УДК 517.917

В. Н. Баранов

МНОЖЕСТВА ВЫЖИВАЕМОСТИ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ [1]

Доказано, что необходимым и достаточным условием выживаемости системы с последействием

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

в множестве $M \subset \mathbb{R} \times C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ является включение $f(t,\varphi) \in T_{(t,\varphi)}M$, где $T_{(t,\varphi)}M$ — касательное к M пространство. Доказано, что необходимым и достаточным условием выживаемости включения с последействием

$$\dot{x}(t) \in F(t, x_t)$$

в множестве $M \subset \mathbb{R} \times C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ является условие $F(t,\varphi) \cap T_{(t,\varphi)}M \neq \varnothing$. Доказаны достаточные условия положительной инвариантности множества для системы (включения) с последействием. А именно, если имеется $\hat{\delta} > 0$ такое, что для всех $0 \leqslant \delta \leqslant \hat{\delta}$ и для всех $(t,\varphi) \in \partial M^{\delta}$ выполнено включение $F(t,\varphi) \subset T_{(t,\varphi)}M^{\delta}$, то множество M является положительно инвариантным относительно системы (включения) с последействием.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с последействием, выживаемость, положительная инвариантность.

Введение

Задачи выживания (термин принадлежит Aubin J. P. см., напр., [1]) для управляемых динамических систем включают в себя большое число вполне конкретных приложений, интерес к которым не ослабевает с конца 50-х годов прошлого столетия. К числу таких прикладных задач относятся задачи об обходе препятствия, о построении управления, удерживающего траектории системы в заранее заданном множестве, в частности, на заданном многообразии, некоторые задачи математической экономики и многое другое.

Вопрос о существовании решения $x(t, x_0)$ задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$ с начальным условием

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06–01–00258).

$x(0) = x_0$, в течение некоторого времени остающегося в наперед заданном множестве $M \subset \mathbb{R}^n$ (такое решение называется выживающим), был разрешен в 1942 году Нагумо [2]. Теорема Нагумо состоит в следующем. Пусть задано множество M. Оказывается, что для каждой точки $x_0 \in M$ существует выживающее решение $x(t, x_0)$ в том и только том случае, если во всех точках x, принадлежащих границе множества M, выполняется включение $f(x) \in K_x M$, $x \in \partial M$, где $K_x M$ — конус Булигана к M в точке x.

Задачи выживания для систем с последействием (их еще называют системами с наследственностью) отличаются от задач выживания для обыкновенных дифференциальных уравнений в первую очередь тем, что фазовое пространство $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ таких систем бесконечномерно. Эту интерпретацию систем с последействием предложил Н. Н. Красовский [3].

Для системы с последействием $\dot{x}(t) = f(x_t)$ и целевого множества M, заданного в пространстве абсолютно непрерывных функций неравенством $M \doteq \{\sigma \in C([-r,0],\mathbb{R}^n) : \quad \beta(\sigma(0)) + \int_{-r}^{0} \alpha(s,\sigma(s))ds \leqslant 0\}$, достаточные условия выживаемости были получены Е. Л. Тонковым [4].

В работе [5] исследуется задача выживания системы с последействием в множестве $M \subset \mathbb{R}^n$. В этом случае удается воспользоваться определением конуса Булигана для множества в $\mathbb{R}^n$.

Основной целью предлагаемой работы является исследование условий выживания решений систем с последействием и дифференциальных включений с последействием в заданном множестве фазового пространства $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$. Формальное распространение теоремы Нагумо на системы с последействием оказалось невозможным по той причине, что даже простые движения гладкой динамической системы в бесконечномерном фазовом пространстве могут не иметь производной (понимаемой в обычном смысле) на множествах положительной меры.

Кроме необходимых и достаточных условий выживаемости системы дифференциальных уравнений и дифференциальных включений в множестве найдены условия положительной инвариантности множеств.

§ 1. Основные определения и обозначения

Обозначим $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x, y\rangle \doteq \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ и нормой $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Через $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество непустых компактных выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. Обозначим $\rho(x, M)$ — расстояние от точки x до множества M, определенное равенством $\rho(x, M) \doteq \inf\limits_{y \in M} |x - y|$. Для подмножества M пространства X и числа $t \in \mathbb{R}$ запись (t, M) будет обозначать подмножество пространства $\mathbb{R} \times X$ вида

$$(t, M) \doteq \{(t, x) \in \mathbb{R} \times X : x \in M\}.$$

Пусть задано число $r > 0$. Обозначим $\mathfrak{X} = C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных на отрезке $[-r,0]$ функций со значениями в $\mathbb{R}^n$ и нормой $\|\varphi\|_{\mathfrak{X}} \doteq \max\limits_{s\in[-r,0]} |\varphi(s)|$; $\mathfrak{Y} = L_\infty([-r,0],\mathbb{R}^n)$ — пространство измеримых по Лебегу, существенно ограниченных на отрезке $[-r,0]$ функций с нормой $\|\varphi\|_{\mathfrak{Y}} \doteq \operatorname{ess\,sup}_{s\in[-r,0]} |\varphi(s)|$; $\mathfrak{X}_0 = AC_\infty([-r,0],\mathbb{R}^n)$ — пространство абсолютно непрерывных функций с существенно ограниченной производной и нормой $\|\varphi\|_{\mathfrak{X}_0} \doteq \|\varphi\|_{\mathfrak{X}} + \|\dot\varphi(s)\|_{\mathfrak{Y}}$.

В дальнейшем будем использовать сокращения. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $r > 0$. Обозначим $I_\alpha(t_0)$ — полуинтервал $[t_0, t_0+\alpha)$, $I_{r,\alpha}(t_0)$ — полуинтервал $[t_0 - r, t_0 + \alpha)$, Если $t_0 = 0$, то будем писать просто I_α вместо $I_\alpha(0)$.

В пространстве $\mathbb{R}^2$ для произвольного числа $r > 0$ обозначим треугольник $\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 :\, s \in [-r, t_0 - t],\, t \in [t_0, t_0 + r]\}$ через $\Delta_r(t_0)$. Если $t_0 = 0$ и не возникает путаницы с r, то $\Delta_r(0)$ будем обозначать просто Δ.

Для всякой непрерывной функции $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in I_{r,\alpha}(t_0)$, где $\alpha > 0$, обозначим $t \to x_t \in \mathfrak{X}$, $t \in I_\alpha(t_0)$ — отображение полуинтервала $I_\alpha(t_0)$ в пространство $\mathfrak{X}$, заданное равенством

$$x_t(s) \doteq x(t+s), \quad t \in I_\alpha(t_0), \quad s \in [-r,0]. \tag{1}$$

Будем говорить, что отображение $t \to x_t \in \mathfrak{X}$, $t \in I_\alpha(t_0)$ *порождено* функцией $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in I_{r,\alpha}(t_0)$.

Отображения $t \to x_t \in \mathfrak{X}$, $t \in I_\alpha(t_0)$ будем также называть *движениями в пространстве* $\mathfrak{X}$.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения с последействием

$$\dot x(t) = f(t, x_t), \tag{2}$$

$$x_{t_0} = \varphi, \tag{3}$$

где $f : \mathbb{R} \times \mathfrak{X} \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная на $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}$ функция, $\varphi \in \mathfrak{X}$.

О п р е д е л е н и е 1 (см. [6]). *Решением задачи* (2), (3) на полуинтервале $I_{r,\alpha}(t_0)$ называется такая непрерывная функция $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in I_{r,\alpha}(t_0)$, что для всех $t \in [t_0 - r, t_0]$ выполнено равенство $x(t) = \varphi(t - t_0)$, на интервале $t \in I_\alpha(t_0)$ функция $t \to x(t)$ абсолютно непрерывна и для почти всех $t \in I_\alpha(t_0)$ имеет место равенство (2), где x_t определено равенством (1).

Будем рассматривать также задачу Коши для дифференциального включения с последействием

$$\dot x(t) \in F(t, x_t), \tag{4}$$

$$x_{t_0} = \varphi, \tag{5}$$

где $F : \mathbb{R} \times \mathfrak{X} \to 2^{\mathbb{R}^n}$ — многозначное отображение, определенное на $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}$, значения которого — непустые подмножества $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathfrak{X}$.

Определение 2. *Решением задачи* (4), (5) на полуинтервале $I_{r,\alpha}(t_0)$ называется непрерывная функция $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in I_{r,\alpha}(t_0)$ такая, что для всех $t \in [t_0 - r, t_0]$ выполнено равенство $x(t) = \varphi(t - t_0)$, на интервале $t \in I_\alpha(t_0)$ функция $t \to x(t)$ абсолютно непрерывна и для почти всех $t \in I_\alpha(t_0)$ имеет место включение (4), где x_t определено равенством (1).

В дальнейшем будем предполагать, что для всякой точки $(t_0, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$ существует решение задачи (4), (5).

Пусть задано подмножество $M \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$. Всюду в дальнейшем будем обозначать $M_t \subset \mathfrak{X}$ — сечение множества M в момент времени t :

$$M_t \doteq \{\varphi \in \mathfrak{X} : \; (t, \varphi) \in M\},$$

тогда $M = \bigcup\limits_{t \in \mathbb{R}} (t, M_t)$.

Определение 3. Пусть $M \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$. Будем говорить, что точка $(t_0, \varphi) \in M$ является *точкой выживания системы* (2) *в множестве* M, если найдутся $\alpha > 0$ и решение $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in I_{r,\alpha}(t_0)$ задачи (2), (3) такие, что имеет место включение $x_t \in M_t$ для всех $t \in I_\alpha(t_0)$, где отображение $t \to x_t \in \mathfrak{X}$ порождено функцией $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in I_{r,\alpha}(t_0)$. Будем говорить, что множество M является *множеством выживаемости системы* (2), если любая точка $(t_0, \varphi) \in M$ является точкой выживания системы (2) относительно M.

Точка $(t_0, \varphi) \in M$ называется *точкой выхода системы из множества* M, если для любого решения задачи (2), (3) найдется последовательность $t_i \to t_0+$ такая, что $(t_i, x_{t_i}) \notin M$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Определение 4. Пусть $M \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$. Если для любой точки $(t_0, \varphi) \in M$ и любого решения $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$ задачи (2), (3) движение $t \to x_t$, порожденное этим решением, не покидает множества M (то есть $(t, x_t) \in M$, $t \geqslant t_0$), то будем говорить, что множество M *положительно инвариантно.*

Аналогично вводятся определения множеств выживаемости и положительно инвариантных множеств для включений с последействием.

Определение 5. Два непрерывных отображения $t \to x_t \in \mathfrak{X}$, $t \in I_{\alpha_1}(t_0)$ и $t \to y_t \in \mathfrak{X}$, $t \in I_{\alpha_2}(t_0)$ называются *эквивалентными*, если разность $z_t = x_t - y_t$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $z_t(s) = 0$ для всех $(t, s) \in \Delta_r(t_0)$;
2) $z_t \in \mathfrak{X}_0$ для всех $t \in I_\alpha(t_0)$, где $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$;
3) имеет место равенство $\varliminf\limits_{\varepsilon \to 0+} \|\dot{z}_{t_0+\varepsilon}\|_{\mathfrak{Y}} = 0$.

