t+\tau_{k^2+m})\}\right) = \theta^{(k)}_{m,m'}(2+\theta^{(k)}_{m,m'})^{-1}<2^{-s_k(m,m')}.$$

Пусть $T^{(k)}=\{t\in\mathbb R: g^{(k)}_{m,m'}(t+\tau_{k^2+m'})\neq g^{(k)}_{m,m'}(t+\tau_{k^2+m})\}$ для всех упорядоченных пар $\{m,m'\}\in\mathfrak N_k\}$, $k\in\mathbb N$. Так как

$$\varkappa_W(\mathbb R\setminus T^{(k)})\leqslant\sum_{\{m,m'\}\in\mathfrak N_k}\varkappa_W\left(\{t\in\mathbb R: g^{(k)}_{m,m'}(t+\tau_{k^2+m'})=g^{(k)}_{m,m'}(t+\tau_{k^2+m})\}\right)=$$

$$=\theta^{(k)}_{m,m'}(2+\theta^{(k)}_{m,m'})^{-1}<\sum_{\{m,m'\}\in\mathfrak N_k}2^{-s_k(m,m')}<2^{-2k^3-2},$$

то найдется число $\widetilde l_k>0$ такое, что для всех $l\geqslant\widetilde l_k$ и всех $\xi\in\mathbb R$

$$\frac1l\ \mathrm{meas}\ [\xi,\xi+l]\setminus T^{(k)}<2^{-2k^3-1}. \tag{3.5}$$

Если $t\in T^{(k)}$, то для всех $\{m,m'\}\in\mathfrak N_k$

$$|\,g^{(k)}_{m,m'}(t+\tau_{k^2+m'})-g^{(k)}_{m,m'}(t+\tau_{k^2+m})\,|=2\,,$$

поэтому из леммы 18 получаем

$$|\,g(t+\tau_{k^2+m'})-g(t+\tau_{k^2+m})\,|\geqslant4\Delta\cdot3^{-s_k(m,m')}.$$

Для $k\in\mathbb N$, $\alpha\in\mathfrak A$, $l>0$ и $\xi\in\mathbb R$ определим множества

$$B^\alpha_k(l,\xi)=T^{(k)}\bigcap\Big(\bigcap_{j=k^2}^{k^2+2k}A^\alpha_k(l,\xi)\Big).$$

Если

$$l\geqslant l'_k(\alpha)\doteq\max\{\,\widetilde l_k\,,\tau_{k^2+2k}\,,\max_{j=k^2,\dots,k^2+2k}l_j(\alpha)\,\},$$

то (при всех $\xi\in\mathbb R$) из (3.2), (3.5) следует оценка

$$\frac1l\ \mathrm{meas}\ [\xi,\xi+l]\setminus B^\alpha_k(l,\xi)<2^{-2k^3-1}+\sum_{j=0}^{2k}2^{-k^2-j}<2^{-2k^3-1}+2^{-k^2+1}$$

и для всех $t\in B^\alpha_k(l,\xi)$ и всех $\{m,m'\}\in\mathfrak N_k$ имеем

$$|\,f_\alpha(t+\tau_{k^2+m'})+g(t+\tau_{k^2+m'})-f_\alpha(t+\tau_{k^2+m})-g(t+\tau_{k^2+m})\,|\geqslant$$

$$\geqslant|\,g(t+\tau_{k^2+m'})-g(t+\tau_{k^2+m})\,|-|\,f_\alpha(t)-f_\alpha(t+\tau_{k^2+m'})\,|-|\,f_\alpha(t)-f_\alpha(t+\tau_{k^2+m})\,|>$$

$$>4\Delta\cdot3^{-s_k(m,m')}-\varepsilon_{k^2+m'}-\varepsilon_{k^2+m}>2\Delta\cdot3^{-2k(k^2+2k+2)}=2\Delta_k\,.$$

