

УДК 531.38

© А. А. Килин

## МЕТОДЫ ВЫСОКОТОЧНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ЭФФЕКТИВИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В работе исследован процесс хаотизации фазового портрета в ограниченной задаче о вращении тяжелого твердого тела с закрепленной точкой. Указаны два дополняющих друг друга механизма хаотизации — рост гомоклинической структуры и развитие каскадов бифуркаций удвоения периода. Отмечено адиабатическое поведение системы на нулевом уровне интеграла площадей при стремлении энергии к нулю. Найдены меандровые торы, связанные с нарушением свойства закручивания рассматриваемого отображения.

*Ключевые слова:* движение твердого тела, фазовый портрет, механизм хаотизации, бифуркации.

### § 1. Основные уравнения

Уравнения Эйлера-Пуассона, описывающие движение твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном поле тяжести, имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{I}\dot{\omega} + \omega \times \mathbf{I}\omega = \mu \mathbf{r} \times \gamma, \\ \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ,  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  — компоненты вектора угловой скорости, радиус-вектора центра масс и единичного орта вертикали в системе главных осей инерции  $(e_1, e_2, e_3)$ , жестко связанных с твердым телом и проходящих через точку закрепления,  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  — тензор инерции относительно точки закрепления в тех же осях,  $\mu = mg$  — вес тела (рис. 1).

Уравнения (1.1) обладают тремя первыми интегралами движения

$$H = \frac{1}{2}(\omega, \mathbf{I}\omega) - \mu(\mathbf{r}, \gamma), \quad \mathbf{F}_1 = (\mathbf{I}\omega, \gamma), \quad \mathbf{F}_2 = \gamma^2. \quad (1.2)$$

Здесь  $H$  — полная энергия тела, интеграл  $F_1$  — связан с симметрией относительно вращений вокруг неподвижной вертикальной оси и называется интегралом площадей, а  $F_2$  — геометрический интеграл, значение которого для действительных движений твердого тела равно единице  $F_2 = \gamma^2 = 1$ .

Рассмотрим задачу о движении динамически симметричного тела при следующих предположениях:  $I_1 = I_2 = 1$ ,  $I_3 = dl$ ,  $\mathbf{r} = (\mathbf{0}, d\mathbf{l}, \mathbf{0})$ . При достаточно малых  $dl < 2$  для моментов инерции выполнены неравенства треугольников, следовательно, выбранной конфигурации соответствует некоторое реальное распределение масс. Уравнения движения при этом принимают вид

$$\dot{\omega}_1 = (1 - dl)\omega_2\omega_3 - dl\gamma_3, \quad \dot{\omega}_2 = (dl - 1)\omega_1\omega_3, \quad \dot{\omega}_3 = \gamma_1. \quad (1.3)$$

Рассмотрим предельный случай данной задачи при  $dl \rightarrow 0$ , когда тело вырождается в отрезок прямой. Данный предельный переход вполне аналогичен предельному переходу к ограниченной задаче трех тел в небесной механике. При этом одновременно стремятся к нулю момент инерции и момент силы тяжести относительно оси динамической симметрии. Таким образом, в пределе получается нетривиальное уравнение для собственного вращения, которое мы рассмотрим ниже. Впервые этот предельный переход предложен В. В. Козловым и Д. В. Трещевым

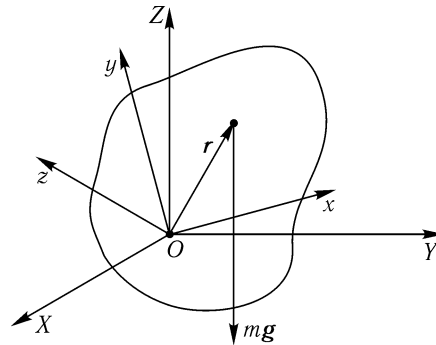


Рис. 1. Твердое тело с неподвижной точкой в поле тяжести.

в [6]. Аналогичный предельный переход в более общем случае динамически несимметричного тела был рассмотрен А. А. Буровым в [3].

