ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. №1

УДК 517.518.6

Л. И. Данилов

О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО БЕЗИКОВИЧУ СЕЧЕНИЯХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Доказано, что почти периодические по Безиковичу многозначные отображения $\mathbb{R} \ni t \to F(t) \in \mathrm{cl}\,\mathcal{U}$ имеют почти периодические по Безиковичу сечения, где $\mathrm{cl}\,\mathcal{U}$ — множество непустых замкнутых подмножеств полного метрического пространства $\mathcal{U}$.

Ключевые слова: почти периодические функции, сечения, многозначные отображения.

Введение

При исследовании почти периодических (п.п.) решений дифференциальных включений возникает вопрос о существовании п.п. сечений многозначных п.п. отображений. В [1, 2] был, в частности, поставлен вопрос о существовании п.п. по Вейлю и п.п. по Безиковичу сечений многозначных п.п. отображений. Известно, что п.п. по Бору многозначные отображения не всегда имеют п.п. по Бору сечения [3]. Существование п.п. по Степанову сечений многозначных п.п. по Степанову отображений было впервые доказано в [4] на основе результатов Фришковского [5]. В [6–9] исследовались п.п. по Степанову сечения, удовлетворяющие разнообразным дополнительным условиям. Существование п.п. по Вейлю сечений многозначных п.п. по Вейлю отображений доказано в [10–12].

В § 1 даны определения и сформулированы некоторые утверждения о п.п. по Безиковичу функциях, которые необходимы в дальнейшем (относительно определений и свойств п.п. функций см., например, [13, 14]). В § 2 приведены основные результаты работы. В § 3 и § 4 содержатся доказательства соответственно теорем 1 и 8.

§ 1. Некоторые свойства почти периодических по Безиковичу функций

Пусть $(\mathcal{U}, \rho)$ — полное метрическое пространство, $\overline{A}$ — замыкание множества $A \subseteq \mathcal{U}$, $U_r(x) = \{y \in \mathcal{U} : \rho(x, y) < r\}$, $x \in \mathcal{U}$, $r > 0$; *meas* —

мера Лебега на $\mathbb{R}$. Функция $f:\mathbb{R}\to\mathcal{U}$ называется *элементарной*, если существуют точки $x_j\in\mathcal{U}$ и непересекающиеся измеримые (по Лебегу) множества $T_j\subseteq\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$ такие, что $\operatorname{meas}\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_j T_j=0$ и $f(t)=x_j$ для всех $t\in T_j$. Обозначим такую функцию через $f(.)=\sum\limits_j x_j\chi_{T_j}(.)$ (где $\chi_T(.)$ — характеристическая функция множества $T\subseteq\mathbb{R}$). Для любых функций $f_j:\mathbb{R}\to\mathcal{U}$, $j\in\mathbb{N}$ определим функцию $\sum\limits_j f_j(.)\chi_{T_j}(.):\mathbb{R}\to\mathcal{U}$, совпадающую с функцией $f_j(.)$ на множестве T_j, $j\in\mathbb{N}$ (обозначение $\sum\limits_j f_j(.)\chi_{T_j}(.)$ будет использоваться не только в случае, когда пространство $\mathcal{U}=(\mathcal{H},\|.\|)$ нормированное, но и в случае метрического пространства $\mathcal{U}=(\mathcal{U},\rho)$, однако никаких линейных операций над такими функциями производиться не будет). Функция $f:\mathbb{R}\to\mathcal{U}$ (сильно) *измерима*, если для любого $\varepsilon>0$ существует элементарная функция $f_\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathcal{U}$ такая, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\rho(f(t),f_\varepsilon(t))<\varepsilon\,.$$

Пусть $M(\mathbb{R},\mathcal{U})$ — пространство измеримых функций $f:\mathbb{R}\to\mathcal{U}$ (функции, совпадающие при почти всех (п.в.) $t\in\mathbb{R}$, отождествляются), $(L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{U}),D_\infty)$ — пространство в существенном ограниченных функций из $M(\mathbb{R},\mathcal{U})$ с метрикой

$$D_\infty(f,g)=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\rho(f(t),g(t))\,,\ f,g\in L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{U})\,.$$

Фиксируем точку $x_0\in\mathcal{U}$. Для $p\geqslant 1$ обозначим

$$M_p(\mathbb{R},\mathcal{U})\doteq\{f\in M(\mathbb{R},\mathcal{U}):\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\int_\xi^{\xi+1}\rho^p(f(t),x_0)\,dt<+\infty\}\,.$$

На множестве $M_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$ определим метрику

$$D_p^{(S)}(f,g)=\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\int_\xi^{\xi+1}\rho^p(f(t),g(t))\,dt\right)^{1/p},\ f,g\in M_p(\mathbb{R},\mathcal{U})\,.$$

Если $\mathcal{U}=(\mathcal{H},\|.\|)$ — банахово пространство ($\rho(x,y)=\|x-y\|$, $x,y\in\mathcal{H}$; $\|x\|=|x|$, если $x\in\mathbb{R}$), то через

$$\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|\,,\ f\in L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{H})$$

и

$$\|f\|_p^{(S)}=\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\int_\xi^{\xi+1}\|f(t)\|^p dt\right)^{1/p},\ f\in M_p(\mathbb{R},\mathcal{H})$$

обозначим нормы на линейных пространствах $L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{H})$ и $M_p(\mathbb{R},\mathcal{H})$, $p\geqslant 1$, соответственно.

В дальнейшем (без пояснений) будет использоваться обозначение $\mathcal{H}$ для банахова пространства, при этом удобно будет считать банахово пространство $\mathcal{H}=(\mathcal{H},\|.\|)$ комплексным. Если банахово пространство $\mathcal{H}$ вещественное, то можно рассмотреть его комплексификацию $\mathcal{H}+i\mathcal{H}$, отождествляя пространство $\mathcal{H}$ с вещественным подпространством.

Множество $T\subseteq\mathbb{R}$ называется *относительно плотным*, если существует число $a>0$ такое, что $[\xi,\xi+a]\cap T\neq\emptyset$ для всех $\xi\in\mathbb{R}$. Число $\tau\in\mathbb{R}$ называется (ε,D_∞)*-почти периодом* функции $f\in L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{U})$, где $\varepsilon>0$, если $D_\infty(f(.),f(.+\tau))<\varepsilon$. Непрерывная функция $f\in C(\mathbb{R},\mathcal{U})\cap L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{U})$ принадлежит пространству $CAP\,(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *п.п. по Бору* функций, если для любого $\varepsilon>0$ множество (ε,D_∞)-почти периодов функции f относительно плотно. Число $\tau\in\mathbb{R}$ называется $(\varepsilon,D_p^{(S)})$*-почти периодом* функции $f\in M_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $p\geqslant 1$, если $D_p^{(S)}(f(.),f(.+\tau))<\varepsilon$. Функция $f\in M_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $p\geqslant 1$ принадлежит пространству $S_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *п.п. по Степанову* функций *степени* $p\geqslant 1$, если для любого $\varepsilon>0$ относительно плотно множество $(\varepsilon,D_p^{(S)})$-почти периодов функции f.

На пространстве $\mathcal{U}$ определим также метрику $\rho'(x,y)=\min\{1,\rho(x,y)\}$, $x,y\in\mathcal{U}$; $(\mathcal{U},\rho')$ — полное метрическое пространство. На множестве $M(\mathbb{R},\mathcal{U})=M_1(\mathbb{R},(\mathcal{U},\rho'))$ введем метрику

$$D^{(S)}(f,g)=\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\int_\xi^{\xi+1}\rho'(f(t),g(t))\,dt\,,\ f,g\in M(\mathbb{R},\mathcal{U})\,.$$

Пусть $S(\mathbb{R},\mathcal{U})\doteq S_1(\mathbb{R},(\mathcal{U},\rho'))$ (*п.п. по Степанову* функция $f\in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$ определяется как п.п. по Степанову функция степени 1, принимающая значения в метрическом пространстве $(\mathcal{U},\rho')$). Справедливы вложения $CAP\,(\mathbb{R},\mathcal{U})\subseteq S_p(\mathbb{R},\mathcal{U})\subseteq S_1(\mathbb{R},\mathcal{U})\subseteq S(\mathbb{R},\mathcal{U})$.

Последовательность $\tau_j\in\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$ называется f*-возвращающей* для функции $f\in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$, если $D^{(S)}(f(.),f(.+\tau_j))\to 0$ при $j\to+\infty$. Если $f\in CAP\,(\mathbb{R},\mathcal{U})\subseteq S(\mathbb{R},\mathcal{U})$, то последовательность $\tau_j\in\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$ является f-возвращающей тогда и только тогда, когда $D_\infty(f(.),f(.+\tau_j))\to 0$ при $j\to+\infty$. Если $f\in S_p(\mathbb{R},\mathcal{U})\subseteq S(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $p\geqslant 1$, то последовательность $\tau_j\in\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$ является f-возвращающей в том и только в том случае, если $D_p^{(S)}(f(.),f(.+\tau_j))\to 0$ при $j\to+\infty$.

Для функций $f\in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$ через $\operatorname{Mod}f$ обозначается множество чисел $\lambda\in\mathbb{R}$ таких, что $e^{i\lambda\tau_j}\to 1$ ($i^2=-1$) при $j\to+\infty$ для всех f-возвращающих последовательностей τ_j. Множество $\operatorname{Mod}f$ является модулем (аддитивной группой) в $\mathbb{R}$. Если функция $f\in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$ не совпадает почти всюду (п.в.) с постоянной функцией, то $\operatorname{Mod}f$ — счетный модуль (в противном случае $\operatorname{Mod} f = \{0\}$). Если $\mathcal{U} = (\mathcal{H}, \|.\|)$ — банахово пространство, то для функций $f \in S_1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ множество $\operatorname{Mod} f$ является модулем показателей Фурье (частот) функции f .

Для любой функции $f \in S_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f_\varepsilon \in CAP\,(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ такая, что $\|f - f_\varepsilon\|_p^{(S)} < \varepsilon$ и $\operatorname{Mod} f_\varepsilon \subseteq \operatorname{Mod} f$ (более того, показатели Фурье функции f_ε принадлежат множеству показателей Фурье функции f). Если $f \in S(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f_\varepsilon \in CAP\,(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ такая, что $D^{(S)}(f, f_\varepsilon) < \varepsilon$ и $\operatorname{Mod} f_\varepsilon \subseteq \operatorname{Mod} f$.

Пусть $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, $p \geqslant 1$ — пространство Марцинкевича, то есть множество функций $f \in M(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, для которых $\rho(f(.), x_0) \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и

$$\varlimsup_{b \to +\infty} \frac{1}{2b} \int_{-b}^{b} \rho^p(f(t), x_0)\, dt < +\infty\,.$$

На множестве $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ вводится полуметрика

$$D_p^{(B)}(f, g) = \left(\varlimsup_{b \to +\infty} \frac{1}{2b} \int_{-b}^{b} \rho^p(f(t), g(t))\, dt \right)^{1/p}, \ f, g \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})\,.$$

Для банахова пространства $\mathcal{U} = (\mathcal{H}, \|.\|)$ определим также полунорму

$$\|f\|_p^{(B)} = \left(\varlimsup_{b \to +\infty} \frac{1}{2b} \int_{-b}^{b} \|f(t)\|^p\, dt \right)^{1/p}, \ f \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})\,.$$

Если для функций $f, g \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ ввести отношение эквивалентности: $f \sim g$ тогда и только тогда, когда $D_p^{(B)}(f, g) = 0$, то фактор-пространство $(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})/\sim, D_p^{(B)})$ становится полным метрическим пространством [15]. Имеем $M_p(\mathbb{R}, \mathcal{U}) \subseteq \mathcal{M}_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ и $D_p^{(B)}(f, g) \leqslant D_p^{(S)}(f, g)$ для всех функций $f, g \in M_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$.

