ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. №1

УДК 519.633

Г. Г. Исламов, Ю. В. Коган

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ДИФФУЗИИ

Для дифференциально-разностной задачи управления процессом диффузии получен принцип максимума, позволяющий определить такие моменты включения и выключения максимальной мощности источника вещества, при которых внутри параллелепипеда устанавливается допустимый уровень его концентрации при наблюдаемом уровне концентрации этого вещества на границе параллелепипеда.

Ключевые слова: дифференциально-разностная задача, уравнение диффузии, принцип максимума, моменты переключения.

Постановка проблемы

Рассмотрим в течение времени T процесс диффузии вещества в параллелепипеде $G = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ конкретной среды с коэффициентами пористости $c(x)$ и диффузии $d(x)$. Предполагается,что плотность источников выбросов вещества меняется по закону $F(x,t) = b(x)w(t)$, где управляемая величина $w(t)$ характеризует процент использования максимальной мощности $b(x)$ источника вещества в точке x . Как известно, концентрация $u(x,t)$ вещества во внутренней точке $(x,t) \in G \times (0,T)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению диффузии

$$c(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \mathrm{Div}(d(x)\mathrm{grad}\, u(x,t)) + F(x,t). \qquad (1)$$

Допустим, что датчики на сторонах параллелепипеда G фиксируют изменение концентрации с течением времени:

$$u(x,t) = \mu(x,t), \quad x \in \partial G. \qquad (2)$$

Задачу управления концентрацией вещества $u(x,t)$ в рассматриваемом объёме G поставим следующим образом. Требуется построить такое кусочно-постоянное допустимое управление $w(t)$ $(0 \leqslant w(t) \leqslant 1$, $t \in (0,T))$, при котором уравнение (1) имеет гладкое решение $u(x,t)$, удовлетворяющее граничному условию (2) и дополнительному ограничению вида

$$u(x,t) \leqslant \beta(x,t) \qquad (3)$$

внутри области $(x,t) \in G \times (0,T)$. Здесь функция $\beta(x,t)$ задаёт предельное допустимое значение концентрации вещества в момент времени t во внутренней точке x параллелепипеда G. Заметим, что мы не фиксируем начальную концентрацию $u(x,0)$. Как раз её необходимо задать таким образом, чтобы с помощью управления $w(t)$ из заданного диапазона $[0,1]$ можно было обеспечить допустимую концентрацию (3) при возникающей на границе ∂G параллелепипеда G концентрации (2).

Дискретизация задачи по пространственной переменной

Поставленная задача порождает дифференциально-разностный аналог задачи управления диффузией, описание которой приводится ниже. Введём удобные для этого описания соглашения и обозначения. Если индекс i принимает значения $1, 2, \ldots, n$, то будем писать $i = \overline{1,n}$. Пусть $N = (N_1, \ldots, N_n)$ есть целочисленный вектор с положительными компонентами. Пусть, далее, мультииндексная переменная $J = (j_1, \ldots, j_n)$ ограничена условием $j_k = \overline{0, N_k}, k = \overline{1,n}$. Тогда множество её значений образует целочисленную сетку $0 \leqslant J \leqslant N$ (неравенство векторов понимается покомпонентно). Как правило, мы будем отождествлять переменную J с её значением. Мультииндекс J называется внутренним, если при всех $k = \overline{1,n}$ имеем $j_k \neq 0$ и $j_k \neq N_k$. Пусть $J = (j_1, \ldots, j_n)$ есть внутренний мультииндекс. Рассматривая уравнение (1) во внутреннем узле

$$x^J = (j_1 h_1, \ldots, j_n h_n), \quad h_k = (b_k - a_k)/N_k, k = \overline{1,n}$$

параллелепипеда G, при всех $t \in (0,T)$ имеем точное равенство

$$c(x^J)\frac{\partial u(x^J,t)}{\partial t} = \mathrm{Div}(d(x)\mathrm{grad}\, u(x,t))|_{x=x^J} + b(x^J)w(t). \tag{4}$$