После предельного перехода  $dl \rightarrow 0$  уравнения (1.3) примут следующий вид

$$\dot{\omega}_1 = \omega_2 \omega_3, \quad \dot{\omega}_2 = -\omega_1 \omega_3, \quad \dot{\omega}_3 = \gamma_1. \quad (1.4)$$

Интегралы для системы (1.4), получающиеся из интегралов (1.2) исходной задачи предельным переходом, имеют вид

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = h, \quad \omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2 = c, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \quad (1.5)$$

Проредуцируем уравнения (1.4) на совместный уровень интегралов (1.5) [6]. Для этого выберем в качестве переменных  $\xi, \eta, \gamma_3$ , связанные с  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  следующим образом

$$\omega_1 = \sqrt{2h} \sin \xi, \quad \omega_2 = \sqrt{2h} \cos \xi, \quad \omega_3 = \eta. \quad (1.6)$$

Уравнение для  $\gamma_3$  отделяется, и после его интегрирования получим  $\gamma_3 = A \cos(\sqrt{2ht})$ , где  $A$  зависит от величин интегралов (1.5). Подставив полученное решение в уравнения (1.1) для  $\dot{\gamma}$  и выражения для интегралов (1.5), находим

$$\gamma_1 = \frac{c}{\sqrt{2h}} \sin \xi - \sqrt{1 - \frac{c^2}{2h}} \sin(\sqrt{2ht}) \cos \xi, \quad \gamma_2 = \frac{c}{\sqrt{2h}} \cos \xi + \sqrt{1 - \frac{c^2}{2h}} \sin(\sqrt{2ht}) \sin \xi, \quad \gamma_3 = \sqrt{1 - \frac{c^2}{2h}} \cos(\sqrt{2ht}). \quad (1.7)$$

Легко показать, что для всех движений твердого тела подкоренные выражения в (1.7) неотрицательны. После подстановки (1.6) и (1.7) в уравнения движения (1.4) получим уравнения для оставшихся двух переменных  $\xi, \eta$ :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta, \\ \dot{\eta} = \frac{c}{\sqrt{2h}} \sin \xi - \sqrt{1 - \frac{c^2}{2h}} \sin(\sqrt{2ht}) \cos \xi. \end{cases} \quad (1.8)$$

Уравнения (1.8) можно представить в гамильтоновой форме

$$\dot{\xi} = \frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad \dot{\eta} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad H = \frac{\eta^2}{2} + \frac{c}{\sqrt{2h}} \cos \xi + \sqrt{1 - \frac{c^2}{2h}} \sin(\sqrt{2ht}) \sin \xi. \quad (1.9)$$

Таким образом, рассматриваемый предельный случай задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки сводится к гамильтоновой системе с полутора степенями свободы.

Рассмотрим теперь свойства абсолютного движения ограниченной задачи о движении твердого тела. Для этого запишем квадратуру для угла прецессии

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}. \quad (1.10)$$

Подставив (1.5) и (1.7) в (1.10) и проинтегрировав полученное выражение по времени, получим

$$\psi(t) = \begin{cases} \arctg(\frac{\sqrt{2h}}{c} \operatorname{tg}(\sqrt{2ht})) + \psi(0), & c \neq 0, \\ \psi(0), & c = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

В рассматриваемом предельном случае тело вырождается в отрезок прямой, поэтому его движения в неподвижной системе координат описываются только апексом  $e_3$ , параллельным третьей оси инерции. Зависимость  $e_3$  от углов Эйлера имеет вид

$$e_3 = (\sin \theta \sin \psi, -\sin \theta \cos \psi, \cos \theta). \quad (1.12)$$

