ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. № 1

УДК 517.958+517.984.56

Л. И. Данилов

АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ СПЕКТРА МНОГОМЕРНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО МАГНИТНОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА

Доказана абсолютная непрерывность спектра многомерного периодического оператора Дирака для некоторых классов разрывных магнитных потенциалов.

Ключевые слова: абсолютная непрерывность спектра, периодический потенциал, оператор Дирака.

Введение

Пусть $\mathcal{M}_M$, $M \in 2\mathbb{N}$, — линейное пространство комплексных $(M \times M)$-матриц, $\mathcal{S}_M$ — множество эрмитовых матриц из $\mathcal{M}_M$, матрицы $\widehat{\alpha}_j \in \mathcal{S}_M$ $j = 1, \dots, n$ $(n \geqslant 2)$ удовлетворяют антикоммутационным соотношениям $\widehat{\alpha}_j \widehat{\alpha}_l + \widehat{\alpha}_l \widehat{\alpha}_j = 2\delta_{jl}\widehat{I}$, где $\widehat{I} \in \mathcal{M}_M$ — единичная матрица, δ_{jl} – символ Кронекера. Обозначим

$$\mathcal{S}_M^{(s)} = \{\widehat{L} \in \mathcal{S}_M : \widehat{L}\widehat{\alpha}_j = (-1)^s \widehat{\alpha}_j \widehat{L} \text{ для всех } j = 1, \dots, n\}\,, \ s = 0, 1\,.$$

Пусть

$$\widehat{\mathcal{D}} = -i \sum_{j=1}^{n} \widehat{\alpha}_j \, \frac{\partial}{\partial x_j}\,,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \widehat{\alpha}_j \left(-i\, \frac{\partial}{\partial x_j} - A_j\right) + \widehat{V}^{(0)} + \widehat{V}^{(1)} = \widehat{\mathcal{D}} + \widehat{V}^{(0)} + \widehat{V}^{(1)} - \sum_{j=1}^{n} A_j \widehat{\alpha}_j \qquad (0.1)$$

— n-мерные операторы Дирака, $n \geqslant 2$ $(i^2 = -1)$. Вещественнозначные функции A_j (компоненты магнитного потенциала $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) и матричнозначные функции $\widehat{V}^{(s)} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{S}_M^{(s)}$, $s = 0, 1$ предполагаются периодическими с общей решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$. В дальнейшем полагаем

$$\widehat{V} = \widehat{V}^{(0)} + \widehat{V}^{(1)}\,, \ \widehat{W} = \widehat{V} - \sum_{j=1}^{n} A_j \widehat{\alpha}_j\,.$$

Координаты векторов из $\mathbb{R}^n$ будем задавать относительно некоторого ортогонального базиса $\{\mathcal{E}_j\}$ ($|\mathcal{E}_j| = 1$, $A_j(x) = (A(x), \mathcal{E}_j)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, n$; $|.|$ и $(.,.)$ — длина и скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}^n$). Через $\{E_j\}$ и $\{E_j^*\}$ обозначаются базисы решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ и обратной к ней решетки Λ^*, $(E_j, E_l^*) = \delta_{jl}$. Пусть K и K^* — соответствующие этим базисам элементарные ячейки решеток Λ и Λ^*, $v(K)$ и $v(K^*)$ — их объемы.

Скалярные произведения и нормы в пространствах $\mathbb{C}^M$, $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^M)$ и $L^2(K; \mathbb{C}^M)$ вводятся обычным образом (как правило, без указания в обозначениях самих пространств). Для матриц $\widehat{L} \in \mathcal{M}_M$ положим

$$\|\widehat{L}\| = \max_{u \in \mathbb{C}^M : \|u\|=1} \|\widehat{L}u\| .$$

Нулевые и единичные матрицы и операторы в разных пространствах будут обозначаться через $\widehat{0}$ и $\widehat{I}$ соответственно (также без указания самих пространств).

Пусть $H^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^M)$ — класс Соболева (порядка 1) вектор-функций $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^M$, $\widetilde{H}^1(K; \mathbb{C}^M)$ — множество вектор-функций $\varphi : K \to \mathbb{C}^M$, периодические продолжения которых (с решеткой периодов Λ) принадлежат $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^M)$. В дальнейшем функции, определенные на элементарной ячейке K, будут также отождествляться с их периодическими продолжениями на все пространство $\mathbb{R}^n$.

Оператор $\widehat{\mathcal{D}}$ самосопряжен в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^M)$ и имеет область определения $D(\widehat{\mathcal{D}}) = H^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^M) \subset L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^M)$. Пусть $\mathbb{L}_n(M, \Lambda; a)$, где $a \geqslant 0$ — множество (измеримых) периодических с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ матричнозначных функций $\widehat{\mathcal{W}} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{S}_M$, имеющих (относительную) грань a по отношению к оператору $\widehat{\mathcal{D}}$. Множеству $\mathbb{L}_n(M, \Lambda; 0)$ (при $a = 0$) принадлежат периодические с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ матричнозначные функции $\widehat{\mathcal{W}} \in L^n(K; \mathcal{S}_M)$ при $n \geqslant 3$, $\widehat{\mathcal{W}} \in L^p(K; \mathcal{S}_M)$ при $n = 2$ и $p > 2$, а также функции $\widehat{\mathcal{W}} \in L^2(K; \mathcal{S}_M)$ (при $n \geqslant 2$) такие, что для какого-либо вектора $\gamma \in \Lambda \backslash \{0\}$ функция $\mathbb{R}^n \ni x \to \{[0,1] \ni t \to \widehat{\mathcal{W}}(x - t\gamma)\} \in L^2([0,1]; \mathcal{S}_M)$ непрерывна (относительно последнего утверждения см., например, [1]). Если $\widehat{\mathcal{W}} \in \mathbb{L}_n(M, \Lambda; a)$ для некоторого $a \in [0, 1)$, то $\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{\mathcal{W}}$ — самосопряженный оператор в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^M)$ с областью определения $D(\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{\mathcal{W}}) = D(\widehat{\mathcal{D}}) = H^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^M)$ [2, 3].

В последнее десятилетие резко возрос интерес к вопросу об абсолютной непрерывности спектра периодических операторов математической физики (и, в частности, периодического оператора Дирака). Этому вопросу посвящены обзорные статьи [4, 5]. Из результатов [6] вытекает, что для доказательства абсолютной непрерывности спектра периодического оператора Дирака $\widehat{\mathcal{D}}+\widehat{\mathcal{W}}$, где $\widehat{\mathcal{W}}\in\mathbb{L}_n(M,\Lambda;a)$, $a\in[0,1)$, достаточно доказать отсутствие в спектре собственных значений. Последнее также следует из несколько более сильного утверждения (см. [7], а также [8]): сингулярный спектр оператора $\widehat{\mathcal{D}}+\widehat{\mathcal{W}}$ пуст, а собственные значения, если они существуют, имеют бесконечную кратность и образуют дискретное множество.

Частным случаем оператора (0.1) является оператор $\widehat{\mathcal{D}}+\widehat{V}^{(0)}+\widehat{V}^{(1)}-\sum\limits_{j=1}^{n}A_j\widehat{\alpha}_j$ при

$$\widehat{V}^{(0)}=V\widehat{I}\,,\ \widehat{V}^{(1)}=m\widehat{\beta}\,, \tag{0.2}$$

где V — периодическая с решеткой периодов $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$ вещественнозначная функция (электрический потенциал), $m\in\mathbb{R}$, $\widehat{\beta}\in\mathcal{S}_M^{(1)}$ и $\widehat{\beta}^2=\widehat{I}$.

Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Дирака (0.1) была (при всех $n\geqslant 2$) впервые доказана в [9, 10, 11] для матричнозначных функций $\widehat{V}^{(s)}$, $s=0,1$, вида (0.2), если $V\in C(\mathbb{R}^n)$, $A\in L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ и

$$\|\,|A|\,\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}<\max_{\gamma\,\in\,\Lambda\backslash\{0\}}\frac{\pi}{|\gamma|}\,. \tag{0.3}$$

Во многих последующих работах ослаблялись ограничения на функции $\widehat{V}=\widehat{V}^{(0)}+\widehat{V}^{(1)}$ и A. Приведем некоторые (наиболее сильные) из полученных результатов (достаточно полные ссылки на литературу можно найти в [12, 13]).

В [12] доказано отсутствие собственных значений в спектре обобщенного двумерного периодического оператора Дирака

$$-i\sum_{j=1}^{2}(h_{j1}\widehat{\sigma}_1+h_{j2}\widehat{\sigma}_2)\,\frac{\partial}{\partial x_j}+\widehat{\mathcal{W}}\,, \tag{0.4}$$

где $\widehat{\sigma}_l$, $l=1,2$ — матрицы Паули, $h_{jl}\in L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $j,l=1,2$ и $\widehat{\mathcal{W}}:\mathbb{R}^2\to\mathcal{M}_2$ — периодические с решеткой периодов $\Lambda\subset\mathbb{R}^2$ функции, для которых $0<\varepsilon\leqslant h_{11}(x)h_{22}(x)-h_{12}(x)h_{21}(x)$ при почти всех (п.в.) $x\in\mathbb{R}^2$ и матричнозначная функция $\widehat{\mathcal{W}}$ имеет нулевую грань относительно оператора $\widehat{\mathcal{D}}=-i\sum\limits_{j=1}^{2}\widehat{\alpha}_j\,\frac{\partial}{\partial x_j}$. Оператор (0.4) не обязательно самосопряжен. Но в случае, когда он является самосопряженным, его спектр абсолютно непрерывен.

В [1] доказана абсолютная непрерывность спектра оператора (0.1) при $n\geqslant 2$ в случае, когда матричнозначные функции $\widehat{V}^{(s)}$, $s=0,1$ имеют вид (0.2), $V\in L^2(K)$, $A\in L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ и существует такой вектор $\gamma\in\Lambda\backslash\{0\}$, что $\| \, |A| \, \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \pi |\gamma|^{-1}$ и отображение

$$\mathbb{R}^n \ni x \to \{[0,1] \ni t \to V(x - t\gamma)\} \in L^2([0,1];\mathbb{R})$$

непрерывно.

В [13] при $n = 3$ доказана абсолютная непрерывность спектра оператора (0.1), если матричнозначные функции $\widehat{V}^{(s)}$, $s = 0,1$ при некотором $\delta > 0$ принадлежат классу Зигмунда $L^3 \ln^{2+\delta} L(K; \mathcal{S}_M)$, $A \in L^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ и выполнено условие (0.3).

Пусть $\mathfrak{M}_h$, $h > 0$ – множество борелевских четных знакопеременных мер μ на $\mathbb{R}$ (с конечной полной вариацией), для которых $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{ipt} d\mu(t) = 1$ при всех $p \in (-h, h)$;

$$\|\mu\| = \sup_{\mathcal{O} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} (|\mu(\mathcal{O})| + |\mu(\mathbb{R} \backslash \mathcal{O})|) < +\infty \,, \; \mu \in \mathfrak{M}_h \,,$$

где $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — множество борелевских подмножеств $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}$. В [14] при $n \geqslant 3$ приведено доказательство абсолютной непрерывности спектра оператора (0.1), если выполнены условия:

1) $\widehat{V}^{(s)} \in C(\mathbb{R}^n; \mathcal{S}_M^{(s)})$, $s = 0,1$;

2) $A \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ и существуют такие вектор $\gamma \in \Lambda \backslash \{0\}$ и мера $\mu \in \mathfrak{M}_h$, $h > 0$, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и всех единичных векторов $\widetilde{e} \in \mathbb{R}^n$: $(\widetilde{e}, \gamma) = 0$ справедливо неравенство

$$\left| A_0 - \int_{\mathbb{R}} d\mu(t) \int_0^1 A(x - \xi\gamma - t\widetilde{e}) \, d\xi \right| < \frac{\pi}{|\gamma|} \,, \tag{0.5}$$

где $A_0 = v^{-1}(K) \int\limits_K A(x) \, d^n x$.

Для периодического (с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$) магнитного потенциала $A \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 3$, условие (0.5) выполняется для некоторых вектора $\gamma \in \Lambda \backslash \{0\}$ и меры $\mu \in \mathfrak{M}_h$, $h > 0$, если магнитный потенциал A принадлежит классу Соболева $H^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $2q > n - 2$, а также в случае $\sum\limits_N |A_N|_{\mathbb{C}^n} < +\infty$, где A_N, $N \in \Lambda^*$ — коэффициенты Фурье функции A [14, 15].

В более ранней статье [16] доказывалась абсолютная непрерывность спектра оператора (0.1), если $\widehat{V}^{(0)} = V\widehat{I}$, $\widehat{V}^{(1)} = V_1 \widehat{\beta}$ и $V, V_1 \in L^q(K)$, $A \in L^q(K;\mathbb{R}^2)$, $q > 2$ при $n = 2$, $V, V_1 \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ и $A \in C^{2n+3}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ при $n \geqslant 3$.

В данной работе рассматривается периодический оператор Дирака (0.1) при $n \geqslant 3$ в предположении, что для функций $\widehat{V}^{(s)}$, $s = 0,1$ и A выполняются приводимые ниже условия (A), (B), (C), (D), (E) и (F).

Не ограничивая общности, будем далее считать, что $A_0=0$ (этого всегда можно добиться, выбирая соответствующую калибровку). Фиксируем вектор $\gamma\in\Lambda\backslash\{0\}$. Обозначим $e=|\gamma|^{-1}\gamma$. Пусть S_{n-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, $S_{n-2}(e)=\{\widetilde{e}\in S_{n-1}:(\widetilde{e},e)=0\}$. Фиксируем также меру $\mu\in\mathfrak{M}_h$, $h>0$.

Условие (A): $\widehat{V}=\widehat{V}^{(0)}+\widehat{V}^{(1)}\in\mathbb{L}_n(M,\Lambda;0)$, $\sum\limits_{j=1}^{n}A_j\widehat{\alpha}_j\in\mathbb{L}_n(M,\Lambda;0)$.

Условие (A) означает, что $\widehat{V}^{(s)}\in L^2(K;\mathcal{S}_M)$, $s=0,1$, $A\in L^2(K;\mathbb{R}^n)$ и для любого $\varepsilon>0$ существует число $C(\varepsilon)>0$ такое, что для всех вектор-функций $\varphi\in H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)$ справедливо неравенство

$$\|\widehat{V}\varphi\|+\|\,|A|\,\varphi\|=\|\widehat{V}\varphi\|+\big\|\big(\sum_{j=1}^{n}A_j\widehat{\alpha}_j\big)\varphi\big\|\leqslant \tag{0.6}$$

$$\leqslant\varepsilon\,\big\|\big(-i\sum_{j=1}^{n}\widehat{\alpha}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\big)\varphi\big\|+C(\varepsilon)\|\varphi\|=\varepsilon\,\big(\sum_{j=1}^{n}\big\|-i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,\big\|^2\big)^{1/2}+C(\varepsilon)\|\varphi\|\,.$$

Условие (B): *существует константа $C^*>0$ такая, что для всех векторов $\widetilde{e}\in S_{n-2}(e)$*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\,\in\,\mathbb{R}^n}\iint_{\xi_1^2+\xi_2^2\,\leqslant\,1}|A(x-\xi_1\widetilde{e}-\xi_2e)|\,\frac{d\xi_1\,d\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}\leqslant C^*\,. \tag{0.7}$$

Условие (B) выполняется тогда и только тогда, когда для некоторого счетного плотного в $S_{n-2}(e)$ множества $\Omega^*(e)\subset S_{n-2}(e)$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\,\in\,\mathbb{R}^n}\ \sup_{\widetilde{e}\,\in\,\Omega^*(e)}\iint_{\xi_1^2+\xi_2^2\,\leqslant\,1}|A(x-\xi_1\widetilde{e}-\xi_2e)|\,\frac{d\xi_1\,d\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}\leqslant C^*\,.$$

Условие (C): *существуют числа $\tau\in(0,1)$ и $Q>0$ такие, что для всех векторов $\widetilde{e}\in S_{n-2}(e)$ и всех вектор-функций $\varphi\in H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)$ выполняется неравенство*

$$\|\,|A|\,\varphi\|\leqslant\tau\,\big(\sum_{j=1}^{2}\big\|-i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j'}\,\big\|^2\big)^{1/2}+Q\|\varphi\|\,, \tag{0.8}$$

где $x_1'=(x,\widetilde{e})$, $x_2'=(x,e)$, $x\in\mathbb{R}^n$.

Условие (D): *функция* $\mathbb{R}^n\ni x\to\int\limits_0^1 A(x-\xi\gamma)\,d\xi\in\mathbb{R}^n$ *почти всюду (п.в.) совпадает с непрерывной функцией.*

Будем далее (если выполнено условие (D)) отождествлять функцию $\int\limits_0^1 A(.-\xi\gamma)\,d\xi$ с непрерывной функцией, с которой она п.в. совпадает. Обозначим

$$\widetilde{A}(\widetilde{e};x)=\widetilde{A}(\gamma,\mu,\widetilde{e};x)=\int_{\mathbb{R}} d\mu(t)\int_0^1 A(x-\xi\gamma-t\widetilde{e})\,d\xi\,,\ x\in\mathbb{R}^n\,,\ \widetilde{e}\in S_{n-2}(e)\,.$$

При выполнении условия (D) функция $\widetilde{A}(.;.):S_{n-2}(e)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ непрерывна по совокупности переменных и периодична (с решеткой периодов $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$) по второму аргументу, при этом $(\widetilde{A}(\widetilde{e};.))_0=A_0=0$ (для всех векторов $\widetilde{e}\in S_{n-2}(e)$).

Через

$$\chi_N=v^{-1}(K)\int_K \chi(x)\,e^{-2\pi i\,(N,x)}\,d^nx\,,\ N\in\Lambda^*$$

обозначаются коэффициенты Фурье функций $\chi\in L^1(K;\mathcal{U})$, где $\mathcal{U}=\mathbb{C}^M$, $\mathbb{R}^n$ или $\mathcal{M}_M$.

При выполнении следующего условия предполагается выполненным условие (D).

Условие (E): *существует константа* $\widetilde{\theta}\in[0,1)$ *такая, что*

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n}\ \max_{\widetilde{e}\in S_{n-2}(e)}\ |\widetilde{A}(\widetilde{e};x)|\leqslant\frac{\widetilde{\theta}\pi}{|\gamma|}\,. \tag{0.9}$$

Условие (E) выполняется тогда и только тогда, когда $|\widetilde{A}(\widetilde{e};x)|<\pi|\gamma|^{-1}$ для всех $x\in\mathbb{R}^n$ и $\widetilde{e}\in S_{n-2}(e)$. Если выбрать меру Дирака $\mu=\delta$, то функция $\widetilde{A}(\widetilde{e};.)$ не зависит от вектора $\widetilde{e}$ и неравенство (0.9) означает, что

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n}\ \Big|\int_0^1 A(x-\xi\gamma)\,d\xi\Big|\leqslant\frac{\widetilde{\theta}\pi}{|\gamma|}\,,$$

при этом последнее неравенство справедливо, если

$$\sum_{N\in\Lambda^*:\ (N,\gamma)=0}|A_N|\leqslant\frac{\widetilde{\theta}\pi}{|\gamma|}\,.$$

Для любого вектора $x\in\mathbb{R}^n$ положим $x_{\|}=(x,e)e$, $x_{\perp}=x-(x,e)e$.