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что все эквивалентные отображения определены на одном общем полуинтервале $I_\alpha(t_0)$.

Пусть задано отображение $t \to x_t \in \mathfrak{X}$, $t \in I_\alpha(t_0)$. Множество всех отображений $t \to y_t \in \mathfrak{X}$, $t \in I_\alpha(t_0)$, эквивалентных данному, будем обозначать $\{t \to x_t\}$ и называть *классом эквивалентности* x_t или *классом* $\{t \to x_t\}$. Этот факт будем обозначать $(t \to y_t, t \in I_\alpha(t_0)) \in \{t \to x_t, t \in I_\alpha(t_0)\}$, или более коротко, $(t \to y_t) \in \{t \to x_t\}$.

Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathfrak{X}$, $h \in \mathbb{R}^n$. Отображение $t \to x_t \in \mathfrak{X}$, $t \in I_\alpha(t_0)$, порожденное функцией $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in I_{r,\alpha}(t_0)$, определенной равенствами

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t - t_0), \quad t \in [t_0 - r, t_0], \\ x(t) &= \varphi(0) + (t - t_0)h, \quad t \in I_\alpha(t_0), \end{aligned}$$

будем обозначать $x_t(t_0, \varphi, h)$. Значение функции $x_t(t_0, \varphi, h)$ в точке s будем обозначать $x_t(s, t_0, \varphi, h)$. Если $t \in [t_0, t_0 + r]$, то по определению $x_t(t_0, \varphi, h)$ получаем, что

$$\begin{aligned} x_t(s, t_0, \varphi, h) &= \varphi(s + t - t_0), \qquad s \in [-r, t_0 - t], \\ x_t(s, t_0, \varphi, h) &= \varphi(0) + (t - t_0 + s)h, \quad s \in [t_0 - t, 0]. \end{aligned} \tag{6}$$

Часто мы будем также задавать движения вида $\varepsilon \to x_{t_0+\varepsilon}(t_0, \varphi, h)$, $\varepsilon > 0$, получающиеся из (6) заменой $t - t_0$ на ε :

$$\begin{aligned} x_{t_0+\varepsilon}(s, t_0, \varphi, h) &= \varphi(s + \varepsilon), \qquad s \in [-r, -\varepsilon], \\ x_{t_0+\varepsilon}(s, t_0, \varphi, h) &= \varphi(0) + (\varepsilon + s)h, \quad s \in [-\varepsilon, 0]. \end{aligned} \tag{7}$$

Если класс $\{t \to x_t\}$ содержит элемент $t \to x_t(t_0, \varphi, h)$, $t \geqslant t_0$, то будем его обозначать $\{t_0, \varphi, h\}$. Если $t_0 = 0$, то для краткости будем писать $x_t(\varphi, h)$ вместо $x_t(0, \varphi, h)$ и $\{\varphi, h\}$ вместо $\{0, \varphi, h\}$.

Определение 6. Пусть $M \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$ и $(t_0, \varphi) \in M$. Пусть отображение $t \to x_t \in \mathfrak{X}$, $t \in I_\alpha(t_0)$ удовлетворяет условию $x_{t_0} = \varphi$. Если найдется отображение $(t \to y_t) \in \{t \to x_t\}$ такое, что $y_t \in M$ для всех $t \geqslant t_0$, то будем говорить, что $\{t \to x_t\} \in T_{(t_0,\varphi)}M$, и множество классов эквивалентности $T_{(t_0,\varphi)}M$ будем называть касательным пространством к M в точке (t_0, φ).

Если найдется $h \in \mathbb{R}^n$ такое, что существует элемент $(t \to x_t) \in$ $\in \{t_0, \varphi, h\}$, удовлетворяющий включению $x_t \in M_t$ для всех $t \in I_\alpha(t_0)$, то будем говорить, что $h \in T^n_{(t_0,\varphi)}M$. Заметим, что мы получили конус, лежащий в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$, и являющийся касательным к бесконечномерному множеству. Этот факт обозначен индексом n.

Напомним определение конуса Булигана (см., напр., [1]).

Определение 7. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in M$. *Конусом Булигана к множеству M в точке x_0* называется совокупность векторов $h \in \mathbb{R}^n$ таких, что

$$\varliminf_{\varepsilon \to 0+} \frac{\rho(x_0 + \varepsilon h, M)}{\varepsilon} = 0.$$

Конус Булигана будем обозначать $K_{x_0}M$.

Пример 1. Пусть $M \doteq \{\varphi \in \mathfrak{X} : \ \|\varphi\|_{\mathfrak{X}} \leqslant 1\}$ — единичный шар в $\mathfrak{X}$. Тогда для всех $\varphi \in M$ таких, что $|\varphi(0)| < 1$ имеет место равенство $T^n_{(t_0,\varphi)}M = \mathbb{R}^n$ для всех $t_0 \in \mathbb{R}$; для всех $\varphi \in M$ таких, что $|\varphi(0)| = 1$ имеет место равенство

$$T^n_{(t_0,\varphi)}M = \{h \in \mathbb{R}^n : \ \langle h, \varphi(0)\rangle \leqslant 0\}$$

для всех $t_0 \in \mathbb{R}$.

Пример 2. Пусть $M \doteq \{(t,\varphi) \in \mathbb{R}\times\mathfrak{X} : \ g(t,\varphi(0)) \leqslant 0\}$, где функция $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируема. Тогда для всех $(t_0,\varphi) \in M$ таких, что $g(t_0,\varphi(0)) < 0$ имеет место равенство $T^n_{(t_0,\varphi)}M = \mathbb{R}^n$ для всех $t_0 \in \mathbb{R}$; для всех $(t_0,\varphi) \in M$ таких, что $g(t,\varphi(0)) = 0$ имеет место равенство

$$T^n_{(t_0,\varphi)}M = \{h \in \mathbb{R}^n : \ g_t(t_0,\varphi(0)) + \langle h, g_x(t_0,\varphi(0))\rangle \leqslant 0\}$$

для всех $t_0 \in \mathbb{R}$.

Пример 3. Пусть $M \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Обозначим $\mathcal{M}$ — подмножество $\mathbb{R}\times\mathfrak{X}$ такое, что

$$\mathcal{M} \doteq \{(t,\varphi) \in \mathbb{R}\times\mathfrak{X} : \ (t+s,\varphi(s)) \in (t+s, M_{t+s}),\ s \in [-r,0]\}.$$

Тогда $h \in T^n_{(t_0,\varphi)}\mathcal{M}$, если и только если $(1,h) \in K_{(t_0,\varphi(0))}M$, где $K_{(t_0,\varphi(0))}M$ — конус Булигана к множеству $M \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ в точке $(t_0,\varphi(0))$.

Определение 8. Будем говорить, что множество $\mathfrak{T} \subset \mathbb{R}$ *не имеет левых точек сгущения*, если для всякого $\tau \in \mathfrak{T}$ найдется $\varepsilon_\tau > 0$ такое, что $I_{\varepsilon_\tau}(\tau) \cap \mathfrak{T} = \{\tau\}$.

§ 2. Необходимое условие выживаемости

Теорема 1. *Пусть* $M \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$. *Если* (t_0, φ) *является точкой выживания системы* (2) *в множестве* M, *то выполнено включение*

$$f(t_0, \varphi) \in T_{(t_0,\varphi)}M.$$

Доказательство. По определению точки выживания найдутся $\alpha > 0$ и решение $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in I_{r,\alpha}(t_0)$ задачи (2), (3) такие, что имеет место включение $x_t \in M_t$ для всех $t \in I_\alpha(t_0)$, где отображение $t \to x_t \in \mathfrak{X}$ порождено функцией $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in I_{r,\alpha}(t_0)$. Нам надо показать, что $(t \to x_t) \in \{t_0, \varphi, f(t_0, \varphi)\}$, т. е. что отображение $t \to x_t$ эквивалентно отображению $t \to x_t(t_0, \varphi, f(t_0, \varphi))$.

Не ограничивая общности, будем считать, что $\alpha \leqslant r$.

По определению решения $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in I_{r,\alpha}(t_0)$ задачи (2), (3) имеем

$$x(t) = \varphi(t - t_0), \quad t \in [t_0 - r, t_0].$$

Далее, из определения x_t получаем, что $x_t(s) = x(t + s) = \varphi(t + s - t_0)$ для $s \in [-r, t_0 - t]$, $t \in I_\alpha(t_0)$.

С другой стороны, из равенств (6) следует равенство

$$x_t(s, t_0, \varphi, h) = \varphi(s + t - t_0), \quad s \in [-r, t_0 - t].$$

Таким образом, $x_t(s) = x_t(s, t_0, \varphi, f(t_0, \varphi))$ для всех $s \in [t_0 - r, t_0 - t]$ и, следовательно, первое условие определения 5 выполнено.

Так как непрерывная функция $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in I_{r,\alpha}(t_0)$ порождает непрерывное движение $t \to x_t \in \mathfrak{X}$ и функция f непрерывна, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\alpha(\varepsilon) \in (0, \alpha)$ такое, что

$$|f(t, x_t) - f(t_0, \varphi)| < \varepsilon, \quad t \in I_{\alpha(\varepsilon)}(t_0). \tag{8}$$

Если взять $\varepsilon = 1$ и обозначить $\hat{\alpha} = \alpha(1)$, то получим, что на интервале $t \in I_{\hat{\alpha}}(t_0)$ функция $t \to x(t)$ является абсолютно непрерывной функцией с существенно ограниченной производной

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in I_{\hat{\alpha}}(t_0)} |\dot{x}(t)| \leqslant |f(t_0, \varphi)| + 1,$$

откуда следует, что $|\dot{x}_t(s)| \leqslant |f(t_0, \varphi)| + 1$ для $s \in [t_0 - t, 0]$. Получаем, что на отрезке $s \in [-r, t_0 - t]$ выполнено тождество

$$z_t = x_t - x_t(t_0, \varphi, f(t_0, \varphi)) \equiv 0, \tag{9}$$

а на отрезке $s \in [t_0 - t, 0]$ имеет место неравенство

$$|\dot{z}_t(s)| \leqslant |\dot{x}_t(s)| + |\dot{x}_t(s, t_0, \varphi, f(t_0, \varphi))| \leqslant 2|f(t_0, \varphi)| + 1.$$

Отсюда следует, что

$$\|\dot{z}_t\|_{\mathfrak{Y}} = \operatorname{ess\,sup}_{s\in[-r,0]} |\dot{z}_t(s)| \leqslant 2|f(t_0,\varphi)| + 1$$

для всех $t \in I_{\hat{\alpha}}(t_0)$. Таким образом, второе условие определения 5 выполнено.

