УДК 532.5.013

© *А. В. Борисов*

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ. ПРИЛОЖЕНИЯ К ВИХРЕВОЙ ДИНАМИКЕ

В работе рассмотрены новый метод конструктивного понижения порядка для систем точечных вихрей на плоскости и сфере. Этот метод близок к классической процедуре исключения узла по Якоби в небесной механике. Однако, в случае динамики вихрей возникают некоторые особые ситуации, требующие отдельного рассмотрения. Более подробно рассмотрена задача приведения четырех точечных вихрей на плоскости и сфере.

Ключевые слова: редукция, точечный вихрь, уравнения движения, отображение Пуанкаре.

Рассмотрим последовательно уравнения движения, первые интегралы и соответствующую им процедуру редукции для случаев плоскости и сферы.

§ 1. Уравнения движения и первые интегралы системы вихрей на плоскости

Кратко остановимся на основных формах уравнений и первых интегралов динамики точечных вихрей на плоскости, отсылая за более полным изложением к книгам [2, 14], где также приведены гидродинамические допущения, при которых эти уравнения справедливы.

Уравнения движения n точечных вихрей с декартовыми координаты (x_i, y_i) и интенсивностями Γ_i могут быть записаны в гамильтоновой форме

$$\Gamma_i x_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y_i}, \quad \Gamma_i \dot{y}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_i}, \quad 1 \le i \le n, \tag{1.1}$$

с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i<j}^{n}\Gamma_i\Gamma_j \ln M_{ij}, \quad M_{ij} = |\mathbf{r_i} - \mathbf{r_j}|^{\mathbf{2}}, \quad \mathbf{r_i} = (\mathbf{x_i}, \mathbf{y_i}). \tag{1.2}$$

Здесь скобка Пуассона имеет вид

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\Gamma_i}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big). \tag{1.3}$$

Уравнения (1.1) инвариантны относительно группы движений плоскости $E(2)$, поэтому кроме гамильтониана они обладают еще тремя интегралами

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\Gamma_i x_i, \quad P = \sum_{i=1}^{n}\Gamma_i y_i, \quad I = \sum_{i=1}^{n}\Gamma_i(x_i^2 + y_i^2), \tag{1.4}$$

которые, однако, не являются инволютивными

$$\{Q, P\} = \sum_{i=1}^{N}\Gamma_i, \quad \{P, I\} = -2Q, \quad \{Q, I\} = 2P. \tag{1.5}$$

В дальнейшем вместо интеграла I удобнее использовать интеграл вида

$$D = \sum_{i<j}^{n}\Gamma_i\Gamma_j|\mathbf{r_i} - \mathbf{r_j}|^{\mathbf{2}} = (\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}\mathbf{\Gamma_i})\mathbf{I} - \mathbf{P^2} - \mathbf{Q^2}. \tag{1.6}$$

Из этих трех интегралов можно образовать два инволютивных Q^2+P^2, I и, следовательно, согласно общей теории [5], можно понизить порядок на две степени свободы. В частности, вследствие этого, задача трех вихрей сводится к одной степени свободы и является интегрируемой (Грёбли, Кирхгоф, Пуанкаре) [14], а задача четырех вихрей сводится к системе с двумя степенями свободы. Последняя задача, вообще говоря, не является интегрируемой [4].

§ 2. Редукция на плоскости

Выполним понижение порядка для задачи N вихрей произвольной интенсивности на две степени свободы. Воспользуемся для этого аналогией с плоской задачей n тел в небесной механике.

Как известно, для задачи n тел сначала, выполняется *исключение центра масс* [7]. В частности, для этого можно выбрать переменные Якоби

$$\xi_{\mathbf{2}}=\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1},\quad \xi_{\mathbf{3}}=\mathbf{r_3}-\frac{\mathbf{m_1r_1+m_2r_2}}{\mathbf{m_1+m_2}},\quad \ldots,\quad \xi_{\mathbf{n}}=\mathbf{r_n}-\frac{\mathbf{m_1r_1}+\cdots+\mathbf{m_{n-1}r_{n-1}}}{\mathbf{m_1}+\cdots+\mathbf{m_{n-1}}},$$

которые определяют положение тел в системе центра масс $\left(\sum m_i\mathbf{r_i}=\mathbf{0}\right)$. Ясно, что аналогичная процедура в задаче n вихрей (вместо масс необходимо выбрать завихренности $m_i\to\Gamma_i$) позволяет *исключить центр завихренности*, тем самым мы используем группу трансляций [13, 12]. При этом приведенная система инвариантна относительно вращений (группа $SO(2)$) вокруг центра завихренности. В небесной механике редукция по оставшейся группе вращений известна как *исключение узла по Якоби* и может быть выполнена различными способами (см. [7, 6]).