Функция $f \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, $p \geqslant 1$ принадлежит пространству $B_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *п.п. по Безиковичу* функций *степени* p, если для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f_\varepsilon \in S_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ такая, что $D_p^{(B)}(f, f_\varepsilon) < \varepsilon$.

В силу теоремы Фреше [16] метрическое пространство $(\mathcal{U}, \rho)$ может быть изометрически вложено в некоторое банахово пространство $\mathcal{H}$, поэтому приведенное определение пространства $B_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ эквивалентно следующему определению: функция $f \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ принадлежит пространству $B_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, если для некоторого банахова пространства $\mathcal{H}$, в которое метрическое пространство $(\mathcal{U}, \rho)$ изометрически вкладывается (и следовательно, для всех таких банаховых пространств $\mathcal{H}$), и для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f_\varepsilon \in CAP\,(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ такая, что $\|f - f_\varepsilon\|_p^{(B)} < \varepsilon$ (где $\|.\|_p^{(B)}$ — полунорма на пространстве $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и предполагается, что функция f принимает значения в $\mathcal{H}$).

Для функций $f,g\in M(\mathbb{R},\mathcal{U})=\mathcal{M}_1(\mathbb{R},(\mathcal{U},\rho'))$ обозначим

$$D^{(B)}(f,g)=\overline{\lim_{b\to+\infty}}\ \frac{1}{2b}\int_{-b}^{b}\rho'(f(t),g(t))\,dt\,.$$

Пусть $B(\mathbb{R},\mathcal{U})\doteq B_1(\mathbb{R},(\mathcal{U},\rho'))$ — пространство *п.п. по Безиковичу* функций (определяемых как п.п. по Безиковичу функции степени 1, принимающие значения в метрическом пространстве $(\mathcal{U},\rho')$). Справедливы вложения $S(\mathbb{R},\mathcal{U})\subseteq B(\mathbb{R},\mathcal{U})$ и $S_p(\mathbb{R},\mathcal{U})\subseteq B_p(\mathbb{R},\mathcal{U})\subseteq B_1(\mathbb{R},\mathcal{U})\subseteq B(\mathbb{R},\mathcal{U})$.

Последовательность $\tau_j\in\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$ называется f*-возвращающей* для функции $f\in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$, если $D^{(B)}(f(.),f(.+\tau_j))\to 0$ при $j\to+\infty$. Если $f\in S(\mathbb{R},\mathcal{U})\subseteq B(\mathbb{R},\mathcal{U})$, то последовательность $\tau_j\in\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$ является f-возвращающей в том и только в том случае, если $D^{(S)}(f(.),f(.+\tau_j))\to 0$ при $j\to+\infty$. Если $f\in B_p(\mathbb{R},\mathcal{U})\subseteq B(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $p\geqslant 1$, то последовательность $\tau_j\in\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$ является f-возвращающей тогда и только тогда, когда $D_p^{(B)}(f(.),f(.+\tau_j))\to 0$ при $j\to+\infty$. (Множество f-возвращающих последовательностей определяется только самой п.п. функцией и не зависит от того, какому именно из рассматриваемых пространств п.п. функций функция f считается принадлежащей.)

Для функций $f\in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$ (по аналогии с функциями $f\in S(\mathbb{R},\mathcal{U})$) обозначим через $\operatorname{Mod}f$ множество (модуль) чисел $\lambda\in\mathbb{R}$ таких, что $e^{i\lambda\tau_j}\to 1$ при $j\to+\infty$ для любой f-возвращающей последовательности τ_j. Если для некоторой постоянной функции $y(t)\equiv y\in\mathcal{U}$, $t\in\mathbb{R}$ имеем $D^{(B)}(f(.),y(.))=0$, то $\operatorname{Mod}f=\{0\}$. Если $D^{(B)}(f(.),y(.))\neq 0$ для всех постоянных функций $y(t)\equiv y\in\mathcal{U}$, $t\in\mathbb{R}$, то $\operatorname{Mod}f$ — счетный модуль.

Пусть $f\in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$ и $\tau_j\in\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$ — такая последовательность, что $e^{i\lambda\tau_j}\to 1$ при $j\to+\infty$ для всех чисел $\lambda\in\operatorname{Mod}f$, тогда τ_j — f-возвращающая последовательность.

Для функции $f\in B_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$ через $\Lambda\{f\}$ будем обозначать множество показателей Фурье, то есть множество чисел $\lambda\in\mathbb{R}$, для которых

$$\lim_{b\to+\infty}\ \frac{1}{2b}\int_{-b}^{b}e^{-i\lambda t}f(t)\,dt\neq 0$$

(предел существует для всех чисел $\lambda\in\mathbb{R}$). Модуль $\operatorname{Mod}f$ функции $f\in B_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$ совпадает с модулем показателей Фурье $\lambda\in\Lambda\{f\}$, то есть с наименьшим модулем (аддитивной группой) в $\mathbb{R}$, содержащим множество $\Lambda\{f\}$.

Если $\Lambda_j\subseteq\mathbb{R}$ — произвольные модули (индекс j может принадлежать любому непустому индексному множеству), то через $\sum\limits_j\Lambda_j$ (или через Λ_1+

МАТЕМАТИКА 2008. №1

$\cdots + \Lambda_n$ для конечного числа модулей Λ_j, $j = 1, \dots, n$) обозначается сумма модулей, определяемая как наименьший модуль в $\mathbb{R}$, содержащий все множества Λ_j.

Пусть $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $f_j \in B(\mathbb{R},\mathcal{U}_j)$, $j \in \mathbb{N}$, где $\mathcal{U}_j$ — (полные) метрические пространства. Тогда $\operatorname{Mod} f \subseteq \sum\limits_j \operatorname{Mod} f_j$ в том и только в том случае, если всякая f_j-возвращающая для всех $j \in \mathbb{N}$ последовательность $\tau_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ является f-возвращающей. В частности, если $f_j \in B(\mathbb{R},\mathcal{U}_j)$, $j = 1, 2$, то вложение $\operatorname{Mod} f_1 \subseteq \operatorname{Mod} f_2$ имеет место тогда и только тогда, когда всякая f_2-возвращающая последовательность $\tau_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ является f_1-возвращающей.

Если $f \in M(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $f_j \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $j \in \mathbb{N}$, и $D^{(B)}(f, f_j) \to 0$ при $j \to +\infty$, то $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$ и $\operatorname{Mod} f \subseteq \sum\limits_j \operatorname{Mod} f_j$.

Предложение 1. *Для любой функции $f \in B_p(\mathbb{R},\mathcal{H})$, $p \geqslant 1$ (где $\mathcal{H}$ — комплексное банахово пространство) и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f_\varepsilon \in CAP\,(\mathbb{R},\mathcal{H})$ такая, что $\|f - f_\varepsilon\|_p^{(B)} < \varepsilon$ и $\Lambda\{f_\varepsilon\} \subseteq \Lambda\{f\}$. Если $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{H})$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f_\varepsilon \in CAP\,(\mathbb{R},\mathcal{H})$ такая, что $D^{(B)}(f, f_\varepsilon) < \varepsilon$ и $\Lambda\{f_\varepsilon\} \subseteq \operatorname{Mod} f$.*

Предложение 2. *Для любой функции $f \in B_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $p \geqslant 1$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f_\varepsilon \in S_1(\mathbb{R},\mathcal{U}) \cap L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq S_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$ такая, что $D_p^{(B)}(f, f_\varepsilon) < \varepsilon$ и $\operatorname{Mod} f_\varepsilon \subseteq \operatorname{Mod} f$. Если $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f_\varepsilon \in S_1(\mathbb{R},\mathcal{U}) \cap L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{U})$ такая, что $D^{(B)}(f, f_\varepsilon) < \varepsilon$ и $\operatorname{Mod} f_\varepsilon \subseteq \operatorname{Mod} f$.*

Лемма 1. *Пусть $(\mathcal{U}, \rho)$ и $(\mathcal{V}, \rho_{\mathcal{V}})$ — (полные) метрические пространства и $\mathcal{F} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ — такая функция, что для некоторой константы $C \geqslant 0$ и всех $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ справедлива оценка*

$$\rho_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}(u_1), \mathcal{F}(u_2)) \leqslant C\,\rho(u_1, u_2)\,.$$

Тогда для любой функции $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$ имеем $\mathcal{F}(f(.)) \in B(\mathbb{R},\mathcal{V})$ и $\operatorname{Mod}\mathcal{F}(f(.)) \subseteq \operatorname{Mod} f(.)$. Если $f \in B_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $p \geqslant 1$, то также $\mathcal{F}(f(.)) \in B_p(\mathbb{R},\mathcal{V})$.

Лемма 1 непосредственно вытекает из определения пространств $B(\mathbb{R},\mathcal{U})$ и $B_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $p \geqslant 1$.

Следствие 1. *Пусть $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $x \in \mathcal{U}$. Тогда $\rho(f(.), x) \in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $\operatorname{Mod}\rho(f(.), x) \subseteq \operatorname{Mod} f(.)$.*

Для банахова пространства $(\mathcal{H}, \|.\|)$ и чисел $a > 0$ определим функции

$$\mathcal{H} \ni h \to \mathcal{F}^a_{\mathcal{H}}(h) = \begin{cases} h\,, & \text{если } \|h\| \leqslant a\,, \\ a\|h\|^{-1}h\,, & \text{если } \|h\| > a\,. \end{cases}$$

Для всех $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ имеем $\|\mathcal{F}^a_{\mathcal{H}}(h_1) - \mathcal{F}^a_{\mathcal{H}}(h_2)\| \leqslant 2\,\|h_1 - h_2\|$, поэтому следующая лемма 2 является следствием леммы 1.

Лемма 2. *Если* $f \in B(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, *то для любого* $a > 0$ *функция* $\mathcal{F}^a_{\mathcal{H}}(f(.))$ *принадлежит множеству* $B(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \subset B_1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ *и справедливо вложение* $\operatorname{Mod} \mathcal{F}^a_{\mathcal{H}}(f(.)) \subseteq \operatorname{Mod} f(.)$.

Для измеримого множества $T \subseteq \mathbb{R}$ обозначим

$$\widetilde{\varkappa}\,(T) = \varlimsup_{b \to +\infty} \frac{1}{2b} \operatorname{meas}\,[-b, b] \backslash T\,.$$

Для любых измеримых множеств имеем $T_1, T_2 \subseteq \mathbb{R}$ имеем $\widetilde{\varkappa}\,(T_1 \cap T_2) \leqslant \widetilde{\varkappa}\,(T_1) + \widetilde{\varkappa}\,(T_2)$.

Пусть $f, g \in M(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, $\varepsilon \in (0, 1]$ и $\delta > 0$. Если $\widetilde{\varkappa}\,(\{t \in \mathbb{R} : \rho(f(t), g(t)) \leqslant \varepsilon\}) < \delta$, то $D^{(B)}(f, g) \leqslant \varepsilon + \delta$. Если $D^{(B)}(f, g) \leqslant \varepsilon\delta$, то $\widetilde{\varkappa}\,(\{t \in \mathbb{R} : \rho(f(t), g(t)) \leqslant \varepsilon\}) \leqslant \varepsilon^{-1} D^{(B)}(f, g) \leqslant \delta$. Поэтому (см. также предложение 1) справедлива лемма 3.

