ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. №1

УДК 517.977

А. И. Благодатских

ДВЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ЖЕСТКО СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ[1]

Для двух нестационарных задач группового преследования (обобщенного примера Л. С. Понтрягина [1] и колебательного конфликтно управляемого процесса) с равными динамическими и инерционными возможностями всех участников получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего, при условии что убегающие используют одно и то же управление. Работа продолжает исследования [2–7].

Ключевые слова: дифференциальные игры, групповое преследование, поимка, пример Понтрягина, колебательный конфликтно управляемый процесс.

§ 1. Групповое преследование жестко скоординированных убегающих в примере Понтрягина

В пространстве $\mathbb{R}^\nu$ $(\nu \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Движение преследователя P_i описывается уравнением

$$x_i^{(l)} + a_1(t)x_i^{(l-1)} + a_2(t)x_i^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)x_i = u_i, \quad u_i \in V, \tag{1.1}$$

закон движения убегающего E_j имеет вид

$$y_j^{(l)} + a_1(t)y_j^{(l-1)} + a_2(t)y_j^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)y_j = v, \quad v \in V, \tag{1.2}$$

где $x_i, y_j, u_i, v \in \mathbb{R}^\nu$, V — строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^\nu$ с гладкой границей такой, что $\operatorname{Int} V \neq \emptyset$, функции $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_l(t)$ непрерывны на $[t_0, \infty)$. В момент $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(q)}(t_0) = X_i^q, \quad y_j^{(q)}(t_0) = Y_j^q, \quad \text{причем } X_i^0 \neq Y_j^0 \text{ для всех } i, j. \tag{1.3}$$

Здесь и далее $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in J = \{1, 2, \ldots, m\}$, $q = 0, 1, \ldots, l-1$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06–01–00258).

Вместо $(1.1), (1.2), (1.3)$ рассмотрим уравнение с начальными условиями (при $t = t_0$)

$$z_{ij}^{(l)} + a_1(t)z_{ij}^{(l-1)} + a_2(t)z_{ij}^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)z_{ij} = u_i - v, \quad u_i, v \in V, \tag{1.4}$$

$$z_{ij}^{(q)}(t_0) = Z_{ij}^q = X_i^q - Y_j^q. \tag{1.5}$$

Управления из класса измеримых по Лебегу на $[t_0, \infty)$ функций со значениями из V будем называть допустимыми.

Определение 1. В игре Γ *возможна поимка*, если существует такой момент $T_0 = T_0(Z_{ij}^q)$, что для любого допустимого управления $v(t)$ найдутся допустимые управления

$$u_i(t) = u_i(t,\ Z_{ij}^q,\ v(s),\ t_0 \leqslant s \leqslant t)$$

такие, что для некоторых $\tau \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in I$ и $\beta \in J$ выполнено

$$z_{\alpha\beta}(\tau) = x_\alpha(\tau) - y_\beta(\tau) = 0.$$

Отметим, что действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который в каждый момент времени t для всех убегающих E_j выбирает одно и то же управление $v(t)$.

Через $\varphi_q(t, s)$ $(t \geqslant s \geqslant t_0)$ обозначим решение уравнения с начальными условиями

$$\omega^{(l)} + a_1(t)\omega^{(l-1)} + a_2(t)\omega^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)\omega = 0,$$

$$\omega(s) = 0, \ldots, \omega^{(q-1)}(s) = 0,\ \omega^{(q)}(s) = 1,\ \omega^{(q+1)}(s) = 0, \ldots, \omega^{(l-1)}(s) = 0.$$

Пусть далее

$$\xi_{ij}(t) = \varphi_0(t, t_0)Z_{ij}^0 + \varphi_1(t, t_0)Z_{ij}^1 + \ldots + \varphi_{l-1}(t, t_0)Z_{ij}^{l-1}.$$

Предположение 1. Существуют непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции $\alpha_{ij}(t)$ и $\xi_{ij}^1(t)$, обладающие следующими свойствами: 1) $\xi_{ij}^1(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора [8]; 2) $\alpha_{ij}(t) > 0$ для всех $t \geqslant t_0$; 3) $\lim\limits_{t\to\infty} \Big(\xi_{ij}^1(t) - \alpha_{ij}(t)\xi_{ij}(t)\Big) = 0.$

Выражение «функция (определенная на $[t_0, \infty]$) является почти периодической в смысле Бора» означает, что ее можно доопределить при $t < t_0$ так, чтобы полученная функция стала почти периодической по Бору.