Для вихревой динамики аналогичная редукция существенно отличается (в связи с тем, что уравнения движения имеют первый порядок по времени), и может быть выполнена при помощи перехода к полярным координатам в переменных Якоби ($\xi_{ix}=\sqrt{2\rho_i}\cos\varphi_i$, $\xi_{iy}=\sqrt{2\rho_i}\sin\varphi_i$) с последующим исключением угла общего поворота всей конфигурации вихрей.

Система N произвольных вихрей на плоскости с ненулевой суммарной интенсивностью ($\sum_{i=1}^N\Gamma_i\neq 0$) допускает редукцию на две степени свободы, при которой каноническими переменными приведенной системы являются

$$q_i=\rho_{i+2}\frac{\Gamma_{i+2}\sum_{k=1}^{i+1}\Gamma_k}{\sum_{k=1}^{i+2}\Gamma_k},\quad \psi_i=\varphi_{i+2}-\varphi_2,\quad i=1,\ldots,N-2, \tag{2.1}$$

где

$$\rho_i=\frac{1}{2}|\mathbf{r_i}-\mathbf{R^{(i-1)}}|^{\mathbf{2}},\quad \varphi_{\mathbf{i}}=\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathbf{y_i}-\mathbf{R_y^{(i-1)}}}{\mathbf{x_i}-\mathbf{R_x^{(i-1)}}}\right),\quad \mathbf{i}=\mathbf{2}\ldots\mathbf{N}, \tag{2.2}$$

$\mathbf{R^{(i)}}=\dfrac{\sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{i}}\mathbf{\Gamma_j r_j}}{\sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{i}}\mathbf{\Gamma_j}}$ определяет центр завихренности i вихрей, а $\mathbf{r_i}$ — радиус-вектор i-го вихря.

Рассмотрим подробнее частный случай $\sum\limits_{i=1}^N\Gamma_i=0$, который не имеет аналога в небесной механике (в связи с положительностью масс тел $m_i>0$). В этом случае говорят, что центр завихренности находится на бесконечности, и переменные (2.1) не определены (один из знаменателей обращается в ноль). Соответствующая редукция в этом случае описывается следующим образом.

В случае $\sum_{j=1}^N\Gamma_j=0$ канонические переменные приведенной системы (соответствующие редукции на две степени свободы) $\widetilde{\rho}_i$, $\widetilde{\varphi}_i$, $i=1,\ldots,N-2$ задаются соотношениями

$$\widetilde{\rho}_i=\frac{\Gamma_i\sum_{k=1}^{i-1}\Gamma_k}{\sum_{k=1}^{i}\Gamma_k}\rho_{i+1},\quad \widetilde{\varphi}_i=\varphi_{i+1},\quad i=1,\ldots,N-2, \tag{2.3}$$

где ρ_i и φ_i заданы соотношениями (2.2).

§ 3. Уравнения движения и первые интегралы системы вихрей на сфере $\mathbb{S}^2$

Для n точечных вихрей на сфере $\mathbb{S}^2$ гамильтоновы уравнения движения в сферических координатах (θ_i, φ_i) могут быть записаны в виде [1]

$$\dot{\theta}_i = \{\theta_i, \mathcal{H}\}, \quad \dot{\varphi}_i = \{\varphi_i, \mathcal{H}\}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.1}$$