Для тех же t будем иметь

$$u(x^J,t) \leqslant \beta(x^J,t). \tag{5}$$

Обозначим через F конечномерное пространство вещественнозначных функций, определённых на конечном множестве внутренних мультииндексов J целочисленной сетки $0 \leqslant J \leqslant N$. Пусть вектор-функция $y : (0,T) \to F$ определяется равенством $y(t)[J] = u(x^J,t)$, а вектор $B \in F$ задаётся как $B[J] = b(x^J)/c(x^J)$. Тогда уравнение (1) может быть записано в виде конечномерной системы дифференциальных уравнений

$$y'(t) = Ay(t) + Bw(t) + \nu(t), \quad t \in (0,T). \tag{6}$$

Здесь A есть матрица, порождённая одной из распространённых схем дискретизации оператора Лапласа, стоящего в правой части равенства (4).

Вектор-функция $\nu : (0, T) \to F$ порождена граничным условием (2) и играет роль «помехи», которую необходимо компенсировать с помощью управления $w(t)$ из указанного выше диапазона. В дальнейшем континуальное неравенство (5) мы заменим дискретным аналогом

$$y(t_i) \leqslant \beta_i, \quad i = \overline{1, m}. \tag{7}$$

Здесь t_i $(0 < t_i < t_{i+1} < T)$ есть моменты наблюдения за концентрацией вещества во внутренних узлах параллелепипеда G, а вектора $\beta_i \in F$ порождены выражениями $\beta(x^J, t_i)$. В наших обозначениях вектор $y(0) \in F$ характеризует начальную концентрацию вещества во внутренних узлах параллелепипеда G. Теперь мы в состоянии применить результаты работы [1] для получения необходимых и достаточных условий разрешимости задачи (6)–(7) при заданном допустимом управлении $w(t)$, а также принципа максимума для указания точек переключения кусочно-постоянного управления $w(t)$, принимающего лишь крайние значения 0 и 1.

Принцип максимума для задачи управления

Если линейный функционал λ принадлежит сопряжённому пространству F^* и вектор $g \in F$, то $\lambda \cdot g$ обозначает значение этого функционала на элементе g. Функционал λ называется неотрицательным, если $\lambda \cdot g \geqslant 0$ для всех $g \geqslant 0$, $g \in F$.

Теорема 1. *Задача* (6) – (7) *разрешима тогда и только тогда, когда неравенство*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot (\beta_i - \int_0^{t_i} e^{A(t_i - s)} \{Bw(s) + \nu(s)\} ds) \geqslant 0 \tag{8}$$

имеет место для любого семейства неотрицательных функционалов $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ *из сопряженного пространства* F^*, *удовлетворяющего уравнению*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^{At_i} = 0. \tag{9}$$

З а м е ч а н и е 1. В действительности неравенство (8) достаточно проверить на конечном числе образующих конуса неотрицательных решений уравнения (9), для отыскания которых можно применить вычислительную схему Н. В. Черниковой [1] либо воспользоваться модификацией симплекс-метода.

Доказательство теоремы 1 соответствует схеме работы [1] и приводится исключительно в интересах читателя.

Обозначим $f(t) = Bw(t) + \nu(t)$, $q = y(0)$. Тогда решение системы (6) имеет вид

$$y(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\, ds + e^{At} q.$$

Подставляя его в условия (7), получим систему неравенств

$$e^{At_i} q \leqslant \beta_i - \int_0^{t_i} e^{A(t_i - s)} f(s)\, ds.$$

В силу обобщения теоремы Фредгольма [1] данная система неравенств имеет решение относительно $q \in \mathbb{R}^n$ (n — число внутренних мультииндексов J целочисленной сетки $0 \leqslant J \leqslant N$) в том и только том случае, когда неравенство (8) имеет место для любого семейства неотрицательных функционалов $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ из сопряженного пространства F^*, удовлетворяющего уравнению (9). $\square$