Учитывая равенство  $\cos \theta = \gamma_3$  и используя (1.11), приходим к выводу, что при любых значениях интегралов и начальных условий уравнений (1.9), движение стержня является периодическим с частотой  $\sqrt{2h}$ . В частности, при  $c = 0$  отсутствует прецессия, и любое движение тела является равномерным вращением в вертикальной плоскости. Таким образом, в предельной постановке уравнения движения разделяются на две части. Первая часть связана с абсолютным движением тела и может быть явно проинтегрирована. Вторая часть связана с собственным вращением тела и, вообще говоря, не имеет отношения к реальному движению тела (так как фактически описывает вращение бесконечно тонкого стержня вокруг своей оси). Интересным фактом является то, что даже в случае хаотического собственного вращения, в неподвижной системе координат тело будет двигаться регулярно и периодически. Кроме того, благодаря предельному переходу в ограниченной задаче мы избегаем проблем связанных с топологией изоэнергетических уровней и выбором глобального трансверсального сечения Пуанкаре. Отметим также, что основные свойства развития хаоса, описанные в этой работе, проявляются также в общих уравнениях Эйлера-Пуассона [2].

Отметим, что систему (1.9) также можно рассматривать как задачу о математическом маятнике с периодическим по времени возмущением специального вида. Действительно, положив  $\nu = \sqrt{1 - \frac{c^2}{2h}}$  и считая  $\nu$  малым параметром, получим

$$H = H_0 + \nu H_1 + o(\nu), \quad H_0 = \frac{\eta^2}{2} + \cos \xi, \quad H_1 = \sin(\sqrt{2ht}) \sin \xi. \quad (1.13)$$

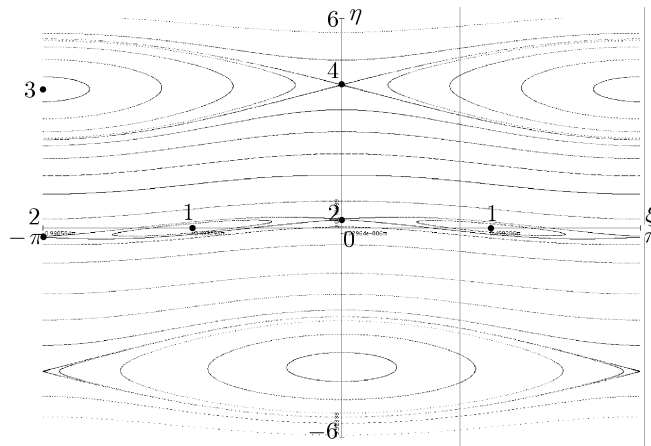
Таким образом, при  $\nu = 0$  система (1.9) интегрируема. Ее аналитическая неинтегрируемость при  $\nu \neq 0$  была показана в [6] для случая  $c \neq 0$ , и в [4] для случая  $c = 0$  при помощи численного построения расщепляющихся сепаратрис для неустойчивого периодического решения. Кроме того, в [9] вычислены показатели Ковалевской и тем самым показана алгебраическая неинтегрируемость рассматриваемой задачи. Рассмотрим сначала процесс перехода к хаосу в данной задаче при  $c = 0$ .

## § 2. Переход к хаосу при $c = 0$

Рассмотрим эволюцию фазового портрета системы (1.9) при  $c = 0$  и изменении полной энергии тела  $h$  (см. (1.5)) от  $+\infty$  до 0. Для этого изучим отображение за период возмущения на плоскости  $(\xi \bmod 2\pi, \eta)$  для уравнений (1.8).

Рассматриваемое отображение симметрично относительно замен  $(\eta \rightarrow -\eta, \xi \rightarrow \pi - \xi)$  и  $(\xi \rightarrow -\xi, t \rightarrow -t)$ . Это позволяет ограничиться рассмотрением динамики системы в области  $\eta \geq 0, \xi \in (0, \pi)$ , однако далее для наглядности мы будем приводить полные фазовые портреты. Заметим также, что основной интерес представляет поведение системы при достаточно малых  $\eta$ , так как при больших  $\eta$  слагаемыми, зависящими от  $\xi$  и  $t$  в гамильтониане (1.9), можно пренебречь, и движение становится близким к интегрируемому. На фазовом портрете это проявляется в том, что при увеличении  $\eta$  инвариантные кривые все меньше отличаются от горизонтальных прямых.