со скобкой Пуассона

$$\{\varphi_i, \cos\theta_k\} = \frac{\delta_{ik}}{R^2\Gamma_i}, \tag{3.2}$$

где Γ_i — интенсивности вихрей и гамильтониан

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i<k}^{n}\Gamma_i\Gamma_k \ln(M_{ik}) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i<k}^{n}\Gamma_i\Gamma_k \ln\left(4R^2\sin^2\frac{\gamma_{ik}}{2}\right). \tag{3.3}$$

Здесь R — радиус сферы, M_{ij} — квадрат расстояния между i-ым и j-ым вихрями измеряемого по хорде, γ_{ik} — угол между векторами, соединяющими центры сферы с точечными вихрями i и k,

$$\cos\gamma_{ik} = \cos\theta_i\cos\theta_k + \sin\theta_i\sin\theta_k\cos(\varphi_i - \varphi_k).$$

Помимо гамильтониана уравнения (3.1) допускают еще три независимых неинволютивных интеграла

$$F_1 = R\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i\sin\theta_i\cos\varphi_i, \quad F_2 = R\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i\sin\theta_i\sin\varphi_i, \quad F_3 = R\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i\cos\theta_i. \tag{3.4}$$

Вектор $\mathbf{F}$ с компонентами $(F_1, F_2, F_3) = \mathbf{F} = \sum \mathbf{\Gamma_i r_i}$ ($\mathbf{r_i}$ — радиус-вектор вихрей) называется *моментом завихренности*, его компоненты коммутируют следующим образом:

$$\{F_i, F_j\} = \frac{1}{R}\varepsilon_{ijk}F_k. \tag{3.5}$$

Как и в плоском случае, можно редуцировать систему на две степени свободы, используя инволютивные интегралы, например F_3 и $\mathbf{F^2}$. Таким образом, в случае трех вихрей получим вполне интегрируемую систему.

§ 4. Редукция на сфере

На сфере, в отличие от плоского случая, невозможно разделить симметрии на трансляции и вращения, тем не менее предложенный выше алгоритм редукции (обобщающий редукцию Якоби) допускает обобщения. Так же, как и выше, будем последовательно рассматривать момент завихренности 2-х, 3-х, …, n вихрей:

$$\mathbf{F_2} = \mathbf{\Gamma_1 r_1} + \mathbf{\Gamma_2 r_2}, \quad \ldots, \quad \mathbf{F_n} = \mathbf{\Gamma_1 r_1} + \cdots + \mathbf{\Gamma_n r_n} = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{r_i} \in \mathbb{R}^\mathbf{3}$ — декартовы координаты вихрей на сфере вложенной в $\mathbb{R}^3$. Квадраты моментов $\mathbf{F_k^2}$, $k = 2\ldots n$, обладают следующими (очевидными) свойствами:

1°. все $\mathbf{F_k^2}$ коммутируют между собой

$$\{\mathbf{F_k^2}, \mathbf{F_m^2}\} = \mathbf{0};$$

2°. квадрат момента $\mathbf{F_k^2}$ коммутирует с координатами всех вихрей с номерами $1, 2\ldots k$

$$\{\mathbf{F_k^2}, \mathbf{x_i}\} = \{\mathbf{F_k^2}, \mathbf{y_i}\} = \{\mathbf{F_k^2}, \mathbf{z_i}\} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{i = 1\ldots k}.$$

Таким образом квадраты моментов $\mathbf{F_2^2}\ldots\mathbf{F_{n-1}^2}$ инвариантны относительно действия группы симметрий $SO(3)$, коммутируют между собой и их число равно половине размерности

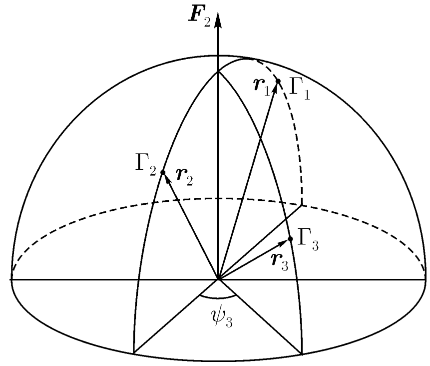

Рис. 1.

приведенной системы. С помощью свойства 2° этот набор несложно пополнить некоторыми относительными угловыми переменными приведенной системы.