Последнее означает, что среди чисел $t+\tau_{k^2+m}$, $m=0,1,\dots,2k$ (где $t\in B^\alpha_k(l,\xi)$), имеется не более одного числа $t+\tau_{k^2+m}$, для которого

$$|\,f_\alpha(t+\tau_{k^2+m})+g(t+\tau_{k^2+m})\,|\leqslant\Delta_k\,.$$

Поэтому сдвиги множества

$$G^\alpha_k(l,\xi)=\{t\in B^\alpha_k(l,\xi)\setminus[\xi+l-\tau_{k^2+2k}\,,\xi+l]:|f_\alpha(t)+g(t)|\leqslant\Delta_k\}$$

на числа $t+\tau_{k^2+m}$, $m=0,1,\ldots,2k$, не пересекаются и, следовательно, meas $G_k^\alpha(l,\xi)\leqslant (2k+1)^{-1}l$ и при $l\geqslant l'_k(\alpha)$ (для всех $\xi\in\mathbb{R}$) справедлива оценка

$$\frac{1}{l}\ \mathrm{meas}\ \{t\in[\xi,\xi+l]:|f_\alpha(t)+g(t)|\leqslant\Delta_k\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{l}\ \mathrm{meas}\ [\xi,\xi+l]\backslash B_k^\alpha(l,\xi)+\frac{1}{l}\ \tau_{k^2+2k}+\frac{1}{l}\ \mathrm{meas}\ G_k^\alpha(l,\xi)<$$

$$<2^{-2k^3-1}+2^{-k^2+1}+\frac{1}{l}\ \tau_{k^2+2k}+(2k+1)^{-1},$$

из которой для всех $k\in\mathbb{N}$ (и всех $\alpha\in\mathfrak{A}$) непосредственно вытекает неравенство

$$\varkappa_W(\{t\in\mathbb{R}:|f_\alpha(t)+g(t)|\leqslant\Delta_k\})<2^{-k^2+2}+(2k+1)^{-1}. \tag{3.6}$$

При $k\to+\infty$ из (3.6) следует доказываемое равенство (2.5). Теорема 7 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Из условий теоремы 2 непосредственно следует, что $\mathcal{T}(\cdot)\in\mathbf{T}$. Так как $h\in W_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, то (см. лемму 4) также $\mathcal{T}'(\cdot)\doteq\mathcal{T}(\cdot)\cap\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot;h)\in\mathbf{T}$. Последнее включение, в частности, означает, что $\mathcal{T}(\delta)\cap\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\delta;h)\in\mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$ для всех $\delta>0$. Не ограничивая общности, будем в дальнейшем считать, что $\varepsilon\in(0,1]$. В силу теоремы 4 для всех $n\in\mathbb{N}$ существуют последовательность $\{T_j^{(n)}\}_{j\in\mathbb{N}}\in\widetilde{\mathfrak{M}}^{(W)}\{\mathcal{T}'(\cdot)\}$ и множества $F_j^{(n)}\in\mathrm{cl}\,U$, $j\in\mathbb{N}$, такие, что

$$\mathrm{dist}_{\rho'}(F(t),F_j^{(n)})<2^{-n-1}\ \frac{\varepsilon}{9}$$

для всех $t\in T_j^{(n)}$, $j\in\mathbb{N}$. Из теоремы 4 также следует, что существуют последовательность $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in\widetilde{\mathfrak{M}}^{(W)}\{\mathcal{T}'(\cdot)\}$ и точки $y_j\in U$, $j\in\mathbb{N}$, такие, что $\rho(g(t),y_j)<\frac{\varepsilon}{36}$ для всех $t\in T_j$, $j\in\mathbb{N}$. Для всех упорядоченных пар $\{j,j_1\}$ индексов $j,j_1\in\mathbb{N}$, для которых $T_j\cap T_{j_1}^{(1)}\neq\varnothing$, выберем (какие-либо) точки $x_{j,j_1}\in F_{j_1}^{(1)}$, удовлетворяющие неравенствам