Отметим, что существует *два дополняющих друг друга механизма хаотизации* фазового портрета:



**Рис. 2.** Фазовый портрет при  $c = 0$ ,  $h = 8$ .

- *трансверсальное пересечение неустойчивых инвариантных многообразий* – *сепаратрис* (и возникающая при этом гомоклиническая структура отображения и подкова Смейла). Данный механизм отвечает за образование хаотического слоя вблизи неустойчивых периодических решений.
- *каскад бифуркаций удвоения периода*. После прохождения каскада бифуркаций удвоения периода фазовый портрет характеризуется наличием траекторий со сколь угодно большим периодом. Хаос, обусловленный таким поведением, можно назвать локальным, так как он связан с конкретными периодическими решениями. Глобальная же хаотизация фазового портрета вблизи каскада связана с тем, что благодаря каскаду области регулярности «дробятся» на все более мелкие части, вокруг которых образуется хаос по первому механизму хаотизации.

Как мы увидим ниже, в рассматриваемой задаче совместное действие обоих механизмов приводит к полной хаотизации фазового портрета.

Рассмотрим теперь этапы хаотизации фазового портрета рассматриваемой задачи при уменьшении энергии более подробно.

**Расщепление резонансных торов.** При  $h = +\infty$  система (1.9) является интегрируемой, а соответствующий фазовый портрет на плоскости  $(\xi, \eta)$  имеет вид горизонтальных прямых, причем каждой прямой соответствует своя частота вращения по  $\xi$ . При уменьшении энергии инвариантные кривые, для которых частота вращения по  $\xi$  соизмерима с частотой вынуждающей силы  $\sqrt{2h}$  (так называемые резонансные торы) расщепляются. На рисунке 2 приведен соответствующий фазовый портрет системы при достаточно большой, но уже не бесконечной энергии. Как видно из рисунка, расщепление резонансных торов при этом значении  $h$  достаточно значительно, однако фазовый портрет все еще близок к интегрируемому случаю. Определяющими для фазового портрета в данном случае являются резонансы (периодические решения) первого порядка. Все периодические решения, которые «материализовались» при добавлении возмущения (уменьшении энергии), на рисунке 2 пронумерованы. Резонансы более высоких порядков при данном значении энергии не «материализуются», то есть расщепляются слабо и почти не отличаются от обычных торов.

**Гомоклиническая структура отображения.** При уменьшении энергии происходит расщепление сепаратрис вблизи неустойчивых периодических решений. При этом рождаются узкие хаотические слои вокруг устойчивых периодических решений различного порядка (см. рис. 3). Методику построения сепаратрис можно найти в [12].

**Замечание 1.** Интересно, что верхняя пара сепаратрис периодического решения, соответствующего неустойчивой хореографии, практически не расщепляется по сравнению с нижней

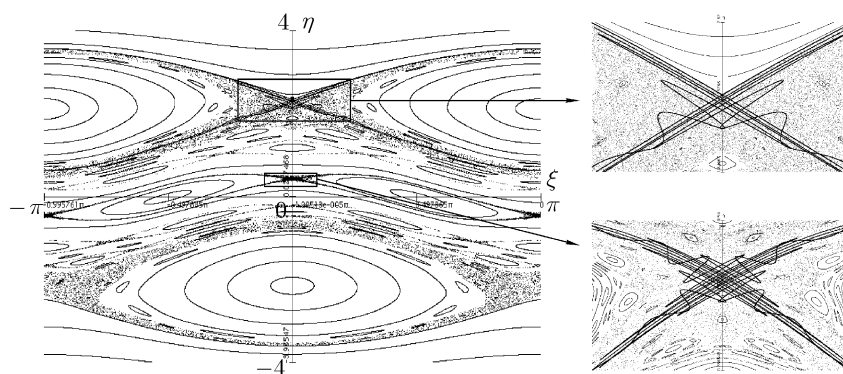


Рис. 3. Фазовый портрет при  $c = 0$ ,  $h = 2.5$ .