Система N вихрей на сфере в случае $\mathbf{F_N} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{\Gamma_i r_i} \neq \mathbf{0}$ допускает редукцию на две степени свободы с помощью канонических переменных ρ_i, ψ_i, задающихся соотношениями

$$\rho_i = |\mathbf{F_{i+1}}|, \quad \operatorname{tg}\psi_\mathbf{i} = \frac{\rho_\mathbf{i}(\mathbf{F_{i+1}}, \mathbf{r_{i+1}} \times \mathbf{r_{i+2}})}{(\mathbf{r_{i+1}} \times \mathbf{F_{i+1}}, \mathbf{r_{i+2}} \times \mathbf{F_{i+1}})}, \quad \mathbf{i = 1, \ldots, N-2}, \tag{4.1}$$

где ψ_i представляет собой угол между плоскостями $(\mathbf{F_{i+1}}, \mathbf{r_{i+2}})$ и $(\mathbf{F_{i+1}}, \mathbf{r_{i+1}})$ (см. рис. 1).

§ 5. Явная редукция системы четырех вихрей на плоскости и сфере

А. Случай плоскости. Укажем явный вид приведенной системы для случая четырех вихрей на плоскости. Гамильтониан выражается через взаимные расстояния по формуле (1.2), которые в свою очередь могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
&M_{12} = 2\rho_2, \quad M_{23} = 2\rho_3 + 2\Big(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_1+\Gamma_2}\Big)^2\rho_2 - \frac{4\Gamma_1}{\Gamma_1+\Gamma_2}\sqrt{\rho_2\rho_3}\cos\psi_1,\\
&M_{13} = 2\rho_3 + 2\Big(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1+\Gamma_2}\Big)^2\rho_2 + \frac{4\Gamma_2}{\Gamma_1+\Gamma_2}\sqrt{\rho_2\rho_3}\cos\psi_1,\\
&M_{34} = 2\rho_4 + 2\Big(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}\Big)^2\rho_3 - \frac{4(\Gamma_1+\Gamma_2)}{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}\sqrt{\rho_3\rho_4}\cos(\psi_1-\psi_2),\\
&M_{14} = 2\rho_4 + 2\Big(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1+\Gamma_2}\Big)\rho_2 + 2\Big(\frac{\Gamma_3}{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}\Big)^2\rho_3 + \frac{4\Gamma_2}{\Gamma_1+\Gamma_2}\sqrt{\rho_2\rho_4}\cos\psi_2+\\
&\qquad + \frac{4\Gamma_3}{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}\sqrt{\rho_3\rho_4}\cos(\psi_1-\psi_2) + \frac{4\Gamma_2\Gamma_3}{(\Gamma_1+\Gamma_2)(\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3)}\sqrt{\rho_2\rho_3}\cos\psi_1,\\
&M_{24} = 2\rho_4 + 2\Big(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_1+\Gamma_2}\Big)^2\rho_2 + 2\Big(\frac{\Gamma_3}{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}\Big)^2\rho_3 - \frac{4\Gamma_1}{\Gamma_1+\Gamma_2}\sqrt{\rho_2\rho_4}\cos\psi_2+\\
&\qquad + \frac{4\Gamma_3}{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}\sqrt{\rho_3\rho_4}\cos(\psi_1-\psi_2) - \frac{4\Gamma_2\Gamma_3}{(\Gamma_1+\Gamma_2)(\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3)}\sqrt{\rho_2\rho_3}\cos\psi_1,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

где ρ_i выражаются через канонические переменные q_1, q_2 ($\{q_i, \psi_j\} = \delta_{ij}$) и постоянную интеграла D по формулам

$$\rho_2 = \Big(\frac{1}{2}\frac{D}{\sum_{i=1}^4 \Gamma_i} - q_1 - q_2\Big)\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{\Gamma_1\Gamma_2}, \quad \rho_3 = \frac{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}{\Gamma_3(\Gamma_1+\Gamma_2)}q_1, \quad \rho_4 = \frac{\sum_{i=1}^4 \Gamma_i}{\Gamma_4(\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3)}q_2.$$

Геометрический смысл переменных поясняется на рис. 2.

Отметим, что указанные формулы справедливы не только для всех положительных интенсивностей, подобно [11].

