ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2024. Т. 34. Вып. 1. С. 91–108.

УДК 519.218.84

© *В. Л. Хацкевич*

О СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССАХ С НЕЧЕТКИМИ СОСТОЯНИЯМИ

В данной работе изучены непрерывные случайные процессы с нечеткими состояниями. Установлены свойства их числовых характеристик — нечетких ожиданий, ожиданий и ковариационных функций. Основное внимание уделено классу стационарных нечетко-случайных процессов. Для них обосновано свойство эргодичности и спектральное представление ковариационной функции (обобщенная теорема Винера–Хинчина). Полученные результаты опираются на свойства нечетко-случайных величин и числовых случайных процессов. В качестве примеров рассмотрены треугольные нечетко-случайные процессы.

Ключевые слова: непрерывные случайные процессы с нечеткими состояниями, нечеткие ожидания, ковариационные функции, стационарные нечетко-случайные процессы, свойство эргодичности, спектральное разложение.

DOI: 10.35634/vm240107

Введение

При математическом моделировании прикладных задач, когда исходные данные неполные или слабо формализованные, широко используют нечеткие множества [1, 2]. Из недавних работ отметим работы [3–6] по применению нечеткого моделирования в динамических задачах автоматического регулирования сложных систем. С другой стороны, при исследовании динамических процессов в условиях ограниченной исходной информации один из возможных подходов заключается в их трактовке как реализации некоторых случайных процессов [7, 8].

В данной статье применяется сочетание упомянутых методов, а именно исследуются непрерывные случайные процессы с нечеткими состояниями (нечетко-случайные процессы). Точнее, мы считаем время и множество возможных нечетких состояний непрерывным. При этом сечение непрерывного нечетко-случайного процесса в любой момент времени представляет собой нечетко-случайную величину. В своем исследовании мы опираемся на известные результаты по теории нечетко-случайных величин [9–12] и классические результаты теории вещественных случайных процессов [7, 8].

Как известно, математические ожидания и ковариационные функции являются основными характеристиками вещественных непрерывных случайных процессов. В настоящей статье установлены свойства нечетких ожиданий, ожиданий и ковариационных функций непрерывных нечетко-случайных процессов. Основное внимание уделено исследованию введенного в работе класса стационарных нечетко-случайных процессов. Для них уточнены свойства нечетких ожиданий, ожиданий и ковариационных функций. Отметим, в частности, свойство положительной определенности ковариационной функции нечетко-случайного процесса и формулу для дисперсии интеграла от стационарного нечетко-случайного процесса.

К наиболее значимым результатам данной работы относятся обоснование свойства эргодичности и спектрального представления ковариационной функции (обобщенная теорема Винера–Хинчина) для стационарного нечетко-случайного процесса.

Полученные в данной работе результаты являются развитием на случай нечеткости известных результатов [7, гл. V, VI],[8, гл. VII] для вещественных непрерывных случайных процессов. Отметим отличие нашего подхода и результатов от работ, посвященных случайным процессам с непрерывным временем и дискретными нечеткими состояниями. Например, в работах [13–16] обсуждаются нечеткие системы массового обслуживания, в [17, 18] рассматриваются стохастические нечеткие динамические системы автоматического регулирования, а в работах [19–21] рассмотрено применение методов нечеткого управления сложными стохастическими системами. При этом в упомянутых работах ковариационные функции нечетко-случайных процессов не обсуждаются.

Отметим, что свойство эргодичности для стационарных нечетко-случайных процессов, как и в случае вещественных стационарных случайных процессов [7, гл. VI] обеспечивает существование среднего по времени, что как и в вещественном случае может быть использовано для оценки ковариационных функций. Результаты настоящей работы могут найти применение в задачах автоматического регулирования динамических систем с нечетко-случайными параметрами. В частности, обобщенная теорема Винера–Хинчина может быть использована в задаче о преобразовании стационарного нечетко-случайного сигнала линейной динамической системой. Такие результаты для вещественных случайных процессов широко известны (см., напр., [22, гл. 7]).

Подчеркнем, что ранее класс стационарных нечетко-случайных процессов не рассматривался, несмотря на его важность в теоретическом и прикладном аспектах.

Ниже, под нечетким числом $\tilde{z}$, заданным на универсальном пространстве R — вещественных чисел, будем понимать совокупность упорядоченных пар $(x, \mu_{\tilde{z}(x)})$, где функция принадлежности $\mu_{\tilde{z}}\colon R \to [0,1]$ определяет степень принадлежности $\forall x \in R$ множеству $\tilde{z}$ [1, гл. 5],[2, гл. 2, 3].

Будем использовать интервальное представление нечетких чисел. А именно, каждому нечеткому числу поставим в соответствие совокупность его α-интервалов.

Как известно, множества α-уровня нечеткого числа $\tilde{z}$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}(x)}$ определяются соотношениями

$$Z_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{z}(x)} \geqslant \alpha\} \quad (\alpha \in (0,1]), \quad Z_0 = \mathrm{cl}\,\{x \mid \mu_{\tilde{z}(x)} > 0\},$$

где cl — обозначает замыкание множества.

Будем считать, что все α-уровни нечеткого числа — замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси. Обозначим левую границу интервала через $z^-(\alpha)$, а правую через $z^+(\alpha)$. Таким образом, $Z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$. При этом $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ называют, соответственно, левым и правым α-индексами (индексами) нечеткого числа. Ниже предполагается, что они измеримы и ограничены на $[0,1]$. Совокупность таких нечетких чисел будем обозначать J.