Лемма 3. *Для любой функции* $f \in B(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ *и любых чисел* $\varepsilon, \delta > 0$ *существует функция* $f_{\varepsilon,\delta} \in CAP\,(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ *такая, что*

$$\widetilde{\varkappa}\,(\{t \in \mathbb{R} : \|f(t) - f_{\varepsilon,\delta}(t)\| < \varepsilon\}) < \delta$$

и $\Lambda\{f_{\varepsilon,\delta}\} \subseteq \operatorname{Mod} f$.

Следующая лемма 4 является следствием леммы 3 и теоремы Фреше.

Лемма 4. *Пусть* $f \in B(\mathbb{R}, \mathcal{U})$. *Тогда* $\widetilde{\varkappa}\,(\{t \in \mathbb{R} : \rho(f(t), x_0) \leqslant a\}) \to 0$ *при* $a \to +\infty$.

Лемма 5. *Пусть* $f \in B_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, $p \geqslant 1$. *Тогда*

$$\varlimsup_{b \to +\infty} \frac{1}{2b} \int_{\{\, t \in [-b, b] \,:\, \rho(f(t), x_0) \,>\, a \,\}} \rho^p(f(t), x_0)\, dt \to 0$$

при $a \to +\infty$.

Лемма 5 является следствием предложения 2. Для доказательства леммы 6, обобщающей лемму 4, необходимо воспользоваться леммой 4, предкомпактностью множества $\bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} g(t) \subset \mathcal{H}$ для любой функции $g \in CAP\,(\mathbb{R},\mathcal{H})$ и теоремой Фреше.

Лемма 6. *Пусть* $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$. *Тогда для любых* $\varepsilon,\delta > 0$ *найдутся точки* $x_j \in \mathcal{U}$, $j = 1,\dots,N$ *(где* $N \in \mathbb{N}$*) такие, что*

$$\widetilde{\varkappa}\,(\{t \in \mathbb{R} : f(t) \in \bigcup_{j=1}^{N} U_\delta(x_j)\}) < \varepsilon\,.$$

Следствие 2. *Пусть* $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$. *Тогда существуют точки* $x_j \in \mathcal{U}$, $j \in \mathbb{N}$ *такие, что*

1) $\operatorname{meas}\{\, t \in \mathbb{R} : f(t) \notin \overline{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} x_j}\,\} = 0$,

2) *для всех* $\delta > 0$

$$\widetilde{\varkappa}\,(\{t \in \mathbb{R} : f(t) \in \bigcup_{j=1}^{N} U_\delta(x_j)\}) \to 0 \tag{1.1}$$

при $N \to +\infty$.

Лемма 7. *Пусть* $f_1\,, f_2 \in B(\mathbb{R},\mathcal{H})$. *Тогда* $f_1+f_2 \in B(\mathbb{R},\mathcal{H})$ *и* $\operatorname{Mod}(f_1+f_2) \subseteq \operatorname{Mod} f_1 + \operatorname{Mod} f_2$. *Если* $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{H})$ *и* $g \in B(\mathbb{R},\mathbb{C})$, *то также* $gf \in B(\mathbb{R},\mathcal{H})$ *и* $\operatorname{Mod} gf \subseteq \operatorname{Mod} f + \operatorname{Mod} g$.

Лемма 7 означает, что пространство $B(\mathbb{R},\mathcal{H})$ является $B(\mathbb{R},\mathbb{C})$ – модулем.

Для $h \in (\mathcal{H}, \|.\|)$ обозначим

$$\operatorname{sgn} h = \begin{cases} \|h\|^{-1}h\,, & \text{если } h \neq 0\,, \\ 0\,, & \text{если } h = 0\,. \end{cases}$$

Лемма 8. *Пусть* $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{H})$. *Предположим, что*

$$\widetilde{\varkappa}\,(\{t \in \mathbb{R} : \|f(t)\| \geqslant \delta\}) \to 0 \tag{1.2}$$

при $\delta \to +0$. *Тогда* $\operatorname{sgn} f(.) \in B_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$ *и* $\operatorname{Mod}\operatorname{sgn} f(.) \subseteq \operatorname{Mod} f(.)$ *(более того, для множества* $T = \{t \in \mathbb{R} : f(t) = 0\}$ *справедливо равенство* $\|\chi_T(.)\|_1^{(B)} = 0$*).*

МАТЕМАТИКА 2008. №1

Доказательство. Определим функции $f_j(t) \doteq j\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{1/j}(f(t))$, $j \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$. Из леммы 2 вытекает, что $f_j \in B_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$ и $\mathrm{Mod}\, f_j \subseteq \mathrm{Mod}\, f$. С другой стороны, из условия (1.2) получаем, что $\|\chi_T(.)\|_1^{(B)} = 0$ и $\|\mathrm{sgn}\, f(.) - f_j(.)\|_1^{(B)} \to 0$ при $j \to +\infty$. Следовательно, $\mathrm{sgn}\, f(.) \in B_1(\mathbb{R},\mathcal{H})$ и $\mathrm{Mod}\,\mathrm{sgn}\, f(.) \subseteq \sum\limits_j \mathrm{Mod}\, f_j \subseteq \mathrm{Mod}\, f(.)$. □

Для функций $f, g \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $p \geqslant 1$ положим

$$\beta_p(f,g) = \lim_{\delta\to+0}\left(\sup_{T\subseteq\mathbb{R}\,:\,\widetilde{\varkappa}(\mathbb{R}\setminus T)\leqslant\delta}\ \overline{\lim_{b\to+\infty}}\ \frac{1}{2b}\int_{T\cap[-b,b]}\rho^p(f(t),g(t))\,dt\right)^{1/p}.$$

Функция $\beta_p(.,.)$ является полуметрикой (удовлетворяет неравенству треугольника) и $\beta_p(f,g) \leqslant D_p^{(B)}(f,g)$ для всех $f,g \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$. Обозначим

$$\mathcal{M}_p^0(\mathbb{R},\mathcal{U}) \doteq \{f \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R},\mathcal{U}) : \beta_p(f(.),x_0(.)) = 0\},$$

где $x_0(t) \equiv x_0$, $t \in \mathbb{R}$ (множество $\mathcal{M}_p^0(\mathbb{R},\mathcal{U})$ не зависит от выбора точки $x_0 \in \mathcal{U}$); $L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{M}_p^0(\mathbb{R},\mathcal{U})$.

Лемма 9. *Для всех* $p \geqslant 1$

$$B_p(\mathbb{R},\mathcal{U}) = B(\mathbb{R},\mathcal{U}) \bigcap \mathcal{M}_p^0(\mathbb{R},\mathcal{U}).$$

Доказательство. Имеем $B_p(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq B(\mathbb{R},\mathcal{U})$. С другой стороны, для любой функции $f \in B_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$ и любого $\varepsilon > 0$ (в соответствии с предложением 2) существует функция $f_\varepsilon \in S_p(\mathbb{R},\mathcal{U}) \cap L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{U})$ такая, что $D_p^{(B)}(f,f_\varepsilon) < \varepsilon$. Откуда

$$\beta_p(f(.),x_0(.)) \leqslant \beta_p(f(.),f_\varepsilon(.)) + \beta_p(f_\varepsilon(.),x_0(.)) \leqslant$$

$$\leqslant \beta_p(f(.),f_\varepsilon(.)) \leqslant D_p^{(B)}(f,f_\varepsilon) < \varepsilon$$

и, следовательно (так как число $\varepsilon > 0$ можно выбирать сколь угодно малым), $\beta_p(f(.),x_0(.)) = 0$. Последнее равенство означает, что $B_p(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{M}_p^0(\mathbb{R},\mathcal{U})$. Докажем теперь вложение $B(\mathbb{R},\mathcal{U}) \cap \mathcal{M}_p^0(\mathbb{R},\mathcal{U}) \subseteq B_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$. В соответствии с теоремой Фреше можно считать, что $\mathcal{U} = (\mathcal{H},\|.\|)$ — банахово пространство. Пусть $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{H}) \cap \mathcal{M}_p^0(\mathbb{R},\mathcal{H}) \subset \mathcal{M}_p(\mathbb{R},\mathcal{H})$. Из леммы 4 и определения множества $\mathcal{M}_p^0(\mathbb{R},\mathcal{H})$ получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $a = a(\varepsilon,f) > 0$ такое, что

$$\overline{\lim_{b\to+\infty}}\ \left(\frac{1}{2b}\int_{\{t\in[-b,b]\,:\,\|f(t)\|\geqslant a\}}\|f(t)\|^p\,dt\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\mathcal{F}^a_{\mathcal{H}}(f(.)) \in B(\mathbb{R},\mathcal{H}) \cap L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{H}) \subset B_p(\mathbb{R},\mathcal{H})$ и

$$\|f(.) - \mathcal{F}^a_{\mathcal{H}}(f(.))\|^{(B)}_p \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\lim_{b\to+\infty}} \left(\frac{1}{2b} \int_{\{\, t\in[-b,b]\,:\,\|f(t)\|\,>\,a\,\}} \|f(t)\|^p\,dt \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

С другой стороны, существует функция $f_{a,\varepsilon} \in CAP\,(\mathbb{R},\mathcal{H})$ такая, что $\|f_{a,\varepsilon}\|_\infty \leqslant a$ и $\|\mathcal{F}^a_{\mathcal{H}}(f(.)) - f_{a,\varepsilon}(.)\|^{(B)}_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому

$$\|f - f_{a,\varepsilon}\|^{(B)}_p \leqslant$$
$$\leqslant \|f(.) - \mathcal{F}^a_{\mathcal{H}}(f(.))\|^{(B)}_p + \|\mathcal{F}^a_{\mathcal{H}}(f(.)) - f_{a,\varepsilon}(.)\|^{(B)}_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

В силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ отсюда следует, что $f \in B_p(\mathbb{R},\mathcal{H})$. $\square$

Пусть $(\mathrm{cl}_b\,\mathcal{U},\mathrm{dist})$ — метрическое пространство непустых замкнутых ограниченных подмножеств $A \subseteq \mathcal{U}$ с метрикой Хаусдорфа

$$\mathrm{dist}\,(A,B) = \mathrm{dist}_\rho(A,B) = \max\{\sup_{x\in A}\rho(x,B), \sup_{x\in B}\rho(x,A)\}\,,\ A,B \in \mathrm{cl}_b\,\mathcal{U}\,,$$

где $\rho(x,F) = \inf\limits_{y\in F}\rho(x,y)$ — расстояние от точки $x \in \mathcal{U}$ до непустого множества $F \subseteq \mathcal{U}$. Метрическое пространство $(\mathrm{cl}_b\mathcal{U},\mathrm{dist})$ является полным. Пусть $\mathrm{cl}\,\mathcal{U}$ — совокупность непустых замкнутых подмножеств $A \subseteq \mathcal{U}$. На $\mathrm{cl}\,\mathcal{U} = \mathrm{cl}_b\,(\mathcal{U},\rho')$ определяется метрика Хаусдорфа $\mathrm{dist}_{\rho'}$, соответствующая метрике ρ'. Метрическое пространство $(\mathrm{cl}\,\mathcal{U},\mathrm{dist}_{\rho'})$ также полное. Так как $\mathrm{dist}'(A,B) \doteq \min\{1,\mathrm{dist}\,(A,B)\} = \mathrm{dist}_{\rho'}(A,B)$ для всех $A,B \in \mathrm{cl}_b\mathcal{U}$, то вложение $(\mathrm{cl}_b\mathcal{U},\mathrm{dist}') \subseteq (\mathrm{cl}\,\mathcal{U},\mathrm{dist}_{\rho'})$ изометрично. Пространства $B(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\mathcal{U})$ и $B_p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\mathcal{U})$, $p \geqslant 1$, *п.п. по Безиковичу многозначных отображений* $\mathbb{R} \ni t \to F(t) \in \mathrm{cl}_b\mathcal{U}$ определяются как пространства п.п. по Безиковичу функций, принимающих значения в метрическом пространстве $(\mathrm{cl}_b\mathcal{U},\mathrm{dist})$. Положим $B(\mathbb{R},\mathrm{cl}\,\mathcal{U}) \doteq B_1(\mathbb{R},(\mathrm{cl}\,\mathcal{U},\mathrm{dist}_{\rho'}))$. Справедливы вложения $B_p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\mathcal{U}) \subseteq B_1(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\mathcal{U}) \subseteq B(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\mathcal{U}) \subseteq B(\mathbb{R},\mathrm{cl}\,\mathcal{U})$.