Выберем какую-либо неотрицательную четную функцию $\mathbb{R}^{n-1}\ni x'\to\mathcal{F}(x')\in\mathbb{R}$ (см., например, [15]) из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1};\mathbb{R})$, для которой функция

$$\mathbb{R}^{n-1}\ni p\to\widehat{\mathcal{F}}(p)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\mathcal{F}(x')\,e^{\,i(p,x')}\,d^{\,n-1}x'$$

также неотрицательна и удовлетворяет условиям $\widehat{\mathcal{F}}(0)=1$ и $\widehat{\mathcal{F}}(p)=0$ при $|p|\geqslant 1$ (тогда также $\widehat{\mathcal{F}}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1};\mathbb{R})$ и $0\leqslant\widehat{\mathcal{F}}(p)=\widehat{\mathcal{F}}(-p)\leqslant 1$ для всех $p\in\mathbb{R}^{n-1}$). Пусть $\{\mathcal{E}'_j\}$ — (какой-либо) ортогональный базис в $\mathbb{R}^n$, для которого $\mathcal{E}'_2=e$. Обозначим $x'_j=(x,\mathcal{E}'_j)$, $j=1,\dots,n$, $x'=(x'_1,x'_3,\dots,x'_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$; $x_\perp=\sum\limits_{j\neq 2}x'_j\mathcal{E}'_j\in\mathbb{R}^n$, $x_\parallel=x'_2e\in\mathbb{R}^n$. Для $R>0$ положим (при $s=0,1$)

$$\widehat{V}^{(s)}_{\{R\}}(x)=R^{n-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\widehat{V}^{(s)}\big(x-\sum_{j\neq 2}x'_j\mathcal{E}'_j\big)\mathcal{F}(Rx'_1,Rx'_3,\dots,Rx'_n)\,d^{\,n-1}x', \tag{0.10}$$

$$A_{\{R\}}(x)=R^{n-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}A\big(x-\sum_{j\neq 2}x'_j\mathcal{E}'_j\big)\mathcal{F}(Rx'_1,Rx'_3,\dots,Rx'_n)\,d^{\,n-1}x'\,,\ x\in\mathbb{R}^n\,. \tag{0.11}$$

Так как

$$(\widehat{V}^{(s)}_{\{R\}})_N=\widehat{\mathcal{F}}\big(\frac{2\pi N'}{R}\big)\,\widehat{V}^{(s)}_N\,,\ s=0,1\,,\quad (A_{\{R\}})_N=\widehat{\mathcal{F}}\big(\frac{2\pi N'}{R}\big)\,A_N\,,$$

где $N'=(N'_1,N'_3,\dots,N'_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$, $N\in\Lambda^*$, то $(\widehat{V}^{(s)}_{\{R\}})_N=0$ и $(A_{\{R\}})_N=0$ при всех $N\in\Lambda^*:2\pi|N_\perp|>R$. Из определения функций $\widehat{V}^{(s)}_{\{R\}}$ и $A_{\{R\}}$ (в виде свертки) и выбора функции $\mathcal{F}$ следует, что для функций $\widehat{V}^{(s)}_{\{R\}}:\mathbb{R}^n\to\mathcal{S}^{(s)}_M$, $s=0,1$ и $A_{\{R\}}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ (как и для функций $\widehat{V}^{(s)}$ и A) при всех $R>0$ выполняются условия (A), (B), (C), (D) и (E) с теми же константами $C(\varepsilon)$ (см. (0.6)), C^*, τ, Q и $\widetilde{\theta}$ (и при выборе тех же вектора γ и меры μ).

При выполнении следующего условия (F) предполагаются выполненными все предыдущие условия (A), (B), (C), (D) и (E).

Пусть для каждого числа $\varepsilon>0$ выбрана некоторая константа $C''(\varepsilon)=C''(n,M,\Lambda,\gamma;\varepsilon)>0$ (например, это может быть константа $C'(\gamma;\varepsilon)$ из приводимого далее неравенства (0.13)).

Условие (F): *для любого* $\widetilde{\varepsilon}>0$ *существуют число* $R=R(\widetilde{\varepsilon})$ (*зависящее также от* γ, μ, *чисел* $C(\varepsilon)$, C^*, τ, Q, $\widetilde{\theta}$ *и функций* $\widehat{V}^{(s)}$, A) *и периодические с решеткой периодов* Λ *функции* $\widehat{V}^{(s)}_{\{R\}}:\mathbb{R}^n\to\mathcal{S}^{(s)}_M$, $s=0,1$, *и* $A_{\{R\}}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ (*в частности, это могут быть функции* (0.10) *и* (0.11)), *для которых* (*как и для функций* $\widehat{V}^{(s)}$ *и* A) *выполнены условия* (A), (B), (C), (D) *и* (E) *с теми же константами* $C(\varepsilon)$, C^*, τ, Q, $\widetilde{\theta}$ *и такие, что*

1) $(\widehat{V}_{\{R\}})_N=0$ *и* $(A_{\{R\}})_N=0$ *при всех* $N\in\Lambda^*:2\pi|N_\perp|>R$, *где* $\widehat{V}_{\{R\}}=\widehat{V}^{(0)}_{\{R\}}+\widehat{V}^{(1)}_{\{R\}}$;

2) *для любого* $\varepsilon > 0$ *и любой вектор-функции* $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)$ *справедливо неравенство*

$$\|(\widehat{V} - \widehat{V}_{\{R\}})\varphi\| + \|\,|A - A_{\{R\}}|\,\varphi\| \leqslant \widetilde{\varepsilon}\,\bigl(\varepsilon\,\bigl\|-i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_2'}\,\bigr\| + C''(\varepsilon)\|\varphi\|\bigr)\,, \qquad (0.12)$$

где $x_2' = (x,e)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 1. *Спектр периодического оператора Дирака* (0.1) *при* $n \geqslant 3$ *абсолютно непрерывен, если* $\widehat{V}^{(s)} \in L^2(K;\mathcal{S}_M)$, $s = 0,1$, $A \in L^2(K;\mathbb{R}^n)$ $(A_0 = 0)$ *и существуют вектор* $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ *и мера* $\mu \in \mathfrak{M}_h$, $h > 0$ *такие, что выполняются условия* (A), (B), (C), (D), (E) *и* (F).

Доказательство теоремы 1 приведено в следующем параграфе.

Для любых вектора $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ и числа $\varepsilon > 0$ найдется число $C'(\gamma;\varepsilon) > 0$ (см., например, [1]) такое, что для всех периодических с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ функций $\mathcal{V} \in L^2(K;\mathbb{C})$, для которых

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\,\in\,\mathbb{R}^n} \int_0^1 |\mathcal{V}(x - t\gamma)|^2\,dt < +\infty\,,$$

и всех вектор-функций $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^M)$ выполняется неравенство

$$\|\mathcal{V}\varphi\| \leqslant \Bigl(\operatorname*{ess\,sup}_{x\,\in\,\mathbb{R}^n} \int_0^1 |\mathcal{V}(x-t\gamma)|^2\,dt\Bigr)^{1/2}\bigl(\varepsilon\,\bigl\|-i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_2'}\,\bigr\| + C'(\gamma;\varepsilon)\|\varphi\|\bigr)\,, \qquad (0.13)$$

где $x_2' = (x,e)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Спектр периодического оператора Дирака* (0.1) *при* $n \geqslant 3$ *абсолютно непрерывен, если* $\widehat{V}^{(s)} \in L^2(K;\mathcal{S}_M^{(s)})$, $s = 0,1$, $A \in L^{2+\delta}(K;\mathbb{R}^n)$, $\delta > 0$ *и существуют такие вектор* $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ *и мера* $\mu \in \mathfrak{M}_h$, $h > 0$, *что функции*

$$\mathbb{R}^n \ni x \to \{[0,1] \ni t \to \widehat{V}^{(s)}(x - t\gamma)\} \in L^2([0,1];\mathcal{S}_M^{(s)})\,,\ s = 0,1\,,$$
$$\mathbb{R}^n \ni x \to \{[0,1] \ni t \to A(x - t\gamma)\} \in L^2([0,1];\mathbb{R}^n)$$

непрерывны (*п.в. совпадают с непрерывными функциями, тогда выполнено условие* (D) *и принимается соглашение, приведенное после него*),

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\,\in\,\mathbb{R}^n} \int_0^1 |A(x - t\gamma)|^{2+\delta}\,dt < +\infty$$

и для всех $x \in \mathbb{R}^n$ *и всех единичных векторов* $\widetilde{e} \in \mathbb{R}^n : (\widetilde{e},\gamma) = 0$ *справедливо неравенство* (0.5).

Теорема 2 является следствием теоремы 1. Действительно, предположим, что выполнены условия теоремы 2 (для некоторых вектора $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ и меры $\mu \in \mathfrak{M}_h$, $h > 0$). Выполняя соответствующее калибровочное преобразование, можно считать, что $A_0 = 0$. Непосредственно проверяются условия (D) и (E). Из (0.13) следует, что выполняются также условия (A) и (C) (причем число $\tau \in (0,1)$ можно выбирать сколь угодно малым). Для любого вектора $\widetilde{e} \in S_{n-2}(e)$ и почти всех векторов $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\iint_{\xi_1^2+\xi_2^2 \leqslant 1} |A(x - \xi_1\widetilde{e} - \xi_2 e)| \, \frac{d\xi_1\, d\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \bigl(2\pi\, \frac{1+\delta}{\delta}\,\bigr)^{\frac{1+\delta}{2+\delta}} \Bigl(\, \iint_{\xi_1^2+\xi_2^2 \leqslant 1} |A(x - \xi_1\widetilde{e} - \xi_2 e)|^{2+\delta}\, d\xi_1\, d\xi_2 \,\Bigr)^{\frac{1}{2+\delta}} ,$$

поэтому справедливо и условие (B). Наконец, для чисел $R > 0$ выберем функции $\widehat{V}^{(s)}_{\{R\}}$, $s = 0,1$ и $A_{\{R\}}$, задаваемые формулами (0.10) и (0.11). Из свойств функции $\mathcal{F}$ следует, что функции

$$\mathbb{R}^n \ni x \to \{[0,1] \ni t \to \widehat{V}^{(s)}_{\{R\}}(x - t\gamma)\} \in L^2([0,1]; \mathcal{S}^{(s)}_M)\,, \ s = 0,1\,,$$

$$\mathbb{R}^n \ni x \to \{[0,1] \ni t \to A_{\{R\}}(x - t\gamma)\} \in L^2([0,1]; \mathbb{R}^n)$$

непрерывны и

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} \int_0^1 \|\widehat{V}^{(s)}(x - t\gamma) - \widehat{V}^{(s)}_{\{R\}}(x - t\gamma)\|^2_{\mathcal{M}_M}\, dt \to 0\,,$$

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} \int_0^1 |A(x - t\gamma) - A_{\{R\}}(x - t\gamma)|^2\, dt \to 0$$

при $R \to +\infty$. Поэтому из последних соотношений и неравенства (0.13) следует выполнение условия (F) (для констант $C''(\varepsilon) = C'(\gamma;\varepsilon)$).

§ 1. Доказательство теоремы 1

Определим для всех $e \in S_{n-1}$, $k \in \mathbb{R}^n$ ($e_j = (e, \mathcal{E}_j)$, $k_j = (k, \mathcal{E}_j)$, $j = 1, \ldots, n$) и $\varkappa \geqslant 0$ операторы

$$\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) = -i \sum_{j=1}^n \widehat{\alpha}_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n (k_j + i\varkappa e_j)\widehat{\alpha}_j\,,$$

действующие в $L^2(K;\mathbb{C}^M)$ и имеющие область определения $D(\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e)) = \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M) \subset L^2(K;\mathbb{C}^M)$. Для функций $\widehat{V}^{(s)}$, $s = 0,1$, и A, удовлетворяющих условиям теоремы 1, обозначим $\widehat{W} = \widehat{V} - \sum_{j=1}^n A_j\widehat{\alpha}_j$,

$\widehat{V}=\widehat{V}^{(0)}+\widehat{V}^{(1)}$, $\widehat{W}_{\{R\}}=\widehat{V}^{(0)}_{\{R\}}+\widehat{V}^{(1)}_{\{R\}}-\sum_{j=1}^{n}(A_{\{R\}})_j\widehat{\alpha}_j$ (где функции $\widehat{V}^{(s)}_{\{R\}}$, $s=0,1$ и $A_{\{R\}}$ выбираются в условии (F), $R=R(\widetilde{\varepsilon})>0$). Функции $\widehat{V}^{(s)}$ и A (как и функции $\widehat{V}^{(s)}_{\{R\}}$ и $A_{\{R\}}$) далее предполагаются действующими в пространстве $L^2(K;\mathbb{C}^M)$. Из (0.6), (0.8) и (0.12) следует, что

1) для любого $\varepsilon>0$, любого вектора $k\in\mathbb{R}^n$ и всех вектор-функций $\varphi\in\widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$ справедливо неравенство

$$\|\widehat{W}\varphi\|\leqslant\|\widehat{V}\varphi\|+\|\,|A|\,\varphi\|\leqslant \tag{1.1}$$

$$\leqslant\varepsilon\,\|\widehat{\mathcal{D}}(k)\varphi\|+C(\varepsilon)\|\varphi\|=\varepsilon\,\Big(\sum_{j=1}^{n}\Big\|\Big(k_j-i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)\,\varphi\Big\|^2\Big)^{1/2}+C(\varepsilon)\|\varphi\|$$

(где $\widehat{\mathcal{D}}(k)$ — это оператор $\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)$ при $\varkappa=0$);

2) для любого вектора $\widetilde{e}\in S_{n-2}(e)$ и всех вектор-функций $\varphi\in\widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$ выполняется неравенство

$$\|\,|A|\,\varphi\|\leqslant\tau\,\Big(\sum_{j=1}^{2}\Big\|\Big(k'_j-i\,\frac{\partial}{\partial x'_j}\Big)\,\varphi\Big\|^2\Big)^{1/2}+Q\|\varphi\|\,; \tag{1.2}$$

3) для любого $\widetilde{\varepsilon}>0$ ($R=R(\widetilde{\varepsilon})$), всех $\varepsilon>0$ и всех вектор-функций $\varphi\in\widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$ имеем

$$\|(\widehat{W}-\widehat{W}_{\{R\}})\varphi\|\leqslant\widetilde{\varepsilon}\,\Big(\varepsilon\,\Big\|\Big(k'_2-i\,\frac{\partial}{\partial x'_2}\Big)\,\varphi\Big\|+C''(\varepsilon)\|\varphi\|\Big)\,, \tag{1.3}$$

где $x'_1=(x,\widetilde{e})$, $x'_2=(x,e)$, $x\in\mathbb{R}^n$, и $k'_1=(k,\widetilde{e})$, $k'_2=(k,e)$, $k\in\mathbb{R}^n$ (эти обозначения использованы также в (1.2)).

Неравенство (1.1) (так как число $\varepsilon>0$ можно выбирать сколь угодно малым) означает, что матричнозначная функция $\widehat{W}$ имеет нулевую грань относительно операторов $\widehat{\mathcal{D}}(k)$, $k\in\mathbb{R}^n$, следовательно, операторы $\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W}$ (с областью определения $D(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})=\widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)\subset L^2(K;\mathbb{C}^M)$) при всех $k+i\varkappa e\in\mathbb{C}^n$ (замкнуты и) имеют компактную резольвенту. При этом $\widehat{\mathcal{D}}(k)+\widehat{W}$, $k\in\mathbb{R}^n$ – самосопряженные операторы с дискретным спектром. Пусть $\lambda_\nu(k)$, $\nu\in\mathbb{Z}$ – упорядоченные по возрастанию (с учетом кратности) собственные значения операторов $\widehat{\mathcal{D}}(k)+\widehat{W}$. Нумерация собственных значений при разных $k\in\mathbb{R}^n$ не связана между собой (так как $\lambda_\nu(k)\to\pm\infty$ при $\nu\to\pm\infty$, $k\in\mathbb{R}^n$), но ее можно согласовать так, чтобы функции $\mathbb{R}^n\ni k\to\lambda_\nu(k)$ были непрерывными [10]. Периодический оператор Дирака (0.1) унитарно эквивалентен прямому интегралу

$$\int_{2\pi K^*}^{\oplus}(\widehat{\mathcal{D}}(k)+\widehat{W})\,\frac{d^nk}{(2\pi)^n\,v(K^*)}\ . \tag{1.4}$$

Унитарная эквивалентность устанавливается с помощью преобразования Гельфанда [17, 18] (в ситуации периодического оператора Дирака см. также [19]). Спектр оператора (0.1) совпадает с объединением зон $\{\lambda_\nu(k) : k \in 2\pi K^*\}$, $\nu \in \mathbb{Z}$.

Для доказательства абсолютной непрерывности спектра оператора (0.1) достаточно установить отсутствие в его спектре собственных значений (бесконечной кратности) [6]. Но, с другой стороны, если λ — собственное значение оператора (0.1), то из разложения периодического оператора Дирака (0.1) в прямой интеграл (1.4) и аналитической теоремы Фредгольма следует [4, 6], что λ — собственное значение операторов $\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W}$ при всех $k+i\varkappa e \in \mathbb{C}^n$. Поэтому достаточно доказать, что каждое число $\lambda \in \mathbb{R}$ для какого-то комплексного вектора $k+i\varkappa e \in \mathbb{C}^n$ (зависящего от λ) не является собственным значением оператора $\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W}$ (этот метод доказательства восходит к работе Л. Томаса [20]). Если сделать замену $\widehat{V}^{(0)} - \lambda\widehat{I} \to \widehat{V}^{(0)}$ (тогда для новых функций $\widehat{V}^{(s)}$ и A будут выполнены все условия теоремы 1, только с другими константами $C(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, в неравенствах (0.6) и (1.1), зависящими теперь также и от λ), доказательство абсолютной непрерывности спектра оператора (0.1) сводится к доказательству отсутствия в спектре оператора $\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W}$ при каком-либо комплексном векторе $k+i\varkappa e \in \mathbb{C}^n$ собственного значения $\lambda = 0$. Поэтому теорема 1 непосредственно следует из приводимой ниже теоремы 3.

Пусть $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ — вектор, определяемый и фиксируемый в условиях теоремы 1, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$.

Теорема 3. *Предположим, что матричнозначные функции* $\widehat{V}^{(s)}$, $s = 0, 1$ *и магнитный потенциал* A *удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Тогда найдутся число* $C_1 > 0$ *(зависящее только от* γ, h, $\|\mu\|$ *и констант* C^*, τ, Q *и* $\widetilde{\theta}$*) и число* $\varkappa_0 > 0$ *такие, что для всех* $\varkappa \geqslant \varkappa_0$, *всех векторов* $k \in \mathbb{R}^n : (k, \gamma) = \pi$ *и всех вектор-функций* $\varphi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbb{C}^M)$ *справедлива оценка*

$$\|(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e) + \widehat{W})\varphi\| \geqslant C_1 \|\varphi\| .$$

Доказательство теоремы 3, опирающееся на теорему 4, приведено в конце этого параграфа.