П р е д п о л о ж е н и е 2. Функции $\varphi_{l-1}(t,s)$, $\alpha_{ij}(t)$ таковы, что

$$\lim_{t\to\infty}\alpha(t)\int_{t_0}^{t}\left|\varphi_{l-1}(t,s)\right|ds=\infty,\qquad \text{где}\qquad \alpha(t)=\min_{i,j}\{\alpha_{ij}(t)\}.$$

Обозначим через H^1_{ij} кривые

$$H^1_{ij}=\{\xi^1_{ij}(t),\ t\in[t_0,\infty)\}.$$

У с л о в и е 1. Для каждого $i\in I$ существуют $k_i\in J$ и $h^0_{ik_i}\in H^1_{ik_i}$ такие, что

$$0\in \operatorname{Intco}\{h^0_{ik_i}\}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* 1, 2 *и условие* 1. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В $\mathbb{R}^\nu$ определим вспомогательную дифференциальную игру Γ^* $n+1$ лиц: n преследователей P_{ik_i} и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t=t_0$)

$$x^{(l)}_{ik_i}+a_1(t)x^{(l-1)}_{ik_i}+a_2(t)x^{(l-2)}_{ik_i}+\ldots+a_l(t)x_{ik_i}=u_{ik_i},\quad u_{ik_i}\in V,$$

$$y^{(l)}(t)+a_1(t)y^{(l-1)}+a_2(t)y^{(l-2)}+\ldots+a_l(t)y=w,\quad w\in V,$$

$$x^{(q)}_{ik_i}(t_0)=Z^q_{ik_i}=X^q_i-Y^q_{k_i},\ y^{(q)}(t_0)=0.$$

По формуле Коши для всех допустимых управлений $u_{ik_i}(t),w(t)$ и момента времени $t\geqslant t_0$

$$x_{ik_i}(t)=\xi_{ik_i}(t)+\int_{t_0}^{t}\varphi_{l-1}(t,s)u_{ik_i}(s)ds=\varphi_0(t,t_0)(X^0_i-Y^0_{k_i})+$$

$$+\varphi_1(t,t_0)(X^1_i-Y^1_{k_i})+\ldots+\varphi_{l-1}(t,t_0)(X^{l-1}_i-Y^{l-1}_{k_i})+\int_{t_0}^{t}\varphi_{l-1}(t,s)u_{ik_i}(s)ds,$$

$$y(t)=\int_{t_0}^{t}\varphi_{l-1}(t,s)w(s)ds.$$

Пусть в игре Γ^* убегающий E использует управление, выбранное убегающими E_j в игре Γ, то есть

$$w(t)=v(t)\ \text{для всех}\ t\geqslant t_0.$$

В этом случае имеет место равенство

$$y_{k_i}(t)=y(t)+\varphi_0(t,t_0)Y^0_{k_i}+\varphi_1(t,t_0)Y^1_{k_i}+\ldots+\varphi_{l-1}(t,t_0)Y^{l-1}_{k_i}.\qquad(1.6)$$

Из теоремы 1 [6, с. 20] следует, что в игре Γ^* возможна поимка. Пусть $u_{ik_i}(t)$ — допустимые управления, выбранные преследователями P_{ik_i}, такие, что они обеспечивают поимку в игре Γ^*, значит

$$x_{\alpha k_\alpha}(\tau) = y(\tau) \text{ для некоторых } \alpha \in I,\ \tau > t_0. \tag{1.7}$$