Из неравенства (8) получаем, что можно построить последовательность $\varepsilon_n \to 0+$ такую, что

$$|f(t,x_t) - f(t_0,\varphi)| < \frac{1}{n}$$

для всех $t \in I_{\varepsilon_n}(t_0)$. Из тождества (9) получаем, что $\dot{z}_{t_0+\varepsilon_n}(s) \equiv 0$ для всех $s \in [-r, -\varepsilon_n]$. Для почти всех s из отрезка $s \in [-\varepsilon_n, 0]$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} |\dot{z}_{t_0+\varepsilon_n}(s)| &= |\dot{x}_{t_0+\varepsilon_n}(s) - \dot{x}_{t_0+\varepsilon_n}(s,t_0,\varphi,f(t_0,\varphi))| = \\ &= |\frac{d}{ds}x(t_0+\varepsilon_n+s) + \frac{d}{ds}(\varphi(0) - (\varepsilon_n+s)f(t_0,\varphi))| = \\ &= |f(t_0+\varepsilon_n+s, x_{t_0+\varepsilon_n+s}) - f(t_0,\varphi)| < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|\dot{z}_{t_0+\varepsilon_n}\|_{\mathfrak{Y}} < \frac{1}{n}$, откуда следует, что $\varliminf\limits_{\varepsilon\to 0+} \|\dot{z}_{t_0+\varepsilon}\|_{\mathfrak{Y}} = 0$ и третье условие определения 5 выполнено, что и доказывает теорему. □

Следствие 1. *Для того чтобы множество M было множеством выживаемости системы* (2), *необходимо чтобы в каждой точке* (t_0,φ) *множества M было выполнено включение*

$$f(t_0,\varphi) \in T_{(t_0,\varphi)}M.$$

Следствие 2. *Пусть в точке $(t_0,\varphi) \in M$ выполнено условие $f(t_0,\varphi) \notin T_{(t_0,\varphi)}M$. Тогда (t_0,φ) — точка выхода системы* (2) *из множества M.*

Аналогично теореме 1 доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $M \subset \mathbb{R}\times\mathfrak{X}$ является множеством выживаемости включения* (4). *Тогда для всех точек $(t_0,\varphi) \in M$ выполнено условие*

$$F(t_0,\varphi) \cap T_{(t_0,\varphi)}M \neq \varnothing.$$

Следствие 3. *Пусть условие $F(t_0,\varphi) \cap T_{(t_0,\varphi)}M = \varnothing$ выполнено в некоторой точке $(t_0,\varphi) \in M$. Тогда (t_0,φ) — точка выхода включения* (4) *из множества M.*

§ 3. Достаточное условие выживаемости

Пусть задано подмножество $M \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$ и $(t_0, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$. Для $t \geqslant t_0$ обозначим $H_t(t_0, \varphi, c)$ — множество непрерывных функций $\psi \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющих условиям:

1) $\psi(s) = \varphi(s + t - t_0),\ s \in [-r, \max\{-r, t_0 - t\})$;
2) $\psi(s)$ — абсолютно непрерывна при $s \in [\max\{-r, t_0 - t\}, 0]$;
3) $|\dot{\psi}(s)| \leqslant c,\ s \in [\max\{-r, t_0 - t\}, 0]$.

Обозначим далее,

$$H_t(t_0, \varphi) \doteq \bigcup_{c>0} H_t(t_0, \varphi, c),$$

$$M_t(t_0, \varphi, c) \doteq H_t(t_0, \varphi, c) \cap M_t,$$

$$M_t(t_0, \varphi) \doteq H_t(t_0, \varphi) \cap M_t. \tag{10}$$

В дальнейшем под обозначением $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$ будем понимать пару

$$(0, 0) \doteq (t_0 = 0, \varphi(s) \equiv 0).$$

Лемма 1. *Точка $(t_0, \varphi) \in M$ является точкой выживаемости системы (2) в множестве M тогда и только тогда, когда точка $(0, 0)$ является точкой выживаемости системы*

$$\dot{y}(t) = \tilde{f}(t, y_t) \tag{11}$$

в множестве $\widetilde{M}$, где

$$\tilde{f}(t, y_t) \doteq f(t_0 + t, x_{t_0+t}(t_0, \varphi, 0) + y_t),$$

$$\widetilde{M} \doteq \{(t, \widetilde{M_t}) | \, t \in \mathbb{R}\}, \quad \widetilde{M_t} \doteq M_{t_0+t} - x_{t_0+t}(t_0, \varphi, 0),$$

а движение $t \to x_{t_0+t}(t_0, \varphi, h)$ определяется равенствами (7).

Доказательство. Пусть точка (t_0, φ) — точка выживаемости системы (2). Тогда найдутся $\alpha > 0$ и решение $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in I_{r,\alpha}(t_0)$ задачи (2), (3) такие, что имеет место включение $x_t \in M_t$ для всех $t \in I_\alpha(t_0)$, где отображение $t \to x_t \in \mathfrak{X}$ порождено функцией $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in I_{r,\alpha}(t_0)$ по правилу (1).

Рассмотрим

$$y(\tau) = \varphi(\tau),\ \tau \in [-r, 0),$$

$$y(\tau) = x(t_0 + \tau) - x_{t_0+\tau}(0, t_0, \varphi, 0),\ \tau \in I_\alpha.$$

Тогда для всех $\tau \in I_\alpha$ выполнено равенство $y_t = x_{t_0+t} - x_{t_0+t}(t_0, \varphi, 0)$ и из включения $x_{t_0+t} \in M_{t_0+t}$ следует, что $y_t \in M_{t_0+t} - x_{t_0+t}(t_0, \varphi, 0)$. При этом

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t_0 + t) = f(t_0 + t, x_{t_0+t}) = f(t_0 + t, x_{t_0+t}(t_0, \varphi, 0) + y_t) = \tilde{f}(t, y_t)$$

для почти всех $t \in I_\alpha$. При $t = 0$ имеем равенство $y_0 = x_{t_0} - x_{t_0}(t_0, \varphi, 0) = \varphi - \varphi = 0$. Таким образом, движение $t \to y_t$, $t \in I_\alpha$ порождено функцией $t \to y(t)$, $t \in [-r, \alpha)$, которая является решением задачи (11), $y_0 = 0$, и движение $t \to y_t$, $t \in I_\alpha$ удовлетворяет включению

$$y_t \in \widetilde{M}_t = M_{t+t_0} - x_{t_0+t}(t_0, \varphi, 0).$$

Следовательно, точка $(0, 0)$ является точкой выживаемости системы (11) в множестве $\widetilde{M}$.

Обратное утверждение доказывается аналогично заменой

$$x(\tau) = \varphi(\tau - t_0),\ \tau \in [t_0 - r, t_0),$$
$$x(\tau) = y(\tau - t_0) + x_\tau(0, t_0, \varphi, 0),\ \tau \in I_\alpha(t_0).$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 2. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть $(t_0, \varphi) \in M$. Тогда $f(t_0, \varphi) \in T_{(t_0,\varphi)}M$ тогда и только тогда, когда $\tilde{f}(0, 0) \in T_{(0,0)}\widetilde{M}$.

2. Для $(t, \psi) \in [t_0, +\infty) \times M_t$ выполнено включение $f(t, \psi) \in T_{(t,\psi)}M$ тогда и только тогда, когда для отображения $\tau \to y_\tau$, определенного равенством

$$y_\tau \doteq x_{t+\tau}(t, \psi, f(t, \psi)) - x_{t+\tau}(t_0, \varphi, 0),\ \tau > 0,$$

выполнено включение

$$\{\tau \to y_\tau\} \in T_{(t-t_0, \psi - x_t(t_0,\varphi,0))}\widetilde{M}_{t-t_0+\tau}.$$

Если $(t, \psi) \in \bigcup\limits_{\tau \geqslant t_0} (\tau, M_\tau(t_0, \varphi))$ (см. обозначение (10)), то $f(t, \psi) \in T_{(t,\psi)}M$ тогда и только тогда, когда $\tilde{f}(t - t_0, y) \in T_{(t-t_0,y)}\widetilde{M}$, где y определена равенствами

$$\begin{array}{lll} 1) & y(s) = 0, & s \in [-r, \max\{-r, t_0 - t\}); \\ 2) & y(s) = \psi(s) - \varphi(0), & s \in [\max\{-r, t_0 - t\}, 0]. \end{array}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(t_0, \varphi) \in M$, $f(t_0, \varphi) \in T_{(\varphi,t_0)}M$. Это значит, что найдется отображение $(t \to x_t) \in \{t_0, \varphi, f(t_0, \varphi)\}$ такое, что $x_t = x_t(t_0, \varphi, f(t_0, \varphi)) + r_t \in M_t$ для всех $t \in I_\alpha(t_0)$, где отображение $t \to r_t \in \mathfrak{X}_0$, $t \in I_\alpha(t_0)$ удовлетворяет условиям

1) $z_t(s) = 0$ для всех $s \in [-r, t_0 - t]$, $t \in [t_0, t_0 + r]$;

2) имеет место равенство $\varliminf\limits_{\varepsilon \to 0+} \|\dot{z}_{t_0+\varepsilon}\|_{\mathfrak{Y}} = 0$.

Рассмотрим $y_t = x_t - x_t(t_0, \varphi, 0)$. Легко увидеть, что

$$x_t(t_0, \varphi, f(t_0, \varphi)) = x_t(t_0, \varphi, 0) + x_t(t_0, 0, f(t_0, \varphi))$$

для $t \geqslant t_0$. Поэтому $y_t = r_{t_0+t} + x_{t_0+t}(t_0, 0, f(t_0, \varphi))$ для всех $t \in I_\alpha$. При этом $y_t \in \widetilde{M}_t$ для всех $t \in I_\alpha$. Имеет место включение

$$y_t(0, 0, \tilde{f}(0, 0)) \in T_{(0,0)}M,$$

где

$$y_t(0, 0, \tilde{f}(0, 0)) = x_{t_0+t}(t_0, 0, f(t_0, \varphi)),$$
$$\tilde{f}(t, y_t) = f(t_0 + t, x_{t_0+t}(t_0, \varphi, 0) + y_t), \quad t \in I_\alpha.$$

Обратное утверждение доказывается аналогично. Лемма доказана. □

Пусть $(t_0, \varphi) \in M$. В дальнейшем для экономии места для любого $(t, \psi) \in M$, $t \geqslant t_0$ через $y(t, \psi) \in \mathfrak{X}$ будем обозначать функцию, определенную равенством $y(t, \psi) \doteq \psi - x_t(t_0, \varphi, 0)$.