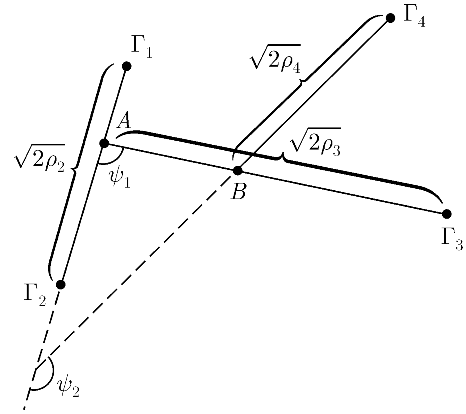

Рис. 2. Геометрический смысл переменных приведенной системы. Точки A и B центры завихренности пары Γ_1, Γ_2 и тройки вихрей Γ_1, Γ_2, Γ_3 соответственно.

B. Случай сферы. Аналогично укажем выражения для взаимных расстояний 4-х вихрей на сфере через канонические переменные приведенной системы ($\{\rho_i, \psi_j\} = R^{-1}\delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$) и квадрат интеграла $\mathbf{F^2} = \mathbf{F_4^2} = \mathbf{c^2} = \mathbf{const}$ (при произвольных интенсивностях вихрей):

$$\begin{gathered}
M_{12} = \frac{(\Gamma_1+\Gamma_2)^2R^2-\rho_1^2}{\Gamma_1\Gamma_2}, \quad M_{23} = \frac{((\Gamma_2+\Gamma_3)^2-\Gamma_1^2)R^2-\rho_2^2+2(\mathbf{F_1F_3})}{\Gamma_2\Gamma_3}, \\
M_{13} = \frac{((\Gamma_1+\Gamma_3)^2-\Gamma_2^2-\Gamma_3^2)R^2+\rho_1^2-2(\mathbf{F_1},\mathbf{F_3})}{\Gamma_1\Gamma_3}, \; M_{14} = 2R^2+2\frac{(\mathbf{F_1},\mathbf{F_3})-(\mathbf{F_1},\mathbf{F})}{\Gamma_1\Gamma_4}, \\
M_{34} = \frac{(\Gamma_3+\Gamma_4)^2R^2-\rho_1^2-c^2+2(\mathbf{F_2},\mathbf{F})}{\Gamma_3\Gamma_4}, \\
M_{24} = \frac{(2\Gamma_2\Gamma_4-\Gamma_3^2)R^2+\rho_1^2+\rho_2^2-2(\mathbf{F_2},\mathbf{F})+\mathbf{2}(\mathbf{F_1},\mathbf{F})-\mathbf{2}(\mathbf{F_1},\mathbf{F_3})}{\Gamma_2\Gamma_4},
\end{gathered} \tag{5.2}$$