Зададим управление преследователей P_i в игре Γ следующим образом:

$$u_i(t) = u_{ik_i}(t) \text{ для всех } t \geqslant t_0,$$

тогда

$$x_i(t) = x_{ik_i}(t) + \varphi_0(t,t_0)Y^0_{k_i} + \varphi_1(t,t_0)Y^1_{k_i} + \ldots + \varphi_{l-1}(t,t_0)Y^{l-1}_{k_i}. \tag{1.8}$$

Объединяя $(1.6), (1.7), (1.8)$, получим, что

$$x_\alpha(\tau) = y_{k_\alpha}(\tau) \text{ или } z_{\alpha k_\alpha}(\tau) = x_\alpha(\tau) - y_{k_\alpha}(\tau) = 0.$$

Теорема доказана. □

П р е д п о л о ж е н и е 3. Функции $\xi_{ij}(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора и $\varphi_{l-1}(t,s)$ такова, что

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \big|\varphi_{l-1}(t,s)\big| ds = \infty.$$

Обозначим через H_{ij} кривые

$$H_{ij} = \{\xi_{ij}(t),\ t \in [t_0, \infty)\}.$$

У с л о в и е 2. Для каждого $i \in I$ существуют $k_i \in J$ и $h^0_{ik_i} \in H_{ik_i}$ такие, что

$$0 \in \operatorname{Intco}\{h^0_{ik_i}\}.$$

Следствие 1. *Пусть выполнены предположение* 3 *и условие* 2. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая $\alpha_{ij}(t) = 1,\ \xi^1_{ij}(t) = \xi_{ij}(t)$, получаем выполнимость всех условий теоремы 1. Следствие доказано. □

У с л о в и е 3. Для каждого $i \in I$ существуют $k_i \in J$ такие, что

$$0 \in \operatorname{Intco}\{Z^0_{ik_i}\}.$$

Следствие 2. *Пусть выполнены предположение* 3 *и условие* 3. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве $h^0_{ik_i}$ в условии 2 можно взять $X^0_i - Y^0_{k_i} = Z^0_{ik_i} = \xi_{ik_i}(t_0) \in H_{ik_i}$ и применить следствие 1. Следствие доказано. □

З а м е ч а н и е 1. Предположения 1, 2, 3 выполнены, в частности, если $a_{q+1}(t)$ являются постоянными функциями, то есть $a_{q+1}(t) = a_{q+1}$ для всех $t \in [t_0, \infty)$, и все корни ρ уравнения

$$\rho^l + a_1\rho^{l-1} + a_2\rho^{l-2} + \ldots + a_l\rho = 0 \tag{1.9}$$

являются простыми и чисто мнимыми.

Следствие 3. *Пусть функции* $a_{q+1}(t)$ *являются постоянными, все корни* ρ *уравнения* (1.9) *являются простыми и чисто мнимыми и выполнено условие* 2 *или условие* 3. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

Рассмотрим примеры с одним убегающим.

П р и м е р 1. В $\mathbb{R}^\nu$ $(\nu \geqslant 2)$ рассмотрим игру Γ_1 $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Пусть уравнение (1.4) имеет вид

$$\ddot{z}_{i1} + a^2 z_{i1} = u_i - v, \quad a \in \mathbb{R}^1.$$

Тогда корни уравнения (1.9), имеющего вид

$$\rho^2 + a^2 = 0,$$

равны $\pm a\iota$ (ι — мнимая единица) и предположения 1, 2, 3 выполнены.