Лемма 3. *Пусть $M \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$ — замкнутое множество, $(t_0, \varphi) \in M$ и задано непрерывное отображение $f : M \to \mathbb{R}^n$ такое, что выполнено включение $f(t, \psi) \in T_{(t,\psi)}M$ для всех $(t, \psi) \in M$. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ найдутся не имеющее левых точек сгущения множество $\mathfrak{T}^n \subset [0, +\infty)$ и множество $\mathfrak{T}_n(t_0, \varphi) = \{(t_0 + \tau, x_n^{t_0+\tau})\}_{\tau \in \mathfrak{T}^n} \subset M$ такие, что выполнены следующие условия:*

1) $\mathfrak{T}^n$ — ε_n-сеть отрезка $[0, \alpha]$, $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$;

2) $(t_0, \varphi) \in \{(t_0 + \tau, x_n^{t_0+\tau})\}_{\tau \in \mathfrak{T}^n}$;

3) $\|y(t_0 + \tau + \varepsilon_\tau, x_n^{t_0+\tau+\varepsilon_\tau}) - y(t_0 + \tau, x_{t_0+\tau})\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \varepsilon_\tau(|f(t_0, \varphi)| + 2)$;

4) $\|\dot{y}(t_0 + \tau, x_n^{t_0+\tau})\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant |f(t_0, \varphi)| + 2$, $(t_0 + \tau, x_n^{t_0+\tau}) \in \mathfrak{T}_n(t_0, \varphi)$;

5) $x_n^{t_0+\tau+\varepsilon_\tau}(s) = x_n^{t_0+\tau}(s + \varepsilon_\tau)$, $s \in [-r, -\varepsilon_\tau]$,

и

$$x_n^{t_0+\tau+\varepsilon_\tau}(s) = x_n^{t_0+\tau}(0) + (s + \varepsilon_\tau) f(t_0 + \tau, x_n^{t_0+\tau}) + r^\tau(s), \tag{12}$$

где $\|\dot{r}^\tau\|_{\mathfrak{Y}} < \frac{1}{n}$, $r^\tau(s) = 0$ *для* $s \in [-r, -\varepsilon_\tau]$, ε_τ *взято из определения* 8, $\alpha = \min\{r, \frac{R}{2+|f(0)|}\}$, $R > 0$ — такое число, что $|f(t,\psi) - f(t_0,\varphi)| < 1$ для всех $\|\psi - \varphi\|_{\mathfrak{X}} \leqslant R$, $|t - t_0| \leqslant R$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала заметим, что если

$$(t \to x_t) \in \{t_0, \varphi, f(t_0,\varphi)\} = \{t \to x_t(t_0, \varphi, f(t_0,\varphi))\},$$

то $\|x_t - x_t(t_0,\varphi, f(t_0,\varphi))\|_{\mathfrak{X}} \leqslant (t - t_0)\|\dot{z}_t\|_{\mathfrak{Y}}$ для всех $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$, где $z_t = x_t - x_t(t_0,\varphi, f(t_0,\varphi))$ и z_t удовлетворяет свойствам 1–3 определения 5, в частности, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \|\dot{z}_{t_0+\varepsilon}\|_{\mathfrak{Y}} = 0$. Действительно, для всех $s \in [-r, t_0 - t)$ имеет место равенство $x_t(s) = x_t(t_0,\varphi, f(t_0,\varphi))(s)$, а для всех $s \in [t_0 - t, 0]$

$$\big(x_t - x_t(t_0,\varphi, f(t_0,\varphi))\big)(s) = \int_{-r}^{s} \dot{z}_t(u)du.$$

При этом, если φ — абсолютно непрерывная функция с существенно ограниченной производной, то для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется $\hat{\varepsilon} > 0$ такое, что $\|\dot{x}_{t_0+\varepsilon}\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant \max\{\|\dot{\varphi}\|_{\mathfrak{Y}}, |f(\varphi)| + 1/n\}$ для всех $\varepsilon \leqslant \hat{\varepsilon}$. Действительно, для всех $s \in [-r, -\varepsilon]$ имеет место равенство

$$y_{t_0+\varepsilon}(s) = x_{t_0+\varepsilon}(t_0, \varphi, f(t_0 + \varphi)) = \varphi(s),$$

а для $s \in [-\varepsilon, 0]$ выполнено

$$x_{t_0+\varepsilon}(s) = x_{t_0+\varepsilon}(s) + z_{t_0+\varepsilon}(s) = \varphi(0) + (s + \varepsilon)f(t_0,\varphi) + z_{t_0+\varepsilon}(s).$$

Получаем, $\dot{x}_{t_0+\varepsilon}(s) = f(\varphi) + \dot{z}_{t_0+\varepsilon}(s)$ для почти всех $s \in [-\varepsilon, 0]$. Так как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \|\dot{z}_{t_0+\varepsilon}\|_{\mathfrak{Y}} = 0$, то найдется $\hat{\varepsilon} > 0$ такое, что $\|\dot{z}_{t_0+\varepsilon}\|_{\mathfrak{Y}} < 1/n$ для всех $\varepsilon \leqslant \hat{\varepsilon}$.

Положим $\varepsilon_0 = 0$, $x^0 = \varphi$, $y^0 = 0$. Согласно лемме 2 из включения $f(t_0,\varphi) \in T_{(t_0,\varphi)}M$ следует, что $\tilde{f}(0,0) \in T_{(0,0)}\widetilde{M}$. Это значит, что найдется отображение $(t \to y^0_t) \in \{0, 0, \tilde{f}(0, y^0)\}$ такое, что $(t, y^0_t) \in \widetilde{M}$ для всех $t \geqslant 0$, при этом $y^0_t = y_t(0, 0, \tilde{f}(0, y^0)) + z^0_t$, где z_t удовлетворяет свойствам 1–3 определения 5.

Возьмем $\varepsilon_1 < 1/n$ такое, что $\|\dot{z}_{\varepsilon_1}\|_{\mathfrak{Y}} < \frac{1}{n}$. Из неравенства $\|y^0_t - y_t(0, 0, \tilde{f}(0, y^0)\|_{\mathfrak{X}} \leqslant t\|\dot{z}_t\|_{\mathfrak{Y}}$ получаем, что

$$\frac{\|y^0_{\varepsilon_1} - y^0\|_{\mathfrak{X}}}{\varepsilon_1} \leqslant \frac{\|y^0_{\varepsilon_1} - y_{\varepsilon_1}(0, 0, \tilde{f}(0, y^0))\|_{\mathfrak{X}}}{\varepsilon_1} + \frac{\|y_{\varepsilon_1}(0, 0, \tilde{f}(0, y^0)) - y^0\|_{\mathfrak{X}}}{\varepsilon_1} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n} + |\tilde{f}(0, y^0)| = \frac{1}{n} + |f(t_0,\varphi)|.$$

Так как y^0 — абсолютно непрерывная функция с существенно ограниченной производной, то имеет место неравенство

$$\|\dot{y}^0_{\varepsilon_1}\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant \max\{\|\dot{y}^0\|_{\mathfrak{Y}}, |\tilde{f}(0, y^0)| + 1/n\} = |f(t_0, x^0)| + 1/n.$$

Положим $\tau_1 = \varepsilon_1$ $y^1 = y^0_{\varepsilon_1}$, $x^1 = y^1 + x_{t_0+\varepsilon_1}(t_0, \varphi, 0)$. При этом выполнено включение $(t_0 + \varepsilon_1, x^1) \in M$. Получаем, что $\|y^1 - y^0\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \varepsilon_1(\frac{1}{n} + |\tilde{f}(0, y^0)|)$ и $\|\dot{y}^1\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant |\tilde{f}(0, y^0)| + \frac{1}{n}$. При этом $y^1(s) = 0$ для всех $s \in [-r, -\varepsilon_1]$.

Если $\varepsilon_1 \geqslant \alpha$, то процесс закончен. Если $\varepsilon_1 < \alpha$, то $y^1 \in B_{\mathfrak{X}}[y^0, R]$, так как

$$\|y^0_{\varepsilon_1} - y^0\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \varepsilon_1(\frac{1}{n} + |\tilde{f}(0, y^0)|) < \alpha(1 + |\tilde{f}(0, y^0)|) =$$
$$= \frac{R}{|2 + \tilde{f}(0, y^0)|}(1 + |\tilde{f}(0, y^0)|) < R.$$

Тогда $|f(\varepsilon_1, y^1) - \tilde{f}(0, y^0)| = |f(t_0 + \varepsilon_1, x^0) - f(t_0, x^1)| < 1$. Найдется отображение $(t \to y^1_t) \in \{\varepsilon_1, y^1, f(\varepsilon_1, y^1)\}$ такое, что $(t, y^1_t) \in \widetilde{M}$ для всех $t \geqslant \varepsilon_1$, при этом $y^1_t = y_t(\varepsilon_1, y^1, \tilde{f}(\varepsilon_1, y^1)) + z^1_t$, $t \geqslant \varepsilon_1$, где z^1_t удовлетворяет свойствам 1–3 определения 5. Аналогично построению y^1 найдем ε_2 такое, что $\|\dot{z}^1_{\varepsilon_2}\|_{\mathfrak{Y}} < \frac{1}{n}$. Тогда из равенств $y^1_t(s) = y_t(\varepsilon_1, y^1, f(\varepsilon_1, y^1)) = y^1(s + t)$ для всех $s \in [-r, \varepsilon_1 - t]$, и $y^1_t(s) = y^1(0) + (t + s)f(\varepsilon_1, y^1) + z^1_t(s)$ для всех $s \in [\varepsilon_1 - t, 0]$, где $t \leqslant r$, получаем оценку

$$\|\dot{y}^1_{\varepsilon_2}\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant \max\{\|\dot{y}^1\|_{\mathfrak{Y}}, \tilde{f}(\varepsilon_1, y_1) + \|\dot{z}^1_{\varepsilon_2}\|_{\mathfrak{Y}}\} \leqslant |\tilde{f}(0, y^0)| + 1 + 1/n.$$

Если $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \geqslant \alpha$, то процесс закончен. Если $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \alpha$, то имеет место оценка $\|y^1_{\varepsilon_2}\|_{\mathfrak{X}} < (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(|\tilde{f}(0, y^0)| + 2)$. Действительно, на отрезке $s \in [-\varepsilon_2, 0]$ имеет место оценка

$$|y^1_{\varepsilon_2}(s)| \leqslant |y^1(0)| + (\varepsilon_2 + s)|f(\varepsilon_1, y^1)| + \varepsilon_2|z^1_{\varepsilon_2}(s)|_{\mathfrak{Y}} \leqslant$$
$$\leqslant \|y^1\|_{\mathfrak{X}} + \varepsilon_2(|f(\varepsilon_1, y^1)| + \frac{1}{n}) < (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(|f(0, y^0)| + 2).$$

На отрезке $s \in [-r, -\varepsilon_2]$ имеем равенство $y^1_{\varepsilon_2}(s) = y^1(s + \varepsilon_2)$. Получаем, что для всех $s \in [-r, -\varepsilon_2]$ выполнено неравенство

$$|y^1_{\varepsilon_2}(s)| \leqslant \|x^1\|_{\mathfrak{X}} < \varepsilon_1(2 + |f(0, y^0)|).$$