Для любой вектор-функции $\varphi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbb{C}^M)$ имеем

$$\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)\varphi = \sum_{N \in \Lambda^*} \widehat{\mathcal{D}}_N(k; \varkappa)\, \varphi_N\, e^{2\pi i\,(N,x)},$$

где $\widehat{\mathcal{D}}_N(k;\varkappa) = \sum\limits_{j=1}^{n} (k_j + 2\pi N_j + i\varkappa e_j)\, \widehat{\alpha}_j$, $N_j = (N, \mathcal{E}_j)$, $j = 1, \ldots, n$.

Положим

$$G_N^{\pm}(k;\varkappa) \doteq \big(|k_{\parallel}+2\pi N_{\parallel}|^2+(\varkappa\pm|k_{\perp}+2\pi N_{\perp}|)^2\big)^{1/2}\,,\ N\in\Lambda^*\,;$$

$$G_N^{+}(k;\varkappa)\geqslant G_N^{-}(k;\varkappa)\,,\ G_N^{+}(k;\varkappa)\geqslant\varkappa\,.$$

Так как $e=|\gamma|^{-1}\gamma,\ \ \gamma\in\Lambda\backslash\{0\}$, то для всех векторов $k\in\mathbb{R}^n:(k,\gamma)=\pi$, всех $N\in\Lambda^*$ и всех $\varkappa\geqslant 0$ выполняется неравенство $G_N(k;\varkappa)\geqslant\pi|\gamma|^{-1}$.

Определим операторы $\widehat{G}^{\pm}$ в $L^2(K;\mathbb{C}^M)$:

$$\widehat{G}^{\pm}\varphi=\sum_{N\,\in\,\Lambda^*}G_N^{\pm}(k;\varkappa)\,\varphi_N\,e^{2\pi i\,(N,x)}\,,\ \varphi\in D(\widehat{G}^{\pm})=\widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$$

(операторы $\widehat{G}^{\pm}$ зависят от k и $\varkappa$, но явно эта зависимость отмечаться в обозначениях не будет). Для любых $k\in\mathbb{R}^n,\ \ \varkappa\geqslant 0$ и $N\in\Lambda^*$ справедливы неравенства

$$G_N^{-}(k;\varkappa)\,\|u\|\leqslant\|\widehat{\mathcal{D}}_N(k;\varkappa)u\|\leqslant G_N^{+}(k;\varkappa)\,\|u\|\,,\ u\in\mathbb{C}^M\,,$$

поэтому для всех вектор-функций $\varphi\in\widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$ имеем

$$\|\widehat{G}^{-}\varphi\|\leqslant\|\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)\varphi\|\leqslant\|\widehat{G}^{+}\varphi\|\,.$$

Для множеств $\mathcal{C}\subseteq\Lambda^*$ обозначим через $\widehat{P}^{\mathcal{C}}$ ортогональные проекторы в пространстве $L^2(K;\mathbb{C}^M)$, ставящие в соответствие вектор-функциям $\varphi\in L^2(K;\mathbb{C}^M)$ вектор-функции

$$\widehat{P}^{\mathcal{C}}\varphi\doteq\varphi^{\mathcal{C}}=\sum_{N\,\in\,\mathcal{C}}\varphi_N\,e^{2\pi i\,(N,x)}\,,$$

$\widehat{P}^{\emptyset}=\widehat{0}$; $\mathcal{H}(\mathcal{C})=\{\varphi\in L^2(K;\mathbb{C}^M):\varphi_N=0$ при $N\in\Lambda^*\backslash\mathcal{C}\}$.

Для любого вектора $\widetilde{e}\in S_{n-2}(e)$ определим ортогональные проекторы в $\mathbb{C}^M$:

$$\widehat{P}_{\widetilde{e}}^{\pm}=\frac{1}{2}\,\big(\widehat{I}\mp i\,\big(\sum_{j=1}^{n}e_j\widehat{\alpha}_j\big)\big(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{e}_j\widehat{\alpha}_j\big)\big)\,;$$

$$\|\widehat{P}_{\widetilde{e}'}^{\pm}\widehat{P}_{\widetilde{e}''}^{\mp}\|=\|\widehat{P}_{\widetilde{e}'}^{\pm}-\widehat{P}_{\widetilde{e}''}^{\pm}\|=\frac{1}{2}\,|\,\widetilde{e}''-\widetilde{e}'\,|\,,\ \widetilde{e}',\widetilde{e}''\in S_{n-2}(e)\,. \tag{1.5}$$

Для векторов $y\in\mathbb{R}^n$, для которых $y_{\perp}=y-(y,e)e\neq 0$, будем использовать обозначение $\widetilde{e}(y)\doteq|y_{\perp}|^{-1}y_{\perp}\in S_{n-2}(e)$.

Если $k\in\mathbb{R}^n,\ \ N\in\Lambda^*$ и $k_{\perp}+2\pi N_{\perp}\neq 0$, то

$$\widehat{P}_{\widetilde{e}(k+2\pi N)}^{\pm}\widehat{\mathcal{D}}_N(k;\varkappa)\widehat{P}_{\widetilde{e}(k+2\pi N)}^{\pm}=\widehat{0} \tag{1.6}$$

и для любого вектора $u \in \mathbb{C}^M$ (и всех $\varkappa \geqslant 0$)

$$\|\widehat{\mathcal{D}}_N(k;\varkappa)\widehat{P}^{\pm}_{\widetilde{e}(k+2\pi N)}u\| = G^{\pm}_N(k;\varkappa)\|\widehat{P}^{\pm}_{\widetilde{e}(k+2\pi N)}u\|\,. \tag{1.7}$$

Если $k_\perp + 2\pi N_\perp = 0$, то

$$G^+_N(k;\varkappa) = G^-_N(k;\varkappa)\,. \tag{1.8}$$

Обозначим через $\widehat{P}^{\,\pm} = \widehat{P}^{\,\pm}(k;e)$ ортогональные проекторы в пространстве $L^2(K;\mathbb{C}^M)$ (операторы $\widehat{P}^{\,\pm}$ зависят от $k \in \mathbb{R}^n$, но явно эта зависимость в обозначениях не отмечается), для которых

$$\widehat{P}^{\,+}\varphi = \sum_{N\,\in\,\Lambda^*\,:\,k_\perp+2\pi N_\perp\,\neq\,0} \widehat{P}^{+}_{\widetilde{e}(k+2\pi N)}\,\varphi_N\,e^{\,2\pi i\,(N,x)}\,,$$

$$\widehat{P}^{\,+}_*\varphi = \widehat{P}^{\,+}\varphi + \sum_{N\,\in\,\Lambda^*\,:\,k_\perp+2\pi N_\perp\,=\,0} \varphi_N\,e^{\,2\pi i\,(N,x)}\,,$$

$$\widehat{P}^{\,-}_*\varphi = \sum_{N\,\in\,\Lambda^*\,:\,k_\perp+2\pi N_\perp\,\neq\,0} \widehat{P}^{-}_{\widetilde{e}(k+2\pi N)}\,\varphi_N\,e^{\,2\pi i\,(N,x)}\,,$$

$$\widehat{P}^{\,-}\varphi = \widehat{P}^{\,-}_*\varphi + \sum_{N\,\in\,\Lambda^*\,:\,k_\perp+2\pi N_\perp\,=\,0} \varphi_N\,e^{\,2\pi i\,(N,x)}\,, \quad \varphi \in L^2(K;\mathbb{C}^M)\,.$$

При этом $\widehat{P}^{\,+} + \widehat{P}^{\,-} = \widehat{I}$, $\widehat{P}^{\,+}_* + \widehat{P}^{\,-}_* = \widehat{I}$ и из (1.6), (1.7) и (1.8) следует, что для всех вектор-функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$

$$\|\widehat{P}^{\,+}_*\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)\varphi\| = \|\widehat{G}^-\widehat{P}^{\,-}\varphi\|\,,\ \|\widehat{P}^{\,-}_*\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)\varphi\| = \|\widehat{G}^+\widehat{P}^{\,+}\varphi\|\,, \tag{1.9}$$

$$\|\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)\varphi\|^2 = \|\widehat{G}^-\widehat{P}^{\,-}\varphi\|^2 + \|\widehat{G}^+\widehat{P}^{\,+}\varphi\|^2\,.$$

Пусть $C^*(h) > 0$ — константа, определяемая в лемме 2 (и зависящая от C^*, h и, так как в дальнейшем будет предполагаться, что $h \leqslant |\gamma|^{-1}$, также от вектора γ). Обозначим

$$C_2 = (1-\tau)\big(1 + Q(1-\widetilde{\theta})^{-1}\,\frac{|\gamma|}{\pi}\,e^{\,\|\mu\|C^*(h)}\big)^{-1} \in (0,1)\,. \tag{1.10}$$

Теорема 4. *Пусть* $\widehat{V}^{(s)} \in L^2(K;\mathcal{S}^{(s)}_M)$, $s=0,1$, $A \in L^2(K;\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 3$, $A_0 = 0$, $R > 0$ *и существуют вектор* $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ *и мера* $\mu \in \mathfrak{M}_h$, $h > 0$ *такие, что выполнены условия* (A), (B), (C), (D), (E) *и при этом* $\widehat{V}^{(s)}_N = 0$, $s = 0,1$, $A_N = 0$ *при всех* $N \in \Lambda^* : 2\pi|N_\perp| > R$. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *существуют числа* $\widetilde{a} = \widetilde{a}(C_2;\delta,R) \in (0,1)$ *и* $\varkappa_0 > 0$ *такие, что для* *всех* $\varkappa \geqslant \varkappa_0$, *всех векторов* $k \in \mathbb{R}^n : (k,\gamma) = \pi$ *и всех вектор-функций* $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$ *справедливо неравенство*

$$\|(\widehat{P}_*^{+} + \widetilde{a}\widehat{P}_*^{-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e) + \widehat{W})\varphi\|^2 =$$

$$= \|\widehat{P}_*^{+}(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e) + \widehat{W})\varphi\|^2 + \widetilde{a}^{\,2}\|\widehat{P}_*^{-}(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e) + \widehat{W})\varphi\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant (1-\delta)\,(C_2^2\,\|\widehat{G}^-\widehat{P}^{\,-}\varphi\|^2 + \widetilde{a}^{\,2}\,\|\widehat{G}^+\widehat{P}^{\,+}\varphi\|^2)\,.$$

Теорема 4 доказывается в § 2 и § 3.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Предположим, что функции $\widehat{V}^{(s)}$, $s=0,1$ и A удовлетворяют условиям теоремы 1 (при выборе некоторых вектора $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$ и меры $\mu \in \mathfrak{M}_h$). Так как выполнено условие (F), то (см. также (1.3)) для числа

$$\widetilde{\varepsilon} \doteq \frac{1}{4\sqrt{2}}\,C_2\big(1 + \frac{|\gamma|^2}{\pi^2}\,(C''(1))^2\big)^{-1/2}$$

существует число $R = R(\widetilde{\varepsilon}) > 0$ такое, что для всех $\varepsilon > 0$ и всех вектор-функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$

$$\|(\widehat{W} - \widehat{W}_{\{R\}})\varphi\| \leqslant \tag{1.11}$$
$$\leqslant \widetilde{\varepsilon}\,\big(\,\varepsilon\,\big(\,v(K)\sum_{N\,\in\,\Lambda^*}|k_{\|} + 2\pi N_{\|}|^2\,\|\varphi_N\|^2\,\big)^{1/2} + C''(\varepsilon)\|\varphi\|\,\big)\,.$$

При этом $(\widehat{W}_{\{R\}})_N = 0$ при всех $N \in \Lambda^* : 2\pi|N_\perp| > R$ и функции $\widehat{V}^{(s)}_{\{R\}}$, $s=0,1$ и $A_{\{R\}}$ удовлетворяют условиям (A), (B), (C), (D) и (E) (с теми же вектором $\gamma \in \Lambda\backslash\{0\}$, мерой $\mu \in \mathfrak{M}_h$ и константами $C(\varepsilon)$, C^*, τ, Q, $\widetilde{\theta}$). Поэтому для этих функций можно применить теорему 4, из которой, полагая $\delta = \frac{1}{2}$, получаем, что существуют числа $\widetilde{a} = \widetilde{a}(C_2;\frac{1}{2},R(\widetilde{\varepsilon})) \in (0,1)$ и $\varkappa_0 > 0$ такие, что для всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n : (k,\gamma) = \pi$ и всех вектор-функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$ выполняется неравенство

$$\|(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e) + \widehat{W}_{\{R\}})\varphi\|^2 \geqslant \frac{1}{2}\,(C_2^2\,\|\widehat{G}^-\widehat{P}^{\,-}\varphi\|^2 + \widetilde{a}^{\,2}\,\|\widehat{G}^+\widehat{P}^{\,+}\varphi\|^2)\,.$$

Выберем число $\varepsilon = \widetilde{a}(8\,\widetilde{\varepsilon})^{-1}$. Увеличивая, если нужно, число $\varkappa_0$, можно считать, что $\widetilde{a}\varkappa_0 \geqslant \pi|\gamma|^{-1}C_2$ и $\varepsilon\varkappa_0 \geqslant C''(\varepsilon)$. Тогда из (1.11) при $\varkappa \geqslant \varkappa_0$ следуют неравенства

$$\|(\widehat{W} - \widehat{W}_{\{R\}})\widehat{P}^{\,-}\varphi\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2\widetilde{\varepsilon}^{\,2}\,\big(\|\widehat{G}^-\widehat{P}^{\,-}\varphi\|^2 + (C''(1))^2\,\|\widehat{P}^{\,-}\varphi\|^2\,\big) \leqslant \frac{1}{16}\,C_2^2\,\|\widehat{G}^-\widehat{P}^{\,-}\varphi\|^2\,,$$

$$\|(\widehat{W}-\widehat{W}_{\{R\}})\widehat{P}^{+}\varphi\|^2\leqslant$$
$$\leqslant 2\widetilde{\varepsilon}^2\left(\varepsilon^2\,\|\widehat{G}^{-}\widehat{P}^{+}\varphi\|^2+(C''(\varepsilon))^2\|\widehat{P}^{+}\varphi\|^2\right)\leqslant$$
$$\leqslant 2\widetilde{\varepsilon}^2\left(\varepsilon^2+\frac{(C''(\varepsilon))^2}{\varkappa^2}\right)\|\widehat{G}^{+}\widehat{P}^{+}\varphi\|^2\leqslant\frac{\widetilde{a}^{\,2}}{16}\,\|\widehat{G}^{+}\widehat{P}^{+}\varphi\|^2\,.$$

Следовательно, при $\varkappa\geqslant\varkappa_0$ имеем

$$\|(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\varphi\|^2\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\,\|(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W}_{\{R\}})\varphi\|^2-2\,\|(\widehat{W}-\widehat{W}_{\{R\}})\widehat{P}^{-}\varphi\|^2-2\,\|(\widehat{W}-\widehat{W}_{\{R\}})\widehat{P}^{+}\varphi\|^2\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{8}\,C_2^2\,\|\widehat{G}^{-}\widehat{P}^{-}\varphi\|^2+\frac{\widetilde{a}^{\,2}}{8}\,\|\widehat{G}^{+}\widehat{P}^{+}\varphi\|^2\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{8}\,C_2^2\,\frac{\pi^2}{|\gamma|^2}\,\|\widehat{P}^{-}\varphi\|^2+\frac{\widetilde{a}^{\,2}\varkappa^2}{8}\,\|\widehat{P}^{+}\varphi\|^2\geqslant C_1^2\,\|\varphi\|^2\,,$$

где $C_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\pi|\gamma|^{-1}\,C_2\,.$ $\square$

§ 2. Доказательство теоремы 4

При фиксированном векторе $\gamma\in\Lambda\backslash\{0\}$ ($e=|\gamma|^{-1}\gamma$) для всех $\varepsilon\in(0,1)$ определим множества

$$\mathcal{C}(\varepsilon)=\mathcal{C}(k,\varkappa;\varepsilon)=\{N\in\Lambda^*:|\varkappa-|k_\perp+2\pi N_\perp||<\varepsilon\varkappa\}\,,$$

$k\in\mathbb{R}^n$, $\varkappa>0$.

В этом параграфе теорема 4 выводится из теоремы 5, которая является ее более слабым вариантом. Доказательство теоремы 5 приведено в следующем параграфе.

Теорема 5. *Пусть* $n\geqslant 3$, $\widehat{V}^{(s)}\in L^2(K;\mathcal{S}_M^{(s)})$, $s=0,1$, $A\in L^2(K;\mathbb{R}^n)$, $A_0=0$, $R>0$ *и существуют вектор* $\gamma\in\Lambda\backslash\{0\}$ *и мера* $\mu\in\mathfrak{M}_h$, $h>0$ *такие, что выполнены условия* (A), (B), (C), (D), (E) *и, кроме того,* $\widehat{V}_N^{(s)}=0$, $s=0,1$, $A_N=0$ *при всех* $N\in\Lambda^*:2\pi|N_\perp|>R$. *Тогда для любого* $\delta\in(0,1)$ *существуют числа* $a=a(C_2;\delta,R)\in(0,1)$ *и* $\varkappa_0>2R$ (*при этом число* $\varkappa_0$ *зависит от* δ, $|\gamma|$, h, $\|\mu\|$, R *и констант* $C(\varepsilon)$, C^*, τ, Q *и* $\widetilde{\theta}$) *такие, что для всех* $\varkappa\geqslant\varkappa_0$, *всех векторов* $k\in\mathbb{R}^n$: $(k,\gamma)=\pi$ *и всех вектор-функций* $\varphi\in\widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)\cap\mathcal{H}(\mathcal{C}(\frac{1}{2}))$ *справедливо неравенство*

$$\|\widehat{P}^{+}(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\varphi\|^2+a^2\|\widehat{P}^{-}(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\varphi\|^2\geqslant\qquad(2.1)$$
$$\geqslant(1-\delta)\,(C_2^2\,\|\widehat{G}^{-}\widehat{P}^{-}\varphi\|^2+a^2\,\|\widehat{G}^{+}\widehat{P}^{+}\varphi\|^2)\,,$$

где константа C_2 *определена равенством* (1.10).

З а м е ч а н и е 1. Так как на число $\varkappa_0$ накладывается ограничение $\varkappa_0 > 2R$, то для всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0$ и любой вектор-функции $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M) \cap \mathcal{H}(\mathcal{C}(\frac{1}{2}))$ имеем $(\widehat{W}\varphi)_N = 0$, если $N \in \Lambda^* : |k_\perp + 2\pi N_\perp| \leqslant \frac{\varkappa}{2} - R$ (в частности, если $N \in \Lambda^* : k_\perp + 2\pi N_\perp = 0$). Поэтому в левой части неравенства (2.1) ортогональные проекторы $\widehat{P}^{\,\pm}$ можно заменить на ортогональные проекторы $\widehat{P}^{\,\pm}_*$.