Утверждение 1. *Пусть* $0 \in \operatorname{Intco}\{Z^0_{11}, Z^0_{21}, \ldots, Z^0_{n1}\}$. *Тогда в игре* Γ_1 *возможна поимка.*

П р и м е р 2. В $\mathbb{R}^\nu$ $(\nu \geqslant 2)$ рассмотрим игру Γ_2 $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Пусть уравнение (1.4) имеет вид

$$z^{(6)}_{i1} + 14 z^{(4)}_{i1} + 49\ddot{z}_{i1} + 36 z_{i1} = u_i - v.$$

Тогда корни уравнения (1.9), имеющего вид

$$\rho^6 + 14\rho^4 + 49\rho^2 + 36 = 0,$$

равны $\pm\iota$, $\pm 2\iota$, $\pm 3\iota$ и предположения 1, 2, 3 выполнены.

Утверждение 2. *Пусть* $0 \in \operatorname{Intco}\{Z_{11}^0, Z_{21}^0, \ldots, Z_{n1}^0\}$. *Тогда в игре* Γ_2 *возможна поимка.*

П р и м е р 3. В $\mathbb{R}^3$ рассмотрим игру Γ_3 6 лиц: 5 преследователей P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 и убегающего E. Пусть уравнение (1.4) и начальные условия (1.5) имеют вид

$$\ddot{z}_{i1} + z_{i1} = u_i - v, \quad t_0 = 0,$$

$$Z_{11}^0 = Z_{21}^0 = Z_{31}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ Z_{41}^0 = Z_{51}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ Z_{i1}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Тогда корни уравнения (1.9) равны $\pm\iota$ и предположения 1, 2, 3 выполнены. Здесь условие 3 не выполнено. Покажем, что имеет место условие 2. Так как

$$\varphi_0(t, 0) = \cos t, \quad \varphi_1(t, 0) = \sin t, \quad \xi_{i1}(t) = Z_{i1}^0 \cos t + Z_{i1}^1 \sin t,$$

то $H_{11} = H_{21} = H_{31}$ — это окружности радиуса 1 с центром в начале координат, лежащие в плоскости первой и второй координаты, $H_{41} = H_{51}$ — это окружности радиуса 1 с центром в начале координат, лежащие в плоскости второй и третьей координаты. Выбирая

$$h_{11}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_{21}^0 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_{31}^0 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$h_{41}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_{51}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

получаем, что условие 2 выполнено.

Утверждение 3. *В игре* Γ_3 *возможна поимка.*

П р и м е р 4. В $\mathbb{R}^\nu$ ($\nu \geqslant 2$) рассмотрим игру Γ_4 $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Пусть уравнение (1.4) имеет вид

$$\dot{z}_{i1} + \sin t\ z_{i1} = u_i - v.$$

Тогда

$$\varphi_0(t, s) = e^{\cos t - \cos s}, \quad \xi_{i1}(t) = e^{\cos t - \cos t_0} Z_{i1}^0$$

и предположения 1, 2, 3 выполнены.

Утверждение 4. *Пусть* $0 \in \operatorname{Intco}\{Z_{11}^0, Z_{21}^0, \ldots, Z_{n1}^0\}$. *Тогда в игре* Γ_4 *возможна поимка.*

П р и м е р 5. В $\mathbb{R}^\nu$ $(\nu \geqslant 2)$ рассмотрим игру Γ_5 $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Пусть уравнение (1.4) имеет вид

$$\dot{z}_{i1} + \frac{\sin t}{2+\cos t} z_{i1} = u_i - v.$$

Тогда

$$\varphi_0(t,s) = \frac{2+\cos t}{2+\cos s}, \quad \xi_{i1}(t) = \frac{2+\cos t}{2+\cos t_0} Z_{i1}^0$$

и предположения 1, 2, 3 выполнены.