парой (см. рис. 3 справа сверху). Отметим, что такая ситуация наблюдается почти во всем промежутке изменения  $h$  (за исключением достаточно малых значений).

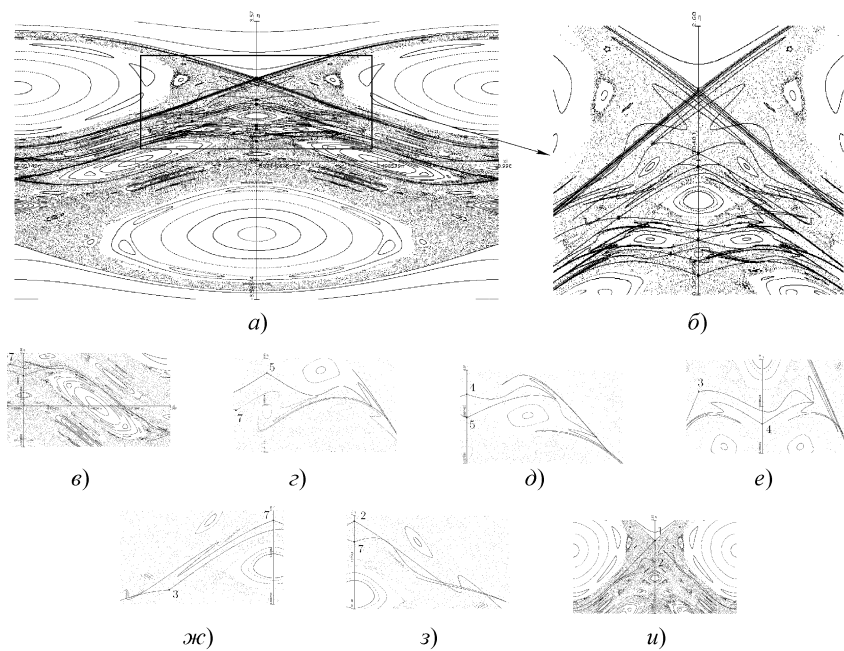
При дальнейшем уменьшении энергии торы, разделяющие хаотические слои, разрушаются, а хаотические слои сливаются друг с другом. При этом сепаратрисы, соответствующие различным неподвижным точкам, трансверсально пересекают друг друга. После слияния всех хаотических слоев образуется один хаотический слой, образованный сетью пересечений сепаратрис различных порядков. Соответствующий фазовый портрет и пересечения сепаратрис неустойчивых неподвижных точек 1, 2, 3, 4, 5 и 7 порядков приведены на рис. 4.

**Замечание 2.** Из теоремы о замыкании [8] и существования промежуточных пересечений сепаратрис высокого порядка следует, что сепаратрисы, соответствующие верхней и нижней неподвижным точкам первого порядка на рис. 4, также пересекаются, а их замыкания совпадают. Однако, вблизи критического значения  $h$ , при котором разрушается последний инвариантный тор, разделяющий хаотические слои, это пересечение может происходить на очень больших расстояниях (в смысле числа итераций) от неподвижных точек. Таким образом, для нахождения первого пересечения сепаратрис понадобится экспоненциально большое время.

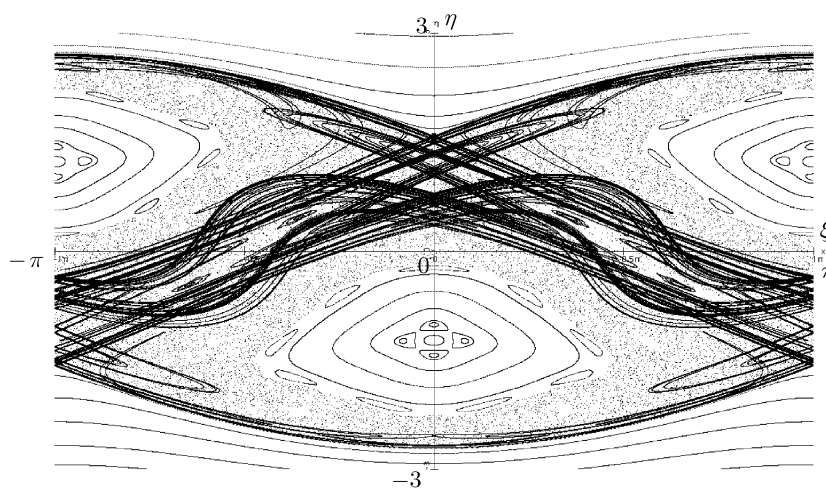
**Каскады бифуркаций удвоения периода.** На следующем этапе хаотизации, при уменьшении энергии оставшиеся острова регулярности разрушаются через каскады бифуркаций удвоения периода. Каскады представляют собой бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода (или кратных увеличений периода) при изменении параметра системы в конечных пределах. Более подробно различные типы бифуркаций периодических решений и каскады бифуркаций описаны в Приложении. После прохождения каскадов образуется достаточно однородный хаотический слой вблизи начала координат (рис. 5).