Лемма 1. *В условиях теоремы* 4 *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует число* $\widetilde{\varkappa}_0 = \widetilde{\varkappa}_0(\varepsilon) > 0$ *такое, что для всех* $\varkappa \geqslant \widetilde{\varkappa}_0$, *всех векторов* $k \in \mathbb{R}^n$ *и всех вектор-функций* $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M) \cap \mathcal{H}(\Lambda^*\backslash\mathcal{C}(\frac{1}{4}))$ *выполняется оценка*

$$\|\widehat{W}\varphi\| \leqslant \varepsilon\, \|\widehat{G}^-\varphi\|\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, положим $\widetilde{\varkappa}_0 = \frac{8}{\varepsilon}\, C(\frac{\varepsilon}{10})$ (где $C(\frac{\varepsilon}{10})$ — константа из условия (A)). Так как при всех $N \in \Lambda^*\backslash\mathcal{C}(\frac{1}{4})$ имеем $G^-_N(k;\varkappa) \geqslant \frac{\varkappa}{4}$ и $G^-_N(k;\varkappa) \geqslant \frac{1}{5}\,|k + 2\pi N|$, то (см. неравенство (1.1)) при всех $\varkappa \geqslant \widetilde{\varkappa}_0$ (всех $k \in \mathbb{R}^n$ и всех вектор-функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M) \cap \mathcal{H}(\Lambda^*\backslash\mathcal{C}(\frac{1}{4}))$)

$$\|\widehat{W}\varphi\| \leqslant \frac{\varepsilon}{10}\,\Big\|\sum_{j=1}^{n}\big(k_j - i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,\big)\,\widehat{\alpha}_j\varphi\,\Big\| + C(\frac{\varepsilon}{10})\,\|\varphi\| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{10}\, v^{1/2}(K)\,\Big(\sum_{N\,\in\,\Lambda^*\backslash\mathcal{C}(\frac{1}{4})} |k + 2\pi N|^2\,\|\varphi_N\|^2\,\Big)^{1/2} + C(\frac{\varepsilon}{10})\,\|\varphi\| \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\,\frac{\varepsilon}{2} + \frac{4}{\varkappa}\,C(\frac{\varepsilon}{10})\,\Big)\,\|\widehat{G}^-\varphi\| \leqslant \varepsilon\,\|\widehat{G}^-\varphi\|\,.$$

□

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. Чтобы в дальнейшем не «загромождать» формулы, обозначим $\delta_1 = \frac{\delta}{3}$. Пусть $\widetilde{a} = a(C_2\,;\delta_1, R) \in (0,1)$ и $\varkappa_0$ — числа, определяемые в теореме 5. Положим

$$\varepsilon = \frac{\delta_1}{\sqrt{6(1-\delta_1)}}\,\min\{C_2, \widetilde{a}\}\,.$$

Увеличивая, если нужно, число $\varkappa_0$, будем считать, что $\varkappa_0 \geqslant 4R$ и $\varkappa_0 \geqslant \widetilde{\varkappa}_0(\varepsilon)$, где $\widetilde{\varkappa}_0(\varepsilon)$ — число из леммы 1. Будем далее предполагать, что $\varkappa \geqslant \varkappa_0$ и $k \in \mathbb{R}^n : (k,\gamma) = \pi$. Для всех вектор-функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$ справедливо равенство

$$\|(\widehat{P}^{\,+} + \widetilde{a}\widehat{P}^{\,-})(\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) + \widehat{W})\,\varphi\|^2 = \qquad (2.2)$$

$$= \|\widehat{P}^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})}(\widehat{P}^{+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi\|^2+$$
$$+\|\widehat{P}^{\Lambda^*\setminus\mathcal{C}(\frac{1}{2})}(\widehat{P}^{+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi\|^2\,.$$

Оценим слагаемые в правой части (2.2). Так как $\varkappa\geqslant\varkappa_0\geqslant 4R$ и $\widehat{W}_N=0$ для всех $N\in\Lambda^*:2\pi|N_\perp|>R,$ то заведомо $\widehat{W}_N=0$ для всех $N\in\Lambda^*:$ $2\pi|N_\perp|>\frac{\varkappa}{4}$. Это утверждение (без пояснений) будет использоваться ниже для получения необходимых оценок. Имеем

$$\|\widehat{P}^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})}(\widehat{P}^{+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi\| = \tag{2.3}$$
$$= \|\widehat{P}^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})}(\widehat{P}^{+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})(\varphi^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})}+\varphi^{\mathcal{C}(\frac{3}{4})\setminus\mathcal{C}(\frac{1}{2})})\|\geqslant$$
$$\geqslant\|(\widehat{P}^{+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})}\|-$$
$$-\|\widehat{P}^{\Lambda^*\setminus\mathcal{C}(\frac{1}{2})}(\widehat{P}^{+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})}\|-$$
$$-\|\widehat{P}^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})}(\widehat{P}^{+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi^{\mathcal{C}(\frac{3}{4})\setminus\mathcal{C}(\frac{1}{2})}\|\,.$$

При этом из леммы 1 следуют оценки

$$\|\widehat{P}^{\Lambda^*\setminus\mathcal{C}(\frac{1}{2})}(\widehat{P}^{+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})}\| = \tag{2.4}$$
$$=\|\,\widehat{P}^{\Lambda^*\setminus\mathcal{C}(\frac{1}{2})}(\widehat{P}^{+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{-})\widehat{W}\varphi^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})\setminus\mathcal{C}(\frac{1}{4})}\,\|\leqslant$$
$$\leqslant\|\widehat{W}\varphi^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})\setminus\mathcal{C}(\frac{1}{4})}\|\leqslant\varepsilon\,\|\widehat{G}^{-}\varphi^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})\setminus\mathcal{C}(\frac{1}{4})}\|\,,$$
$$\|\widehat{P}^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})}(\widehat{P}^{+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi^{\mathcal{C}(\frac{3}{4})\setminus\mathcal{C}(\frac{1}{2})}\| = \tag{2.5}$$
$$=\|\widehat{P}^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})}(\widehat{P}^{+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{-})\widehat{W}\varphi^{\mathcal{C}(\frac{3}{4})\setminus\mathcal{C}(\frac{1}{2})}\|\leqslant\|\widehat{W}\varphi^{\mathcal{C}(\frac{3}{4})\setminus\mathcal{C}(\frac{1}{2})}\|\leqslant\varepsilon\,\|\widehat{G}^{-}\varphi^{\mathcal{C}(\frac{3}{4})\setminus\mathcal{C}(\frac{1}{2})}\|.$$

С другой стороны, из теоремы 5 получаем

$$\|(\widehat{P}^{+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})}\|^2\geqslant$$
$$\geqslant(1-\delta_1)\,(C_2^2\,\|\widehat{G}^{-}\widehat{P}^{-}\varphi^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})}\|^2+\widetilde{a}^{\,2}\,\|\widehat{G}^{+}\widehat{P}^{+}\varphi^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})}\|^2)$$

и, следовательно, оценки (2.3), (2.4) и (2.5) приводят к неравенству

$$\|\widehat{P}^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})}(\widehat{P}^{+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi\|^2\geqslant \tag{2.6}$$
$$\geqslant(1-\delta_1)\,\|(\widehat{P}^{+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})}\|^2-$$
$$-\,\frac{2(1-\delta_1)}{\delta_1}\,\|\widehat{P}^{\Lambda^*\setminus\mathcal{C}(\frac{1}{2})}(\widehat{P}^{+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})}\|^2-$$
$$-\,\frac{2(1-\delta_1)}{\delta_1}\,\|\widehat{P}^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})}(\widehat{P}^{+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi^{\mathcal{C}(\frac{3}{4})\setminus\mathcal{C}(\frac{1}{2})}\|^2\geqslant$$

$$\geqslant (1-\delta_1)^2\,(C_2^2\,\|\widehat{G}^-\widehat{P}^-\varphi^{\mathcal{C}(\frac12)}\,\|^2+\widetilde{a}^2\,\|\widehat{G}^+\widehat{P}^+\varphi^{\mathcal{C}(\frac12)}\,\|^2)-$$
$$-\;\frac{2(1-\delta_1)}{\delta_1}\;\varepsilon^2\,\big(\,\|\widehat{G}^-\varphi^{\mathcal{C}(\frac12)\,\setminus\,\mathcal{C}(\frac14)}\,\|^2+\|\widehat{G}^-\varphi^{\mathcal{C}(\frac34)\,\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,\|^2\big)\geqslant$$
$$\geqslant (1-2\delta_1)\,(C_2^2\,\|\widehat{G}^-\widehat{P}^-\varphi^{\mathcal{C}(\frac12)}\,\|^2+\widetilde{a}^2\,\|\widehat{G}^+\widehat{P}^+\varphi^{\mathcal{C}(\frac12)}\,\|^2)-$$
$$-\;\frac{2(1-\delta_1)}{\delta_1}\;\varepsilon^2\,\|\widehat{G}^-\varphi^{\mathcal{C}(\frac34)\,\setminus\,\mathcal{C}(\frac14)}\,\|^2\,.$$

Оценим теперь второе слагаемое в правой части (2.2). Используя лемму 1, получаем

$$\|\widehat{P}^{\,\Lambda^*\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,(\widehat{P}^{\,+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{\,-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi\|=$$
$$=\;\|\widehat{P}^{\,\Lambda^*\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,(\widehat{P}^{\,+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{\,-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,(\varphi^{\,\Lambda^*\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}+\varphi^{\mathcal{C}(\frac12)\,\setminus\,\mathcal{C}(\frac14)})\|\geqslant$$
$$\geqslant\|(\widehat{P}^{\,+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{\,-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi^{\,\Lambda^*\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,\|-$$
$$-\,\|\widehat{P}^{\mathcal{C}(\frac12)\,\setminus\,\mathcal{C}(\frac14)}\,(\widehat{P}^{\,+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{\,-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi^{\,\Lambda^*\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,\|-$$
$$-\,\|\widehat{P}^{\,\Lambda^*\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,(\widehat{P}^{\,+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{\,-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi^{\mathcal{C}(\frac12)\,\setminus\,\mathcal{C}(\frac14)}\,\|=$$
$$=\;\|(\widehat{P}^{\,+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{\,-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi^{\,\Lambda^*\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,\|-$$
$$-\,\|\widehat{P}^{\mathcal{C}(\frac12)\,\setminus\,\mathcal{C}(\frac14)}\,(\widehat{P}^{\,+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{\,-})\widehat{W}\varphi^{\mathcal{C}(\frac34)\,\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,\|-$$
$$-\,\|\widehat{P}^{\,\Lambda^*\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,(\widehat{P}^{\,+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{\,-})\widehat{W}\varphi^{\mathcal{C}(\frac12)\,\setminus\,\mathcal{C}(\frac14)}\,\|\geqslant$$
$$\geqslant\|(\widehat{P}^{\,+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{\,-})\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)\,\varphi^{\,\Lambda^*\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,\|-$$
$$-\,\|\widehat{W}\varphi^{\,\Lambda^*\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,\|-\|\widehat{W}\varphi^{\mathcal{C}(\frac34)\,\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,\|-\|\widehat{W}\varphi^{\mathcal{C}(\frac12)\,\setminus\,\mathcal{C}(\frac14)}\,\|\geqslant$$
$$\geqslant\|(\widehat{P}^{\,+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{\,-})\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)\,\varphi^{\,\Lambda^*\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,\|-$$
$$-\,\varepsilon\,\big(\,\|\widehat{G}^-\varphi^{\,\Lambda^*\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,\|+\|\widehat{G}^-\varphi^{\mathcal{C}(\frac34)\,\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,\|+\|\widehat{G}^-\varphi^{\mathcal{C}(\frac12)\,\setminus\,\mathcal{C}(\frac14)}\,\|\,\big)\,.$$

Поэтому (принимая во внимание равенства (1.9) и выбор числа $C_2\in(0,1)$)

$$\|\widehat{P}^{\,\Lambda^*\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,(\widehat{P}^{\,+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{\,-})(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi\|^2\geqslant$$
$$\geqslant(1-2\delta_1)\,\|(\widehat{P}^{\,+}+\widetilde{a}\widehat{P}^{\,-})\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)\,\varphi^{\,\Lambda^*\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,\|^2-$$
$$-\;\frac{3(1-2\delta_1)}{2\delta_1}\;\varepsilon^2\,\|\widehat{G}^-\varphi^{\,\Lambda^*\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,\|^2-$$
$$-\;\frac{3(1-2\delta_1)}{2\delta_1}\;\varepsilon^2\,\big(\,\|\widehat{G}^-\varphi^{\mathcal{C}(\frac34)\,\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,\|^2+\|\widehat{G}^-\varphi^{\mathcal{C}(\frac12)\,\setminus\,\mathcal{C}(\frac14)}\,\|^2\,\big)=$$
$$=\;(1-2\delta_1)\,\big(\,\|\widehat{G}^-\widehat{P}^-\varphi^{\,\Lambda^*\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,\|^2+\widetilde{a}^2\,\|\widehat{G}^+\widehat{P}^+\varphi^{\,\Lambda^*\setminus\,\mathcal{C}(\frac12)}\,\|^2\,\big)-$$

$$
\begin{gathered}
-\frac{3(1-2\delta_1)}{2\delta_1}\,\varepsilon^2\left(\|\widehat{G}^-\varphi^{\Lambda^*\setminus\mathcal{C}(\frac12)}\|^2+\|\widehat{G}^-\varphi^{\mathcal{C}(\frac34)\setminus\mathcal{C}(\frac14)}\|^2\right)\geqslant \\
\geqslant(1-2\delta_1)\left(C_2^2\,\|\widehat{G}^-\widehat{P}^-\varphi^{\Lambda^*\setminus\mathcal{C}(\frac12)}\|^2+\widetilde{a}^2\,\|\widehat{G}^+\widehat{P}^+\varphi^{\Lambda^*\setminus\mathcal{C}(\frac12)}\|^2\right)- \\
-\frac{2(1-\delta_1)}{\delta_1}\,\varepsilon^2\left(\|\widehat{G}^-\varphi^{\Lambda^*\setminus\mathcal{C}(\frac12)}\|^2+\|\widehat{G}^-\varphi^{\mathcal{C}(\frac34)\setminus\mathcal{C}(\frac14)}\|^2\right).
\end{gathered}
$$

Отсюда и из (2.2), (2.6) вытекает оценка

$$
\begin{gathered}
\|(\widehat{P}^++\widetilde{a}\widehat{P}^-)(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi\|^2\geqslant \\
\geqslant(1-2\delta_1)\left(C_2^2\,\|\widehat{G}^-\widehat{P}^-\varphi\|^2+\widetilde{a}^2\,\|\widehat{G}^+\widehat{P}^+\varphi\|^2\right)-\frac{6(1-\delta_1)}{\delta_1}\,\varepsilon^2\,\|\widehat{G}^-\varphi\|^2,
\end{gathered}
$$

которая вместе с оценкой

$$
\begin{gathered}
\frac{6(1-\delta_1)}{\delta_1}\,\varepsilon^2\,\|\widehat{G}^-\varphi\|^2=\frac{6(1-\delta_1)}{\delta_1}\,\varepsilon^2\left(\|\widehat{G}^-\widehat{P}^-\varphi\|^2+\|\widehat{G}^-\widehat{P}^+\varphi\|^2\right)\leqslant \\
\leqslant\delta_1\left(C_2^2\,\|\widehat{G}^-\widehat{P}^-\varphi\|^2+\widetilde{a}^2\,\|\widehat{G}^-\widehat{P}^+\varphi\|^2\right)\leqslant \\
\leqslant\delta_1\left(C_2^2\,\|\widehat{G}^-\widehat{P}^-\varphi\|^2+\widetilde{a}^2\,\|\widehat{G}^+\widehat{P}^+\varphi\|^2\right)
\end{gathered}
$$

приводит, наконец, к требуемому в теореме 4 неравенству. □

§ 3. Доказательство теоремы 5

Покажем вначале, что при доказательстве теоремы 5 можно считать, что магнитный потенциал A является тригонометрическим многочленом. Действительно, пусть функции $\widehat{V}^{(s)}$, $s=0,1$ и A удовлетворяют условиям теоремы 5 (то есть для некоторых вектора $\gamma\in\Lambda\backslash\{0\}$ и меры $\mu\in\mathfrak{M}_h$, $h>0$ выполнены условия (A), (B), (C), (D) и (E), при этом $A_0=0$ и $\widehat{V}_N^{(s)}=0$, $s=0,1$ и $A_N=0$ для всех $N\in\Lambda^*:2\pi|N_\perp|>R$). Пусть $\mathcal{F}^\circ:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ — неотрицательная функция из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ такая, что для функции

$$
\mathbb{R}^n\ni p\to\widehat{\mathcal{F}}^\circ(p)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}^\circ(x)\,e^{i(p,x)}\,d^nx
$$

имеем $\widehat{\mathcal{F}}^\circ(0)=1$ и $\widehat{\mathcal{F}}^\circ(p)=0$ при $|p|\geqslant1$ (функцию $\mathcal{F}^\circ$ можно выбрать совпадающей с функцией $\mathcal{F}:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$, рассматриваемой во введении, если сделать замену $\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}^n$). Обозначим

$$
A^{\{r\}}(x)=r^n\int_{\mathbb{R}^n}A(x-y)\,\mathcal{F}^\circ(ry)\,d^ny\,,\ r>0\,,\ x\in\mathbb{R}^n\,.
$$

Для любого $r > 0$ функции $\widehat{V}^{(s)}$ и $A^{\{r\}}$ (как и функции $\widehat{V}^{(s)}$ и A) удовлетворяют всем условиям теоремы 5 (с теми же вектором γ, мерой μ и константами $C(\varepsilon)$, C^*, τ, Q и $\widetilde{\theta}$ в условиях (A), (B), (C) и (E)). При этом

$$(A^{\{r\}})_N = \widehat{\mathcal{F}}^{\circ}\Big(-\frac{2\pi N}{r}\Big)\, A_N\,,\ N \in \Lambda^*\,,$$

и, следовательно, $(A^{\{r\}})_N = 0$ при $2\pi|N| \geqslant r$. Если теперь предположить, что теорема 5 доказана для матричнозначных функций $\widehat{V}^{(s)}$, $s = 0,1$ и для магнитных потенциалов $A^{\{r\}}$ (которые являются тригонометрическими многочленами), $r > 0$, то для любого $\delta \in (0,1)$ найдутся числа $\varkappa_0 > 2R$ и $a \in (0,1)$ (не зависящие от числа $r > 0$) такие, что для всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0$, всех векторов $k \in \mathbb{R}^n : (k,\gamma) = \pi$ и всех вектор-функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M) \cap \mathcal{H}(\mathcal{C}(\frac{1}{2}))$ будет выполняться неравенство

$$\|(\widehat{P}^{\,+} + a\widehat{P}^{\,-})\,(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e) + \widehat{V} - \sum_{j=1}^{n} A_j^{\{r\}}\widehat{\alpha}_j\,)\phi\|^2 \geqslant \tag{3.1}$$

$$\geqslant (1-\delta)\,(\,C_2^2\,\|\widehat{G}^{-}\widehat{P}^{\,-}\varphi\|^2 + a^2\,\|\widehat{G}^{+}\widehat{P}^{\,+}\varphi\|^2\,)\,.$$

С другой стороны, $A \in L^2(K;\mathbb{R}^n)$ и $\|A - A^{\{r\}}\|_{L^2(K;\mathbb{R}^n)} \to 0$ при $r \to +\infty$, поэтому в неравенстве (3.1), предполагая, что вектор-функция φ является тригонометрическим многочленом, можно при $r \to +\infty$ сделать предельный переход, что приводит к неравенству (2.1). Так как тригонометрические многочлены из множества $\mathcal{H}(\mathcal{C}(\frac{1}{2}))$ плотны в $\widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M) \cap \mathcal{H}(\mathcal{C}(\frac{1}{2}))$ (по норме пространства $\widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$) и для матричнозначных функций $\widehat{V}^{(s)}$, $s = 0,1$ и магнитного потенциала A выполняется условие (A), то отсюда следует, что неравенство (2.1) справедливо для всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0$, всех $k \in \mathbb{R}^n : (k,\gamma) = \pi$ и всех вектор-функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M) \cap \mathcal{H}(\mathcal{C}(\frac{1}{2}))$. Итак, не ограничивая общности, будем далее считать, что магнитный потенциал $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является тригонометрическим многочленом.