Обозначим $y^2 = y^1_{\varepsilon_2}$, $\tau_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $x^2 = y_2 + x_{t_0+\tau_2}(t_0, \varphi, 0)$. Тогда

$$\|y^2 - y^0\|_{\mathfrak{X}} < \tau_2(|\tilde{f}(0, y^0)| + 2), \quad \|\dot{y}^1_{\varepsilon_2}\|_{\mathfrak{Y}} < |\tilde{f}(0, y^0)| + 2.$$

Вообще, если у нас имеются число $\tau \in I_\alpha$ и функция $y^\tau \in \widetilde{M}_\tau$ такие, что $y^\tau(s) = y^0(s+\tau)$, $s \in [-r, -\tau]$, $\|y^\tau - y^0\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \tau(|\tilde{f}(0, y^0)|+2)$, y^τ — абсолютно непрерывная функция с существенно ограниченной производной $\|\dot{y}^\tau\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant \leqslant |\tilde{f}(0,y^0)|+2$, то найдутся число ε_τ и функция $y^{\tau+\varepsilon_\tau} \in \widetilde{M}_{\tau+\varepsilon_\tau}$ такие, что $\varepsilon_\tau < \frac{1}{n}$, $y^{\tau+\varepsilon_\tau}(s) = y^\tau(s+\varepsilon_\tau)$, $s \in [-r,-\varepsilon_\tau]$, $\|y^{\tau+\varepsilon_\tau} - y^\tau\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \varepsilon_\tau(|\tilde{f}(0,y^0)|+2)$ и $\|\dot{y}^{\tau+\varepsilon_\tau}\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant |\tilde{f}(0,y^0)|+2$. Откуда следует, в частности, что

$$\|y^{\tau+\varepsilon_\tau} - y^0\|_{\mathfrak{X}} \leqslant (\tau+\varepsilon_\tau)(|\tilde{f}(0,y^0)|+2).$$

Рассмотрим не имеющую левых точек сгущения последовательность $\{\tau_n\} \subset I_\alpha$, сходящуюся к τ слева. При этом для каждого n заданы функции y^n такие, что имеют место равенства

$$y^{n+1}(s) = y^n(s+\tau_{n+1}-\tau_n) \quad \text{для всех} \quad s \in [-r, -(\tau_{n+1}-\tau_n)],$$

$$y^{n+1}(s) = y^n(0) + (s+\tau_{n+1}-\tau_n)f(y^n) + r^n(s), \quad s \in [-(\tau_{n+1}-\tau_n), 0],$$

где $\|\dot{r}^\tau\|_{\mathfrak{Y}} < \frac{1}{n}$ и $r^n(s) = 0$ для $s \in [-r, -(\tau_{n+1}-\tau_n)]$, $\|y^n - y^0\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \leqslant \tau_n(|\tilde{f}(0,y^0)|+2)$ и $\|\dot{y}^n\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant |\tilde{f}(0,y^0)|+2$. Построим y^τ следующим образом. На отрезке $s \in [-r,-\tau_1]$ определим $y^\tau(s) \doteq y^1(s+\tau-\tau_1)$, на отрезке $s \in [-(\tau-\tau_1), -(\tau-\tau_2)]$ определим $y^\tau(s) \doteq y^2(s+\tau-\tau_2), \ldots$, на отрезке $s \in [-(\tau-\tau_{n-1}), -(\tau-\tau_n)]$ определим $y^\tau(s) \doteq y^n(s+\tau-\tau_n), \ldots$ Таким образом, мы определим y^τ на интервале $s \in [-r,0)$. При этом будет выполняться неравенство

$$|y^\tau(\tau-\tau_{n+1}) - y^\tau(\tau-\tau_n)| \leqslant (|\tilde{f}(0,y^0)|+2)(\tau_{n+1}-\tau_n),$$

то есть последовательность $\{y^\tau(\tau-\tau_n)\}$ — фундаментальная. Определим $y^\tau(0) \doteq \lim\limits_{n\to\infty} y^n(\tau-\tau_n)$. Получим, что y^τ — абсолютно непрерывная функция и выполнены неравенства

$$\|y^\tau - y^0\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \tau(|\tilde{f}(0,y^0)|+2) \text{ и } \|\dot{y}^\tau\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant |\tilde{f}(0,y^0)|+2.$$

По построению для всех $s \in [-r,0)$ функция y^τ совпадает с абсолютно непрерывными функциями и имеет оценку $\dot{y}^\tau(s) \leqslant |\tilde{f}(0,y_0)|+2$. На этом интервале она является непрерывной функцией, поэтому её доопределение в нуле не повлияет на непрерывность на отрезке. Такой способ построения y^τ будем называть продолжением по непрерывности.

Через $\mathcal{L}_n$ обозначим такие множества $\{\mathfrak{T} \subset [0,\infty), \{(\tau,y^\tau)\}_{\tau\in\mathfrak{T}} \subset \widetilde{M}\}$, что:

1) $\mathfrak{T}$ — $\frac{1}{n}$-сеть отрезка $[0, \sup\limits_{\tau\in\mathfrak{T}} \tau]$, $\mathfrak{T}$ не имеет левых точек сгущения;

2) $(0,y^0) \in \{(\tau,y^\tau)\}_{\tau\in\mathfrak{T}}$;

3) для любого y^τ выполнены неравенства

$$\|y^{\tau+\varepsilon_\tau} - y^0\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \tau(|\tilde f(0,y^0)| + 2), \quad \|\dot y^\tau\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant |\tilde f(0,y^0)| + 2;$$

4) имеют место равенства $y^{\tau+\varepsilon_\tau}(s) = y^\tau(s+\varepsilon_\tau)$ для всех $s \in [-r, -\varepsilon_\tau]$, $y^{\tau+\varepsilon_\tau}(s) = y^\tau(0) + (s+\varepsilon_\tau)\tilde f(\tau, y^\tau) + r^\tau(s)$, где $\|\dot r^\tau\|_{\mathfrak{Y}} < \frac{1}{n}$ и $r^\tau(-\varepsilon_\tau) = 0$ для $s \in [-r, -\varepsilon_\tau]$.

Для любых двух множеств $\{(\tau', y^{\tau'})\}_{\tau'\in\mathfrak{T}'}$, $\{(\tau'', y^{\tau''})\}_{\tau''\in\mathfrak{T}'}$ введем отношение порядка по включению, а именно $\{(\tau', y^{\tau'})\}_{\tau'\in\mathfrak{T}'} \prec \{(\tau'', y^{\tau''})\}_{\tau''\in\mathfrak{T}''}$ тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{T}'' \quad \{(\tau', y^{\tau'})\}_{\tau'\in\mathfrak{T}'} \subset \{(\tau'', y^{\tau''})\}_{\tau''\in\mathfrak{T}''}.$$

Покажем, что в $\mathcal{L}_n$ существует максимальный элемент $\{(\hat\tau, y^{\hat\tau})\}_{\hat\tau\in\hat{\mathfrak{T}}}$ и $\sup\limits_{\hat\tau\in\hat{\mathfrak{T}}} \hat\tau \geqslant \alpha$. Действительно, для любого линейно упорядоченного подмножества $L \subset \mathcal{L}_n$ элемент

$$\{(\tau_L, y^{\tau_L})\}_{\tau_L\in\mathfrak{T}_L} \doteq \bigcup_{\{(\tau,y^\tau)\}_{\tau\in\mathfrak{T}}\in L} \{(\tau, y^\tau)\}_{\tau\in\mathfrak{T}} \in \mathcal{L}_n$$

является верхней гранью L. Тогда в $\mathcal{L}_n$ существует максимальный элемент $\{(\hat\tau, y^{\hat\tau})\}_{\hat\tau\in\hat{\mathfrak{T}}} \in L_n$. При этом, если $\sup\limits_{\hat\tau\in\hat{\mathfrak{T}}} \hat\tau < \alpha$, то возьмем $\tilde\tau = \sup\limits_{\hat\tau\in\hat{\mathfrak{T}}} \hat\tau$ и $y^{\tilde\tau}$, построенное по непрерывности. Тогда найдутся число $\varepsilon_{\tilde\tau}$ и функция $y^{\tau+\varepsilon_{\tilde\tau}} \in M_{\tau+\varepsilon_{\tilde\tau}}$ такие, что $\varepsilon_{\tilde\tau} < \frac{1}{n}$, $\|y^{\tau+\varepsilon_{\tilde\tau}} - y^0\|_{\mathfrak{X}} \leqslant (\tau + \varepsilon_{\tilde\tau})(\tilde f(0,y^0) + 2)$ и $\|\dot y^{\tau+\varepsilon_{\tilde\tau}}\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant |\tilde f(0,y^0)| + 2$. Построим

$$\{(\hat\tau', y^{\hat\tau'})\}_{\hat\tau'\in\hat{\mathfrak{T}}'} = \{(\hat\tau, y^{\hat\tau})\}_{\hat\tau\in\hat{\mathfrak{T}}} \cup \{(\tilde\tau, y^{\tilde\tau})\} \cup \{(\tau+\varepsilon_{\tilde\tau}, y^{\tau+\varepsilon_{\tilde\tau}})\}.$$

Тогда выполнено включение $\{(\hat\tau, y^{\hat\tau})\}_{\hat\tau\in\hat{\mathfrak{T}}} \subset \{(\hat\tau', y^{\hat\tau'})\}_{\hat\tau'\in\hat{\mathfrak{T}}'}$, что противоречит тому, что $\{(\hat\tau, y^{\hat\tau})\}_{\hat\tau\in\hat{\mathfrak{T}}}$ — максимальный элемент. Обозначим через $x^{t_0+\tau} = y^\tau + x_{t_0+\tau}(t_0, \varphi, 0)$. Тогда множество $\mathfrak{T}_n(t_0,\varphi) \doteq \{(t_0+\tau, x^{t_0+\tau})\}_{\tau\in\mathfrak{T}^n}$ является искомым. Лемма доказана. □

Теорема 3. *Пусть M — непустое замкнутое подмножество $\mathbb{R}\times\mathfrak{X}$, $f : \mathbb{R}\times\mathfrak{X} \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция. Если для всякой точки $(t,\varphi) \in M$ имеет место включение $f(t,\varphi) \in T_{(t,\varphi)}M$, то для всякой $(t_0,\varphi) \in M$ найдутся $\alpha > 0$ и решение $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [-r,\alpha)$ задачи* (2), (3) *такие, что $x_t \in M$ для всех $t \in I_\alpha$, где x_t определено равенством* (1). *Или, короче говоря, множество M является множеством выживаемости системы* (2).