$$\rho(x_{j,j_1},y_j)<\rho(y_j,F_{j_1}^{(1)})+\frac{3\varepsilon}{4}\ .$$

Далее последовательно при $n=2,3,\ldots$ для упорядоченных наборов $\{j,\,j_1,\ldots,j_n\}$ индексов $j,j_1,\ldots,j_n\in\mathbb{N}$, для которых $T_j\cap T_{j_1}^{(1)}\cap\ldots\cap T_{j_n}^{(n)}\neq\varnothing$, будем находить точки $x_{j,j_1,\ldots,j_n}\in F_{j_n}^{(n)}$. Пусть они уже найдены для некоторого числа $n\in\mathbb{N}$. Предположим, что для упорядоченного набора $\{j,j_1,\ldots,j_n,j_{n+1}\}$ индексов $j,j_1,\ldots,j_n,j_{n+1}\in\mathbb{N}$ имеем $T_j\cap T_{j_1}^{(1)}\cap\ldots\cap T_{j_n}^{(n)}\cap T_{j_{n+1}}^{(n+1)}\neq\varnothing$. Так как также $T_j\cap T_{j_1}^{(1)}\cap\ldots\cap T_{j_n}^{(n)}\neq\varnothing$, то определены точки $x_{j,j_1,\ldots,j_n}\in F_{j_n}^{(n)}$. Тогда точки $x_{j,j_1,\ldots,j_n,j_{n+1}}\in F_{j_{n+1}}^{(n+1)}$ выберем так, что

$$\rho'(x_{j,j_1,\ldots,j_n,j_{n+1}},x_{j,j_1,\ldots,j_n})\leqslant 2\,\mathrm{dist}_{\rho'}(F_{j_{n+1}}^{(n+1)},F_{j_n}^{(n)}).$$

Для любого $t\in T_j\cap T_{j_1}^{(1)}\cap\ldots\cap T_{j_n}^{(n)}\cap T_{j_{n+1}}^{(n+1)}\neq\varnothing$ выполняется оценка

$$\mathrm{dist}_{\rho'}(F_{j_{n+1}}^{(n+1)},F_{j_n}^{(n)})\leqslant\mathrm{dist}_{\rho'}(F_{j_{n+1}}^{(n+1)},F(t))+\mathrm{dist}_{\rho'}(F_{j_n}^{(n)},F(t))<(2^{-n-1}+2^{-n-2})\ \frac{\varepsilon}{9}\ =\ 2^{-n-2}\ \frac{\varepsilon}{3}\ ,$$

поэтому

$$\rho(x_{j,j_1,\ldots,j_n,j_{n+1}},x_{j,j_1,\ldots,j_n})=\rho'(x_{j,j_1,\ldots,j_n,j_{n+1}},x_{j,j_1,\ldots,j_n})<2^{-n-1}\frac{\varepsilon}{3}<1\,.$$

Для всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место включение (см. (2.3))

$$\{T_j \cap T^{(1)}_{j_1} \cap \ldots \cap T^{(n)}_{j_n}\}_{j, j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}} \in \widetilde{\mathfrak{M}}^{(W)}\{\mathcal{T}'(\cdot)\}.$$

Определим функции

$$f(n; \cdot) = \mathbb{F}(\{x_{j, j_1, \ldots, j_n}\}, \{T_j \cap T^{(1)}_{j_1} \cap \ldots \cap T^{(n)}_{j_n}\}; \cdot), \quad n \in \mathbb{N}$$

(для которых $f(n;t) = x_{j, j_1, \ldots, j_n}$ при всех $t \in T_j \cap T^{(1)}_{j_1} \cap \ldots \cap T^{(n)}_{j_n}$ (если последнее множество непустое)). Из леммы 16 получаем, что $f(n;\cdot) \in \widetilde{W}^{\,c}(\mathbb{R}, U)$ и $\mathcal{P}^{(\rho')}_1(\cdot; f(n;\cdot)) \prec \mathcal{T}'(\cdot)$. Обозначим

$$T = \Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} T_j\Big) \bigcap \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j_n \in \mathbb{N}} T^{(n)}_{j_n}\Big).$$

Имеем $\operatorname{meas} \mathbb{R} \setminus T = 0$. Для всех $t \in T$ существует последовательность $\{j(t), j_1(t), j_2(t), \ldots\}$ такая, что $t \in T_{j(t)}$ и $t \in T^{(n)}_{j_n(t)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $t \in T$, то $f(n;t) = x_{j(t), j_1(t), \ldots, j_n(t)}$, поэтому