Утверждение 5. *Пусть* $0 \in \operatorname{Intco}\{Z_{11}^0, Z_{21}^0, \ldots, Z_{n1}^0\}$. *Тогда в игре* Γ_5 *возможна поимка.*

П р и м е р 6. В $\mathbb{R}^\nu$ $(\nu \geqslant 2)$ рассмотрим игру Γ_6 $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Пусть уравнение (1.4) имеет вид

$$\dot{z}_{i1} + \left(\frac{1}{t} + \frac{\sin t}{2+\cos t}\right) z_{i1} = u_i - v$$

и $t_0 > 0$. Тогда

$$\varphi_0(t,s) = \frac{s(2+\cos t)}{t(2+\cos s)}, \quad \xi_{i1}(t) = \frac{t_0(2+\cos t)}{t(2+\cos t_0)} Z_{i1}^0,$$

$$\alpha(t) = \alpha_{i1}(t) = t, \quad \xi_{i1}^1(t) = \frac{t_0}{2+\cos t_0}(2+\cos t) Z_{i1}^0$$

и предположения 1, 2 выполнены. Отметим, что предположение 3 не выполнено. В качестве h_{i1}^0 в условии 1 возьмем $t_0 Z_{i1}^0 = \xi_{i1}^1(t_0) \in H_{i1}^1$.

Утверждение 6. *Пусть* $0 \in \operatorname{Intco}\{Z_{11}^0, Z_{21}^0, \ldots, Z_{n1}^0\}$. *Тогда в игре* Γ_6 *возможна поимка.*

П р и м е р 7. В $\mathbb{R}^\nu$ $(\nu \geqslant 2)$ рассмотрим игру Γ_7 $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Пусть уравнение (1.4) имеет вид

$$z_{i1}^{(4)} + 2\ddot{z}_{i1} + z_{i1} = u_i - v$$

и $t_0 = 0$. Тогда корни уравнения (1.9) равны $\pm\iota$, а их кратности 2 и

$$\varphi_0(t,0) = \frac{1}{2} t \sin t + \cos t, \quad \varphi_1(t,0) = -\frac{1}{2} t \cos t + \frac{3}{2} \sin t, \quad \varphi_2(t,0) = \frac{1}{2} t \sin t,$$

$$\varphi_3(t,s) = -\frac{1}{2}(t-s)\cos(t-s) + \frac{1}{2}\sin(t-s),$$

$$\xi_{i1}(t) = t\Big(-\frac{1}{2}(Z_{i1}^1+Z_{i1}^3)\cos t+\frac{1}{2}(Z_{i1}^0+Z_{i1}^2)\sin t\Big)+Z_{i1}^0\cos t+\frac{1}{2}(3Z_{i1}^1+Z_{i1}^3)\sin t,$$

$$\alpha(t) = \alpha_{i1}(t) = \frac{1}{t+1}, \quad \xi_{i1}^1(t) = -\frac{1}{2}(Z_{i1}^1 + Z_{i1}^3)\cos t + \frac{1}{2}(Z_{i1}^0 + Z_{i1}^2)\sin t.$$

Отметим, что

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t)\int_0^t \big|\varphi_3(t,s)\big|ds = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\big|(t-s)\cos(t-s)+\sin(t-s)\big|}{t+1}ds = \infty$$

и предположения 1, 2 выполнены. Учитывая, что $\xi_{i1}^1\big(\frac{\pi}{2}\big)= \frac{1}{2}(Z_{i1}^0 + Z_{i1}^2)$,

$$\xi_{i1}^1(\pi) = \frac{1}{2}(Z_{i1}^1 + Z_{i1}^3), \quad \xi_{i1}^1\big(\frac{3\pi}{4}\big)= \frac{\sqrt{2}}{4}(Z_{i1}^0 + Z_{i1}^1 + Z_{i1}^2 + Z_{i1}^3),$$

получаем справедливость следующего утверждения.

Утверждение 7. *Если* $0 \in \operatorname{Intco}\{Z_{i1}^0 + Z_{i1}^2\}$ *или* $0 \in \operatorname{Intco}\{Z_{i1}^1 + Z_{i1}^3\}$, *или* $0 \in \operatorname{Intco}\{Z_{i1}^0 + Z_{i1}^1 + Z_{i1}^2 + Z_{i1}^3\}$, *то в игре* Γ_7 *возможна поимка.*

Отметим, что в рассмотренных примерах не выполняются достаточные условия поимки работы [4]. Рассмотрим пример с двумя убегающими.