Доказательство. Возьмем $\alpha > 0$ из условия леммы 3. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдутся множества $\mathfrak{T}^n \subset \mathbb{R}$ и $T_n(t_0, \varphi) \subset M$, удовлетворяющие всем условиям леммы 3.

Построим для каждого $n \in \mathbb{N}$ отображения $t \to x_t^n \in \mathfrak{X}$, $t \in I_\alpha(t_0)$.

Для всех $\tau \in \mathfrak{T}^n$ положим $x_{t_0+\tau}^n = x_n^{t_0+\tau}$. Для всякого $\tau \in \mathfrak{T}^n$ по определению $\mathfrak{T}^n$ найдется $\varepsilon_\tau > 0$ такое, что $\tau + \varepsilon_\tau \in \mathfrak{T}_n$ и $(\tau, \tau + \varepsilon_\tau) \cap \mathfrak{T} = \varnothing$. Для всех $t \in (t_0 + \tau, t_0 + \tau + \varepsilon)$ определим x_t^n равенствами

$$\begin{aligned} x_t^n(s) &= x_{t_0+\tau}^n(s + t - \tau),\ s \in [-r, \tau - t], \\ x_t^n(s) &= x_{t_0+\tau+\varepsilon_\tau}^n(s + t - \tau - \varepsilon_\tau),\ s \in (\tau - t, 0]. \end{aligned}$$

Из свойства $x_{t_0+\tau+\varepsilon_\tau}(s) = x_{t_0+\tau}(s+\varepsilon_\tau)$ для всех $s \in [-r, -\varepsilon_\tau]$ получим, что это эквивалентно равенствам

$$\begin{aligned} x_t^n(s) &= x_{t_0+\tau}^n(s + t - \tau),\ s \in [-r, -r + \tau + \varepsilon_\tau - t], \\ x_t^n(s) &= x_{t_0+\tau+\varepsilon_\tau}^n(s + t - \tau - \varepsilon_\tau),\ s \in (-r + \tau + \varepsilon_\tau - t, 0]. \end{aligned}$$

Вообще говоря, это значит, что движение $t \to x_t^n \in \mathfrak{X}$, $t \in [t_0 + \tau, t_0 + \tau + \varepsilon_\tau]$ порождено по правилу (1) функцией $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0+\tau-r, t_0+\tau+\varepsilon_\tau]$, определенной равенствами

$$\begin{aligned} x^n(s) &= x_{t_0+\tau}^n(s - t_0 - \tau),\ s \in [t_0 + \tau - r, t_0 + \tau], \\ x^n(s) &= x_{t_0+\tau+\varepsilon_\tau}^n(s - t_0 - \tau - \varepsilon_\tau),\ s \in (t_0 + \tau, t_0 + \tau + \varepsilon_\tau], \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} x^n(s) &= x_{t_0+\tau}^n(s - t_0 - \tau),\ s \in [t_0 + \tau - r, t_0 + \tau + \varepsilon_\tau - r], \\ x^n(s) &= x_{t_0+\tau+\varepsilon_\tau}^n(s - t_0 - \tau - \varepsilon_\tau),\ s \in (t_0 + \tau + \varepsilon_\tau - r, t_0 + \tau + \varepsilon_\tau]. \end{aligned}$$

Проделав эту операцию для всех $\tau \in \mathfrak{T}^n$ и доопределив функцию $t \to x^n(t)$, $t \in [t_0-r, t_0+\alpha)$ в точках сгущения множества $\mathfrak{T}^n$ по непрерывности, получим, что отображение $t \to x_t^n$ порождено функцией $t \to x^n(t)$ по правилу (1).

При этом из свойства (12) леммы 3 получаем, что для всех $\tau \in \mathfrak{T}^n$ и всех $t \in [t_0 + \tau, t_0 + \tau + \varepsilon_\tau)$ выполнено равенство

$$x^n(t) = x^n(t_0 + \tau) + (t - t_0 - \tau) f(t_0 + \tau, x_{t_0+\tau}^n) + r_n^\tau(t - t_0 - \tau - \varepsilon_\tau),$$

при этом $\|\dot{r}_n^\tau\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant 1/n$.

Напомним, что функцию $y(t, \psi)$ мы определяем равенством $y(t, \psi) = \psi - x_t(t_0, \varphi, 0)$. Построим отображение $t \to y_t^n \in \mathfrak{X}$, $t \in I_\alpha$, определенное равенством $y_t^n = y(t_0 + t, x_{t_0+t}^n)$. Эта функция также порождена некоторой функцией $t \to y(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in I_\alpha$. При этом из леммы 3 получаем, что $y_0 = 0$,

$y_t \in \mathfrak{X}_0$, $t \in I_\alpha$, $|\dot{y}(t)| \leqslant |f(t_0,\varphi)| + 2$, $t \in [-r,\alpha)$. Для всех $\tau \in \mathfrak{T}^n$, всех $t \in [\tau, \tau+\varepsilon_\tau)$ выполнено равенство

$$y^n(t) = y^n(\tau) + (t-\tau)\tilde{f}(\tau, y^n_\tau) + r^\tau_n(t-\tau-\varepsilon_\tau),$$

при этом $\|\dot{r}^\tau_n\|_{\mathfrak{Y}} \leqslant 1/n$. Отсюда получаем, что

$$|r^\tau_n(t_2-\tau-\varepsilon_\tau) - r^\tau_n(t_2-\tau-\varepsilon_\tau)| \leqslant \frac{t_2-t_1}{n},$$

откуда получаем неравенство $|y(t_2)-y(t_1)| \leqslant (|\tilde{f}(t_0,\varphi)|+2+1/n)\frac{|t_2-t_1|}{n}$ для всех $t_2, t_1 \in [\tau, \tau+\varepsilon_\tau)$, $t_2 > t_1$. Из непрерывности y получаем неравенство

$$|y(t_2)-y(t_1)| \leqslant (|\tilde{f}(t_0,\varphi)|+2+1/n)\frac{|t_2-t_1|}{n}$$

для всех $t_2, t_1 \in I_\alpha$, $t_2 > t_1$.

По теореме Асколи из последовательности y^n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Будем считать, что это сама последовательность, сходящаяся к функции $t \to y(t)$, $t \in [-r,\alpha)$. При этом $|\dot{y}(t)| \leqslant |f(t_0,\varphi)| + 2$ для всех $t \in [-r,\alpha)$.

Причем при всех $t \in I_\alpha$ выполнено включение $(t, y_t) \in \widetilde{M}$.

Пусть $\tau \in I_\alpha$. Возьмем произвольное $m \in \mathbb{N}$. Найдется δ-окрестность точки y_τ такая, что $|\tilde{f}(t,\psi)-f(\tau,y_\tau)| < \frac{1}{2m}$ для всех $\|\psi-y_\tau\|_{\mathfrak{X}} < \delta$, $|t-\tau| \leqslant \delta$. Для $\varepsilon < \frac{\delta}{(|\tilde{f}(0,y^0)|+2)}$ получим, что

$$\|y_{\tau+\varepsilon} - y_\tau\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \varepsilon(|\tilde{f}(0,y^0)|+2) < \delta.$$

Найдутся $\tau^n, \tau^n+\varepsilon^n \in \mathfrak{T}^n$ такие, что $\tau^n \to \tau-$. В силу равномерной сходимости y^n_t к y_t и включения $y_t \in B_{\mathfrak{X}}(y_\tau,\delta)$ для всех $t \in [\tau,\tau+\varepsilon]$ получаем, что, начиная с некоторого n_0 будет выполнено включение $y^n_t \in B_{\mathfrak{X}}(y_\tau,\delta)$ для всех $t \in [\tau^n, \tau^n+\varepsilon]$. Тогда для каждого n получаем, что

$$y^n(\tau^n+\varepsilon) = y^n(\tau^n) + \varepsilon f(\tau^n, y^n_{\tau_n}) + z^n_{\tau^n}(0).$$

При этом $|z^n_{\tau^n}(0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{n}$. Откуда следует неравенство

$$\Big|\frac{y^n(\tau^n+\varepsilon)-y^n(\tau^n)}{\varepsilon} - f(\tau^n, y^n_{\tau_n})\Big| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Рассмотрим неравенство

$$\Big|\frac{y(\tau+\varepsilon)-y(\tau)}{\varepsilon} - f(\tau,y_\tau)\Big| \leqslant \Big|\frac{y(\tau+\varepsilon)-y(\tau)}{\varepsilon} - \frac{y^n(\tau^n+\varepsilon)-y^n(\tau^n)}{\varepsilon}\Big| +$$
$$+\Big|\frac{y^n(\tau^n+\varepsilon)-y^n(\tau^n)}{\varepsilon} - f(\tau^n,y^n_{\tau_n})\Big| + |f(\tau^n,y^n_{\tau_n}) - f(\tau,y_\tau)|.$$

Здесь первое слагаемое стремится к 0, так как y^n равномерно сходится к y. Второе ограничено числом $\frac{1}{n}$, третье — числом $\frac{1}{m}$. Переходя к пределу при $n \to +\infty$, получаем, что

$$\Big|\frac{y(\tau+\varepsilon)-y(\tau)}{\varepsilon} - f(\tau, y_\tau)\Big| \leqslant \frac{1}{m}$$

для всех $\varepsilon \leqslant \delta$. Значит, $\dot{y}(t) = \tilde{f}(t, y_t)$ для почти всех $t \in I_\alpha$. Теорема доказана. □

Практически аналогично доказывается теорема о выживаемости для дифференциальных включений. Приведем ее формулировку.

Теорема 4. *Пусть $F : \mathbb{R} \times \mathfrak{X} \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение, M — непустое замкнутое подмножество в $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}$. Если для всякой точки $(t, \varphi) \in M$ имеет место условие $F(t, \varphi) \cap \mathfrak{T}_{(t,\varphi)}M \neq \varnothing$, то для всякой $(t_0, \varphi) \in M$ найдутся $\alpha > 0$ и решение $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [-r, \alpha)$ задачи* (4), (5) *такие, что $x_t \in M$ для всех $t \in I_\alpha$, где x_t определено равенством* (1).

П р и м е р 4. Пусть при каждом t задано множество $M_t \subset \mathbb{R}^n$. Пусть далее задано начальное условие $x_{t_0} = \varphi$ такое, что $\varphi(0) \in M_{t_0}$. Следующие утверждения дают достаточные условия, при которых найдется решение $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in I_{r,\alpha}(t_0)$ задачи (2), (3), которое будет удовлетворять включению $x(t) \in M_t$ для всех $t \in I_\alpha(t_0)$. В этом случае также будем говорить, что множество M является множеством выживаемости системы (2). Обозначим $M \doteq \bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} (t, M_t) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Из теоремы о достаточных условиях выживаемости и примеров касательных пространств из первого параграфа получаем следующие утверждения. Утверждение аналогичное теореме 5 получено в работе [5] другими методами.