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \rho(f(n+1;t), f(n;t)) \leqslant \sup_{t \in T} \rho(x_{j(t), j_1(t), \ldots, j_n(t), j_{n+1}(t)}, x_{j(t), j_1(t), \ldots, j_n(t)}) \leqslant 2^{-n-1}\,\frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Отсюда получаем (так как метрическое пространство (U, ρ) является полным), что последовательность функций $f(n;\cdot)$ при $n \to +\infty$ равномерно (на множестве T) сходится к некоторой функции $f_\varepsilon \in \widetilde{W}^{\,c}(\mathbb{R}, U)$, при этом $\mathcal{P}^{(\rho')}_1(\cdot; f_\varepsilon) \prec \mathcal{T}'(\cdot)$ (см. лемму 7 и утверждение после нее). Последнее означает, что для любого $\delta' > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что $\mathcal{P}^{(\rho')}_1(\delta'; f_\varepsilon) \supseteq \mathcal{T}'(\delta) \cap \mathcal{P}^{(\rho_{\mathbb{R}})}_1(\delta; h)$. Для всех $t \in T$ справедливо включение $f(n;t) \in F^{(n)}_{j_n(t)}$ и

$$\operatorname{dist}_{\rho'}(F^{(n)}_{j_n}, F(t)) < 2^{-n-1}\,\frac{\varepsilon}{9} \to 0$$

при $n \to +\infty$, следовательно, $f_\varepsilon(t) \in F(t)$ при всех $t \in T$. Если $t \in T$, то выполняются оценки

$$\rho(f_\varepsilon(t), g(t)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \rho(x_{j(t), j_1(t), \ldots, j_n(t), j_{n+1}(t)}, x_{j(t), j_1(t), \ldots, j_n(t)}) + \rho(x_{j(t), j_1(t)}, y_{j(t)}) + \rho(y_{j(t)}, g(t)) <$$

$$< \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n-1}\,\frac{\varepsilon}{3} + \rho(y_{j(t)}, F^{(1)}_{j_1(t)}) + \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{36} \leqslant$$

$$\leqslant \rho(y_{j(t)}, g(t)) + \rho(g(t), F(t)) + \operatorname{dist}_{\rho'}(F^{(1)}_{j_1(t)}, F(t)) + \frac{17}{18}\,\varepsilon < \rho(g(t), F(t)) + \varepsilon\,.$$

Предположим теперь, что также $F \in M^*_p(\mathbb{R}, \operatorname{cl}_b U)$, $p \geqslant 1$. В этом случае из теоремы 3 следует, что $F \in \widetilde{W}^{\,c}(\mathbb{R}, \operatorname{cl}_b U) \cap M^*_p(\mathbb{R}, \operatorname{cl}_b U) \subseteq \widetilde{W}^{\,c}_p(\mathbb{R}, \operatorname{cl}_b U)$ (и $\mathcal{P}^{(\mathrm{dist})}_p(\cdot; F) \prec \mathcal{P}^{(\mathrm{dist}')}_1(\cdot; F) = \mathcal{P}^{(\mathrm{dist}_{\rho'})}_1(\cdot; F)$, поэтому $\mathcal{P}^{(\mathrm{dist})}_p(\cdot; F) \prec \mathcal{T}(\cdot)$). Так как $\rho(f_\varepsilon, x_0) \leqslant \operatorname{dist}(F(t), \{x_0\})$ п. в., то справедливо включение $f_\varepsilon \in M^*_p(\mathbb{R}, U)$ и, следовательно (см. теорему 3), $f_\varepsilon \in \widetilde{W}^{\,c}(\mathbb{R}, U) \cap M^*_p(\mathbb{R}, U) \subseteq \widetilde{W}^{\,c}_p(\mathbb{R}, U)$ (и $\mathcal{P}^{(\rho)}_p(\cdot; f_\varepsilon) \prec \mathcal{P}^{(\rho')}_1(\cdot; f_\varepsilon)$, поэтому $\mathcal{P}^{(\rho)}_p(\cdot; f_\varepsilon) \prec \mathcal{T}'(\cdot)$). Теорема 2 доказана.