§ 2. Основные результаты

Пусть $B(\mathbb{R})$ — совокупность измеримых подмножеств $T \subseteq \mathbb{R}$, для которых $\chi_T \in B_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Для множеств $T \in B(\mathbb{R})$ положим $\mathrm{Mod}\,T \doteq \mathrm{Mod}\,\chi_T$.

Лемма 10. *Пусть* $T_1, T_2 \in B(\mathbb{R})$. *Тогда* $T_1 \bigcup T_2 \in B(\mathbb{R})$, $T_1 \bigcap T_2 \in B(\mathbb{R})$, $T_1 \backslash T_2 \in B(\mathbb{R})$ *и модули* $\mathrm{Mod}\,T_1 \bigcup T_2$, $\mathrm{Mod}\,T_1 \bigcap T_2$ *и* $\mathrm{Mod}\,T_1 \backslash T_2$ *являются подмножествами (подгруппами) модуля* $\mathrm{Mod}\,T_1 + \mathrm{Mod}\,T_2$.

Лемма 10 следует из леммы 7 (пространство $B(\mathbb{R},\mathbb{C})$ п.п. по Безиковичу функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ является алгеброй).

Для произвольного модуля $\Lambda\subseteq\mathbb{R}$ обозначим через $\mathfrak{M}^{(B)}(\Lambda)$ совокупность последовательностей $T_j\subseteq\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$, непересекающихся множеств $T_j\in B(\mathbb{R})$ таких, что $\operatorname{Mod}T_j\subseteq\Lambda$, $\operatorname{meas}\mathbb{R}\backslash\bigcup\limits_j T_j=0$ и $\widetilde{\varkappa}(\bigcup\limits_{j\leqslant n}T_j)\to 0$ при $n\to+\infty$. Будем считать, что в $\mathfrak{M}^{(B)}(\Lambda)$ содержатся и соответствующие конечные последовательности T_j, $j=1,\dots,N$, которые всегда можно дополнить до счетных последовательностей, добавляя пустые множества. Множества T_j последовательностей $\{T_j\}\in\mathfrak{M}^{(B)}(\Lambda)$ будут также нумероваться с помощью нескольких индексов.

Лемма 11. *Пусть* $\Lambda\subseteq\mathbb{R}$ *— произвольный модуль и* $\{T_j^{(s)}\}\in\mathfrak{M}^{(B)}(\Lambda)$, $s=1,2$. *Тогда* $\{T_j^{(1)}\bigcap T_k^{(2)}\}_{j,k}\in\mathfrak{M}^{(B)}(\Lambda)$.

Лемма 11 является следствием леммы 10.

Если $\{T_j\}\in\mathfrak{M}^{(B)}(\Lambda)$ и $J\subseteq\mathbb{N}$ — произвольное непустое множество, то $\bigcup\limits_{j\in J}T_j\in B(\mathbb{R})$ и $\operatorname{Mod}\bigcup\limits_{j\in J}T_j\subseteq\sum\limits_{j\in J}\operatorname{Mod}T_j$. Если $\|\chi_{T_j}\|_1^{(B)}=0$ для всех $j\in J$, то также $\|\chi_{\bigcup\limits_{j\in J}T_j}\|_1^{(B)}=0$.

Следующая лемма 12 вытекает из леммы 7 и теоремы Фреше.

Лемма 12. *Пусть* $\{T_j\}\in\mathfrak{M}^{(B)}(\mathbb{R})$ *и* $f_j\in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $j\in\mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sum_j f_j(.)\chi_{T_j}(.)\in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$$

и

$$\operatorname{Mod}\sum_j f_j(.)\chi_{T_j}(.)\subseteq\sum_j\operatorname{Mod}f_j+\sum_j\operatorname{Mod}T_j\,. \tag{2.1}$$

З а м е ч а н и е 1. В условиях леммы 12 для индексов $j\in\mathbb{N}$, для которых $\|\chi_{T_j}\|_1^{(B)}=0$ (в этом случае $\operatorname{Mod}T_j=\{0\}$), можно выбирать произвольные функции $f_j\in M(\mathbb{R},\mathcal{U})$ и исключить эти индексы при суммировании в правой части (2.1).

Теорема 1. *Пусть* $f\in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *найдутся последовательность* $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{M}^{(B)}(\operatorname{Mod}f)$ *и точки* $x_j\in\mathcal{U}$, $j\in\mathbb{N}$ *такие, что* $\rho(f(t),x_j)<\varepsilon$ *для всех* $t\in T_j$, $j\in\mathbb{N}$.

Теорема 1 доказана в § 3. Эта теорема играет ключевую роль в данной работе. Аналогичные результаты (о равномерной аппроксимации элементарными п.п. функциями) для п.п. по Степанову и п.п. по Вейлю функций получены соответственно в [6, 8] и [10, 12]. Для п.п. по Степанову функций более сильные утверждения (в том числе п.п. вариант теоремы Лузина) содержатся в [17] и [18, 19] (в двух последних работах п.п. по Степанову функции рассматриваются также на относительных компактах Бора).

Следствие 3. *Пусть* $f \in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Тогда для любых* $a \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует множество* $T \in B(\mathbb{R})$ *такое, что* $\operatorname{Mod} T \subseteq \operatorname{Mod} f$, $f(t) < a+\varepsilon$ *при всех* $t \in T$ *и* $f(t) > a$ *при п.в.* $t \in \mathbb{R}\backslash T$.

Теорема 1 доказывается с помощью теоремы 8. В [20] приведено другое доказательство теоремы 1, основанное на теореме 2.

Теорема 2 (см. [20]). *Пусть* $f \in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Тогда найдется не более чем счетное множество* $Y_f \subset \mathbb{R}$ *такое, что для всех* $\lambda \in \mathbb{R}\backslash Y_f$ *справедливо включение* $\{t \in \mathbb{R} : f(t) > \lambda\} \in B(\mathbb{R})$, $\operatorname{Mod}\{t \in \mathbb{R} : f(t) > \lambda\} \subseteq \operatorname{Mod} f$ *и* $\|\chi_{\{t\in\mathbb{R}\,:\,f(t)=\lambda\}}\|_1^{(B)} = 0$.

Следствие 3 также непосредственно вытекает из теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть* $(\mathcal{U},\rho)$ *— полное метрическое пространство,* $F \in B(\mathbb{R},\mathrm{cl}\,\mathcal{U})$ *и* $g \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *такая, что* $\operatorname{Mod} f \subseteq \operatorname{Mod} F + \operatorname{Mod} g$, $f(t) \in F(t)$ *п.в. и* $\rho(f(t),g(t)) < \rho(g(t),F(t)) + \varepsilon$ *п.в. Если, более того,* $F \in B_p(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,\mathcal{U})$ *для некоторого* $p \geqslant 1$, *то также* $f \in B_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$.

Доказательство. Фиксируем число $\varepsilon \in (0,1]$. Выберем числа $\gamma_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ так, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\gamma_n+\gamma_{n+1}) < \frac{1}{6}$. Из лемм 10, 11 и теоремы 1 следует, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют множества $F_j^{(n)} \in \mathrm{cl}\,\mathcal{U}$, точки $g_j^n \in \mathcal{U}$ и непересекающиеся измеримые (по Лебегу) множества $T_j^{(n)} \subseteq \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$ такие, что $\{T_j^{(n)}\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}^{(B)}(\operatorname{Mod} F + \operatorname{Mod} g)$, функции $F(t)$ и $g(t)$ определены для всех $t \in \bigcup\limits_j T_j^{(n)}$ и для всех $t \in T_j^{(n)}$, $j \in \mathbb{N}$ имеем $\mathrm{dist}_{\rho'}(F(t),F_j^{(n)}) < \gamma_n\varepsilon < 1$ и $\rho(g(t),g_j^n) < \gamma_n\varepsilon$. Положим $T = \bigcap\limits_n\bigcup\limits_j T_j^{(n)}$; $\operatorname{meas}\mathbb{R}\backslash T = 0$. В силу леммы 11 для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\{T_{j_1}^{(1)}\bigcap\cdots\bigcap T_{j_n}^{(n)}\}_{j_s\in\mathbb{N},\ s=1,\dots,n} \in \mathfrak{M}^{(B)}(\operatorname{Mod} F + \operatorname{Mod} g)\,.$$

Каждому числу $n \in \mathbb{N}$ и каждому набору $\{j_1,\dots,j_n\}$ индексов $j_s \in \mathbb{N}$, $s = 1,\dots,n$, для которых $T_{j_1}^{(1)}\bigcap\cdots\bigcap T_{j_n}^{(n)} \neq \emptyset$, поставим в соответствие некоторую точку $f_{j_1\dots j_n}\in F^{(n)}_{j_n}\subseteq\mathcal U$. Эти точки определяются последовательно для $n=1,2,\dots$. При $n=1$ точки $f_{j_1}\in F^{(1)}_{j_1}$ выберем так, чтобы выполнялись неравенства

$$\rho(f_{j_1}\,,g^1_{j_1})<\frac{\varepsilon}{6}+\rho(g^1_{j_1}\,,F^{(1)}_{j_1})\,.$$

Если точки $f_{j_1\dots j_{n-1}}\in F^{(n-1)}_{j_{n-1}}$ уже найдены при некотором $n\geqslant 2$, то выберем точки $f_{j_1\dots j_{n-1}j_n}\in F^{(n)}_{j_n}$ так, что

$$\rho(f_{j_1\dots j_{n-1}}\,,f_{j_1\dots j_{n-1}j_n})=\rho'(f_{j_1\dots j_{n-1}}\,,f_{j_1\dots j_{n-1}j_n})\leqslant \tag{2.2}$$

$$\leqslant 2\,\mathrm{dist}_{\rho'}(F^{(n-1)}_{j_{n-1}},F^{(n)}_{j_n})<2\,(\gamma_{n-1}+\gamma_n)\varepsilon<\frac{\varepsilon}{3}\leqslant\frac{1}{3}\,.$$

Определим теперь функции

$$f(n;t)=\sum_{j_1\,,\dots,\,j_n}f_{j_1\dots j_n}\chi_{T^{(1)}_{j_1}\bigcap\cdots\bigcap T^{(n)}_{j_n}}(t)\,,\ t\in T\,,\ n\in\mathbb N\,.$$