Лемма 4. *Функция $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in I_{r,\alpha}(t_0)$ удовлетворяет включению $x(t) \in M_t$ для всех $t \in I_\alpha(t_0)$ тогда и только тогда, когда движение $t \to x_t$, $t \in I_\alpha(t_0)$, порожденное по правилу* (1), *удовлетворяет включению $x_t \in \mathcal{M}$, где*

$$\mathcal{M} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} (t, \mathcal{M}_t),\ \mathcal{M}_t = \{\varphi \in \mathfrak{X} :\ \varphi(0) \in M_t\}.$$

Лемма 5. *Включение $h \in T_{(t_0,\varphi)}\mathcal{M}$ выполнено тогда и только тогда, когда $(1, h) \in K_{(t_0,\varphi(0))}M_t$, где $K_{(t_0,\varphi(0))}M_t$ — конус Булигана к множеству $M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ в точке $(t_0, \varphi(0))$.*

Теорема 5. *Пусть M — замкнутое в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ множество. Для того чтобы множество M было множеством выживаемости системы* (2), *необходимо и достаточно, чтобы для любого $(t,\varphi)\in\mathcal{M}$ выполнялось включение $(1,f(t,\varphi))\in K_{(t,\varphi(0))}M$.*

Следствие 4. *Пусть в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ задана непрерывно дифференцируемая функция $(t,x)\to g(t,x)\in\mathbb{R}$. Пусть*

$$M=\{(t,x):\ g(t,x)\leqslant 0\},$$

и для любой точки $(t,x)\in\partial M$ выполнено неравенство $\operatorname{grad} g(t,x)\neq 0$. Для того чтобы множество M было множеством выживаемости системы (2), *необходимо и достаточно, чтобы для любого $(t_0,\varphi)\in\partial\mathcal{M}$ было выполнено неравенство*

$$g_t(t_0,\varphi(0))+\langle g_x(t_0,\varphi(0)),f(t_0,\varphi)\rangle\leqslant 0,$$

где $\partial\mathcal{M}=\bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}}(t,\partial\mathcal{M}_t)$, $\partial\mathcal{M}_t=\{\varphi\in\mathfrak{X}:\ g(t,\varphi(0))=0\}$.

Лемма 6. *Пусть множество M задано как в следствии* 4. *Тогда, если в точке $(t_0,\varphi)\in\partial\mathcal{M}$ выполнено неравенство*

$$g_t(t_0,\varphi(0))+\langle g_x(t_0,\varphi(0)),f(t_0,\varphi)\rangle<0,$$

то эта точка является точкой выживаемости системы (2) *в M.*

Если в точке $(t_0,\varphi)\in\partial\mathcal{M}$ имеет место неравенство

$$g_t(t_0,\varphi(0))+\langle g_x(t_0,\varphi(0)),f(t_0,\varphi)\rangle>0,$$

то эта точка является точкой выхода системы (2) *из множества M, то есть любое решение задачи* (2), (3) *сразу покинет множество M.*

§ 4. Положительная инвариантность

До этого момента исследовались условия при которых для заданного множества и дифференциального уравнения (или включения) с последействием одно из решений, начавшееся в данном множестве, в этом множестве и оставалось бы какое-то время. Не менее важен вопрос, когда все решения включения будут оставаться в заданном множестве. В дальнейшем будем использовать обозначение δ-окрестности ($\delta>0$) множества $M\subset\mathbb{R}\times\mathfrak{X}$:

$$M^\delta\doteq\{(t,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{X}:\ \rho((t,\varphi),M)\leqslant\delta\},$$

где $\rho((t,\varphi),M)$ — расстояние от точки до множества.

Теорема 6. *Пусть* $M \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$ *— замкнутое подмножество, и задано* $F : \mathbb{R} \times \mathfrak{X} \to 2^{\mathbb{R}^n}$ *— локально ограниченное многозначное отображение. Пусть имеется* $\hat{\delta} > 0$ *такое, что для всех* $0 \leqslant \delta \leqslant \hat{\delta}$ *и для всех* $(t, \varphi) \in \partial M^\delta$ *выполнено включение* $F(t, \varphi) \subset T_{(t,\varphi)} M^\delta$*. Тогда множество* M *является положительно инвариантным относительно включения* (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $t \to x_t \in \mathfrak{X}$, $t \in I_\alpha(t_0)$ — движение, порожденное решением задачи (4), (5), покинувшее множество M. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_t \notin M$ для всех $t \in (t_0, t_0 + \alpha)$, то есть сразу покидает множество M (иначе возьмем решение с начальными данными в точке выхода).

Найдется $\hat{t} \in (t_0, t_0 + \alpha)$ такое, что $(t, x_t) \in M^{\hat{\delta}}$ для всех $t \in [t_0, \hat{t}]$ (в силу непрерывности отображения $t \to x_t$). При этом в силу локальной ограниченности F и компактности отрезка $[t_0, \hat{t}]$ будет выполняться неравенство $\sup\limits_{t \in [t_0, \hat{t}]} |F(t, x_t)| = K < \infty$, где $|F(t, x_t)| = \sup\limits_{h \in F(t, x_t)} |h|$.

Обозначим $a = \rho((\hat{t}, x_{\hat{t}}), M) > 0$, $d(t) \doteq \rho((t, x_t), M)$. Таким образом, $d(t_0) = 0$, $d(t) > 0$ для всех $t \in (t_0, \hat{t}]$, $d(\hat{t}) = a$.

Не ограничивая общности, будем считать, что $\varphi = 0$. Иначе перейдем к задаче

$$\dot{y}(t) \in \tilde{F}(t, y_t), \quad y_{t_0} = 0,$$

и множеству $\widetilde{M}$, где $\tilde{F}(t, y_t) \doteq F(t, x_t(t_0, \varphi, 0) + y_t)$, $\widetilde{M} \doteq \{(t, \widetilde{M}_t) : t \in \mathbb{R}\}$, $\widetilde{M}_t \doteq M_t - x_t(t_0, \varphi, 0)$. При этом x_t и y_t будут связаны равенством $y_t = x(t - x_t(t_0, \varphi, 0)$, и включение $x_t \in M_t$, $t \geqslant t_0$ будет равносильно включению $y_t \in \widetilde{M}_t$, $t \geqslant t_0$ (см. лемму 1).

Возьмем любое $t \in [t_0, \hat{t})$. Имеет место включение $(t, x_t) \in M^{d(t)}$. По определению решения дифференциального включения для почти всех $t \in [t_0, \hat{t}\,)$ выполнено $\dot{x}(t) \doteq f(t) \in F(t, x_t) \subset T_{(t,x_t)} M^{d(t)}$. При этом $x(t + \varepsilon) = x(t) + \varepsilon f(t) + o(\varepsilon)$, где $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$, $\varepsilon \to 0$. Отсюда следует, что

$$\|x_{t+\varepsilon} - x_{t+\varepsilon}(t, x_t, f(t)\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \sup_{s \in [0,\varepsilon]} |o(s)|. \tag{13}$$

С другой стороны, включение $f(t) \in T_{(t,x_t)} M^{d(t)}$ означает, что найдется отображение $\varepsilon \to y_{t+\varepsilon} \in M^{d(t)}_{t+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ такое, что

$$y_{t+\varepsilon} = x_{t+\varepsilon}(t, x_t, f(t)) + r_\varepsilon,$$

где для отображения $\varepsilon \to r_\varepsilon \in \mathfrak{X}$ выполнено: $r_\varepsilon(s) \equiv 0$, $s \in [-r, -\varepsilon]$, $\varliminf\limits_{\varepsilon \to 0+} \|\dot{r}_\varepsilon\|_{\mathfrak{Y}} = 0$. Это означает, что

$$\|y_t - x_{t+\varepsilon}(t, x_t, f(t))\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \varepsilon \|\dot{r}_\varepsilon\|_{\mathfrak{Y}}. \tag{14}$$

Так как $(t+\varepsilon, y_{t+\varepsilon}) \in M^{d(t)}$, то получаем, что

$$\rho((t+\varepsilon, x_{t+\varepsilon}), M^{d(t)}) \leqslant \|x_{t+\varepsilon} - y_{t+\varepsilon}\|_{\mathfrak{X}}.$$

Из неравенств (13), (14) следует, что

$$\rho((t+\varepsilon, x_{t+\varepsilon}), M^{d(t)}) \leqslant \sup_{s\in[0,\varepsilon]} |o(s)| + \varepsilon\|\dot{r}_\varepsilon\|_{\mathfrak{Y}}.$$

Откуда получаем, что $\varliminf\limits_{\varepsilon\to 0+} \frac{\rho((t+\varepsilon, x_{t+\varepsilon}), M^{d(t)})}{\varepsilon} = 0$. Из неравенства

$$d(t+\varepsilon) = \rho((t+\varepsilon, x_{t+\varepsilon}), M) \leqslant \rho((t+\varepsilon, x_{t+\varepsilon}), M^{d(t)}) + d(t)$$

получаем, что найдется последовательность $\varepsilon_n \to 0+$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(t+\varepsilon_n) - d(t)}{\varepsilon_n} = 0. \tag{15}$$

Докажем, что $t \to d(t)$, $[t_0, \hat{t}]$ — абсолютно непрерывная функция. Для функции расстояния до множества выполнено неравенство

$$|\rho((t_1,\psi), M) - \rho((t_2,\varphi), M)| \leqslant \rho((t_1,\psi),(t_2,\psi)) = \|\psi-\varphi\|_{\mathfrak{X}} + |t_1 - t_2|.$$

По определению решения включения, в силу того что мы приняли за начальное условие нулевое, получаем $x(t) = 0$, $t \in [-r, 0]$, и при почти всех $t \in [t_0, \hat{t})$ $|\dot{x}(t)| = |f(t)| \leqslant K$. Таким образом, $\|x_{t_1} - x_{t_2}\|_{\mathfrak{X}} \leqslant K|t_1 - t_2|$. Следовательно,

$$|d(t_1) - d(t_2)| = |\rho((t_1, x_{t_1}), M) - \rho((t_2, x_{t_2}), M)| \leqslant (K+1)|t_1 - t_2|,$$

то есть d — липшицева функция, а следовательно, абсолютно непрерывна.

При этом в силу равенства (15) получаем, что $\dot{d}(t) = 0$ почти всюду на $[t_0, \hat{t}]$. А это противоречит равенствам $d(t_0) = 0$, $d(\hat{t}) = a > 0$.