Отметим, что каскадам, как правило, предшествуют некоторые предварительные бифуркации. Приведем для иллюстрации схему бифуркаций при уменьшении энергии для двух наиболее важных устойчивых периодических решений первого порядка.

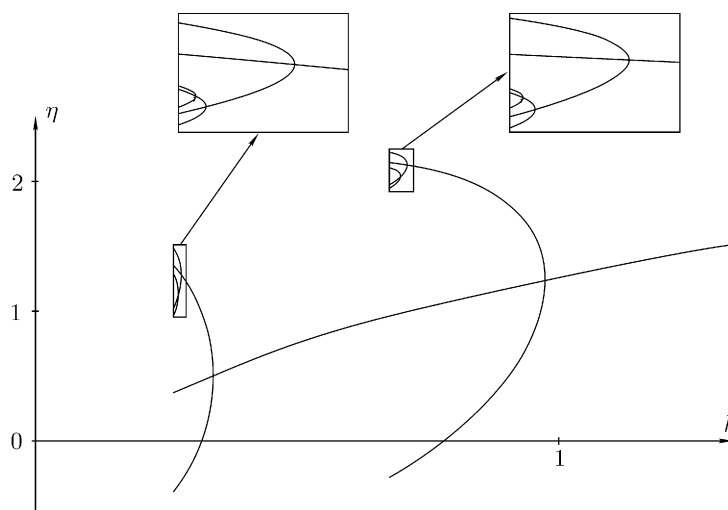
- *Периодическое решение 1 (рис. 2).*
  - 1) бифуркация удвоения периода;
  - 2) бифуркация типа вилки;
  - 3) каскад бифуркаций удвоения периода.
- *Периодическое решение 3 (рис. 2).*
  - 1) двойная бифуркация удвоения периода, при которой неподвижная точка сохраняет свой тип устойчивости, и из нее рождается две пары устойчивых и две пары неустойчивых решений удвоенного периода;
  - 2) каскад бифуркаций удвоения периода родившейся пары устойчивых периодических



**Рис. 4.** Фазовый портрет и пересечения сепаратрис 1, 2, 3, 4, 5 и 7 порядков при  $c = 0, h = 2$ . а), б) — фазовый портрет и его увеличение в области построения сепаратрис, в)–и) — последовательные пересечения сепаратрис. Числами около неподвижных точек указаны их периоды.



**Рис. 5.** Фазовый портрет и сепаратрисы неподвижных точек первого порядка при  $c = 0, h = 1$ .



**Рис. 6.** Проекция дерева бифуркаций удвоения периода, начинающееся с абсолютных хореографий, на плоскость  $(h, \eta)$ .

- решений второго порядка;
- 3) бифуркация типа вилки основного решения;
- 4) каскад бифуркаций удвоения периода.