Автор выражает признательность рецензенту за ряд полезных замечаний и предложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Andres J. Bounded, almost-periodic and periodic solutions of quasilinear differential inclusions // Differential Inclusions and Optimal Control (ed. by J. Andres, L. Górniewicz and P. Nistri). Lecture Notes in Nonlin. Anal. — 1998. — Vol. 2. — P. 35–50.

2. Andres J., Bersani A. M., Leśniak K. On some almost-periodicity problems in various metrics // Acta Appl. Math. — 2001. — Vol. 65. — № 1–3. — P. 35–57.
3. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Лин В. Я., Локуциевский О. О. О топологических причинах аномального поведения некоторых почти периодических систем // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний: Сб. — Киев: Наукова думка, 1977. — С. 54–61.
4. Данилов Л. И. Почти периодические сечения многозначных отображений // Известия отдела математики и информатики. — УдГУ. Ижевск, 1993. — Вып. 1. — С. 16–78.
5. Долбилов А. М., Шнейберг И. Я. Почти периодические многозначные отображения и их сечения // Сиб. матем. журнал. — 1991. — Т. 32. — № 2. — С. 172–175.
6. Fryszkowski A. Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps // Studia Math. — 1983. — Vol. 76. — № 2. — P. 163–174.
7. Данилов Л. И. О почти периодических сечениях многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — Вып. 2. — С. 34–41.
8. Danilov L. I. On Weyl almost periodic selections of multivalued maps // J. Math. Anal. Appl. — 2006. — Vol. 316. — № 1. — P. 110–127.
9. Данилов Л. И. О почти периодических по Безиковичу сечениях многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — Вып. 1. — С. 97–120.
10. Данилов Л. И. Мерозначные почти периодические функции и почти периодические сечения многозначных отображений // Матем. сборник. — 1997. — Т. 188. — № 10. — С. 3–24.
11. Данилов Л. И. Почти периодические по Вейлю сечения носителей мерозначных функций // Сибирские электронные математические известия. — 2006. — Т. 3. — С. 384–392. `http://semr.math.nsc.ru`
12. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. — М.: ГИТТЛ, 1953. — 396 с.
13. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. — 205 с.
14. Данилов Л. И. О почти периодических по Вейлю сечениях многозначных отображений / ФТИ УрО РАН. — Ижевск, 2004. — 104 с. — Деп. в ВИНИТИ 09.06.2004, № 981-В2004.
15. Andres J., Bersani A. M., Grande R. F. Hierarchy of almost-periodic function spaces // Rendiconti Mat. Appl. Ser. VII. — 2006. — Vol. 26. — № 2. — P. 121–188.
16. Данилов Л. И. Почти периодические по Вейлю сечения многозначных отображений // Известия Института математики и информатики. — УдГУ. Ижевск, 2006. — Вып. 3 (37). — С. 27–28.
17. Данилов Л. И. О равномерной аппроксимации почти периодических по Вейлю и почти периодических по Безиковичу функций // Известия Института математики и информатики. — УдГУ. Ижевск, 2006. — Вып. 1 (35). — С. 33–48.
18. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Идеи и проблемы П. Л. Чебышёва и А. А. Маркова и их дальнейшее развитие. — М.: Наука, 1973. — 551 с.

Поступила в редакцию 22.09.08

L. I. Danilov

On a class of Weyl almost periodic selections of multivalued maps

We consider a class of Weyl almost periodic functions for which the set of ε-almost the periods defined by means of the Weyl pseudometric is relatively dense for all $\varepsilon > 0$. For this class of functions, under certain additional restrictions we prove the existence of almost periodic selections of almost periodic multivalued maps.

Keywords: almost periodic function, selection, multimap.

Mathematical Subject Classifications: 42A75, 54C65

Данилов Леонид Иванович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник. Физико-технический институт УрО РАН. 426000, Россия, г. Ижевск, ул. Кирова, 132. E-mail: danilov@otf.pti.udm.ru