Так как число $h > 0$ можно произвольно уменьшать, то в дальнейшем будем также считать, что $h \leqslant |\gamma|^{-1}$.

Воспользуемся методом доказательства, предложенным в [14]. Ограничения на число $\varkappa_0 > 2R$ будут уточняться по ходу доказательства, при этом когда будут накладываться дополнительные ограничения, то будут предполагаться выполненными и все ограничения, сделанные ранее. Пусть $\delta \in (0,1)$. Для удобства введем также обозначения $\delta_1 = \frac{\delta}{8}$, $\delta_2 = \frac{\delta}{4}$. Положим

$$C_3 = 1 + \tau + \frac{|\gamma|}{\pi}\,Q\,.$$

Выберем число $\widetilde{\varepsilon}\in(0,\frac{\delta}{8}]$ так, что

$$\widetilde{\varepsilon}\,C_3^2<\frac{1}{400}\,\delta^2\,(1-\widetilde{\varepsilon})\,C_2^2\,.$$

Если $\varkappa\geqslant\varkappa_0>2R$, $k\in\mathbb{R}^n$, $N\in\mathcal{C}(\frac{1}{2})$ и $N'\in\Lambda^*:2\pi|N'_\perp|\leqslant R$, то $|k_\perp+2\pi(N_\perp+N'_\perp)|>\frac{\varkappa}{2}-R>0$ и

$$|\,\widetilde{e}(k+2\pi(N+N'))-\widetilde{e}(k+2\pi N)\,|<\frac{2R}{\varkappa}\,. \tag{3.2}$$

Существуют числа $\widetilde{c}=\widetilde{c}(\widetilde{\varepsilon})>0$ и $\varkappa'_0>(\widetilde{c}+4)R$ такие, что для каждого числа $\varkappa\geqslant\varkappa_0\geqslant\varkappa'_0$ найдутся (непустые) непересекающиеся открытые (в $S_{n-2}(e)$) множества $\widetilde{\Omega}_\lambda\subset S_{n-2}(e)$ и векторы $\widetilde{e}^{\,\lambda}\in\widetilde{\Omega}_\lambda$, $\lambda\in\mathcal{L}=\{1,\dots,\lambda_0(n,\widetilde{\varepsilon},R;\varkappa)\}$ такие, что

1) $|\,\widetilde{e}-\widetilde{e}^{\,\lambda}\,|<\widetilde{\rho}=\widetilde{c}\,\frac{R}{\varkappa}$ для всех $\widetilde{e}\in\widetilde{\Omega}_\lambda$;

2) $|\,\widetilde{e}'-\widetilde{e}''\,|>\frac{8R}{\varkappa}$ для векторов $\widetilde{e}'$ и $\widetilde{e}''$ из разных множеств $\widetilde{\Omega}_\lambda$;

3a) $\operatorname{meas}S_{n-2}(e)\backslash\bigcup\limits_\lambda\widetilde{\Omega}_\lambda<\frac{1}{2}\,\widetilde{\varepsilon}\,\operatorname{meas}S_{n-2}(e)$, где meas — инвариантная мера на $(n-2)$-мерной сфере $S_{n-2}(e)$ («площадь» поверхности).

Множества $\widetilde{\Omega}_\lambda$ и векторы $\widetilde{e}^{\,\lambda}$ можно заменить (с сохранением перечисленных выше свойств) на множества $\widehat{\Theta}\,\widetilde{\Omega}_\lambda$ и векторы $\widehat{\Theta}\,\widetilde{e}^{\,\lambda}$, где $\widehat{\Theta}$ — любое ортогональное преобразование подпространства $\{x\in\mathbb{R}^n:(x,\gamma)=0\}$. Поэтому для любых вектора $k\in\mathbb{R}^n:(k,\gamma)=\pi$ и вектор-функции $\varphi\in\widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)\cap\mathcal{H}(\mathcal{C}(\frac{1}{2}))$, выбирая подходящее ортогональное преобразование $\widehat{\Theta}$ подпространства $\{x\in\mathbb{R}^n:(x,\gamma)=0\}$ (и оставляя прежние обозначения $\widetilde{\Omega}_\lambda$ и $\widetilde{e}^{\,\lambda}$ вместо $\widehat{\Theta}\widetilde{\Omega}_\lambda$ и $\widehat{\Theta}\,\widetilde{e}^{\,\lambda}$), можно также добиться выполнения условия

3b)

$$\sum_{N\in\mathcal{C}\,(\frac{1}{2}):\ \widetilde{e}(k+2\pi N)\notin\bigcup\limits_\lambda\widetilde{\Omega}_\lambda}\|\,\widehat{G}^{\pm}_N(k;\varkappa)\,\widehat{P}^{\pm}_{\widetilde{e}(k+2\pi N)}\,\varphi_N\,\|^2\leqslant\widetilde{\varepsilon}\,v^{-1}(K)\,\|\,\widehat{G}^{\pm}\widehat{P}^{\pm}\varphi\,\|^2$$

(справедливы два неравенства: для верхнего «$+$» и для нижнего «$-$» знаков).

Множества $\widetilde{\Omega}_\lambda$ и векторы $\widetilde{e}^{\,\lambda}$ зависят от n, γ, $\widetilde{\varepsilon}$, R, $\varkappa$, а также от выбираемых вектора $k\in\mathbb{R}^n:(k,\gamma)=\pi$ и вектор-функции $\varphi\in\widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)\cap\mathcal{H}(\mathcal{C}(\frac{1}{2}))$.

Обозначим $\rho=\widetilde{\rho}+\frac{2R}{\varkappa}$, $\rho'=\widetilde{\rho}+\frac{4R}{\varkappa}$. Положим

$$\Omega_\lambda=\{\widetilde{e}\in S_{n-2}(e):|\,\widetilde{e}-\widetilde{e}'\,|<\frac{2R}{\varkappa}\ \text{для некоторого}\ \widetilde{e}'\in\widetilde{\Omega}_\lambda\}\,,$$

$$\Omega'_\lambda = \{\widetilde{e} \in S_{n-2}(e) : |\,\widetilde{e} - \widetilde{e}'\,| < \frac{4R}{\varkappa} \text{ для некоторого } \widetilde{e}' \in \widetilde{\Omega}_\lambda\}\,;$$

$\widetilde{\Omega}_\lambda \subset \Omega_\lambda \subset \Omega'_\lambda$, множества Ω'_λ для разных индексов $\lambda \in \mathcal{L}$ не пересекаются и $|\,\widetilde{e}' - \widetilde{e}''\,| > \frac{4R}{\varkappa}$ для векторов $\widetilde{e}'$ и $\widetilde{e}''$ из разных множеств Ω_λ.

Обозначим

$$\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda = \widetilde{\mathcal{K}}_\lambda(k,\varkappa;\varphi) = \{N \in \mathcal{C}(\,\frac{1}{2}\,) : \widetilde{e}(k + 2\pi N) \in \widetilde{\Omega}_\lambda\}\,,$$

$$\mathcal{K}_\lambda = \mathcal{K}_\lambda(k,\varkappa;\varphi) = \{N \in \mathcal{C}(\,\frac{1}{2}\,) : \widetilde{e}(k + 2\pi N) \in \Omega_\lambda\}\,,$$

$$\mathcal{K}'_\lambda = \mathcal{K}'_\lambda(k,\varkappa;\varphi) = \{N \in \mathcal{C}(\,\frac{1}{2}\,) : \widetilde{e}(k + 2\pi N) \in \Omega'_\lambda\}\,.$$

Для выбранной вектор-функции $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M) \cap \mathcal{H}(\mathcal{C}(\frac{1}{2})$ условие 3b) означает, что

$$\|\,\widehat{G}^{\pm}\widehat{P}^{\pm}\varphi^{\mathcal{C}(\frac{1}{2})\setminus\bigcup\limits_{\lambda}\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}\,\|^2 \leqslant \widetilde{\varepsilon}\,\|\,\widehat{G}^{\pm}\widehat{P}^{\pm}\varphi\,\|^2\,. \tag{3.3}$$

Не ограничивая общности, можно далее считать, что $\mathcal{E}_2 = e$. Для каждого индекса $\lambda \in \mathcal{L}$ (при заданных векторе k, числе $\varkappa$ и вектор-функции φ) выберем (какую-либо) ортогональную систему векторов $\mathcal{E}_j^{(\lambda)} \in S_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, $j = 1,\dots,n$ так, что $\mathcal{E}_1^{(\lambda)} = \widetilde{e}^{\lambda}$, $\mathcal{E}_2^{(\lambda)} = \mathcal{E}_2 = e$. Через $x_j^{(\lambda)} = (x,\mathcal{E}_j^{(\lambda)})$ будем обозначать координаты векторов $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\mathcal{E}_j \in \mathbb{R}^n$ ($k_j^{(\lambda)}$, $N_j^{(\lambda)}$, $A_j^{(\lambda)}$ и $\widetilde{A}_j^{(\lambda)}$ — соответствующие координаты векторов $k \in \mathbb{R}^n$, $N \in \Lambda^*$, A и $\widetilde{A}(\widetilde{e}^{\lambda};.)$). Пусть $\mathcal{E}_j^{(\lambda)} = \sum\limits_{l=1}^{n} T_{lj}^{(\lambda)}\mathcal{E}_l$, $j = 1,\dots,n$. Тогда $A_j^{(\lambda)} = \sum\limits_{l=1}^{n} T_{lj}^{(\lambda)} A_l$ и $\widetilde{A}_j^{(\lambda)}(.) = \sum\limits_{l=1}^{n} T_{lj}^{(\lambda)}\widetilde{A}_l(\widetilde{e}^{\lambda};.)$. Обозначим $\widehat{\alpha}_j^{(\lambda)} = \sum\limits_{l=1}^{n} T_{lj}^{(\lambda)}\widehat{\alpha}_l$, $j = 1,\dots,n$ (матрицы $\widehat{\alpha}_j^{(\lambda)} \in \mathcal{S}_M$ удовлетворяют тем же антикоммутационным соотношениям, что и матрицы $\widehat{\alpha}_j$). Справедливо равенство

$$\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) - \sum_{j=1}^{n} A_j\widehat{\alpha}_j = \sum_{j=1}^{n}(k_j^{(\lambda)} + i\varkappa e_j^{(\lambda)} - i\,\frac{\partial}{\partial x_j^{(\lambda)}} - A_j^{(\lambda)})\,\widehat{\alpha}_j^{(\lambda)}\,,$$

где $e_j^{(\lambda)} = 1$ при $j = 2$ и $e_j^{(\lambda)} = 0$ при $j \neq 2$.

Для коэффициентов Фурье $(\widetilde{A}_j^{(\lambda)})_N$ функций $\widetilde{A}_j^{(\lambda)}$, $j = 1,\dots,n$ имеем $(\widetilde{A}_j^{(\lambda)})_N = \widehat{\mu}(2\pi N_1^{(\lambda)})(A_j^{(\lambda)})_N$, если $N_2^{(\lambda)} = N_2 = 0$ и $(\widetilde{A}_j^{(\lambda)})_N = 0$, если $N_2^{(\lambda)} \neq 0$ (где $(A_j^{(\lambda)})_N$ — коэффициенты Фурье функций $A_j^{(\lambda)}$, $N \in \Lambda^*$).

Для $s=1,2$ и $\lambda\in\mathcal{L}$ определим периодические с решеткой периодов Λ тригонометрические многочлены $\Phi^{(s,\lambda)}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, имеющие коэффициенты Фурье $\Phi_N^{(1,\lambda)}=\Phi_N^{(2,\lambda)}=0$, если $N_1^{(\lambda)}=N_2^{(\lambda)}=0$, и

$$\Phi_N^{(1,\lambda)}=\big(2\pi i\,((N_1^{(\lambda)})^2+(N_2^{(\lambda)})^2)\big)^{-1}\big(N_1^{(\lambda)}(A_1^{(\lambda)}-\widetilde{A}_1^{(\lambda)})_N+N_2^{(\lambda)}(A_2^{(\lambda)}-\widetilde{A}_2^{(\lambda)})_N\big)\,,$$

$$\Phi_N^{(2,\lambda)}=-\big(2\pi i\,((N_1^{(\lambda)})^2+(N_2^{(\lambda)})^2)\big)^{-1}\big(N_2^{(\lambda)}(A_1^{(\lambda)}-\widetilde{A}_1^{(\lambda)})_N-N_1^{(\lambda)}(A_2^{(\lambda)}-\widetilde{A}_2^{(\lambda)})_N\big)$$

в противном случае.

Лемма 2. *Существует константа $C^*(h)>0$ такая, что для всех $s=1,2$ и $\lambda\in\mathcal{L}$*

$$\|\Phi^{(s,\lambda)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\leqslant\frac{1}{4}\,\|\mu\|\,C^*(h)\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем любую функцию $\eta(.)\in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, для которой $\eta(\xi)=0$ при $\xi\leqslant\pi$, $0\leqslant\eta(\xi)\leqslant1$ при $\pi<\xi\leqslant2\pi$ и $\eta(\xi)=1$ при $\xi>2\pi$. При $\xi_1\,,\xi_2\in\mathbb{R}$ (и $\xi_1^2+\xi_2^2>0$) определим функцию

$$G(\xi_1,\xi_2)=\frac{\xi_1}{\xi_1^2+\xi_2^2}\int_0^{+\infty}\frac{\partial\eta(\xi)}{\partial\xi}\,J_0\,(\xi\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\,)\,d\xi\,,$$

где $J_0(.)$ — функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка. Справедлива оценка

$$|G(\xi_1,\xi_2)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}\,. \tag{3.4}$$

Из выбора функции $\eta(.)$ следует, что

$$|G(\xi_1,\xi_2)|\cdot(\xi_1^2+\xi_2^2)^\beta\to0 \tag{3.5}$$

при $\xi_1^2+\xi_2^2\to+\infty$ для всех $\beta\geqslant0$ (поэтому, в частности, $G(.,.)\in L^q(\mathbb{R}^2)$, $q\in[1,2)$). Обозначим

$$G_1(t;\xi_1,\xi_2)=t^{-1}G(t^{-1}\xi_1\,,t^{-1}\xi_2)\,,\ t>0\,;$$

$G_2(t;\xi_1,\xi_2)\doteq G_1(t;\xi_2,\xi_1)$. Для произвольной непрерывной периодической с решеткой периодов Λ функции $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ определим функции

$$(F*_\lambda G_s(t;.,.))(x)=$$

$$=\iint_{\mathbb{R}^2}G_s(t;\xi_1,\xi_2)\,F(x-\xi_1\widetilde{e}^{\,\lambda}-\xi_2e)\,d\xi_1d\xi_2\,,\ x\in\mathbb{R}^n\,,\ s=1,2\,,$$

для которых $(F*_\lambda G_s(t;.,.))_N=0$, если $N_1^{(\lambda)}=N_2^{(\lambda)}=0$, и

$$(F*_\lambda G_s(t;.,.))_N=-\frac{iN_s^{(\lambda)}}{(N_1^{(\lambda)})^2+(N_2^{(\lambda)})^2}\,\eta\big(2\pi t\sqrt{(N_1^{(\lambda)})^2+(N_2^{(\lambda)})^2}\,\big)\,F_N$$

в противном случае (где $N \in \Lambda^*$). Если $N_2^{(\lambda)} = 0$ и $|N_1^{(\lambda)}| \leqslant h$, то $(A(.) - \widetilde{A}(\widetilde{e}^{\,\lambda};.))_N = 0$. С другой стороны, при $N_2^{(\lambda)} \neq 0$ имеем $|N_2^{(\lambda)}| = |\gamma|^{-1}|(N,\gamma)| \geqslant |\gamma|^{-1} \geqslant h$. Поэтому справедливы равенства

$$2\pi\,\Phi^{(1,\lambda)} = (A_1^{(\lambda)} - \widetilde{A}_1^{(\lambda)}) *_\lambda G_1(h^{-1};.,.) + (A_2^{(\lambda)} - \widetilde{A}_2^{(\lambda)}) *_\lambda G_2(h^{-1};.,.)\,, \tag{3.6}$$

$$2\pi\,\Phi^{(2,\lambda)} = -\,(A_1^{(\lambda)} - \widetilde{A}_1^{(\lambda)}) *_\lambda G_2(h^{-1};.,.) + (A_2^{(\lambda)} - \widetilde{A}_2^{(\lambda)}) *_\lambda G_1(h^{-1};.,.)\,. \tag{3.7}$$

Из (3.4) следуют оценки

$$|G_s(h^{-1};\xi_1,\xi_2)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}\ ,\ s = 1,2\,,$$

поэтому из (0.7) для всех $x \in \mathbb{R}^n$ получаем

$$\iint_{\xi_1^2+\xi_2^2\leqslant 1} |G_s(h^{-1};\xi_1,\xi_2)| \cdot |A(x-\xi_1\widetilde{e}^{\,\lambda}-\xi_2 e)|\,d\xi_1 d\xi_2 \leqslant C^*\,,$$

что вместе с (3.5) означает, что существует константа $C^*(h) > 0$ (зависящая от h и константы C^*) такая, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и всех $s = 1,2$ и $\lambda \in \mathcal{L}$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |G_s(h^{-1};\xi_1,\xi_2)| \cdot |A(x-\xi_1\widetilde{e}^{\,\lambda}-\xi_2 e)|\,d\xi_1 d\xi_2 \leqslant \frac{\pi}{8}\ C^*(h)\,,$$

следовательно, также

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |G_s(h^{-1};\xi_1,\xi_2)| \cdot |\widetilde{A}(\widetilde{e}^{\,\lambda};x-\xi_1\widetilde{e}^{\,\lambda}-\xi_2 e)|\,d\xi_1 d\xi_2 \leqslant \frac{\pi}{8}\ C^*(h)\,.$$

Отсюда и из равенств (3.6) и (3.7) (учитывая, что $\|\mu\| \geqslant \widehat{\mu}(0) = 1$) при $s = 1,2$ и при всех $\lambda \in \mathcal{L}$ получаем требуемую оценку. □

Обозначим

$$\widehat{\mathcal{D}}_0^{(\lambda)} = \big(k_1^{(\lambda)} - i\,\frac{\partial}{\partial x_1^{(\lambda)}}\,\big)\,\widehat{\alpha}_1^{(\lambda)} + \big(k_2^{(\lambda)} + i\varkappa - i\,\frac{\partial}{\partial x_2^{(\lambda)}}\,\big)\,\widehat{\alpha}_2^{(\lambda)}\,,$$