Теорема 2. *Пусть $\nu(t)$ есть допустимая помеха для задачи управления (6) – (7), то есть найдётся такое допустимое управление $w(t)$ $(0 \leqslant w(t) \leqslant 1,\ t \in (0,T))$, при котором указанная задача разрешима. Тогда для некоторого нетривиального семейства неотрицательных функционалов $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ из сопряжённого пространства F^*, удовлетворяющего уравнению (9), найдётся компенсирующее помеху $\nu(t)$ допустимое управление $w^*(t)$, удовлетворяющее при почти всех $s \in (0,T)$ принципу максимума*

$$\varphi(s) w^*(s) = \max_{0 \leqslant w \leqslant 1} \varphi(s) w,$$

где скалярная функция $\varphi(s) = -\sum_{i=1}^m \operatorname{sign}(t_i - s)^+ \lambda_i \cdot e^{A(t_i - s)} B$. Здесь используется положительная часть $\sigma^+ = (\sigma + |\sigma|)/2$ числа σ.

З а м е ч а н и е 2. Нетрудно установить следующее свойство кусочно-непрерывной функции $\varphi(s)$, концы интервалов знакопостоянства которой определяют точки переключения в нашей задаче управления диффузией вещества в параллелепипеде G: $\varphi(s) \equiv 0$ при $s \notin (t_1, t_m)$ и $\varphi(s) = -\gamma_k \cdot e^{-As} B$ при $s \in (t_{k-1}, t_k], k = \overline{2,m}$, где функционалы $\gamma_k = \sum_{i=k}^m \lambda_i e^{At_i}$, причём $\gamma_1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i e^{At_i} = 0$, и для функционала λ_k имеем представление $\lambda_k = (\gamma_{k+1} - \gamma_k) e^{-At_k}, k = \overline{1, m-1}, \lambda_m = \gamma_m e^{-At_m}$. Выбирая соответствующим образом функционалы $\gamma_k, k = \overline{2,m}$ и считая, что

$\gamma_1 = 0$, из последних формул получим любое неотрицательное решение $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ системы (9).

Приводимое ниже доказательство теоремы 2 повторяет идею доказательства принципа максимума работы [1]. Пусть $\{\lambda_i^{(1)}\}_{i=1}^m, \ldots, \{\lambda_i^{(l)}\}_{i=1}^m$ — образующие конуса неотрицательных решений уравнения (9). В силу теоремы 1 компенсирующее помеху $\nu(t)$ допустимое управление $w(t) = w_\nu(t)$ удовлетворяет неравенству (8), где вместо $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ берутся семейства функционалов $\lambda^{(j)} = \{\lambda_i^{(j)}\}_{i=1}^m, j = \overline{1,l}$. Рассмотрим конечномерные множества

$$V = \{g = (g_1, \ldots, g_m) \in \mathbb{R}^{nm} : \lambda^{(j)} \cdot g = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(j)} \cdot g_i \geqslant 0, j = \overline{1,l}\},$$

$$W_\nu = \{g = (g_1, \ldots, g_m) \in \mathbb{R}^{nm} : g_i = \beta_i - \int_0^{t_i} e^{A(t_i - s)}\{Bw(s) + \nu(s)\}\, ds,$$
$$i = \overline{1,m}\},$$