Из лемм 11 и 12 получаем, что $f(n;.)\in B(\mathbb R,\mathcal U)$ и $\mathrm{Mod}\,f(n;.)\subseteq\mathrm{Mod}\,F+\mathrm{Mod}\,g$. Из (2.2) следует, что при всех $t\in T$ и $n\geqslant 2$ выполняется неравенство

$$\rho(f(n-1;t),f(n;t))<2\,(\gamma_{n-1}+\gamma_n)\varepsilon\,. \tag{2.3}$$

Так как метрическое пространство $\mathcal U$ полное, то из (2.3) вытекает, что последовательность функций $f(n;.)$, $n\in\mathbb N$ сходится при $n\to+\infty$ равномерно на множестве T (поэтому и в метрике $D^{(B)}$) к функции $f(.)\in B(\mathbb R,\mathcal U)$, для которой $\mathrm{Mod}\,f\subseteq\sum\limits_n\mathrm{Mod}\,f(n;.)\subseteq\mathrm{Mod}\,F+\mathrm{Mod}\,g$. Имеем $f(n;t)\in F^{(n)}_{j_n}$ и $\mathrm{dist}_{\rho'}(F(t),F^{(n)}_{j_n})<\gamma_n\varepsilon<\frac16$ при всех $t\in T^{(n)}_{j_n}\bigcap T$. Отсюда (так как $\gamma_n\to 0$ при $n\to+\infty$) следует, что $f(t)\in F(t)$ при всех $t\in T$ (при п.в. $t\in\mathbb R$). Каждому числу $t\in T$ поставим в соответствие бесконечный набор нидексов $\{j_1\,,\dots,\,j_n\,,\dots\}$ таким образом, что $t\in T^{(n)}_{j_n}$, $n\in\mathbb N$. В результате (для всех $t\in T$) получаем

$$\rho(f(t),g(t))\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\rho(f_{j_1\dots j_n}\,,f_{j_1\dots j_nj_{n+1}})+\rho(f_{j_1}\,,g^1_{j_1})+\rho(g^1_{j_1}\,,g(t))<$$

$$<2\sum_{n=1}^{+\infty}(\gamma_n+\gamma_{n+1})\varepsilon+\frac{\varepsilon}{3}+\rho(g^1_{j_1}\,,F^{(1)}_{j_1})<$$

$$<\frac{2\varepsilon}{3}+|\rho(g^1_{j_1}\,,F^{(1)}_{j_1})-\rho(g^1_{j_1}\,,F(t))|+|\rho(g^1_{j_1}\,,F(t))-\rho(g(t),F(t))|+\rho(g(t),F(t))<$$

$$< \frac{2\varepsilon}{3} + \gamma_1\varepsilon + \gamma_1\varepsilon + \rho(g(t), F(t)) < \varepsilon + \rho(g(t), F(t))\,.$$

Если $F \in B_p(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b\mathcal{U}) \subseteq B(\mathbb{R}, \mathrm{cl}\,\mathcal{U})$, $p \geqslant 1$, то $f \in B_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$. Действительно, при п.в. $t \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\rho(f(t), x_0) \leqslant \sup_{x \in F(t)} \rho(x, x_0) = \mathrm{dist}\,(F(t), \{x_0\})$$

и $\mathrm{dist}\,(F(.), \{x_0\}) \in \mathcal{M}^0_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Следовательно (см. лемму 9), $f(.) \in B(\mathbb{R}, \mathcal{U}) \bigcap \mathcal{M}^0_p(\mathbb{R}, \mathcal{U}) = B_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$. $\Box$

Следствие 4. *Пусть $(\mathcal{U}, \rho)$ — полное сепарабельное метрическое пространство и $F \in B(\mathbb{R}, \mathrm{cl}\,\mathcal{U})$. Тогда существуют функции $f_j \in B(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, $j \in \mathbb{N}$ такие, что $\mathrm{Mod}\, f_j \subseteq \mathrm{Mod}\, F$ и $F(t) = \overline{\bigcup_j f_j(t)}$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$ (если $F \in B_p(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b\mathcal{U}) \subseteq B(\mathbb{R}, \mathrm{cl}\,\mathcal{U})$, $p \geqslant 1$, то все функции f_j принадлежат пространству $B_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$).*

Доказательство. Пусть точки $x_k \in \mathcal{U}$, $k \in \mathbb{N}$ образуют счетное плотное множество в метрическом пространстве $\mathcal{U}$. В соответствии с теоремой 3 для всех $k, n \in \mathbb{N}$ найдем функции $f_{k,n} \in B(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ такие, что $\mathrm{Mod}\, f_{k,n} \subseteq \mathrm{Mod}\, F$, $f_{k,n}(t) \in F(t)$ п.в. и $\rho(f_{k,n}(t), x_k) < 2^{-n} + \rho(x_k\,, F(t))$ п.в. Более того, в случае $F \in B_p(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b\mathcal{U})$, $p \geqslant 1$ также имеем $f_{k,n} \in B_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, $k, n \in \mathbb{N}$. Теперь осталось перенумеровать функции $f_{k,n}$ с помощью одного индекса $j \in \mathbb{N}$. $\Box$

Доказательство следующей теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 1.3 из [10] (в которой рассматривались п.п. по Вейлю функции и многозначные отображения). Для доказательства теоремы 4 необходимо использовать теорему 3, следствие 3 и леммы 10 и 12. Аналогичный (теореме 4) результат для п.п. по Степанову функций и многозначных отображений приведен в [18, 19].

Теорема 4. *Пусть $(\mathcal{U}, \rho)$ — полное метрическое пространство, $F \in B(\mathbb{R}, \mathrm{cl}\,\mathcal{U})$ и $g \in B(\mathbb{R}, \mathcal{U})$. Тогда для любой неубывающей функции $[0, +\infty) \ni t \to \eta(t) \in \mathbb{R}$, для которой $\eta(0) = 0$ и $\eta(t) > 0$ при $t > 0$, существует функция $f \in B(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ такая, что $\mathrm{Mod}\, f \subseteq \mathrm{Mod}\, F + \mathrm{Mod}\, g$, $f(t) \in F(t)$ п.в. и $\rho(f(t), g(t)) \leqslant \rho(g(t), F(t)) + \eta(\rho(g(t), F(t)))$ п.в. Если, кроме того, $F \in B_p(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b\mathcal{U}) \subseteq B(\mathbb{R}, \mathrm{cl}\,\mathcal{U})$, $p \geqslant 1$, то $f \in B_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$.*

Следующие теоремы также доказываются (с использованием теорем 1, 3 и лемм 10, 11 и 12) аналогично соответствующим утверждениям для п.п. по Степанову [9, 18, 19] и п.п. по Вейлю [11] функций и многозначных отображений.

Точки $x_j \in \mathcal{U}$, $j = 1, \ldots, n$ образуют ε*-сеть* для (непустого) множества $F \subseteq \mathcal{U}$, $\varepsilon > 0$, если $F \subseteq \bigcup\limits_j U_\varepsilon(x_j)$.

Теорема 5. *Пусть* $(\mathcal{U}, \rho)$ *— полное метрическое пространство,* $F \in B(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b\mathcal{U})$ *и* $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Предположим, что при п.в.* $t \in \mathbb{R}$ *существуют точки* $x_j(t) \in F(t)$, $j = 1, \ldots, n$, *образующие* ε*-сеть для множества* $F(t)$. *Тогда для любого* $\varepsilon' > \varepsilon$ *найдутся функции* $f_j \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $j = 1, \ldots, n$ *такие, что* $\mathrm{Mod}\, f_j \subseteq \mathrm{Mod}\, F$, $f_j(t) \in F(t)$ *п.в. и при п.в.* $t \in \mathbb{R}$ *точки* $f_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$ *образуют* ε'*-сеть для множества* $F(t)$.

Следствие 5. *Пусть* $(\mathcal{U}, \rho)$ *— компактное метрическое пространство. Тогда многозначное отображение* $\mathbb{R} \ni t \to F(t) \in \mathrm{cl}\mathcal{U} = \mathrm{cl}_b\mathcal{U}$ *принадлежит пространству* $B(\mathbb{R}, \mathrm{cl}\mathcal{U}) = B_1(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b\mathcal{U})$ *тогда и только тогда, когда для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдутся число* $n \in \mathbb{N}$ *и функции* $f_j \in B(\mathbb{R},\mathcal{U}) = B_1(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $j = 1, \ldots, n$ *такие, что* $f_j(t) \in F(t)$ *п.в. и точки* $f_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$ *при п.в.* $t \in \mathbb{R}$ *образуют* ε*-сеть для множества* $F(t)$ *(более того, функции* f_j *для многозначного отображения* $F \in B(\mathbb{R}, \mathrm{cl}\mathcal{U})$ *можно выбирать таким образом, что* $\mathrm{Mod}\, f_j \subseteq \mathrm{Mod}\, F$ *).*

Теорема 6. *Пусть* $(\mathcal{U}, \rho)$ *— компактное метрическое пространство. Тогда многозначное отображение* $\mathbb{R} \ni t \to F(t) \in \mathrm{cl}\mathcal{U}$ *принадлежит пространству* $B(\mathbb{R}, \mathrm{cl}\mathcal{U})$ *тогда и только тогда, когда существуют функции* $f_j \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $j \in \mathbb{N}$ *такие, что* $F(t) = \overline{\bigcup\limits_j f(t)}$ *п.в. и множество* $\{f_j(.) : j \in \mathbb{N}\}$ *предкомпактно в метрическом пространстве* $L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *(более того, функции* f_j *для многозначного отображения* $F \in B(\mathbb{R}, \mathrm{cl}\mathcal{U})$ *могут быть выбраны таким образом, что* $\mathrm{Mod}\, f_j \subseteq \mathrm{Mod}\, F$ *).*

Для непустого множества $F \subseteq \mathcal{U}$ будем использовать обозначение $F^\delta = \{x \in \mathcal{U} : \rho(x, F) < \delta\}$, $\delta > 0$.

Теорема 7. *Пусть* $(\mathcal{U}, \rho)$ *— полное метрическое пространство,* $F \in B(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b\mathcal{U})$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *и* $g_j \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $j = 1, \ldots, n$. *Предположим, что при п.в.* $t \in \mathbb{R}$ *множество точек* $x_j(t) = g_j(t)$, *для которых* $g_j(t) \in (F(t))^\delta$, *может быть дополнено (если состоит меньше чем из* n *точек) до* n *точек* $x_j(t) \in (F(t))^\delta$, $j = 1, \ldots, n$, *образующих* ε*-сеть для множества* $F(t)$ *(совпадающие точки с разными индексами здесь рассматриваются как разные точки). Тогда для любого* $\varepsilon' > \varepsilon + \delta$ *существуют функции* $f_j \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $j = 1, \ldots, n$ *такие, что* $\mathrm{Mod}\, f_j \subseteq \mathrm{Mod}\, F + \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Mod}\, g_k$, $f_j(t) \in F(t)$ *п.в.,* $f_j(t) = g_j(t)$ *при п.в.* $t \in \{\tau \in \mathbb{R} : g_j(\tau) \in F(\tau)\}$ *и точки* $f_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$ *при п.в.* $t \in \mathbb{R}$ *образуют* ε'*-сеть для множества* $F(t)$.