Пример 8. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру Γ_8 5 лиц: 3 преследователей P_1, P_2, P_3 и 2 убегающих E_1, E_2. Пусть уравнение (1.4) и начальные условия (1.3) имеют вид

$$\dot{z}_{ij} + \frac{\sin t}{10+\cos t}z_{ij} = u_i - v, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}, \quad i = 1,2,3, \ j = 1,2,$$

$$X_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \ X_2^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \end{pmatrix}, \ X_3^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix},$$

$$Y_1^0 = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix}, \ Y_2^0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Z_{11}^0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \ Z_{21}^0 = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \end{pmatrix}, \ Z_{31}^0 = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \end{pmatrix},$$

$$Z_{12}^0 = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \end{pmatrix}, \ Z_{22}^0 = \begin{pmatrix} -11 \\ -10 \end{pmatrix}, \ Z_{32}^0 = \begin{pmatrix} -9 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

МАТЕМАТИКА 2008. №1

Предположения 1, 2, 3 выполнены, так как

$$\varphi_0(t, \frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{1}{10}\cos t, \quad \xi_{ij}(t) = (1 + \frac{1}{10}\cos t)Z_{ij}^0, \quad H_{ij} = \left[\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right] Z_{ij},$$

где выражение $[a,b]Z$ означает отрезок, соединяющий точки aZ и bZ. Отметим, что $0 \notin \operatorname{Intco}\{Z_{i1}^0\}$, $0 \notin \operatorname{Intco}\{Z_{i2}^0\}$ и, кроме того, $0 \notin \operatorname{Intco}\{H_{i1}\}$, $0 \notin \operatorname{Intco}\{H_{i2}\}$. Это означает, что если рассмотреть аналогичную игру, но только с одним убегающим (E_1 или E_2), то достаточные условия поимки не выполняются. В данной игре (с двумя убегающими) условие 3 выполнено, например $0 \in \operatorname{Intco}\{Z_{11}^0, Z_{22}^0, Z_{31}^0\}$.

Утверждение 8. *В игре* Γ_8 *возможна поимка.*

§ 2. Конфликтно управляемый процесс при участии групп преследователей и жестко скоординированных убегающих

В пространстве $\mathbb{R}^\nu$ $(\nu \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Движение преследователя P_i описывается уравнением

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \quad u_i \in V, \tag{2.1}$$

закон движения убегающего E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = A(t)y_j + v, \quad v \in V, \tag{2.2}$$

где $x_i, y_j, u_i, v \in \mathbb{R}^\nu$, V — строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^\nu$ с гладкой границей такой, что $\operatorname{Int} V \neq \emptyset$, $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка ν. В момент $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(t_0) = X_i^0, \quad y_j(t_0) = Y_j^0, \qquad \text{причем } X_i^0 \neq Y_j^0 \text{ для всех } i, j. \tag{2.3}$$

Здесь и далее $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in J = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Вместо $(2.1), (2.2), (2.3)$ рассмотрим уравнение с начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\dot{z}_{ij} = A(t)z_{ij} + u_i - v, \quad u_i, v \in V, \tag{2.4}$$

$$z_{ij}(t_0) = Z_{ij}^0 = X_i^0 - Y_j^0. \tag{2.5}$$

Управления из класса измеримых по Лебегу на $[t_0, \infty)$ функций со значениями из V будем называть допустимыми.

О п р е д е л е н и е 2. В игре Γ *возможна поимка*, если существует такой момент $T_0 = T_0(Z_{ij}^0)$, что для любого допустимого управления $v(t)$ найдутся допустимые управления

$$u_i(t) = u_i(t,\ Z_{ij}^0,\ v(s),\ t_0 \leqslant s \leqslant t)$$

такие, что для некоторых $\tau \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in I$ и $\beta \in J$ выполнено

$$z_{\alpha\beta}(\tau) = x_\alpha(\tau) - y_\beta(\tau) = 0.$$

Отметим, что действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который в каждый момент времени t для всех убегающих E_j выбирает одно и то же управление $v(t)$.