где скалярные произведения выражаются по формулам

$$\begin{gathered}
(\mathbf{F_1},\mathbf{F_2}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\rho_1^2+\mathbf{\Gamma_1^2R^2}-\mathbf{\Gamma_2^2R^2}), \quad (\mathbf{F_2},\mathbf{F_3}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\rho_2^2+\rho_1^2-\mathbf{\Gamma_3^2R^2}), \\
(\mathbf{F_3},\mathbf{F}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{c^2}+\rho_2^2-\mathbf{\Gamma_4^2R^2}), \\
(\mathbf{F_2},\mathbf{F}) = \frac{(\mathbf{F_3},\mathbf{F})(\mathbf{F_2},\mathbf{F_3})}{\rho_2^2} + \Big(\mathbf{c^2}-\frac{(\mathbf{F_2},\mathbf{F})^2}{\rho_2^2}\Big)\cos\psi_2\sqrt{\frac{\rho_1^2\rho_2^2-(\mathbf{F_2},\mathbf{F_3})^2}{\rho_2^2\mathbf{c^2}-(\mathbf{F_3},\mathbf{F})^2}}, \\
(\mathbf{F_1},\mathbf{F_3}) = \frac{(\mathbf{F_2},\mathbf{F_3})(\mathbf{F_1},\mathbf{F_2})}{\rho_1^2} + \Big(\rho_2^2-\frac{(\mathbf{F_2},\mathbf{F_3})^2}{\rho_1^2}\Big)\cos\psi_1\sqrt{\frac{\rho_1^2\mathbf{\Gamma_1^2R^2}-(\mathbf{F_1},\mathbf{F_2})^2}{\rho_1^2\rho_2^2-(\mathbf{F_2},\mathbf{F_3})^2}}, \\
(\mathbf{F_1},\mathbf{F}) = \frac{(\mathbf{F_2},\mathbf{F})(\mathbf{F_1},\mathbf{F_2})}{\rho_1^2} + \Big((\mathbf{F_3},\mathbf{F})-\frac{(\mathbf{F_2},\mathbf{F})(\mathbf{F_2},\mathbf{F_3})}{\rho_1^2}\Big)\cos\psi_1\times \\
\times\sqrt{\frac{\rho_1^2\Gamma_1^2R^2-(\mathbf{F_1},\mathbf{F_2})^2}{\rho_1^2\rho_2^2-(\mathbf{F_2},\mathbf{F_3})^2}} + \frac{\sin\psi_1\sin\psi_2}{\rho_1\rho_2}\sqrt{(\rho_1^2\Gamma_1^2R^2-(\mathbf{F_1},\mathbf{F_2})^2)(\rho_2^2\mathbf{c^2}-(\mathbf{F_3},\mathbf{F})^2)}.
\end{gathered} \tag{5.3}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богомолов В. А. *Динамика завихренности на сфере* // Изв. АН. СССР. Мех. жид. и газа, 1977, № 6, с. 57–65.
2. Борисов А. В., Мамаев И. С. *Математические методы динамики вихревых структур.* В сб. «*Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей*» (ред. Борисов А. В., Мамаев И. С., Соколовский М. А.) // НИЦ РХД, 2003, 704 с.
3. Борисов А. В., Мамаев И. С. *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике* // Ижевск: Изд. дом. «Удмуртский университет», 1999, 464 с.
4. Зиглин С. Л. *Неинтегрируемость задачи о движение четырех точечных вихрей* // ДАН СССР, 1979, т. 250, № 6, с. 1296–1300.
5. Козлов В. В. *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике* // Ижевск: Изд-во УдГУ, 1995.
6. Уинтнер А. *Аналитические основы небесной механики* // М.: Наука, 1967.
7. Шарлье К. Л. *Небесная механика* // М.: Наука, 1966, 627 с.
8. Aref H., Pomphrey N. *Integrable and chaotic motions of four vortices. I. The case of identical vortices* // Proc. R. Soc. London, 1982, V. 380 A, p. 359–387.
9. Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. *Lie algebras in vortex dynamics and celestial mechanics — IV* // Reg. & Chaot. Dyn., 1999, V. 4, № 1, p. 23–50.
10. Eckhardt B. *Integrable four vortex motion* // Phys. Fluids, 1988, V. 31, № 10, p. 2796–2801.
11. Khanin K. M. *Quasi-periodic motions of vortex systems* // Physica D., 1982, V. 4, p. 261–269.
12. Lim C. C. *A combinatorical perturbation method and Arnold's wiskered tori in vortex dynamics* // Physica D, 1993, V. 64, p. 163–184.
13. Lim C. C. *Graph theory and special class of symplectic transformations: the generalized Jacobi variables* // J. Math. Phys., 1991, V. 32, № 1, p. 1–7.
14. Newton P. K. *The N-Vortex problem. Analytical Techniques* // Springer, 2001.

Поступила в редакцию 01.10.07

A. V. Borisov

Numerical integration of differential dynamical equations. Vortex dynamics applications

We offer a new method of reduction for a system of point vortices on a plane and a sphere. This method is similar to the classical node elimination procedure. However, as applied to the vortex dynamics, it requires substantial modification. Reduction of four vortices on a sphere is given in more detail.

Keywords: reduction, point vortex, equations of motion, Poincaré map.

Mathematical Subject Classifications: 76M23, 34A05

Борисов Алексей Владимирович, д. ф.-м. н., Институт компьютерных исследований, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: borisov@ics.org.ru