Пусть $(\mathcal{U},\rho)$ и $(\mathcal{V},\rho_{\mathcal{V}})$ — полные метрические пространства и $C(\mathcal{U},\mathcal{V})$ — пространство непрерывных функций $\mathcal{F}:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$, наделенное метрикой

$$d_{C(\mathcal{U},\mathcal{V})}(\mathcal{F}_1\,,\mathcal{F}_2)=\sup_{x\in\mathcal{U}}\,\min\{1,\rho_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}_1(x),\mathcal{F}_2(x))\}\,,\ \mathcal{F}_1\,,\,\mathcal{F}_2\in C(\mathcal{U},\mathcal{V})\,.$$

Через $\mathcal{F}(.|_Y)$ обозначается ограничение функции $\mathcal{F}:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ на непустое подмножество $Y\subseteq\mathcal{U}$. В следующих леммах рассматривается суперпозиция п.п. по Безиковичу функций.

Лемма 13. *Пусть* $(\mathcal{U},\rho)$ *и* $(\mathcal{V},\rho_{\mathcal{V}})$ *— полные метрические пространства,* $\mathcal{F}\in C(\mathcal{U},\mathcal{V})$ *и* $f\in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$. *Тогда* $\mathcal{F}(f(.))\in B(\mathbb{R},\mathcal{V})$ *и* $\operatorname{Mod}\mathcal{F}(f(.))\subseteq\operatorname{Mod}f(.)$.

Доказательство. Имеем $\mathcal{F}(f(.))\in M(\mathbb{R},\mathcal{V})=\mathcal{M}_1(\mathbb{R},(\mathcal{V},\rho'_{\mathcal{V}}))$. Пусть $\varepsilon\in(0,1]$, $\delta>0$. Из теоремы 1 следует, что для каждого $k\in\mathbb{N}$ существуют последовательность $\{T_j^{(k)}\}_{j\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{M}^{(B)}(\operatorname{Mod}f)$ и точки $x_j^{(k)}\in\mathcal{U}$, $j\in\mathbb{N}$ такие, что $\rho(f(t),x_j^{(k)})<k^{-1}$ для всех $t\in T_j^{(k)}$, $j\in\mathbb{N}$. Выберем числа $j(k)\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$, для которых

$$\widetilde{\varkappa}\left(\bigcup_{j=1}^{j(k)}T_j^{(k)}\right)<2^{-k}\varepsilon\,.$$

Положим $X_1=\bigcup\limits_{j\leqslant j(1)}x_j^{(1)}$. Для каждого $k\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ обозначим через X_k множество тех точек $x_j^{(k)}$, $j=1,\dots,j(k)$, для которых для любого $k'=1,\dots,k-1$ существует точка $x_{j'}^{(k')}$, $j'=1,\dots,j(k')$ такая, что $\rho(x_j^{(k)},x_{j'}^{(k')})<k^{-1}+(k')^{-1}<2(k')^{-1}$. Если $T_{j_1}^{(1)}\bigcap\dots\bigcap T_{j_k}^{(k)}\neq\emptyset$, $k\in\mathbb{N}$, где $j_s\in\{1,\dots,j(s)\}$, $s=1,\dots,k$, то $x_{j_k}^{(k)}\in X_k$, поэтому из предкомпактности множества $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}X_k\subseteq\mathcal{U}$ и непрерывности функции $\mathcal{F}$ следует существование такого числа $k_0\in\mathbb{N}$, что для всех $j_k=1,\dots,j(k)$, где $k=1,\dots,k_0$, и всех $t,t'\in T_{j_1}^{(1)}\bigcap\dots\bigcap T_{j_{k_0}}^{(k_0)}$ справедливо неравенство

$$\rho_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}(f(t)),\mathcal{F}(f(t')))<\delta\,.$$

В случае $T_{j_1}^{(1)}\bigcap\dots\bigcap T_{j_{k_0}}^{(k_0)}\neq\emptyset$, где $j_k\in\{1,\dots,j(k)\}$, $k=1,\dots,k_0$, выберем (какие-либо) числа $t_{j_1\dots j_{k_0}}\in T_{j_1}^{(1)}\bigcap\dots\bigcap T_{j_{k_0}}^{(k_0)}$. Положим

$$T(k_0)=\bigcap_{k=1,\dots,k_0}\ \bigcup_{j_k=1}^{j(k)}T_{j_k}^{(k)}\,.$$

Из лемм 10 и 12 следует, что

$$\mathcal{G}_{k_0}(.) \doteq \sum_{j_k\,=\,1,\dots,j(k);\ k\,=\,1,\dots,k_0} \mathcal{F}(f(t_{j_1\dots j_{k_0}}))\,\chi_{T^{(1)}_{j_1}\bigcap\dots\bigcap T^{(k_0)}_{j_{k_0}}}(.)\,+$$

$$+\,y_0\,\chi_{\mathbb{R}\,\setminus T(k_0)}(.) \in B(\mathbb{R},\mathcal{V})\,,$$

где $y_0 \in \mathcal{V}$, и

$$\operatorname{Mod}\mathcal{G}_{k_0}(.) \subseteq \sum_{j_k\,=\,1,\dots,j(k);\ k\,=\,1,\dots,k_0} \operatorname{Mod} T^{(k)}_{j_k} \subseteq \operatorname{Mod} f(.)\,.$$

Более того, $\rho_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}(f(t)),\mathcal{G}_{k_0}(t)) < \delta$ для всех $t \in T(k_0)$ и

$$\widetilde{\varkappa}\,(T(k_0)) \leqslant \sum_{k=1,\dots,k_0} \widetilde{\varkappa}\left(\bigcup_{j_k=1}^{j(k)} T^{(k)}_{j_k}\right) < \sum_{k=1,\dots,k_0} 2^{-k}\varepsilon < \varepsilon\,.$$

Следовательно, $D^{(B)}(\mathcal{F}(f(.)),\mathcal{G}_{k_0}(.)) < \varepsilon+\delta$. Так как числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ могут быть выбраны сколь угодно малыми, то из последнего неравенства следует, что $\mathcal{F}(f(.)) \in B(\mathbb{R},\mathcal{V})$ и $\operatorname{Mod}\mathcal{F}(f(.)) \subseteq \operatorname{Mod} f(.)$. □

Лемма 14. *Пусть* $(\mathcal{U},\rho)$ *и* $(\mathcal{V},\rho_{\mathcal{V}})$ *— полные метрические пространства. Предположим, что функция* $\mathbb{R} \ni t \to \mathcal{F}(.;t) \in C(\mathcal{U},\mathcal{V})$ *принадлежит пространству* $B_1(\mathbb{R},(C(\mathcal{U},\mathcal{V}),d_{C(\mathcal{U},\mathcal{V})}))$ *и* $f \in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$. *Тогда* $\mathcal{F}(f(.);.) \in B(\mathbb{R},\mathcal{V})$ *и* $\operatorname{Mod}\mathcal{F}(f(.);.) \subseteq \operatorname{Mod}\mathcal{F}(.;.) + \operatorname{Mod} f(.)$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся последовательность $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}^{(B)}(\operatorname{Mod}\mathcal{F}(.;.))$ и функции $\mathcal{F}_j \in C(\mathcal{U},\mathcal{V})$, $j \in \mathbb{N}$ такие, что $d_{C(\mathcal{U},\mathcal{V})}(\mathcal{F}(.;t),\mathcal{F}_j(.)) < \varepsilon$ для всех $t \in T_j$, $j \in \mathbb{N}$. Из лемм 12 и 13 получаем

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_j(f(.))\,\chi_{T_j}(.) \in B(\mathbb{R},\mathcal{V})\,,$$

$$\operatorname{Mod}\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_j(f(.))\,\chi_{T_j}(.) \subseteq \operatorname{Mod}\mathcal{F}(.;.) + \operatorname{Mod} f(.)\,.$$

С другой стороны, $\mathcal{F}(f(.);.) \in M(\mathbb{R},\mathcal{V}) = \mathcal{M}_1(\mathbb{R},(\mathcal{V},\rho'_{\mathcal{V}}))$ и

$$D^{(B)}\big(\mathcal{F}(f(.);.),\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_j(f(.))\,\chi_{T_j}(.)\big) < \varepsilon\,.$$

Так как число $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, то отсюда получаем, что $\mathcal{F}(f(.);.) \in B(\mathbb{R},\mathcal{V})$ и $\operatorname{Mod}\mathcal{F}(f(.);.) \subseteq \operatorname{Mod}\mathcal{F}(.;.) + \operatorname{Mod} f(.)$. □

З а м е ч а н и е 2. Из лемм 9, 12, 13 и теоремы 1 вытекает следующее утверждение. Пусть $(\mathcal{U},\rho)$ и $(\mathcal{V},\rho_{\mathcal{V}})$ — полные метрические пространства, $r>0$ и $p\geqslant 1$. Предположим, что функция $\mathbb{R}\ni t\to\mathcal{F}(.;t)\in C(\mathcal{U},\mathcal{V})$ удовлетворяет следующим двум условиям:

1) для каждого $x\in\mathcal{U}$ функция $\mathbb{R}\ni t\to\mathcal{F}(.|_{U_r(x)};t)\in C(U_r(x),\mathcal{V})$ принадлежит пространству

$$B_1(\mathbb{R},(C(U_r(x),\mathcal{V}),d_{C(U_r(x),\mathcal{V})}))\,;$$

2) существуют число $C\geqslant 0$ и функция $A(.)\in\mathcal{M}^0_p(\mathbb{R},\mathbb{R})$ такие, что при п.в. $t\in\mathbb{R}$ неравенство $\rho_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}(x;t),y_0)\leqslant C\rho(x,x_0)+A(t)$ выполняется для всех $x\in\mathcal{U}$, где $x_0\in\mathcal{U}$ и $y_0\in\mathcal{V}$ — некоторые фиксированные точки.

Тогда для любой функции $f\in B_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$ имеем $\mathcal{F}(f(.);.)\in B_p(\mathbb{R},\mathcal{V})$ и

$$\operatorname{Mod}\mathcal{F}(f(.);.)\subseteq\operatorname{Mod}f(.)+\sum_{x\in\mathcal{U}}\operatorname{Mod}\mathcal{F}(.|_{U_r(x)};.)\,.$$

§ 3. Доказательство теоремы 1

Пусть $\mathcal{A}^{(B)}$ — совокупность множеств $\mathbb{F}\subset B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ таких, что

$$\lim_{\tau_0\to+0}\ \sup_{f\in\mathbb{F}}\ \sup_{\tau\in[0,\tau_0]}\ D^{(B)}(f(.),f(.+\tau))=0\,.$$

Если $f\in B_p(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $p\geqslant 1$, то $D^{(B)}_p(f(.),f(.+\tau))\to 0$ при $\tau\to 0$. Если $f\in B(\mathbb{R},\mathcal{U})$, то $D^{(B)}(f(.),f(.+\tau))\to 0$ при $\tau\to 0$. Отсюда, в частности, следует, что $\{f(.)+a:a\in\mathbb{R}\}\in\mathcal{A}^{(B)}$ для любой функции $f\in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Для измеримого множества $T\subseteq\mathbb{R}$ обозначим

$$\varkappa(T)\doteq\widetilde{\varkappa}(\mathbb{R}\backslash T)=\overline{\lim_{b\to+\infty}}\ \frac{1}{2b}\ \operatorname{meas}[-b,b]\bigcap T\,.$$

Если T_1, $T_2\subseteq\mathbb{R}$ — измеримые множества, то $\varkappa(T_1\cup T_2)\leqslant\varkappa(T_1)+\varkappa(T_2)$.