Пусть Φ — фундаментальная матрица системы

$$\dot{\omega} = A(t)\omega$$

такая, что $\Phi(t_0) = \mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ — единичная матрица.

П р е д п о л о ж е н и е 4. Матрица $\Phi(t)$ является почти периодической в смысле Бора [8] и ее первая производная равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$.

Выражение «функция (определенная на $[t_0, \infty]$) является почти периодической в смысле Бора» означает, что ее можно доопределить при $t < t_0$ так, чтобы полученная функция стала почти периодической по Бору.

У с л о в и е 4. Для каждого $i \in I$ существуют $k_i \in J$ такие, что

$$0 \in \operatorname{Intco}\{Z_{ik_i}^0\}.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены предположение* 4 *и условие* 4. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В $\mathbb{R}^\nu$ определим вспомогательную дифференциальную игру Γ^* $n+1$ лиц: n преследователей P_{ik_i} и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\dot{x}_{ik_i} = A(t)x_{ik_i} + u_{ik_i}, \quad u_{ik_i} \in V,$$

$$\dot{y} = A(t)y + w, \quad w \in V,$$
$$x_{ik_i}(t_0) = Z_{ik_i}^0 = X_i^0 - Y_{k_i}^0,\ y(t_0) = 0.$$

По формуле Коши для всех допустимых управлений $u_{ik_i}(t), w(t)$ и момента времени $t \geqslant t_0$

$$x_{ik_i}(t) = \Phi(t)(X_i^0 - Y_{k_i}^0) + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)u_{ik_i}(s)ds,$$

$$y(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)w(s)ds.$$

Пусть в игре Γ^* убегающий E использует управление, выбранное убегающими E_j в игре Γ, то есть

$$w(t) = v(t) \text{ для всех } t \geqslant t_0.$$

В этом случае имеет место равенство

$$y_{k_i}(t) = y(t) + \Phi(t)Y_{k_i}^0. \tag{2.6}$$

Из теоремы 1 [7, с. 85] следует, что в игре Γ^* возможна поимка. Пусть $u_{ik_i}(t)$ — допустимые управления, выбранные преследователями P_{ik_i}, такие, что они обеспечивают поимку в игре Γ^*, значит

$$x_{\alpha k_\alpha}(\tau) = y(\tau) \text{ для некоторых } \alpha \in I,\ \tau > t_0. \tag{2.7}$$

Зададим управление преследователей P_i в игре Γ следующим образом:

$$u_i(t) = u_{ik_i}(t) \text{ для всех } t \geqslant t_0,$$

тогда

$$x_i(t) = x_{ik_i}(t) + \Phi(t)Y_{k_i}^0. \tag{2.8}$$

Объединяя (2.6), (2.7), (2.8), получим, что

$$x_\alpha(\tau) = y_{k_\alpha}(\tau) \text{ или } z_{\alpha k_\alpha}(\tau) = x_\alpha(\tau) - y_{k_\alpha}(\tau) = 0.$$

Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 2. Предположение 4 выполнено, в частности, если матрица $A(t)$ является постоянной, то есть $A(t) = A$ для всех $t \in [t_0, \infty)$, и все корни ρ уравнения

$$\det(A - \rho\mathcal{I}) = 0 \tag{2.9}$$

являются простыми и чисто мнимыми.

Следствие 4. *Пусть матрица* $A(t)$ *постоянна, все корни* ρ *уравнения* (2.9) *являются простыми и чисто мнимыми и выполнено условие* 4. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

П р и м е р 9. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру Γ_9 4 лиц: 3 преследователей P_1, P_2, P_3 и убегающего E_1. Пусть уравнение (2.4) и начальные условия (2.5) имеют вид

$$\dot{z}_{i1} = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} z_{i1} + u_i - v,$$

$$Z_{11}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ Z_{21}^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ Z_{31}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{1-\cos t} & 0 \\ e^{1-\cos t} \sin t & e^{1-\cos t} \end{pmatrix}$$

и все условия теоремы 2 выполнены.