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)} = \widehat{\mathcal{D}}_0^{(\lambda)} - A_1^{(\lambda)}\widehat{\alpha}_1^{(\lambda)} - A_2^{(\lambda)}\widehat{\alpha}_2^{(\lambda)}\,,\ \ \widehat{\mathcal{D}}_\perp^{(\lambda)} = \sum_{j=3}^n (k_j^{(\lambda)} - i\,\frac{\partial}{\partial x_j^{(\lambda)}} - A_j^{(\lambda)})\,\widehat{\alpha}_j^{(\lambda)} + \widehat{V}\,,$$

при этом

$$\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e) + \widehat{W} = \widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)} + \widehat{\mathcal{D}}_\perp^{(\lambda)}\,.$$

Определим также операторы

$$\widehat{\mathcal{D}}_*^{(\lambda)} = \widehat{\mathcal{D}}_0^{(\lambda)} - \widetilde{A}_1^{(\lambda)}\widehat{\alpha}_1^{(\lambda)} - \widetilde{A}_2^{(\lambda)}\widehat{\alpha}_2^{(\lambda)}\,.$$

Так как

$$\frac{\partial \Phi^{(1,\lambda)}}{\partial x_1^{(\lambda)}} - \frac{\partial \Phi^{(2,\lambda)}}{\partial x_2^{(\lambda)}} = A_1^{(\lambda)} - \widetilde{A}_1^{(\lambda)}\,, \quad \frac{\partial \Phi^{(1,\lambda)}}{\partial x_2^{(\lambda)}} + \frac{\partial \Phi^{(2,\lambda)}}{\partial x_1^{(\lambda)}} = A_2^{(\lambda)} - \widetilde{A}_2^{(\lambda)}\,,$$

то выполняется равенство

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)} = e^{-i\,\widehat{\alpha}_1^{(\lambda)}\widehat{\alpha}_2^{(\lambda)}\,\Phi^{(2,\lambda)}}\, e^{i\,\Phi^{(1,\lambda)}}\,\widehat{\mathcal{D}}_*^{(\lambda)}\, e^{-i\,\Phi^{(1,\lambda)}}\, e^{-i\,\widehat{\alpha}_1^{(\lambda)}\widehat{\alpha}_2^{(\lambda)}\,\Phi^{(2,\lambda)}}\,. \tag{3.8}$$

Будем далее использовать сокращенные обозначения

$$\widehat{P}_\lambda^{\pm} \doteq \widehat{P}_{\widetilde{e}^{\,\lambda}}^{\pm} = \frac{1}{2}\,(\widehat{I} \pm i\widehat{\alpha}_1^{(\lambda)}\widehat{\alpha}_2^{(\lambda)})\,.$$

Справедливы перестановочные соотношения

$$\widehat{\mathcal{D}}_\perp^{(\lambda)}\widehat{P}_\lambda^{\pm} = \widehat{P}_\lambda^{\pm}\,\widehat{\mathcal{D}}_\perp^{(\lambda)}\,, \quad \widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}\widehat{P}_\lambda^{\pm} = \widehat{P}_\lambda^{\mp}\,\widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}$$

(которые в дальнейшем будут играть существенную роль). Для всех вектор-функций $\psi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$ имеем

$$\widehat{\mathcal{D}}_0^{(\lambda)}\widehat{P}_\lambda^{\pm}\,\psi = \tag{3.9}$$

$$= \sum_{N\,\in\,\Lambda^*} \big((k_2^{(\lambda)} + 2\pi N_2^{(\lambda)}) + i(\varkappa \pm (k_1^{(\lambda)} + 2\pi N_1^{(\lambda)}))\big)\,\widehat{\alpha}_2^{(\lambda)}\widehat{P}_\lambda^{\pm}\,\psi_N\,e^{2\pi i\,(N,x)}\,.$$

В пространстве $L^2(K;\mathbb{C}^M)$ определим операторы

$$\widehat{G}_\lambda^{\pm}\,\psi = \tag{3.10}$$

$$= \sum_{N\,\in\,\Lambda^*} \big((k_2^{(\lambda)} + 2\pi N_2^{(\lambda)})^2 + (\varkappa \pm |k_1^{(\lambda)} + 2\pi N_1^{(\lambda)}|)^2\big)^{1/2}\,\psi_N\,e^{2\pi i\,(N,x)}\,,$$

$\psi \in D(\widehat{G}_\lambda^{\pm}) = \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M) \subset L^2(K;\mathbb{C}^M)$, $\lambda \in \mathcal{L}$. Так как $\varkappa \geqslant \varkappa_0 > (\widetilde{c}+4)R$, то для векторов $N \in \mathcal{K}'_\lambda$ выполняется ограничение

$$|\,\widetilde{e}(k + 2\pi N) - \widetilde{e}^{\,\lambda}\,| < \rho' = \frac{(\widetilde{c}+4)R}{\varkappa} < 1\,, \tag{3.11}$$

поэтому $k_1^{(\lambda)} + 2\pi N_1^{(\lambda)} > 0$ и, следовательно, из (3.9), (3.10) для всех вектор-функций $\psi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M) \cap \mathcal{H}(\mathcal{K}'_\lambda)$ вытекает равенство

$$\|\,\widehat{\mathcal{D}}_0^{(\lambda)}\widehat{P}_\lambda^{\pm}\,\psi\,\| = \|\,\widehat{G}_\lambda^{\pm}\widehat{P}_\lambda^{\pm}\,\psi\,\|\,. \tag{3.12}$$

Обозначим

$$b_1 = \frac{1}{2}\,(\widetilde{c}+2)R + \frac{3}{4}\,\frac{|\gamma|}{\pi}\,(\widetilde{c}+2)^2R^2\,, \quad b_2 = \frac{1}{2}\,(\widetilde{c}+4)R + \frac{3}{4}\,\frac{|\gamma|}{\pi}\,(\widetilde{c}+4)^2R^2\,.$$

Лемма 3. *При всех* $\lambda \in \mathcal{L}$ *(и заданных числе* $\varkappa \geqslant \varkappa_0$, *векторе* $k \in \mathbb{R}^n$ *и вектор-функции* $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M) \cap \mathcal{H}(\mathcal{C}(\frac{1}{2}))$ *справедливы оценки*

$$\|(\widehat{G}^{\,\pm}\widehat{P}^{\,\pm} - \widehat{G}^{\,\pm}_{\lambda}\widehat{P}^{\,\pm}_{\lambda})\,\psi\,\| \leqslant \frac{b_1}{\varkappa}\,\|\,\widehat{G}^{\,\pm}\psi\,\|\,,\ \ \psi \in \mathcal{H}(\mathcal{K}_\lambda)\,, \tag{3.13}$$

$$\|(\widehat{G}^{\,\pm}\widehat{P}^{\,\pm} - \widehat{G}^{\,\pm}_{\lambda}\widehat{P}^{\,\pm}_{\lambda})\,\psi'\,\| \leqslant \frac{b_2}{\varkappa}\,\|\,\widehat{G}^{\,\pm}\psi'\,\|\,,\ \ \psi' \in \mathcal{H}(\mathcal{K}'_\lambda)\,. \tag{3.14}$$

Доказательство. Для векторов $N \in \mathcal{K}_\lambda$ имеется оценка $|\,\widetilde{e}(k+2\pi N) - \widetilde{e}^{\,\lambda}\,| < \rho = (\widetilde{c}+2)R\varkappa^{-1} < 1$, поэтому из (1.5) следует, что

$$\|\,(\widehat{P}^{\,\pm} - \widehat{P}^{\,\pm}_{\lambda})\,\psi\,\| \leqslant \rho\,\|\psi\|\,,\ \psi \in \mathcal{H}(\mathcal{K}_\lambda)\,. \tag{3.15}$$

Из (3.11) и (1.5) вытекает также оценка

$$\|\,(\widehat{P}^{\,\pm} - \widehat{P}^{\,\pm}_{\lambda})\,\psi'\,\| \leqslant \rho'\,\|\psi'\|\,,\ \psi' \in \mathcal{H}(\mathcal{K}'_\lambda)\,. \tag{3.16}$$

Если $\widetilde{e} \in \Omega_\lambda$, то $|\widetilde{e}-\widetilde{e}^{\,\lambda}| < \rho$ и, следовательно, $1-(\widetilde{e},\widetilde{e}^{\,\lambda}) = \frac{1}{2}\,|\widetilde{e}-\widetilde{e}^{\,\lambda}| < \frac{1}{2}\,\rho^2$. Тогда для векторов $N \in \mathcal{K}_\lambda$ (для них $\widetilde{e}(k+2\pi N) \in \Omega_\lambda$) имеем

$$\big|\,|\varkappa \pm |k_\perp + 2\pi N_\perp|\,| - |\varkappa \pm (k_1 + 2\pi N_1)|\,\big| \leqslant |k_\perp + 2\pi N_\perp| - (k_1 + 2\pi N_1) =$$

$$= (1 - (\widetilde{e}(k+2\pi N), \widetilde{e}^{\,\lambda}))\,|k_\perp + 2\pi N_\perp| < \frac{1}{2}\,\rho^2\,|k_\perp + 2\pi N_\perp| < \frac{3}{4}\,\rho^2\varkappa\,.$$

Откуда

$$\|\,(\widehat{G}^{\,\pm} - \widehat{G}^{\,\pm}_{\lambda})\,\psi\| \leqslant \frac{3}{4}\,\rho^2\varkappa\,\|\psi\| = \frac{3}{4}\,(\widetilde{c}+2)^2\,\frac{R^2}{\varkappa}\,\|\psi\|\,, \tag{3.17}$$
$$\psi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M) \cap \mathcal{H}(\mathcal{K}_\lambda)\,.$$

Аналогичным образом

$$\|\,(\widehat{G}^{\,\pm} - \widehat{G}^{\,\pm}_{\lambda})\,\psi'\| \leqslant \frac{3}{4}\,(\widetilde{c}+4)^2\,\frac{R^2}{\varkappa}\,\|\psi'\|\,,\ \psi' \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M) \cap \mathcal{H}(\mathcal{K}'_\lambda)\,. \tag{3.18}$$

Теперь из (3.15) и (3.17) для вектор-функции $\psi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M) \cap \mathcal{H}(\mathcal{K}_\lambda)$) получаем неравенство (3.13):

$$\|(\widehat{G}^{\,\pm}\widehat{P}^{\,\pm} - \widehat{G}^{\,\pm}_{\lambda}\widehat{P}^{\,\pm}_{\lambda})\,\psi\,\| \leqslant \|(\widehat{P}^{\,\pm} - \widehat{P}^{\,\pm}_{\lambda})\,\widehat{G}^{\,\pm}\,\psi\,\| + \|(\widehat{G}^{\,\pm} - \widehat{G}^{\,\pm}_{\lambda})\widehat{P}^{\,\pm}_{\lambda}\,\psi\,\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\,\rho\,\|\,\widehat{G}^{\,\pm}\,\psi\,\| + \frac{3}{4}\,\rho^2\varkappa\,\|\,\widehat{P}^{\,\pm}_{\lambda}\,\psi\,\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\,\frac{(\widetilde{c}+2)R}{\varkappa}\,\|\,\widehat{G}^{\,\pm}\,\psi\,\| + \frac{3}{4}\,\frac{(\widetilde{c}+2)^2R^2}{\varkappa}\,\|\,\psi\,\| \leqslant \frac{b_1}{\varkappa}\,\|\,\widehat{G}^{\,\pm}\,\psi\,\|\,.$$

Так же доказывается неравенство (3.14) (с использованием оценок (3.16) и (3.18)). $\square$

Будем в дальнейшем также обозначать

$$\widehat{P}_{\lambda}^{\pm}\widehat{P}^{\mathcal{K}_{\lambda}}\varphi=\widehat{P}_{\lambda}^{\pm}\varphi^{\mathcal{K}_{\lambda}}=\varphi_{\lambda}^{\pm}\,,\ \ \widehat{P}_{\lambda}^{\pm}\widehat{P}^{\widetilde{\mathcal{K}}_{\lambda}}\varphi=\widehat{P}_{\lambda}^{\pm}\varphi^{\widetilde{\mathcal{K}}_{\lambda}}=\widetilde{\varphi}_{\lambda}^{\pm}\,.$$

В пространстве $L^2(K;\mathbb{C}^M)$ определим ортогональные проекторы $\widehat{P}^{\{\Omega_\lambda\}}$, $\lambda\in\mathcal{L}$, ставящие в соответствие вектор-функциям $\psi\in L^2(K;\mathbb{C}^M)$ вектор-функции $\widehat{P}^{\{\Omega_\lambda\}}\psi$, для которых $(\widehat{P}^{\{\Omega_\lambda\}}\psi)_N=\psi_N$, если $\widetilde{e}(k+2\pi N)\in\Omega_\lambda$, и $(\widehat{P}^{\{\Omega_\lambda\}}\psi)_N=0$, если либо вектор $\widetilde{e}(k+2\pi N)$ не определен (при $k_\perp+2\pi N_\perp=0$), либо $\widetilde{e}(k+2\pi N)\notin\Omega_\lambda$. Аналогично определим ортогональные проекторы $\widehat{P}^{\{\widetilde{\Omega}_\lambda\}}$ (при замене множества $\Omega_\lambda\subset S_{n-2}(e)$ на множество $\widetilde{\Omega}_\lambda$).

Для любой вектор-функции $\psi\in L^2(K;\mathbb{C}^M)$ имеем

$$\|\,(\widehat{P}^{\pm}-\widehat{P}_{\lambda}^{\pm})\,\widehat{P}^{\{\Omega_\lambda\}}\psi\,\|\leqslant\frac{1}{2}\,\rho\,\|\,\widehat{P}^{\{\Omega_\lambda\}}\psi\,\|\,. \tag{3.19}$$

Так как $\varkappa\geqslant\varkappa_0>4R$ (и $\varphi\in\widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)\cap\mathcal{H}(\mathcal{C}(\frac12))$), то в случае $(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})_N\neq0$, $N\in\Lambda^*$ справедлива оценка $|\,k_\perp+2\pi N_\perp|>\frac{\varkappa}{2}-R>\frac{\varkappa}{4}$.

Лемма 4. *Если* $N\in\mathcal{K}_\lambda$, *то*

$$|\sum_{j=3}^{n}(k_j^{(\lambda)}+2\pi N_j^{(\lambda)})\,\mathcal{E}_j^{(\lambda)}\,|<\frac{3}{2}\,(\widetilde{c}+2)R\,. \tag{3.20}$$

Доказательство. Действительно,

$$|\sum_{j=3}^{n}(k_j^{(\lambda)}+2\pi N_j^{(\lambda)})\,\mathcal{E}_j^{(\lambda)}\,|=|\,k_\perp+2\pi N_\perp-(k_\perp+2\pi N_\perp\,,\widetilde{e}^{\lambda})\,\widetilde{e}^{\lambda}\,|\leqslant \tag{3.21}$$

$$\leqslant|\,\widetilde{e}(k+2\pi N)-\widetilde{e}^{\lambda}\,|\cdot|\,k_\perp+2\pi N_\perp|<\rho\,|\,k_\perp+2\pi N_\perp|=\frac{(\widetilde{c}+2)R}{\varkappa}\,|\,k_\perp+2\pi N_\perp|\,.$$

С другой стороны, из определения множества $\mathcal{C}(\frac12)$ следует, что $|\,k_\perp+2\pi N_\perp|<\frac32\,\varkappa$, что вместе с (3.21) приводит к требуемому неравенству. $\square$

Из оценки (1.1) (при замене $k\to k-\varkappa\widetilde{e}^{\lambda}$) и леммы 4 для всех $\varepsilon>0$ получаем

$$\|\,\widehat{W}\varphi_{\lambda}^{\pm}\,\|\leqslant\|\,\widehat{V}\varphi_{\lambda}^{\pm}\,\|+\|\,|A|\,\varphi_{\lambda}^{\pm}\,\|\leqslant \tag{3.22}$$

$$\leqslant\varepsilon\,\Big\|\sum_{j=1}^{n}(k_j-\varkappa\widetilde{e}_j^{\lambda}-i\,\frac{\partial}{\partial x_j})\,\widehat{\alpha}_j\varphi_{\lambda}^{\pm}\,\Big\|+C(\varepsilon)\,\|\,\varphi_{\lambda}^{\pm}\,\|\leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \,\|\, ((k_1^{(\lambda)} - \varkappa - i\, \frac{\partial}{\partial x_1^{(\lambda)}}\,)\, \widehat{\alpha}_1^{(\lambda)} + (k_2^{(\lambda)} - i\, \frac{\partial}{\partial x_2^{(\lambda)}}\,)\, \widehat{\alpha}_2^{(\lambda)}\,)\, \varphi_\lambda^{\pm} \,\| +$$

$$+ \varepsilon \,\|\, \sum_{j=3}^{n} (k_j^{(\lambda)} - i\, \frac{\partial}{\partial x_j^{(\lambda)}}\,)\, \widehat{\alpha}_j^{(\lambda)} \varphi_\lambda^{\pm} \,\| + C(\varepsilon)\, \|\, \varphi_\lambda^{\pm} \,\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \,\|\, \widehat{G}_\lambda^{-} \varphi_\lambda^{\pm} \,\| + \big(\, \frac{3\varepsilon}{2}\, (\widetilde{c} + 2) R + C(\varepsilon) \big)\, \|\, \varphi_\lambda^{\pm} \,\| \,.$$

Следовательно,

$$\|\, \widehat{\mathcal{D}}_\perp^{(\lambda)}\, \varphi_\lambda^{\pm} \,\| \leqslant \|\, \widehat{W} \varphi_\lambda^{\pm} \,\| + \|\, \sum_{j=3}^{n} (k_j^{(\lambda)} - i\, \frac{\partial}{\partial x_j^{(\lambda)}}\,)\, \widehat{\alpha}_j^{(\lambda)} \varphi_\lambda^{\pm} \,\| \leqslant \tag{3.23}$$

$$\leqslant \varepsilon \,\|\, \widehat{G}_\lambda^{-} \varphi_\lambda^{\pm} \,\| + \big(\, \frac{3(\varepsilon+1)}{2}\, (\widetilde{c} + 2) R + C(\varepsilon) \big)\, \|\, \varphi_\lambda^{\pm} \,\| \,.$$

Если $N \in \mathcal{K}'_\lambda$, то аналогично неравенству (3.20) (см. доказательство леммы 4) имеем

$$\big|\, \sum_{j=3}^{n} (k_j^{(\lambda)} + 2\pi N_j^{(\lambda)})\, \mathcal{E}_j^{(\lambda)} \,\big| < \frac{3}{2}\, (\widetilde{c} + 4) R \,.$$

Поэтому аналогично неравенству (3.23) получаем для всех $\varepsilon > 0$ и всех вектор-функций $\psi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbb{C}^M) \cap \mathcal{H}(\mathcal{K}'_\lambda)$ также неравенство

$$\|\, \widehat{\mathcal{D}}_\perp^{(\lambda)}\, \psi \,\| \leqslant \varepsilon \,\|\, \widehat{G}_\lambda^{-} \psi \,\| + C_3^{\sharp}(\varepsilon)\, \|\psi\| \,, \tag{3.24}$$

где $C_3^{\sharp}(\varepsilon) = \frac{3(\varepsilon+1)}{2}\, (\widetilde{c} + 4) R + C(\varepsilon)$.