Доказательство приводимой далее теоремы 8 содержится в § 4. Частный случай этой теоремы для (одноэлементных) множеств $\mathbb{F}=\{f\}$, $f\in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ существенно используется при доказательстве теоремы 1.

Теорема 8. *Пусть* $\mathbb{F}\in\mathcal{A}^{(B)}$, $\Delta>0$, $b>0$. *Тогда найдется периодическая с периодом* b *функция* $g\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *(зависящая от* $\mathbb{F}$, Δ *(и* b*)), для которой* $\|g\|_\infty<\Delta$, *и такая, что для любого* $\varepsilon\in(0,1]$ *найдется число* $\delta=\delta(\varepsilon,\Delta)>0$ *такое, что для всех функций* $f\in\mathbb{F}$ *справедливо неравенство*

$$\varkappa(\{t\in\mathbb{R}:|f(t)+g(t)|<\delta\})<\varepsilon\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Если $\operatorname{Mod} f = \{0\}$, то существует постоянная функция $f_0(t) \equiv f_0 \in \mathcal{U}$, $t \in \mathbb{R}$ такая, что $D^{(B)}(f(.), f_0(.)) = 0$, поэтому найдется множество $T \in B(\mathbb{R})$, для которого $\widetilde{\varkappa}(T) = 0$ и $\rho(f(t), f_0) < \varepsilon$ для всех $t \in T$. Отсюда (и из измеримости функции $f(.)$) следует доказываемое утверждение (при этом можно положить $T_1 = T$). Предположим теперь, что $\operatorname{Mod} f \neq \{0\}$. Пусть $x_j \in \mathcal{U}$, $j \in \mathbb{N}$ — точки, определяемые в следствии 2 для функции $f \in B(\mathbb{R}, \mathcal{U})$. Из следствия 1 получаем, что для всех $j \in \mathbb{N}$ справедливо включение $\rho(f(.), x_j) \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $\operatorname{Mod} \rho(f(.), x_j) \subseteq \operatorname{Mod} f(.)$. Выберем число $b > 0$ так, что $\frac{2\pi}{b} \in \operatorname{Mod} f$. Из теоремы 8 вытекает существование периодических с периодом b функций $g_j(.) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$, для которых $\|g_j\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ и

$$\varkappa(\{t \in \mathbb{R} : |\, \rho(f(t), x_j) - \frac{2\varepsilon}{3} + g_j(t)\,| < \delta\}) \to 0$$

при $\delta \to +0$ (вместо функций g_j можно было бы выбрать одну функцию $g_j = g_0$, $j \in \mathbb{N}$, но это не упрощает доказательство). Положим $T'_j = \{\, t \in \mathbb{R} : \rho(f(t), x_j) + g_j(t) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} \,\}$, $j \in \mathbb{N}$. В соответствии с леммой 8 имеем $T'_j \in B(\mathbb{R})$ и $\operatorname{Mod} T'_j \subseteq \operatorname{Mod} \rho(f(.), x_j) + \frac{2\pi}{b}\mathbb{Z} \subseteq \operatorname{Mod} f(.)$. Если $t \in T'_j$, то $\rho(f(t), x_j) < \varepsilon$. Обозначим $T_1 = T'_1$ и $T_j = T'_j \setminus \bigcup\limits_{k<j} T'_k$ при $j \geqslant 2$. Множества T_j, $j \in \mathbb{N}$ не пересекаются и $\bigcup\limits_{j \leqslant N} T_j = \bigcup\limits_{j \leqslant N} T'_j$ для всех $N \in \mathbb{N}$. Из леммы 10 получаем, что $T_j \in B(\mathbb{R})$, $\operatorname{Mod} T_j \subseteq \operatorname{Mod} f$. При этом $\rho(f(t), x_j) < \varepsilon$ для всех $t \in T_j$, $j \in \mathbb{N}$ и для каждого $N \in \mathbb{N}$ и п.в. $t \in \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{j \leqslant N} T_j$ оценка $\rho(f(t), x_j) > \frac{\varepsilon}{3}$ выполняется для всех $j = 1, \dots, N$. Следовательно (см. следствие 2), $\operatorname{meas} \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_j T_j = 0$ и (см. (1.1) при $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$) $\widetilde{\varkappa}\big(\bigcup\limits_{j \leqslant N} T_j\big) \to 0$ при $N \to +\infty$. Последнее означает, что $\{T_j\} \in \mathfrak{M}^{(B)}(\operatorname{Mod} f)$. □

§ 4. Доказательство теоремы 8

Воспользуемся методом доказательства, предложенным в [6] для случая п.п по Степанову функций. Вариант этого метода для п.п. по Вейлю функций использовался в [12].

Лемма 15. *Пусть* $\mathbb{F} \in \mathcal{A}^{(B)}$, $\Delta > 0$. *Тогда для любого* $\varepsilon \in (0, 1]$ *найдутся числа* $\delta = \delta(\varepsilon, \Delta) > 0$ *и* $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}(\varepsilon, \Delta, \mathbb{F}) > 0$ *такие, что для всех* $\alpha \geqslant \widetilde{\alpha}$ *и всех функций* $f \in \mathbb{F}$ *выполняется оценка*

$$\varkappa(\{t \in \mathbb{R} : |\, f(t) + \Delta \sin \alpha t\,| < \delta\}) < \varepsilon\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем число $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, для которого $(N+1)^{-1} < \frac{\varepsilon}{2}$ (тогда $N \geqslant 2$). Положим

$$\varepsilon' \doteq \frac{1}{2}\,\varepsilon N^{-1}(N+1)^{-1} \leqslant \frac{\varepsilon}{12} < 1\,,\ \delta' \doteq 2\sin\frac{\pi}{2N}\,\sin\frac{\pi\varepsilon'}{2}\,,$$

$$\delta = \delta(\varepsilon,\Delta) \doteq \min\{1, \frac{1}{3}\,\delta'\Delta\}\,.$$

Существует число $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon,\Delta,\mathbb{F}) > 0$ такое, что для всех $f \in \mathbb{F}$ и всех $\tau \in [0,\tau_0]$ выполняется неравенство $D^{(B)}(f(.), f(.+\tau)) < \varepsilon'\delta$. Определим число $\widetilde{\alpha} = \pi\tau_0^{-1}$. Пусть $0 < \tau \leqslant \tau_0$, $\alpha \doteq \pi\tau^{-1} \geqslant \widetilde{\alpha}$. Для всех $j = 1,\dots,N$ (и всех функций $f \in \mathbb{F}$) определим множества

$$\mathcal{L}_j(f,\tau) = \{t \in \mathbb{R} : |\, f(t + \frac{j}{N}\,\tau) - f(t)\,| \geqslant \delta\}\,.$$

Имеем

$$\varkappa\,(\mathcal{L}_j(f,\tau)) \leqslant \frac{1}{\delta}\,\overline{\lim_{b\to+\infty}}\,\frac{1}{2b}\int_{-b}^{b}\min\{1, |\, f(t+\frac{j}{N}\,\tau) - f(t)\,|\}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\delta}\,D^{(B)}(f(.), f(.+\frac{j}{N}\,\tau)) < \varepsilon'\,.$$

Для $j = 1,\dots,N$ рассмотрим также множества

$$\mathcal{N}_j(\tau) = \{t \in \mathbb{R} : |\,\cos\alpha(t + \frac{j}{2N}\,\tau)\,\sin\frac{\alpha j}{2N}\,\tau\,| \leqslant \frac{\delta'}{2}\,\}\,.$$

Если $t \in \mathcal{N}_j(\tau)$, то

$$|\,\cos(\alpha t + \frac{j\pi}{2N}\,)\,| \leqslant \frac{1}{2}\,\delta'\sin^{-1}\frac{\pi}{2N} = \sin\frac{\pi\varepsilon'}{2}\,,$$

поэтому число t принадлежит одному из отрезков $[\beta_s^-, \beta_s^+]$, $s \in \mathbb{Z}$, где

$$\beta_s^{\pm} = \big(s + \frac{1}{2}\,\big)\,\frac{\pi}{\alpha} - \frac{j\pi}{2N\alpha} \pm \frac{\pi\varepsilon'}{2\alpha}\,,$$

и, следовательно, $\varkappa\,(\mathcal{N}_j(\tau)) \leqslant \varepsilon'$. Далее будем предполагать, что к множествам $\mathcal{L}_j(f,\tau)$ добавлены все числа $t \in \mathbb{R}$, для которых хотя бы одна из функций $f(t)$ или $f(t + \frac{j}{N}\,\tau)$ не определена (эти числа образуют множество нулевой меры). Положим

$$\mathcal{L}(f,\tau) = \bigcup_{j=1}^{N}\Big(\bigcup_{s=0}^{N-j}(\mathcal{L}_j(f,\tau) - \frac{s}{N}\,\tau)\Big)$$

(здесь $\mathcal{L}_j(f,\tau)-\frac{s}{N}\,\tau=\{t=\eta-\frac{s}{N}\,\tau:\eta\in\mathcal{L}_j(f,\tau)\}$). Так как $\varkappa\,(\mathcal{L}_j(f,\tau))<\varepsilon'$, $j=1,\dots,N$, то $\varkappa\,(\mathcal{L}(f,\tau))<\frac{1}{2}\,N(N+1)\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{4}$. Если $t\in\mathbb{R}\backslash\mathcal{L}(f,\tau)$, то для всех $j_1\,,j_2\in\{0,1,\dots,N\}$

$$|\,f(t+\frac{j_1}{N}\,\tau)-f(t+\frac{j_2}{N}\,\tau)\,|<\delta\,.$$

Положим

$$\mathcal{N}(\tau)=\bigcup_{j=1}^{N}\Big(\bigcup_{s=0}^{N-j}(\mathcal{N}_j(\tau)-\frac{s}{N}\,\tau)\Big).$$

Так как $\varkappa\,(\mathcal{N}_j(\tau))<\varepsilon'$, $j=1,\dots,N$, то также $\varkappa\,(\mathcal{N}(\tau))<\frac{1}{2}\,N(N+1)\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{4}$. Если $t\in\mathbb{R}\backslash\mathcal{N}(\tau)$, то для всех $j_1\,,j_2\in\{0,1,\dots,N\}$, для которых $j_1<j_2$, имеем

$$|\,\Delta\sin\alpha(t+\frac{j_1}{N}\,\tau)-\Delta\sin\alpha(t+\frac{j_2}{N}\,\tau)\,|=$$

$$=2\Delta\,|\,\cos\alpha(t+\frac{j_1}{N}\,\tau+\frac{j_2-j_1}{2N}\,\tau)\,\sin\alpha\,\frac{j_2-j_1}{2N}\,\tau\,|>\Delta\delta'\geqslant 3\delta\,.$$

Обозначим $G(t)=f(t)+\Delta\sin\alpha t$, $t\in\mathbb{R}$. Определим множество

$$\mathcal{O}(f,\tau)=\mathbb{R}\backslash(\mathcal{L}(f,\tau)\bigcup\mathcal{N}(\tau))\,.$$