где w пробегает все измеримые управления с $w(s) \in [0,1]$ при почти всех $s \in [0,T]$. Пересечение $V \cap W_\nu$ не пусто, так как $\nu(s)$ — допустимая помеха. Кроме того, V и W_ν выпуклы и замкнуты, причём V — конус с непустой внутренностью $\operatorname{int} V$, а W_ν — компакт. Пусть направление α является нетривиальной неотрицательной линейной комбинацией образующих $\{\lambda_i^{(1)}\}_{i=1}^m, \ldots, \{\lambda_i^{(l)}\}_{i=1}^m$ конуса неотрицательных решений уравнения (9). Найдётся граничная точка g^* компакта $V \cap W_\nu$ такая, что $\alpha g^* \geqslant \alpha g$ при всех $g \in V \cap W_\nu$. Допустим, что $h \in \operatorname{int} V$ и $g^* + h \in V \cap W_\nu$. Тогда $\alpha(g^* + h) \leqslant \alpha g^*$ и, значит, $\alpha h \leqslant 0$. Однако для $h \in \operatorname{int} V$ имеем $\lambda^{(j)} \cdot h > 0, j = \overline{1,l}$ и, следовательно, $\alpha \cdot h > 0$. Возникающее противоречие показывает, что $(g^* + \operatorname{int} V) \cap V \cap W_\nu = \emptyset$. Так как $g^* \in V$, то $(g^* + \operatorname{int} V) \cap V = (g^* + \operatorname{int} V)$. Следовательно, $(g^* + \operatorname{int} V) \cap W_\nu = \emptyset$. Согласно первой теореме отделимости открытое множество $(g^* + \operatorname{int} V)$ и выпуклый компакт W_ν можно разделить гиперплоскостью $\lambda_\nu \cdot g = \lambda_\nu \cdot g^*$. Будем считать, что $\lambda_\nu \cdot g \leqslant \lambda_\nu \cdot g^*$ при всех $g \in W_\nu$. Тогда $\lambda_\nu \cdot h \geqslant 0$ при всех $h \in V$. По теореме Фаркаша λ_ν есть нетривиальная неотрицательная линейная комбинация образующих $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(l)}$ конуса неотрицательных решений уравнения (9), то есть семейство λ_ν образует неотрицательное решение этого уравнения. Элементу $g^* \in W_\nu$ соответствует допустимое управление $w^*(t)$ такое, что неравенство (8) выполнено при $w(s) = w^*(s)$ и семействе функционалов $\{\lambda_i\}_{i=1}^m = \lambda_\nu = \{\lambda_{\nu i}\}_{i=1}^m$. Заметим, что $w^*(s)$ удовлетворяет формулируемому в теореме 2 принципу максимума при $\lambda_i = \lambda_{\nu i}, i = \overline{1, m}$. Действительно, так как

$$-\sum_{i=1}^{m} \int_0^{t_i} \lambda_{\nu i} e^{A(t_i - s)} Bw(s)\, ds = \int_0^T \varphi(s) w(s)\, ds,$$

то если $w^*(s)$ не удовлетворяет принципу максимума при указанном семействе $\{\lambda_{\nu i}\}_{i=1}^m$, то выберем допустимое управление $\tilde{w}(s)$, удовлетворяющее принципу максимума. Тогда на множестве положительной меры отрезка $[0, T]$ имеем $\varphi(s)\tilde{w}(s) > \varphi(s)w^*(s)$. Отсюда для элемента $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_m)$ из W_ν , где

$$\tilde{g}_i = \beta_i - \int_0^{t_i} e^{A(t_i - s)} \{B\tilde{w}(s) + \nu(s)\}\, ds, \quad i = \overline{1, m},$$

получим $\lambda_\nu \tilde{g} > \lambda_\nu g^*$. Это противоречит оптимальности g^* . □

Полученные в работе результаты служат теоретическим обоснованием распределённых и параллельных программ расчёта на кластере Удмуртского госуниверситета точек переключения в дифференциально-разностной задаче управления диффузией.

* * *

1. Исламов Г. Г. О допустимых помехах линейных управляемых систем // Изв. вузов. Математика. 2002. № 2. С. 37–40.

Поступила в редакцию 01.09.07

G. G. Islamov, Y. V. Kogan

The difference-differential problem of control by diffusion process

There are formulated and proved the maximum principle in the control problem for the difference–differential equation of diffusion.

Исламов Галимзян Газизович
ГОУВПО «Удмуртский государственный университет»
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 6)
E-mail: gislamov@udm.ru

Коган Юрий Вольфович
ГОУВПО «Удмуртский государственный университет»
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 6)
E-mail: kyvrak@udmnet.ru