Третье периодическое решение лежит на плоскости симметрии  $\xi = \pi$ . В работе [13] для обратимого отображения показано, что при бифуркации периодического решения, лежащего на плоскости симметрии, получающиеся при этом новые периодические решения пересекают эту плоскость в двух точках. Кроме того, при продолжении по параметру эти решения не сходят с плоскости симметрии. Таким образом, при изучении бифуркаций удвоения третьего периодического решения достаточно следить за рождающимися периодическими решениями, лежащими на оси  $\xi = \pi$ . Соответствующая проекция дерева бифуркаций удвоения на плоскость  $(h, \eta)$  изображена на рис. 6. Константы масштабного преобразования по параметру  $h$  для первых шести бифуркаций удвоения приведены в таблице 1. Как видно из таблицы, значения коэффициентов масштабного преобразования достаточно быстро сходятся к постоянной Фейгенбаума  $\delta = 8.721\dots$

**Таблица 1.** Коэффициенты масштабного преобразования для дерева бифуркаций на рис. 6

Номер бифуркации	$h_n$	$\delta_n$	Номер бифуркации	$h_n$	$\delta_n$
2	0,287733199		2	0,734936403	
3	0,282333473		3	0,721745207	
4	0,281711468	8,681161784	4	0,720016837	7,632159557
5	0,281640344	8,745399858	5	0,719817826	8,684798818
6	0,28163219	8,721983486	6	0,719795025	8,728028583

Как уже было сказано выше, после прохождении каскадов удвоений периода фазовый портрет системы при малых  $\eta$  практически полностью хаотизуется. Однако, при некотором (достаточно малом) значении энергии, на оси  $\xi = \pi$  вновь рождается устойчивое периодическое решение первого порядка. При дальнейшем уменьшении энергии данное решение испытывает бифуркацию типа вилки, а затем, образовавшаяся область регулярности хаотизуется через еще один каскад удвоений периода.

**Случай  $c = 0$ ,  $h \rightarrow 0$ . Адиабатическое поведение.** Рассмотрим эволюцию фазового портрета при стремлении энергии  $h$  к нулю. Для этого напомним, что при фиксированном  $h$  и бесконечно больших  $\eta$  система (1.9) становится интегрируемой, и все ее движения представляют собой равномерные вращения по  $\xi$  при постоянном  $\eta$ . Рассмотрим теперь уравнения (1.9) при больших  $\eta$  как периодическое по времени возмущение такой интегрируемой системы. В качестве возмущения при этом будут выступать второе и третье слагаемые в гамильтониане (1.9), а увеличению возмущения будет соответствовать уменьшение  $\eta$ .

Введем понятие числа вращения следующим образом

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \dot{\xi} dt, \quad (2.1)$$

где  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{2h}}$  — период возмущения. Как обычно, добавление возмущения приводит к разрушению резонансных торов, для которых выполнено равенство  $n = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ . При этом из таких резонансных торов по теореме Пуанкаре [5] рождается четное число периодических решений порядка  $q$ . Подставив (1.8) в (2.1), при больших  $\eta$  получим

$$n = \frac{\eta}{\sqrt{2h}} + o(\eta). \quad (2.2)$$

Как видно из (2.2), число вращения неограниченно растет при увеличении  $\eta$ . Таким образом, при фиксированном  $h$  в системе (1.9) существует бесконечно много периодических решений первого порядка, родившихся при расщеплении резонансных торов с целыми числами вращения ( $q = 1$ ).

Рассмотрим эволюцию этих периодических решений с заданным числом вращения  $n$ . Из (2.2) следует, что при уменьшении  $h$  периодические решения с заданным числом вращения движутся по направлению к началу координат. При достаточно малых  $\eta$ , слагаемые в гамильтониане уже нельзя рассматривать как малое возмущение. В результате дальнейшая эволюция неподвижных точек может быть исследована только компьютерными методами, в частности, методом продолжения периодического решения по параметру (см. Приложение). Оказывается, при дальнейшем уменьшении  $h$  неподвижные точки, родившиеся из резонансных торов, продолжают приближаться к хаотическому слою, образовавшемуся после каскадов удвоения периода. При некотором критическом значении  $h$  происходит слияние этого слоя с узким хаотическим слоем вблизи неустойчивых периодических решений с числом вращения  $n$ . Оставшиеся после этого острова регулярности вблизи устойчивых периодических решений с числом вращения  $n$  хаотизируются через каскады удвоений периода.