Для каждого числа $t\in\mathcal{O}(f,\tau)$ либо $|\,G(t+\frac{j}{N}\,\tau)\,|\geqslant\delta$ для всех $j=0,1,\dots,N$, либо существует число $j_0\in\{0,1,\dots,N\}$ такое, что $|\,G(t+\frac{j_0}{N}\,\tau)\,|<\delta$. Пусть j_0 — наименьшее число, для которого справедливо последнее неравенство. Если $j_0<N$, то для каждого числа $j\in\{j_0+1,\dots,N\}$ получаем

$$|\,G(t+\frac{j}{N}\,\tau)-G(t+\frac{j_0}{N}\,\tau)\,|\geqslant$$

$$\geqslant|\,\Delta\sin\,\alpha(t+\frac{j}{N}\,\tau)-\Delta\sin\,\alpha(t+\frac{j_0}{N}\,\tau)\,|-|\,f(t+\frac{j}{N}\,\tau)-f(t+\frac{j_0}{N}\,\tau)\,|>3\delta-\delta=2\delta\,,$$

и, следовательно, $|\,G(t+\frac{j}{N}\,\tau)\,|>\delta$. Поэтому в случае $t\in\mathcal{O}(f,\tau)$ существует не более одного числа $t+\frac{j}{N}\,\tau$, $j=0,1,\dots,N$, для которого $|\,G(t+\frac{j}{N}\,\tau)\,|<\delta$. Положим $P=\{t\in\mathbb{R}:|\,G(t)\,|<\delta\}$,

$$\widetilde{\chi}(t)\doteq\sum_{j=0}^{N}\chi_P\,(t+\frac{j}{N}\,\tau)\,,\ t\in\mathbb{R}\,.$$

Имеем
$$\overline{\lim_{b\to+\infty}}\ \frac{1}{2b}\ \int_{-b}^{b}\widetilde{\chi}(t)\,dt=(N+1)\,\varkappa\,(P)\,. \tag{4.1}$$
С другой стороны, $\widetilde{\chi}(t)\leqslant 1$ для всех $t\in\mathcal{O}(f,\tau)$, поэтому
$$\overline{\lim_{b\to+\infty}}\ \frac{1}{2b}\ \int_{-b}^{b}\widetilde{\chi}(t)\,dt\leqslant \tag{4.2}$$
$$\leqslant\overline{\lim_{b\to+\infty}}\ \frac{1}{2b}\ \int_{[-b,b]\,\cap\,\mathcal{O}(f,\tau)}\widetilde{\chi}(t)\,dt+\overline{\lim_{b\to+\infty}}\ \frac{1}{2b}\ \int_{[-b,b]\,\setminus\,\mathcal{O}(f,\tau)}\widetilde{\chi}(t)\,dt\leqslant$$
$$\leqslant 1+(N+1)\,\varkappa\,(\mathcal{L}(f,\tau)\bigcup\mathcal{N}(\tau))<1+\frac{1}{2}\,(N+1)\,\varepsilon\,.$$
Из (4.1) и (4.2) следует, что $\varkappa\,(P)<\frac{1}{N+1}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. □

Следствие 6. *Пусть* $\mathbb{F}\in\mathcal{A}^{(B)}$, $\Delta>0$. *Тогда для любого* $\varepsilon\in(0,1]$ *найдутся числа* $\delta=\delta(\varepsilon,\Delta)>0$ *и* $\widetilde{\alpha}=\widetilde{\alpha}(\varepsilon,\Delta,\mathbb{F})>0$ *такие, что для любой функции* $g\in L^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *для которой* $\|g\|_{\infty}\leqslant\delta$, *любого* $\alpha\geqslant\widetilde{\alpha}$ *и всех функций* $f\in\mathbb{F}$ *справедлива оценка*
$$\varkappa\,(\{t\in\mathbb{R}:|\,f(t)+\Delta\sin\alpha t+g(t)\,|<\delta\})<\varepsilon\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 8. Положим $\Delta_0=\frac{\Delta}{2}$, $f_0(.)=f(.)$ (для всех функций $f\in\mathbb{F}$). Из следствия 6 вытекает существование чисел $\delta_0=\delta_0(\Delta)>0$ и $\alpha_0=\alpha_0(b,\Delta,\mathbb{F})\in\frac{2\pi}{b}\,\mathbb{N}$ таких, что для всех функций $f_1(t)\doteq f_0(t)+\Delta_0\sin\alpha_0 t$, $t\in\mathbb{R}$ и всех функций $\widetilde{g}_1\in L^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которых $\|\widetilde{g}_1\|_{\infty}\leqslant\delta_0$, имеем
$$\varkappa\,(\{t\in\mathbb{R}:|\,f_1(t)+\widetilde{g}_1(t)\,|<\delta_0\})<2^{-1}\,, \tag{4.3}$$
при этом $\{f_1(.)\,:\,f\,\in\,\mathbb{F}\}\,\in\,\mathcal{A}^{(B)}$. Будем далее последовательно при $j=1,2,\ldots$ находить числа $\Delta_j=\Delta_j(\Delta)>0$, $\delta_j=\delta_j(\Delta)>0$, $\alpha_j=\alpha_j(b,\Delta,\mathbb{F})\in\frac{2\pi}{b}\,\mathbb{N}$ и функции $f_{j+1}\in B(\mathbb{R},\mathbb{R})$, зависящие от f_j , Δ_j и α_j , для которых $\{f_{j+1}(.):f\in\mathbb{F}\}\in\mathcal{A}^{(B)}$. Если числа Δ_k , δ_k , α_k и функции f_{k+1} уже найдены для всех $k=0,\ldots,j-1$, где $j\in\mathbb{N}$, то выберем число $\Delta_j=\Delta_j(\Delta)>0$ так, чтобы выполнялись неравенства $\Delta_j<2^{-(j+1)}\Delta$, $\Delta_j\leqslant 2^{-j}\delta_0$, $\Delta_j\leqslant 2^{-(j-1)}\delta_1$, $\ldots$, $\Delta_j\leqslant 2^{-1}\delta_{j-1}$. Далее, выберем (в соответствии со следствием 6) числа $\delta_j=\delta_j(\Delta)>0$ и $\alpha_j=\alpha_j(b,\Delta,\mathbb{F})\in\frac{2\pi}{b}\,\mathbb{N}$ так, чтобы для всех функций $f_{j+1}(t)\doteq f_j(t)+\Delta_j\sin\alpha_j t$, $t\in\mathbb{R}$ и всех функций $\widetilde{g}_{j+1}\in L^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, для которых $\|\widetilde{g}_{j+1}\|_{\infty}\leqslant\delta_j$, выполнялось неравенство
$$\varkappa\,(\{t\in\mathbb{R}:|\,f_{j+1}(t)+\widetilde{g}_{j+1}(t)\,|<\delta_j\}<2^{-j-1}\,, \tag{4.4}$$

при этом также имеем $\{f_{j+1}(.) : f \in \mathbb{F}\} \in \mathcal{A}^{(B)}$. Продолжим неограниченно процесс нахождения чисел Δ_j , δ_j , α_j и функций f_{j+1} и определим функцию $g(t) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \Delta_j \sin \alpha_j t$, $t \in \mathbb{R}$. Так как $\Delta_0 = \frac{\Delta}{2}$ и $\Delta_j < 2^{-(j+1)}\Delta$ для всех $j \in \mathbb{N}$, то функция $g(.)$ непрерывна и периодична с периодом b. Более того,

$$\|g\|_\infty \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \Delta_j < \Delta .$$

Определим также функции $g_j(t) = \sum\limits_{k=j}^{+\infty} \Delta_k \sin \alpha_k t$, $t \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$. Для всех $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$|g_j(t)| \leqslant \sum_{k=j}^{+\infty} \Delta_k \leqslant \sum_{k=j}^{+\infty} 2^{-k+j-1} \delta_{j-1} = \delta_{j-1} .$$

Поэтому из (4.3) и (4.4) получаем, что для всех чисел $j = 0, 1, \dots$ (и всех функций $f \in \mathbb{F}$) выполняется неравенство

$$\varkappa (\{t \in \mathbb{R} : |\, f(t) + g(t)\, | < \delta_j\} < 2^{-j-1} .$$

Теорема 8 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Andres J. Bounded, almost-periodic and periodic solutions of quasilinear differential inclusions // Differential Inclusions and Optimal Control (ed. by J. Andres, L. Górniewicz and P. Nistri). LN in Nonlin. Anal. 1998. Vol. 2. P. 35–50.
2. Andres J., Bersani A. M., Leśniak K. On some almost-periodicity problems in various metrics // Acta Appl. Math. 2001. Vol. 65, № 1-3. P. 35–57.
3. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Лин В. Я., Локуциевский О. О. О топологических причинах аномального поведения некоторых почти периодических систем // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев: Наукова думка, 1977.
4. Долбилов А. М., Шнейберг И. Я. Почти периодические многозначные отображения и их сечения // Сиб. матем. журнал. 1991. Т. 32, № 2. С. 172–175.
5. Fryszkowski A. Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps // Studia Math. 1983. Vol. 76, № 2. P. 163–174.
6. Данилов Л. И. Почти периодические сечения многозначных отображений // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 1993. Вып. 1. С. 16–78.
7. Данилов Л. И. О сечениях многозначных почти периодических отображений. Новосибирск. Деп. в ВИНИТИ 31.07.95, № 2340-В95. 39 с.

8. Данилов Л. И. Мерозначные почти периодические функции и почти периодические сечения многозначных отображений // Матем. сборник. 1997. Т. 188, № 10. С. 3–24.
9. Данилов Л. И. О почти периодических многозначных отображениях // Матем. заметки. 2000. Т. 68, № 1. С. 82–90.
10. Danilov L. I. On equi-Weyl almost periodic selections of multivalued maps. Preprint arXiv: math.CA/0310010, 2003.
11. Данилов Л. И. О почти периодических по Вейлю сечениях многозначных отображений. Ижевск. Деп. в ВИНИТИ 09.06.2004, № 981-В2004. 104 с.
12. Danilov L. I. On Weyl almost periodic selections of multivalued maps // J. Math. Anal. Appl. 2006. Vol. 316, № 1. P. 110–127.
13. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953.
14. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.
15. Marcinkiewicz J. Une remarque sur les espaces de M. Besicowitch // C. R. Acad. Sc. Paris. 1939. Vol. 208. P. 157–159.
16. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высш. шк., 1982.
17. Данилов Л. И. О равномерной аппроксимации почти периодических по Степанову функций // Изв. вузов. Математика. 1998. № 1. С. 10–18.
18. Данилов Л. И. Равномерная аппроксимация почти периодических по Степанову функций и почти периодические сечения многозначных отображений. Ижевск. Деп. в ВИНИТИ 21.02.03, № 354-В2003. 70 с.
19. Данилов Л. И. Равномерная аппроксимация почти периодических по Степанову функций // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2004. Вып. 1 (29). С. 33–48.
20. Данилов Л. И. О равномерной аппроксимации почти периодических по Вейлю и почти периодических по Безиковичу функций // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2006. Вып. 1 (35). С. 33–48.

Поступила в редакцию 01.09.07

L. I. Danilov
On Besicovitch almost periodic selections of multivalued maps

We prove that Besicovitch almost periodic multivalued maps $\mathbb{R} \ni t \to F(t) \in \mathrm{cl}\,\mathcal{U}$ have Besicovitch almost periodic selections, where $\mathrm{cl}\,\mathcal{U}$ is the collection of non-empty closed sets of a complete metric space $\mathcal{U}$.

Данилов Леонид Иванович
Физико-технический институт
УрО РАН
426000, Россия, г. Ижевск,
ул. Кирова, 132
E-mail: danilov@otf.pti.udm.ru