Положим

$$C'_3 = 3(\widetilde{c} + 2) R + C(1) \,, \ \ C_4 = 1 + \frac{|\gamma|}{\pi}\, C'_3 \,.$$

Выберем число $a \in (0, 1)$ так, что

$$a^2 \, \max\{\, C_4^2 \,, \frac{9}{4}\, \frac{|\gamma|^2}{\pi^2}\, b_2^2 \,\} < \frac{\delta\delta_1}{50}\, (1 - \widetilde{\varepsilon})\, C_2^2 \,.$$

После этого выберем число $\varepsilon_1 \in (0, \frac{1}{2}\,]$ так, что

$$(2\varepsilon_1)^2 < \frac{\delta\delta_1}{40}\, (1 - \widetilde{\varepsilon})\, a^2 \,, \ \ \frac{9}{2}\, \frac{|\gamma|^2}{\pi^2}\, b_2^2\, (2\varepsilon_1)^2 < \frac{\delta\delta_1}{50}\, (1 - \widetilde{\varepsilon})\, C_2^2 \,.$$

Обозначим

$$C'_3(\varepsilon_1) = \frac{3\varepsilon_1}{2}\, (\widetilde{c} + 2) R + C(\varepsilon_1) \,.$$

Из (3.16), (3.22) (при $\varepsilon = \varepsilon_1$) и (3.23) (при $\varepsilon = 1$) вытекает справедливость оценок

$$\| \widehat{P}^{\{\widetilde{\Omega}_\lambda\}} \widehat{P}^-_\lambda (\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e) + \widehat{W}) \varphi^{\mathcal{K}_\lambda} \| = \tag{3.25}$$

$$= \| \widehat{P}^{\{\widetilde{\Omega}_\lambda\}} \widehat{P}^-_\lambda (\widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)} + \widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}_\perp) \varphi^{\mathcal{K}_\lambda} \| \geqslant \| \widehat{P}^{\{\widetilde{\Omega}_\lambda\}} \widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)} \varphi^+_\lambda \| - \| \widehat{P}^{\{\widetilde{\Omega}_\lambda\}} \widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}_\perp \varphi^-_\lambda \| \geqslant$$

$$\geqslant \| \widehat{P}^{\{\widetilde{\Omega}_\lambda\}} \widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}_0 \varphi^+_\lambda \| - \| (A^{(\lambda)}_1 \widehat{\alpha}^{(\lambda)}_1 + A^{(\lambda)}_2 \widehat{\alpha}^{(\lambda)}_2) \varphi^+_\lambda \| - \| \widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}_\perp \varphi^-_\lambda \| \geqslant$$

$$\geqslant \| \widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}_0 \widetilde{\varphi}^+_\lambda \| - \| |A| \varphi^+_\lambda \| - \| \widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}_\perp \varphi^-_\lambda \| \geqslant$$

$$\geqslant \| \widehat{G}^+_\lambda \widetilde{\varphi}^+_\lambda \| - \bigl(\varepsilon_1 \| \widehat{G}^-_\lambda \varphi^+_\lambda \| + C'_3(\varepsilon_1) \| \varphi^+_\lambda \| \bigr) - \bigl(\| \widehat{G}^-_\lambda \varphi^-_\lambda \| + C'_3 \| \varphi^-_\lambda \| \bigr) .$$

Лемма 5. *Для всех* $\lambda \in \mathcal{L}$

$$\| \widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)} \widetilde{\varphi}^-_\lambda \| \geqslant C_2 \| \widehat{G}^-_\lambda \widetilde{\varphi}^-_\lambda \| .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (3.12) следует равенство

$$\| \widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}_0 \widetilde{\varphi}^-_\lambda \| = \| \widehat{G}^-_\lambda \widetilde{\varphi}^-_\lambda \| . \tag{3.26}$$

Учитывая (1.2), (3.9) и равенство (3.26), получаем

$$\| (A^{(\lambda)}_1 \widehat{\alpha}^{(\lambda)}_1 + A^{(\lambda)}_2 \widehat{\alpha}^{(\lambda)}_2) \widetilde{\varphi}^-_\lambda \| \leqslant \| |A| \widetilde{\varphi}^-_\lambda \| \leqslant \tag{3.27}$$

$$\leqslant \tau \Bigl(\Bigl\| \bigl(k^{(\lambda)}_1 - \varkappa - i \frac{\partial}{\partial x^{(\lambda)}_1}\bigr) \widetilde{\varphi}^-_\lambda \Bigr\|^2 + \Bigl\| \bigl(k^{(\lambda)}_2 - i \frac{\partial}{\partial x^{(\lambda)}_2}\bigr) \widetilde{\varphi}^-_\lambda \Bigr\|^2 \Bigr)^{1/2} + Q \| \widetilde{\varphi}^-_\lambda \| \leqslant$$

$$\leqslant \tau \| \widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}_0 \widetilde{\varphi}^-_\lambda \| + Q \| \widetilde{\varphi}^-_\lambda \| = \tau \| \widehat{G}^-_\lambda \widetilde{\varphi}^-_\lambda \| + Q \| \widetilde{\varphi}^-_\lambda \| .$$

Откуда

$$\| \widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)} \widetilde{\varphi}^-_\lambda \| \geqslant \| \widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}_0 \widetilde{\varphi}^-_\lambda \| - \| (A^{(\lambda)}_1 \widehat{\alpha}^{(\lambda)}_1 + A^{(\lambda)}_2 \widehat{\alpha}^{(\lambda)}_2) \widetilde{\varphi}^-_\lambda \| \geqslant \tag{3.28}$$

$$\geqslant (1-\tau) \| \widehat{G}^-_\lambda \widetilde{\varphi}^-_\lambda \| - Q \| \widetilde{\varphi}^-_\lambda \| .$$

Воспользуемся теперь равенством (3.8). Обозначим

$$\chi_\lambda = e^{-i\,\Phi^{(1,\lambda)}} e^{-i\,\widehat{\alpha}^{(\lambda)}_1 \widehat{\alpha}^{(\lambda)}_2 \Phi^{(2,\lambda)}} \widetilde{\varphi}^-_\lambda .$$

Так как функции $\Phi^{(s,\lambda)}$, $s = 1,2$, $\lambda \in \mathcal{L}$ являются тригонометрическими многочленами (и $\Phi^{(s,\lambda)}_N = 0$ для всех векторов $N \in \Lambda^*$, для которых $A_N = 0$), то $\chi_\lambda \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M)$. При этом оператор $\widehat{P}^-_\lambda$ коммутирует с операторами умножения на функцию $e^{-i\,\Phi^{(1,\lambda)}}$ и на матричнозначную функцию $e^{-i\,\widehat{\alpha}_1^{(\lambda)}\widehat{\alpha}_2^{(\lambda)}\,\Phi^{(2,\lambda)}}$. Далее, используя лемму 2, ограничение (0.9) (условия (D) и (E)) и неравенство

$$\|\,\widehat{\mathcal{D}}_0^{(\lambda)}\,\chi_\lambda\,\| \geqslant \frac{\pi}{|\gamma|}\,\|\,\chi_\lambda\,\|\,, \tag{3.29}$$

которое является следствием выбора вектора $k\in\mathbb{R}^n : (k,\gamma)=\pi$ (см. (3.9)), получаем оценки

$$\|\,\widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}\,\widetilde{\varphi}_\lambda^{\,-}\,\| \geqslant e^{-\frac{1}{2}\,\|\mu\|\,C^*(h)}\,\|\,\widehat{\mathcal{D}}_*^{(\lambda)}\,\chi_\lambda\,\| \geqslant$$
$$\geqslant e^{-\frac{1}{2}\,\|\mu\|\,C^*(h)}\,\big(\,\|\,\widehat{\mathcal{D}}_0^{(\lambda)}\,\chi_\lambda\,\| - \|\,(\widetilde{A}_1^{(\lambda)}\widehat{\alpha}_1^{(\lambda)}+\widetilde{A}_2^{(\lambda)}\widehat{\alpha}_2^{(\lambda)})\,\chi_\lambda\,\|\,\big) \geqslant$$
$$\geqslant e^{-\frac{1}{2}\,\|\mu\|\,C^*(h)}\,\big(\,\|\,\widehat{\mathcal{D}}_0^{(\lambda)}\,\chi_\lambda\,\| - \|\,|\widetilde{A}(\widetilde{e}^{\,\lambda};.)|\,\chi_\lambda(.)\,\|\,\big) \geqslant$$
$$\geqslant e^{-\frac{1}{2}\,\|\mu\|\,C^*(h)}\,(1-\widetilde{\theta})\,\frac{\pi}{|\gamma|}\,\|\chi_\lambda\| \geqslant (1-\widetilde{\theta})\,\frac{\pi}{|\gamma|}\,e^{-\|\mu\|\,C^*(h)}\,\|\,\widetilde{\varphi}_\lambda^{\,-}\,\|\,.$$

Если неравенство (3.28) умножить на $(1-\widetilde{\theta})\,\frac{\pi}{|\gamma|}\,e^{-\|\mu\|\,C^*(h)}$, а неравенство (3.29) — на Q, то после их сложения получаем доказываемое неравенство. $\square$

Получим теперь оценку (3.33), дополняющую (3.25). Используя (3.2), (3.12) и лемму 5, имеем

$$\|\,\widehat{P}^{\,\{\Omega_\lambda\}}\,\widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}\,\widehat{P}_\lambda^{\,-}\,\varphi^{\mathcal{K}'_\lambda}\,\| = \tag{3.30}$$
$$= \|\,\widehat{P}^{\,\{\Omega_\lambda\}}\,(\widehat{\mathcal{D}}_0^{(\lambda)} - A_1^{(\lambda)}\widehat{\alpha}_1^{(\lambda)} - A_2^{(\lambda)}\widehat{\alpha}_2^{(\lambda)})\,\widehat{P}_\lambda^{\,-}\,\varphi^{\mathcal{K}'_\lambda}\,\| =$$
$$= \|\,\widehat{\mathcal{D}}_0^{(\lambda)}\,\widehat{P}_\lambda^{\,-}\,(\varphi^{\mathcal{K}_\lambda\setminus\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}+\varphi^{\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}\,) -$$
$$-\widehat{P}^{\,\{\Omega_\lambda\}}\,(A_1^{(\lambda)}\widehat{\alpha}_1^{(\lambda)} + A_2^{(\lambda)}\widehat{\alpha}_2^{(\lambda)}\,)\,\widehat{P}_\lambda^{\,-}\,(\varphi^{\mathcal{K}'_\lambda\setminus\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}+\varphi^{\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}\,)\,\| =$$
$$= \|\,\widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}\,\widetilde{\varphi}_\lambda^{\,-}+\widehat{\mathcal{D}}_0^{(\lambda)}\,\widehat{P}_\lambda^{\,-}\,\varphi^{\mathcal{K}_\lambda\setminus\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}-\widehat{P}^{\,\{\Omega_\lambda\}}\,(A_1^{(\lambda)}\widehat{\alpha}_1^{(\lambda)}+A_2^{(\lambda)}\widehat{\alpha}_2^{(\lambda)}\,)\,\widehat{P}_\lambda^{\,-}\,\varphi^{\mathcal{K}'_\lambda\setminus\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}\,\| \geqslant$$
$$\geqslant \|\,\widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}\,\widetilde{\varphi}_\lambda^{\,-}\,\| - \|\,\widehat{\mathcal{D}}_0^{(\lambda)}\,\widehat{P}_\lambda^{\,-}\,\varphi^{\mathcal{K}_\lambda\setminus\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}\,\| - \|\,(A_1^{(\lambda)}\widehat{\alpha}_1^{(\lambda)}+A_2^{(\lambda)}\widehat{\alpha}_2^{(\lambda)}\,)\,\widehat{P}_\lambda^{\,-}\,\varphi^{\mathcal{K}'_\lambda\setminus\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}\,\| \geqslant$$
$$\geqslant C_2\,\|\,\widehat{G}_\lambda^{\,-}\,\widetilde{\varphi}_\lambda^{\,-}\,\| - \|\,\widehat{G}_\lambda^{\,-}\,\widehat{P}_\lambda^{\,-}\,\varphi^{\mathcal{K}_\lambda\setminus\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}\,\| - \|\,|A|\,\widehat{P}_\lambda^{\,-}\,\varphi^{\mathcal{K}'_\lambda\setminus\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}\,\|\,.$$

С другой стороны, из (1.2), (3.9) и (3.12) (аналогично оценке (3.27)) следует неравенство

$$\|\,|A|\,\widehat{P}_\lambda^{\,-}\,\varphi^{\mathcal{K}'_\lambda\setminus\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}\,\| \leqslant \tau\,\|\,\widehat{G}_\lambda^{\,-}\,\widehat{P}_\lambda^{\,-}\,\varphi^{\mathcal{K}'_\lambda\setminus\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}\,\| + Q\,\|\,\widehat{P}_\lambda^{\,-}\,\varphi^{\mathcal{K}'_\lambda\setminus\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}\,\|\,, \tag{3.31}$$

а из (3.24) (при $\varepsilon=\varepsilon_1$ и $\psi=\widehat{P}_\lambda^{\,+}\,\varphi^{\mathcal{K}'_\lambda}$) — неравенство

$$\|\,\widehat{\mathcal{D}}_\perp^{(\lambda)}\,\widehat{P}_\lambda^{\,+}\,\varphi^{\mathcal{K}'_\lambda}\,\| \leqslant \varepsilon_1\,\|\,\widehat{G}_\lambda^{\,-}\,\widehat{P}_\lambda^{\,+}\,\varphi^{\mathcal{K}'_\lambda}\,\| + C_3^\sharp\,(\varepsilon_1)\,\|\,\widehat{P}_\lambda^{\,+}\,\varphi^{\mathcal{K}'_\lambda}\,\|\,. \tag{3.32}$$

Поэтому (см. (3.30), (3.31), (3.32))

$$\| \widehat{P}^{\{\Omega_\lambda\}} \widehat{P}^{+}_{\lambda} (\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W}) \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda} \| = \tag{3.33}$$

$$= \| \widehat{P}^{\{\Omega_\lambda\}} \widehat{P}^{+}_{\lambda} (\widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}+\widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}_{\perp}) \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda} \| \geqslant$$

$$\geqslant \| \widehat{P}^{\{\Omega_\lambda\}} \widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)} \widehat{P}^{-}_{\lambda} \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda} \| - \| \widehat{\mathcal{D}}^{(\lambda)}_{\perp} \widehat{P}^{+}_{\lambda} \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda} \| \geqslant$$

$$\geqslant C_2 \| \widehat{G}^{-}_{\lambda} \widetilde{\varphi}^{-}_{\lambda} \| - \| \widehat{G}^{-}_{\lambda} \widehat{P}^{-}_{\lambda} \varphi^{\mathcal{K}_\lambda \setminus \widetilde{\mathcal{K}}_\lambda} \| -$$

$$- \big(\tau \| \widehat{G}^{-}_{\lambda} \widehat{P}^{-}_{\lambda} \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda \setminus \widetilde{\mathcal{K}}_\lambda} \| + Q \| \widehat{P}^{-}_{\lambda} \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda \setminus \widetilde{\mathcal{K}}_\lambda} \| \big) -$$

$$- \big(\varepsilon_1 \| \widehat{G}^{-}_{\lambda} \widehat{P}^{+}_{\lambda} \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda} \| + C^{\sharp}_3(\varepsilon_1) \| \widehat{P}^{+}_{\lambda} \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda} \| \big) \geqslant$$

$$\geqslant C_2 \| \widehat{G}^{-}_{\lambda} \widetilde{\varphi}^{-}_{\lambda} \| - C_3 \| \widehat{G}^{-}_{\lambda} \widehat{P}^{-}_{\lambda} \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda \setminus \widetilde{\mathcal{K}}_\lambda} \| -$$

$$- \varepsilon_1 \| \widehat{G}^{-}_{\lambda} \widehat{P}^{+}_{\lambda} \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda} \| - C^{\sharp}_3(\varepsilon_1) \| \widehat{P}^{+}_{\lambda} \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda} \| .$$

Будем далее считать, что $C^{\sharp}_3(\varepsilon_1) \leqslant \varepsilon_1 \varkappa_0$. Тогда также $C'_3(\varepsilon_1) \leqslant \varepsilon_1 \varkappa_0$. Так как для всех вектор-функций $\psi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M) \cap \mathcal{H}(\mathcal{K}'_\lambda)$ имеем $\|\widehat{G}^{-}_{\lambda}\psi\| \leqslant \|\widehat{G}^{+}_{\lambda}\psi\|$ и $\varkappa\|\psi\| \leqslant \|\widehat{G}^{+}_{\lambda}\psi\|$, то при $\varkappa \geqslant \varkappa_0$ (для всех $\lambda \in \mathcal{L}$)

$$\varepsilon_1 \| \widehat{G}^{-}_{\lambda} \varphi^{+}_{\lambda} \| + C'_3(\varepsilon_1) \| \varphi^{+}_{\lambda} \| \leqslant 2\varepsilon_1 \| \widehat{G}^{+}_{\lambda} \varphi^{+}_{\lambda} \| ,$$

$$\varepsilon_1 \| \widehat{G}^{-}_{\lambda} \widehat{P}^{+}_{\lambda} \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda} \| + C^{\sharp}_3(\varepsilon_1) \| \widehat{P}^{+}_{\lambda} \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda} \| \leqslant 2\varepsilon_1 \| \widehat{G}^{+}_{\lambda} \widehat{P}^{+}_{\lambda} \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda} \| ,$$

поэтому из (3.25) и (3.31) следуют неравенства

$$\| \widehat{P}^{\{\widetilde{\Omega}_\lambda\}} \widehat{P}^{-}_{\lambda} (\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W}) \varphi^{\mathcal{K}_\lambda} \| \geqslant$$

$$\geqslant \| \widehat{G}^{+}_{\lambda} \widetilde{\varphi}^{+}_{\lambda} \| - 2\varepsilon_1 \| \widehat{G}^{+}_{\lambda} \varphi^{+}_{\lambda} \| - C_4 \| \widehat{G}^{-}_{\lambda} \varphi^{-}_{\lambda} \| ,$$

$$\| \widehat{P}^{\{\Omega_\lambda\}} \widehat{P}^{+}_{\lambda} (\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W}) \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda} \| \geqslant$$

$$\geqslant C_2 \| \widehat{G}^{-}_{\lambda} \widetilde{\varphi}^{-}_{\lambda} \| - 2\varepsilon_1 \| \widehat{G}^{+}_{\lambda} \widehat{P}^{+}_{\lambda} \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda} \| - C_3 \| \widehat{G}^{-}_{\lambda} \widehat{P}^{-}_{\lambda} \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda \setminus \widetilde{\mathcal{K}}_\lambda} \| ,$$