Описанная эволюция наблюдается для неподвижных точек первого порядка с целыми числами вращения  $n \geq 3$ . Таким образом, при устремлении энергии  $h$  к нулю в системе наблюдается бесконечное число каскадов удвоений периода неподвижных точек первого порядка, спускающихся из бесконечности по  $\eta$  в хаотический слой.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. *Абсолютные и относительные хореографии в динамике твердого тела* // Нелинейная Динамика, 2005, т. 1, № 1, с. 123–141.
2. Борисов А. В., Симаков Н. Н. *Бифуркации удвоения периода в динамике твердого тела* // Регулярная и хаотическая динамика, 1997, т. 2, № 1, с. 64–75.
3. Буров А. А. *Об ограниченной постановке задачи о движении тяжелого твердого тела* // ПММ, 2004, т. 68, вып. 6, с. 958–963.
4. Довбыш С. А. *Численное исследование двух задач механики: трансверсальное пересечение сепаратрис колмогоровская устойчивость*. В кн. *Численный анализ, математическое моделирование и их применение в механике* // М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.



5. Козлов В. В. *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой динамике* // Ижевск: Изд-во УдГУ, 1995, 432 с.
6. Козлов В. В., Трещев Д. В. *Неинтегрируемость общей задачи о вращении динамически симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой II* // Вестник Моск. ун-та. Сер. мат., мех., 1986, № 1, с. 39–44.
7. Нейштадт А. И. *Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису* // Физика плазмы, 1986, т. 12, вып. 8., с. 992.
8. Трещев Д. В. *Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем* // М.: ФАЗИС, 1998, 184 с.
9. Borisov A. V., Dudoladov S. L. *Kovalevskaya Exponents and Poisson Structures* // Reg. & Chaot. Dyn., 1999, V. 4, № 3, p. 13–20.
10. Feigenbaum M. J., Greene J. M., MacKay R. S., Vivaldi V. *Universal behaviour in families of area-preserving maps* // Physica 3D, 1981, p. 468–486.
11. MacKay R. S. *Renormalisation in area-preserving maps* // World Scientific, 1993, 324 p.
12. Parker T. S., Chua L. O. *Practical numerical algorithms for chaotic systems* // New York: Springer-Verlag, 1989.
13. Rimmer R. *Generic bifurcations from fixed points of involutory area preserving maps* // Diff. Equations, 1978, V. 29, p. 329, и P. Math. Res. Paper, La Trobe U., Melbourne, 1979, V. 79, №. 7.
14. Simo C. *Invariant curves of perturbations of non twist integrable area preserving maps* // Reg. & Chaot. Dyn., 1998, V. 3, p. 180–195.
15. Simo C., Stuchi T. J. *Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the planar Hill problem* // Physica D, 2000, V. 140, № 1-2, p. 1–32. См. также кн. (пер. с англ.): Симо К., Смейл С., Шенсине А. *Современные проблемы хаоса и нелинейности* // Ижевск: ИКИ, 2002, 304 с.
16. Wiggins S. *Chaotic transport in dynamical systems* // NY, Springer, 1992.

Поступила в редакцию 21.10.08

**A. A. Kilin**

**Methods of high-accuracy integration and effectivity of calculus**

The paper deals with a transition to chaos in the phase-plane portrait of a restricted problem of rotation of a rigid body with a fixed point. Two interrelated mechanisms responsible for chaotisation have been indicated: 1) growth of the homoclinic structure and 2) development of cascades of period doubling bifurcations. On the zero level of the integral of areas, an adiabatic behavior of the system (as the energy tends to zero) has been noticed. Meander tori induced by the breakdown of the torsion property of the mapping have been found.

*Keywords:* motion of a rigid body, phase-plane portrait, mechanism of chaotisation, bifurcations.

Mathematical Subject Classifications: 70E17, 65P30, 83C10

Килин Александр Александрович, к. ф.-м. н., Институт компьютерных исследований, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: aka@rcd.ru