Получаем, что никакое решение не может покинуть множества M. Теорема доказана. $\square$

Пусть A, B — непустые подмножества $\mathbb{R}^n$. Напомним, что число, определенное равенством $\beta(A,B) \doteq \sup\limits_{x\in A} \rho(x, B)$, называется *полуотклонением множества A от множества B*. Другими словами,

$$\beta(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 : \ A \subset B^\varepsilon\}.$$

Теорема 7. *Пусть $M \subset \mathbb{R}\times\mathfrak{X}$ — замкнутое подмножество и задано многозначное отображение $F : \mathbb{R}\times\mathfrak{X} \to 2^{\mathbb{R}^n}$, удовлетворяющее условиям:*

1) *для всех точек $(t_0,\varphi) \in \partial M$ выполнено включение $F(t,\varphi) \subset T_{(t,\varphi)}M$;*

2) *для всех точек* $(t_0, \varphi) \in \partial M$ *найдутся числа* $\lambda = \lambda(t_0, \varphi) > 0$ *и* $\delta = \delta((t_0, \varphi)) > 0$ *такие, что для всех* $(t, \psi) \notin \mathrm{int}(M)$ *и* $|t - t_0| + \|\psi - \varphi\|_{\mathfrak{X}} \leqslant \delta$ *выполнено неравенство* $\beta(F(t, \psi), F(t_0, \varphi)) \leqslant \lambda(|t - t_0| + \|\psi - \varphi\|_{\mathfrak{X}})$.

Тогда множество M *является положительно инвариантным относительно включения* (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(t_0, \varphi) \in M$ — точка выхода для включения (4), $t \to x(t, t_0, \varphi) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0 - r, t_0 + \hat{t}]$ — решение задачи (4), (5) такое, что $(t, x_t(t_0, \varphi)) \notin M$, $t \in [t_0, t_0 + \hat{t}]$, где $x_t(t_0, \varphi)$ определено равенством (1). По определению решения дифференциального включения функция $t \to x(t, t_0, \varphi) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0 - r, t_0 + \hat{t}]$ почти всюду дифферецируема на отрезке $t \in [t_0, t_0 + \hat{t}]$. Обозначим $f(t) \doteq \dot{x}(t, t_0, \varphi) \in F(t, x_t)$.

Рассмотрим произвольную точку $t \in [t_0, t_0 + 1/n)$ такую, что $f(t)$ существует. Пусть $y_t \in \partial M_t$. Тогда найдется $h(t, y_t) \in F(t, y_t) \subset T_{(t, y_t)}M$ такой, что $|f(t) - h(t, y_t)| \leqslant \lambda \|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}}$. По определению $T_{(t,y_t)}M$ найдется отображение $\tau \to r_{t+\tau} \in \mathfrak{X}_0$ такое, что $y_{t+\tau}(t, y_t, h(t, y_t)) + r_{t+\tau} \in M_{t+\tau}$ при этом $r_{t+\tau}(s) = 0$, $s \in [-r, -\tau]$, $\varliminf\limits_{\tau \to 0+} \|\dot{r}_{t+\tau}\|_{\mathfrak{Y}} = 0$.

С другой стороны,

$$x(t + \tau, t_0, \varphi) = x(t + \tau, t_0, \varphi) + \tau f(t) + o(\tau), \lim_{\tau \to 0+} \tau^{-1} |o(\tau)| = 0.$$

Тогда

$$d(t) \doteq \rho(x_{t+\tau}, M_{t+\tau}) \leqslant \|x_{t+\tau} - y_{t+\tau}(t, y_t, h(t, y_t)) - r_{t+\tau}\|_{\mathfrak{X}}.$$

Для всех $s \in [-r, -\tau]$ выполнены два равенства: $x_{t+\tau}(s) = x_t(s + \tau)$ и $y_{t+\tau}(t, y_t, h(t, y_t)) + r_{t+\tau} = y_t(s + \tau)$. Поэтому

$$\sup_{s \in [-r, -\tau]} |x_{t+\tau}(s) - y_{t+\tau}(t, y_t, h(t, y_t))(s) - r_{t+\tau}(s)| \leqslant \|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}}.$$

Для $s \in [-\tau, 0]$

$$\begin{gathered} |x_{t+\tau}(s) - y_{t+\tau}(t, y_t, h(t, y_t))(s) - r_{t+\tau}(s)| \leqslant \\ \leqslant |x_t(0) - y_t(0)| + (\tau + s)|f(t) - h(t, y_t)| + |o(\tau + s)| + \int_{-\tau}^{s} |r_{t+\tau}(\xi)| d\xi \leqslant \\ \leqslant \|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}} + \tau\lambda \|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}} + o(\tau + s) + \tau \|\dot{r}_{t+\tau}\|_{\mathfrak{Y}}. \end{gathered}$$

Из свойств $\tau \to o(\tau)$ и $\tau \to r_{t+\tau}$ получаем, что найдется $0 < \tau_1 < 1/n$ такое, что

$$\begin{gathered} d(t + \tau_1) \doteq \rho(x_{t+\tau_1}, M_{t+\tau_1}) < \|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}} + 2\tau_1 \lambda \|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}} = \\ = (1 + 2\tau_1 \lambda) \|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}}. \end{gathered}$$

В силу того что $t \to x(t, t_0, \varphi)$ абсолютно непрерывна, τ_1 можно выбрать так, что f будет существовать в точке $f(t + \tau_1)$, так как множество существования функции $f(t)$ всюду плотно в $[t_0, t_0 + \hat{t}]$.

Аналогично найдется $0 < \tau_2 < 1/n$ такое, что

$$d(t + \tau_1 + \tau_2) < (1 + 2\lambda\tau_2)\|x_{t+\tau_1} - y_{t+\tau_1}\|_{\mathfrak{X}} < (1 + 2\lambda\tau_2)(1 + 2\lambda\tau_1)\|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}}$$

и $f(t+\tau_1+\tau_2)$ определено, и так далее. Либо найдется номер N такой, что $t_0 + \tau_1 + \ldots + \tau_N > t_0 + \hat{t}$, и тогда процесс закончится, то есть мы укажем $1/n$-сеть $\mathfrak{T}^n$ отрезка $[t_0, t_0 + \hat{t}]$ такую, что для всех $t_0 + \tau_i \in \mathfrak{T}^n$

$$d(t_0 + \tau_i) < (1 + 2\lambda\tau_1)(1 + 2\lambda\tau_2) \cdot \ldots \cdot (1 + 2\lambda\tau_i)\|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}}.$$

Либо этот процесс мы можем продолжить до бесконечности, тогда

$$t_i \doteq t_0 + \tau_1 + \ldots + \tau_i \to \tilde{t} \leqslant t_0 + \hat{t}.$$

Для всех i выполнено неравенство

$$\begin{aligned} d(t_i) &< (1 + 2\lambda\tau_1)(1 + 2\lambda\tau_2) \cdot \ldots \cdot (1 + 2\lambda\tau_i)\|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}} = \\ &= e^{\ln(1+2\lambda\tau_1)(1+2\lambda\tau_2)\cdot\ldots\cdot(1+2\lambda\tau_i)}\|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}} = \\ &= e^{\ln(1+2\lambda\tau_1)+\ln(1+2\lambda\tau_2)+\ldots+\ln(1+2\lambda\tau_i)}\|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}} < \\ &< e^{2\lambda\tau_1+2\lambda\tau_2+\ldots+2\lambda\tau_i}\|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}} = e^{2\lambda(t_i-t_0)}\|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и из непрерывности $t \to x(t, t_0, \varphi)$ следует, что $d(\tilde{t}) < e^{2\lambda(\tilde{t}-t_0)}\|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}}$. Так как отображение $t \to x(t, t_0, \varphi)$ абсолютно непрерывно, и множество, где существует $f(t)$, всюду плотно в $[t_0, t_0+\hat{t}]$, то найдется $\tilde{t} < t' < \tilde{t} + 1/n$ такое, что $f(t')$ существует и $d(t') < e^{2\lambda(t'-t_0)}\|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}}$.

Вообще для любой точки $t' \in [t_0, t_0 + \hat{t})$ такой, что выполнено неравенство $d(t') < e^{2\lambda(t'-t_0)}\|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}}$, найдется $t' < t'' < \min\{t_0 + \hat{t}, t' + 1/n\}$ такое, что $d(t'') < e^{2\lambda(t''-t_0)}\|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}}$. Тогда по трансфинитной индукции найдется $1/n$-сеть $\mathfrak{T}^n$ отрезка $[t_0, t_0 + \hat{t}]$ такая, что для всех $t' \in \mathfrak{T}^n$

$$d(t') < e^{2\lambda(t'-t_0)}\|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}} < e^{2\lambda\hat{t}}\|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}}.$$

Мы можем выбрать t так, что $\|x_t - y_t\|_{\mathfrak{X}} < 1/n$. Тогда $d(t') < \frac{1}{n}e^{2\lambda\hat{t}}$. Найдется $l > 0$ такое, что $d(t) > a/2$ для всех $t \in [t_0 + \hat{t} - l, t_0 + \hat{t}]$. Тогда найдется n такое, что $1/n < l$ и $\frac{1}{n}e^{2\lambda\hat{t}} < a/2$. Так как $\mathfrak{T}^n$ — $1/n$-сеть отрезка $[t_0, t_0+\hat{t}]$, то $\mathfrak{T}^n \cap [t_0+\hat{t}-l, t_0+\hat{t}] \neq \varnothing$, чего не может быть по определению l и n. Таким образом, $d(t) \equiv 0$. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aubin J. P. A survey of viability theory // SIAM J. Contr. and Optim. 1990. Vol. 28, № 4. P. 749–788.
2. Nagumo M. Uber die Lage der Intergralkurven gewohnliher Differentialgleichungen // Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 1942. Vol. 24. P. 551–559.
3. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
4. Тонков Е. Л. Динамические задачи выживания // Вестн. Перм. гос. тех. ун-та. Функцион.-дифференц. уравнения (спец. вып.). 1997. № 4. С.138–148.
5. Haddad G. Monotone trajectories of differential inclusions and functional-differential inclusions with memory // Israel J. of Math. 1984. № 31. P. 83–100.
6. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

Поступила в редакцию 01.09.07

V. N. Baranov
Viability sets of systems with aftereffect

It is proved that necessary and sufficient condition of viability of the system with aftereffect

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

in the set $M \subset \mathbb{R} \times C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ is the inclusion $f(t, \varphi) \in T_{(t,\varphi)}M$, with $T_{(t,\varphi)}M$ being space, tangent to M. It is proved that necessary and sufficient condition of viability of the inclusion with aftereffect

$$\dot{x}(t) \in F(t, x_t)$$

in the set $M \subset \mathbb{R} \times C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ is the condition $F(t, \varphi) \cap T_{(t,\varphi)}M \neq \varnothing$. There are proved sufficient conditions for positive invariance of a set for a system (inclusion) with aftereffect. Namely, if there exist such $\hat{\delta} > 0$, that for all $0 \leqslant \delta \leqslant \hat{\delta}$ and for all $(t, \varphi) \in \partial M^\delta$ the inclusion $F(t, \varphi) \subset T_{(t,\varphi)}M^\delta$ holds, then the set M is positive ivnariant according to the system (inclusion) with aftereffect.

Баранов Виктор Николаевич
ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет»
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 4)
E-mail: vbaranov@uni.udm.ru