из которых, в свою очередь, с помощью леммы 3 (неравенств (3.13) и (3.14)) получаем

$$\| \widehat{P}^{\{\widetilde{\Omega}_\lambda\}} \widehat{P}^{-}_{\lambda} (\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W}) \varphi^{\mathcal{K}_\lambda} \| \geqslant \tag{3.34}$$

$$\geqslant \| \widehat{G}^{+}\widehat{P}^{+}\varphi^{\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda} \| - 2\varepsilon_1 \| \widehat{G}^{+}\widehat{P}^{+}\varphi^{\mathcal{K}_\lambda} \| - C_4 \| \widehat{G}^{-}\widehat{P}^{-}\varphi^{\mathcal{K}_\lambda} \| -$$

$$- \frac{b_1}{\varkappa} \big(\| \widehat{G}^{+}\varphi^{\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda} \| + 2\varepsilon_1 \| \widehat{G}^{+}\varphi^{\mathcal{K}_\lambda} \| + C_4 \| \widehat{G}^{-}\varphi^{\mathcal{K}_\lambda} \| \big) ,$$

$$\| \widehat{P}^{\{\Omega_\lambda\}} \widehat{P}^{+}_{\lambda} (\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W}) \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda} \| \geqslant \tag{3.35}$$

$$\geqslant C_2 \, \| \, \widehat{G}^{\,-} \widehat{P}^{\,-} \varphi^{\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda} \, \| - 2\varepsilon_1 \, \| \, \widehat{G}^{\,+} \widehat{P}^{\,+} \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda} \, \| - C_3 \, \| \, \widehat{G}^{\,-} \widehat{P}^{\,-} \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda \setminus \widetilde{\mathcal{K}}_\lambda} \, \| -$$

$$- \frac{b_2}{\varkappa} \left(C_2 \, \| \, \widehat{G}^{\,-} \varphi^{\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda} \, \| + 2\varepsilon_1 \, \| \, \widehat{G}^{\,+} \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda} \, \| + C_3 \, \| \, \widehat{G}^{\,-} \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda \setminus \widetilde{\mathcal{K}}_\lambda} \, \| \right).$$

Из (3.2) и (3.19) (для заданных числа $\varkappa \geqslant \varkappa_0$, вектора $k \in \mathbb{R}^n : (k, \gamma) = \pi$ и вектор-функции $\varphi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbb{C}^M) \cap \mathcal{H}(\mathcal{C}(\frac{1}{2}))$) вытекают оценки

$$\| \, \widehat{P}^{\,\{\widetilde{\Omega}_\lambda\}} \, \widehat{P}^{\,-} \, (\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) + \widehat{W}) \, \varphi \, \| \geqslant$$

$$\geqslant \| \, \widehat{P}^{\,\{\widetilde{\Omega}_\lambda\}} \, \widehat{P}^{\,-}_\lambda \, (\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) + \widehat{W}) \, \varphi^{\mathcal{K}_\lambda} \, \| - \frac{\rho}{2} \, \| \, \widehat{P}^{\,\{\widetilde{\Omega}_\lambda\}} \, (\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) + \widehat{W}) \, \varphi \, \| \,,$$

$$\| \, \widehat{P}^{\,\{\Omega_\lambda\}} \, \widehat{P}^{\,+} (\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) + \widehat{W}) \, \varphi \, \| \geqslant$$

$$\geqslant \| \, \widehat{P}^{\,\{\Omega_\lambda\}} \, \widehat{P}^{\,+}_\lambda \, (\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) + \widehat{W}) \, \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda} \, \| - \frac{\rho}{2} \, \| \, \widehat{P}^{\,\{\Omega_\lambda\}} \, (\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) + \widehat{W}) \, \varphi \, \| \,,$$

следовательно,

$$\| \, \widehat{P}^{\,+} (\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) + \widehat{W}) \, \varphi \, \|^2 + a^2 \, \| \, \widehat{P}^{\,-} (\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) + \widehat{W}) \, \varphi \, \|^2 \geqslant \tag{3.36}$$

$$\geqslant \sum_\lambda \| \, \widehat{P}^{\,\{\Omega_\lambda\}} \, \widehat{P}^{\,+} (\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) + \widehat{W}) \, \varphi \, \|^2 +$$

$$+ a^2 \sum_\lambda \| \, \widehat{P}^{\,\{\widetilde{\Omega}_\lambda\}} \, \widehat{P}^{\,-} (\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) + \widehat{W}) \, \varphi \, \|^2 \geqslant$$

$$\geqslant (1 - \delta_1) \sum_\lambda \| \, \widehat{P}^{\,\{\Omega_\lambda\}} \, \widehat{P}^{\,+}_\lambda \, (\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) + \widehat{W}) \, \varphi^{\mathcal{K}'_\lambda} \, \|^2 +$$

$$+ (1 - \delta_1) \, a^2 \sum_\lambda \| \, \widehat{P}^{\,\{\widetilde{\Omega}_\lambda\}} \, \widehat{P}^{\,-}_\lambda \, (\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) + \widehat{W}) \, \varphi^{\mathcal{K}_\lambda} \, \|^2 -$$

$$- \frac{(1 - \delta_1)}{\delta_1} \, \frac{1 + a^2}{4} \, \rho^2 \sum_\lambda \| \, \widehat{P}^{\,\{\Omega_\lambda\}} \, (\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) + \widehat{W}) \, \varphi \, \|^2 .$$

При этом

$$\sum_\lambda \| \, \widehat{P}^{\,\{\Omega_\lambda\}} \, (\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) + \widehat{W}) \, \varphi \, \|^2 \leqslant \| \, (\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) + \widehat{W}) \, \varphi \, \|^2 \leqslant \tag{3.37}$$

$$\leqslant \frac{1}{a^2} \left(\| \, \widehat{P}^{\,+} (\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) + \widehat{W}) \, \varphi \, \|^2 + a^2 \, \| \, \widehat{P}^{\,-} (\widehat{\mathcal{D}}(k + i\varkappa e) + \widehat{W}) \, \varphi \, \|^2 \right)$$

и, предполагая, что на выбор числа $\varkappa_0$ наложено ограничение

$$\frac{(1 - \delta_1)}{\delta_1} \, \frac{1 + a^2}{4a^2} \, (\widetilde{c} + 2)^2 R^2 \leqslant \frac{\delta_2 - \delta_1}{1 - \delta_2} \, \varkappa_0^2$$

и $\varkappa \geqslant \varkappa_0$, из (3.36) и (3.37) получаем

$$(1-\delta_2)^{-1}\big(\,\|\,\widehat{P}^{\,+}(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi\,\|^2+ \tag{3.38}$$

$$+\,a^{2}\,\|\,\widehat{P}^{\,-}(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi\,\|^2\,\big)\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{\lambda}\,\|\,\widehat{P}^{\,\{\Omega_\lambda\}}\,\widehat{P}^{\,+}_{\lambda}\,(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi^{\mathcal{K}'_\lambda}\,\|^2+$$

$$+\,a^{2}\sum_{\lambda}\,\|\,\widehat{P}^{\,\{\widetilde{\Omega}_\lambda\}}\,\widehat{P}^{\,-}_{\lambda}\,(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi^{\mathcal{K}_\lambda}\,\|^2\,.$$

С другой стороны, из оценок (3.34) и (3.35) следует, что правая часть предыдущего неравенства (3.38) не меньше

$$(1-\delta_1)\left(C_2^2\sum_{\lambda}\,\|\,\widehat{G}^{\,-}\widehat{P}^{\,-}\varphi^{\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}\,\|^2+a^2\sum_{\lambda}\,\|\,\widehat{G}^{\,+}\widehat{P}^{\,+}\varphi^{\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}\,\|^2\right)- \tag{3.39}$$

$$-\,\frac{5(1-\delta_1)}{\delta_1}\,\Bigg((2\varepsilon_1)^2\sum_{\lambda}\,\|\,\widehat{G}^{\,+}\widehat{P}^{\,+}\varphi^{\mathcal{K}'_\lambda}\,\|^2+C_3^2\sum_{\lambda}\,\|\,\widehat{G}^{\,-}\widehat{P}^{\,-}\varphi^{\mathcal{K}'_\lambda\setminus\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}\,\|^2+$$

$$+\,a^2\,(2\varepsilon_1)^2\sum_{\lambda}\,\|\,\widehat{G}^{\,+}\widehat{P}^{\,+}\varphi^{\mathcal{K}_\lambda}\,\|^2+a^2\,C_4^2\sum_{\lambda}\,\|\,\widehat{G}^{\,-}\widehat{P}^{\,-}\varphi^{\mathcal{K}_\lambda}\,\|^2+$$

$$+\,\frac{b_2^2}{\varkappa^2}\,\Bigg(C_2^2\sum_{\lambda}\,\|\,\widehat{G}^{\,-}\varphi^{\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}\,\|^2+(2\varepsilon_1)^2\sum_{\lambda}\,\|\,\widehat{G}^{\,+}\varphi^{\mathcal{K}'_\lambda}\,\|^2+$$

$$+\,C_3^2\sum_{\lambda}\,\|\,\widehat{G}^{\,-}\varphi^{\mathcal{K}'_\lambda\setminus\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}\,\|^2\Bigg)+$$

$$+\,\frac{a^2b_1^2}{\varkappa^2}\left(\sum_{\lambda}\,\|\,\widehat{G}^{\,+}\varphi^{\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}\,\|^2+(2\varepsilon_1)^2\sum_{\lambda}\,\|\,\widehat{G}^{\,+}\varphi^{\mathcal{K}_\lambda}\,\|^2+C_4^2\sum_{\lambda}\,\|\,\widehat{G}^{\,-}\varphi^{\mathcal{K}_\lambda}\,\|^2\right)\Bigg)\geqslant$$

$$\geqslant(1-\delta_1)\left(C_2^2\sum_{\lambda}\,\|\,\widehat{G}^{\,-}\widehat{P}^{\,-}\varphi^{\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}\,\|^2+a^2\sum_{\lambda}\,\|\,\widehat{G}^{\,+}\widehat{P}^{\,+}\varphi^{\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}\,\|^2\right)-$$

$$-\,\frac{5(1-\delta_1)}{\delta_1}\,\Bigg((1+a^2)(2\varepsilon_1)^2\,\|\,\widehat{G}^{\,+}\widehat{P}^{\,+}\varphi\|^2+C_3^2\sum_{\lambda}\,\|\,\widehat{G}^{\,-}\widehat{P}^{\,-}\varphi^{\mathcal{K}'_\lambda\setminus\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda}\,\|^2+$$

$$+\,a^2\,C_4^2\,\|\,\widehat{G}^{\,-}\widehat{P}^{\,-}\varphi\,\|^2++\frac{1}{\varkappa^2}\,\big(\,b_2^2\,C_2^2+b_2^2\,C_3^2+a^2\,b_1^2\,C_4^2\,\big)\,\|\,\widehat{G}^{\,-}\varphi\,\|^2+$$

$$+\,\frac{1}{\varkappa^2}\,\big(\,b_2^2\,(2\varepsilon_1)^2+a^2\,b_1^2+a^2\,b_1^2\,(2\varepsilon_1)^2\,\big)\,\|\,\widehat{G}^{\,+}\varphi\,\|^2\Bigg).$$

Теперь воспользуемся условием 3b) (см. также (3.3)), которое приводит к неравенствам

$$\sum_\lambda \| \widehat{G}^{\pm}\widehat{P}^{\pm}\varphi^{\widetilde{\mathcal{K}}_\lambda} \|^2 \geqslant (1-\widetilde{\varepsilon}) \| \widehat{G}^{\pm}\widehat{P}^{\pm}\varphi \|^2 ,$$

$$\sum_\lambda \| \widehat{G}^{-}\widehat{P}^{-}\varphi^{\mathcal{K}'_\lambda \setminus \widetilde{\mathcal{K}}_\lambda} \|^2 \leqslant \widetilde{\varepsilon} \| \widehat{G}^{-}\widehat{P}^{-}\varphi \|^2 .$$

Учитывая также, что

$$\| \widehat{G}^{-}\varphi \|^2 = \| \widehat{G}^{-}\widehat{P}^{-}\varphi \|^2 + \| \widehat{G}^{-}\widehat{P}^{+}\varphi \|^2 \leqslant \| \widehat{G}^{-}\widehat{P}^{-}\varphi \|^2 + \| \widehat{G}^{+}\widehat{P}^{-}\varphi \|^2 ,$$

$$\| \widehat{G}^{+}\varphi \|^2 = \| \widehat{G}^{+}\widehat{P}^{+}\varphi \|^2 + \| \widehat{G}^{+}\widehat{P}^{-}\varphi \|^2 \leqslant \| \widehat{G}^{+}\widehat{P}^{+}\varphi \|^2 + \frac{9}{4}\,\varkappa^2 \| \widehat{P}^{-}\varphi \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \| \widehat{G}^{+}\widehat{P}^{+}\varphi \|^2 + \frac{9}{4}\,\frac{|\gamma|^2}{\pi^2}\,\varkappa^2 \| \widehat{G}^{-}\widehat{P}^{-}\varphi \|^2$$

и $C_2 \in (0,1)$, $a \in (0,1)$, $\varepsilon_1 \in (0,\frac{1}{2}]$ и $b_1 < b_2$, из (3.38) и (3.39) выводим оценку

$$\begin{gathered}
(1-\delta_2)^{-1} \big(\big(\| \widehat{P}^{+}(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi \|^2 + \\
+ a^2 \| \widehat{P}^{-}(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\,\varphi \|^2 \big) \geqslant \\
\geqslant (1-\delta_1)(1-\widetilde{\varepsilon}) \big(C_2^2 \| \widehat{G}^{-}\widehat{P}^{-}\varphi \|^2 + a^2 \| \widehat{G}^{+}\widehat{P}^{+}\varphi \|^2 \big) - \\
- \frac{5(1-\delta_1)}{\delta_1} \Bigg(\big(\widetilde{\varepsilon} C_3^2 + a^2 C_4^2 + \frac{9}{4}\,\frac{|\gamma|^2}{\pi^2}\,(2(2\varepsilon_1)^2 + a^2)\, b_2^2 + \\
+ (1 + C_3^2 + C_4^2)\,\frac{b_2^2}{\varkappa^2} \big) \| \widehat{G}^{-}\widehat{P}^{-}\varphi \|^2 + \\
+ \big(2(2\varepsilon_1)^2 + (4 + C_3^2 + C_4^2)\,\frac{b_2^2}{\varkappa^2} \big) \| \widehat{G}^{+}\widehat{P}^{+}\varphi \|^2 \Bigg) .
\end{gathered} \tag{3.40}$$

Примем, наконец, последние ограничения на число $\varkappa_0$:

$$(1+C_3^2+C_4^2)\, b_2^2 \leqslant \frac{\delta_1}{5}\,(1-\widetilde{\varepsilon})\, C_2^2\,\frac{\delta}{10}\,\varkappa_0^2 ,\ (4+C_3^2+C_4^2)\, b_2^2 \leqslant \frac{\delta_1}{5}\,(1-\widetilde{\varepsilon})\, a^2\,\frac{\delta}{10}\,\varkappa_0^2 .$$

Из выбора чисел $\widetilde{\varepsilon}$, a и ε_1 имеем

$$2(2\varepsilon_1)^2 < \frac{\delta_1}{5}\,(1-\widetilde{\varepsilon})\, a^2\,\frac{\delta}{4} ,$$

$$\max\{ \widetilde{\varepsilon} C_3^2 ,\ a^2 C_4^2 ,\ \frac{9}{2}\,\frac{|\gamma|^2}{\pi^2}\,(2\varepsilon_1)^2 b_2^2 ,\ \frac{9}{4}\,\frac{|\gamma|^2}{\pi^2}\,a^2 b_2^2 \} < \frac{\delta_1}{5}\,(1-\widetilde{\varepsilon})\, C_2^2\,\frac{\delta}{10}$$

и $\widetilde{\varepsilon} \leqslant \frac{\delta}{8}$. Поэтому из (3.40) при всех $\varkappa \geqslant \varkappa_0$ (всех $k \in \mathbb{R}^n : (k,\gamma) = \pi$ и всех вектор-функций $\varphi \in \widetilde{H}^1(K;\mathbb{C}^M) \cap \mathcal{H}(\mathcal{C}(\frac{1}{2}))$) получаем требуемое неравенство

$$\|\widehat{P}^+(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\varphi\|^2 + a^2\|\widehat{P}^-(\widehat{\mathcal{D}}(k+i\varkappa e)+\widehat{W})\varphi\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant (1-\delta_2)\,(1-\delta_1)\,(1-\widetilde{\varepsilon})\,(1-\frac{\delta}{2})\,(C_2^2\,\|\widehat{G}^-\widehat{P}^-\varphi\|^2 + a^2\,\|\widehat{G}^+\widehat{P}^+\varphi\|^2) \geqslant$$

$$\geqslant (1-\delta)\,(C_2^2\,\|\widehat{G}^-\widehat{P}^-\varphi\|^2 + a^2\,\|\widehat{G}^+\widehat{P}^+\varphi\|^2)\,.$$

Теорема 5 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилов Л. И. Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Дирака // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 2. С. 233–240.
2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
3. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.
4. Kuchment P., Levendorskiĭ S. On the structure of spectra of periodic elliptic operators // Trans. Amer. Math. Soc. 2002. Vol. 354, № 2. P. 537–569.
5. Бирман М. Ш., Суслина Т. А. Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 2. С. 1–40.
6. Kuchment P. Floquet theory for partial differential equations // Oper. Theory Adv. Appl. Vol. 60. Basel: Birkhäuser Verlag, 1993.
7. Данилов Л. И. Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. VI. Ижевск. 45 с. Деп. в ВИНИТИ 31.12.96. № 3855-В96.
8. Filonov N., Sobolev A. V. Absence of the singular continuous component in the spectrum of analytic direct integrals // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2004. Т. 318. С. 298–307.
9. Данилов Л. И. О спектре оператора Дирака с периодическим потенциалом. Препринт ФТИ УрО АН СССР. Свердловск, 1987.
10. Данилов Л. И. О спектре оператора Дирака в $\mathbb{R}^n$ с периодическим потенциалом // Теор. и матем. физика. 1990. Т. 85, № 1. С. 41–53.
11. Данилов Л. И. Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. I. Ижевск. 35 с. Деп. в ВИНИТИ 12.12.91. № 4588-В91.
12. Данилов Л. И. Об отсутствии собственных значений в спектре обобщенного двумерного периодического оператора Дирака // Алгебра и анализ. 2005. Т. 17, № 3. С. 47–80.
13. Данилов Л. И. Об абсолютной непрерывности спектра трехмерного периодического оператора Дирака // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2006. Вып. 1 (35). С. 49–76.
14. Данилов Л. И. О спектре периодического оператора Дирака // Теор. и матем. физика. 2000. Т. 124, № 1. С. 3–17.

15. Данилов Л. И. Об абсолютной непрерывности спектра периодических операторов Шредингера и Дирака. I. Ижевск. 76 с. Деп. в ВИНИТИ 15.06.00. № 1683-В00.
16. Birman M. Sh., Suslina T. A. The periodic Dirac operator is absolutely continuous // Integr. Equat. and Oper. Theory. 1999. Vol. 34. P. 377–395.
17. Гельфанд И. М. Разложение по собственным функциям уравнений с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73, № 6. С. 1117–1120.
18. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
19. Данилов Л. И. Оценки резольвенты и спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом // Теор. и матем. физика. 1995. Т. 103, № 1. С. 3–22.
20. Thomas L. E. Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal // Commun. Math. Phys. 1973. Vol. 33. P. 335–343.

Поступила в редакцию 01.09.07

L. I. Danilov

Absolute continuity of the spectrum of multidimensional periodic magnetic Dirac operator

The absolute continuity of the spectrum of multidimensional periodic Dirac operator is proved for certain classes of discontinuous magnetic potentials.

Данилов Леонид Иванович
Физико-технический институт
УрО РАН
426000, Россия, г. Ижевск,
ул. Кирова, 132
E-mail: danilov@otf.pti.udm.ru