Утверждение 9. *В игре* Γ_9 *возможна поимка.*

П р и м е р 10. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру Γ_{10} 5 лиц: 3 преследователей P_1, P_2, P_3 и 2 убегающих E_1, E_2. Пусть уравнение (2.4) и начальные условия (2.3) имеют вид

$$\dot{z}_{ij} = \begin{pmatrix} \cos t \sin t & -\cos t \\ 2\cos t - \cos^3 t & -\cos t \sin t \end{pmatrix} z_{ij} + u_i - v, \quad i = 1, 2, 3, \ j = 1, 2,$$

$$X_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \ X_2^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \end{pmatrix}, \ X_3^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix},$$

$$Y_1^0 = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix}, \ Y_2^0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\sin t \\ \sin t & \cos^2 t \end{pmatrix},$$

$$Z_{11}^0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \ Z_{21}^0 = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \end{pmatrix}, \ Z_{31}^0 = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \end{pmatrix},$$

$$Z_{12}^0 = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \end{pmatrix}, \ Z_{22}^0 = \begin{pmatrix} -11 \\ -10 \end{pmatrix}, \ Z_{32}^0 = \begin{pmatrix} -9 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $0 \notin \operatorname{Intco}\{Z_{i1}^0\}$ и $0 \notin \operatorname{Intco}\{Z_{i2}^0\}$. Это означает, что если рассмотреть аналогичную игру, но только с одним убегающим (E_1 или E_2), то достаточные условия поимки не выполняются. В данной игре (с двумя убегающими) условие 4 выполнено, например $0 \in \operatorname{Intco}\{Z_{11}^0, Z_{22}^0, Z_{31}^0\}$. Предположение 4 и все условия теоремы 2 выполнены.

Утверждение 10. *В игре* Γ_{10} *возможна поимка.*

Пример 11. В $\mathbb{R}^\nu$ $(\nu = 2p,\ p \geqslant 1)$ рассмотрим игру Γ_{11} $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Пусть уравнение (2.4) имеет вид

$$\dot{z}_{ij} = Az_{ij} + u_i - v, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_p & 0 \end{pmatrix},$$

$a_1, a_2, \ldots, a_p$ — некоторые отличные от нуля и не совпадающие друг с другом по абсолютной величине числа. Корни уравнения (2.9)

$$\det(A - \rho\mathcal{I}) = (\rho^2 + a_1^2)(\lambda^2 + a_2^2)\ldots(\lambda^2 + a_p^2) = 0$$

равны $\pm a_1\iota,\ \pm a_2\iota, \ldots, \pm a_p\iota$. Из следствия 4 следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 11. *Если имеет место условие* 4*, то в игре* Γ_{11} *возможна поимка.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988. 576 с.
2. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: МГУ, 1990. 192 с.
3. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 380 с.
4. Петров Н. Н. Нестационарный пример Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Проблемы управления и информатики. 2000. №4. С. 18–24.
5. Вагин Д. А., Петров Н. Н. Простое преследование жестко скоординированных убегающих // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. №5. С. 75–79.

6. Благодатских А. И. О задаче группового преследования в нестационарном примере Понтрягина // Вестн. Удм. ун-та. Математика. 2007. №1. С. 17–24.

7. Благодатских А. И. Почти периодические конфликтно управляемые процессы со многими участниками // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. №2. С. 83–86.

8. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

Поступила в редакцию 15.10.07

A. I. Blagodatskikh
Two non-stationary pursuit problems of a rigidly connected evaders

The sufficient conditions are obtained for the capture of at least one evader in two non-stationary problems of the pursuit under the condition that all evaders use the same control.

Благодатских Александр Иванович
ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет»
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 4)
E-mail: aiblag@mail.ru