Под суммой нечетких чисел понимается нечеткое число, индексы которого являются суммами соответствующих индексов слагаемых. Умножение нечеткого числа на положительное число означает умножение индексов на это число. Умножение на отрицательное вещественное число означает умножение индексов на это число и перемену их местами. Равенство нечетких чисел понимается как равенство всех соответствующих α-индексов (при $\forall\alpha \in [0,1]$).

Множество J можно метризовать различными способами. В частности, для нечетких чисел $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2 \in J$ определим метрику следующим равенством (например, [23])

$$d(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = \left(\int_0^1 \left((z_1^-(\alpha) - z_2^-(\alpha))^2 + (z_1^+(\alpha) - z_2^+(\alpha))^2\right) d\alpha\right)^{1/2}, \tag{0.1}$$

где $z_i^-(\alpha)$ и $z_i^+(\alpha)$ являются левым и, соответственно, правым индексами $\tilde{z}_i$ $(i = 1, 2)$.

§ 1. Нечеткие ожидания, ожидания и ковариации нечетко-случайных величин

Пусть (Ω, Σ, P) — вероятностное пространство, где Ω — множество элементарных событий, Σ — σ-алгебра, состоящая из подмножеств множества Ω, P — вероятностная мера.

Рассмотрим отображение $\tilde{X}\colon \Omega \to J$. Его интервалы α-уровня $X_\alpha(\omega)$ при фиксированном $\omega \in \Omega$ определяются формулами $X_\alpha(\omega) = \{r \in R \mid \mu_{\tilde{X}(\omega)}(r) \geqslant \alpha\}$, $\alpha \in (0,1]$, $X_0(\omega) = \mathrm{cl}\{r \in R \mid \mu_{\tilde{X}(\omega)}(r) > 0\}$, где $\mu_{\tilde{X}(\omega)}(r)$ — функция принадлежности нечеткого числа $\tilde{X}(\omega)$. Интервал $X_\alpha(\omega)$ представим в виде $X_\alpha(\omega) = [X^-(\omega,\alpha), X^+(\omega,\alpha)]$. Его границы $X^-(\omega,\alpha)$, $X^+(\omega,\alpha)$ называют левым и, соответственно, правым α-индексами отображения $\tilde{X}$.

Отображение $\tilde{X}\colon \Omega \to J$ называют нечетко-случайной величиной, кратко Н. С. В. (например, [9, 10]), если вещественнозначные функции $X^\pm(\omega,\alpha)$ измеримы по ω для всех $\alpha \in [0,1]$. В этом случае при любом $\alpha \in [0,1]$ индексы являются вещественными случайными величинами.

Замечание 1.1. Как отмечено в [9, 10], данное определение Н. С. В. согласуется со следующим определением. В метрическом пространстве J с метрикой (0.1) рассмотрим семейство борелевских множеств $\mathfrak{F}$ как наименьшую σ-алгебру подмножеств из J, содержащую все открытые и все замкнутые подмножества из J.

Пусть (Ω, Σ, P) — вероятностное пространство. Отображение $F\colon \Omega \to J$ называют измеримым или Н. С. В., если для любого множества $M \in \mathfrak{F}$ подмножество из Ω вида $\{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \in M\}$ входит в σ-алгебру Σ.

В дальнейшем будем рассматривать класс $\mathfrak{X}$ нечетко-случайных величин, для которых индексы $X^-(\omega,\alpha)$, и $X^+(\omega,\alpha)$ являются квадратично суммируемыми на $\Omega \times [0,1]$ функциями.

На множестве $\mathfrak{X}$ рассмотрим метрику, задаваемую для Н. С. В. $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ равенством (например, [24])

$$\rho(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2) = \left(\int_0^1 \int_\Omega \left((X_1^-(\omega,\alpha) - X_2^-(\omega,\alpha))^2 + (X_1^+(\omega,\alpha) - X_2^+(\omega,\alpha))^2\right) dP\, d\alpha\right)^{1/2}. \tag{1.1}$$

Для Н. С. В. $\tilde{X}(\omega)$ положим

$$x^-(\alpha) = \int_\Omega X^-(\omega,\alpha)\, dP, \quad x^+(\alpha) = \int_\Omega X^+(\omega,\alpha)\, dP. \tag{1.2}$$

Нечеткое число с индексами, определяемыми формулами (1.2), называют нечетким ожиданием Н. С. В. $\tilde{X}$ (например,[25, 26, гл. 5]). Будем обозначать его $M(\tilde{X})$, а его индексы — $[M(\tilde{X})]^\pm_\alpha$.

Определенное формулами (1.2) нечеткое ожидание обладает свойствами, аналогичными свойствам математических ожиданий вещественных случайных величин. А именно, имеет место следующее утверждение [25, 27].

Утверждение 1.1. *Нечеткое ожидание Н. С. В., определяемое посредством* (1.2)*, обладает следующими свойствами:*

(1) *если* $\tilde{X}(\omega) = \tilde{X}$ (*п. в.* $\omega \in \Omega$)*, то* $M(\tilde{X}) = \tilde{X}$ (*идемпотентность*)*;*

(2) *нечеткое ожидание* $M\colon \mathfrak{X} \to J$ *аддитивно, т. е.* $M(\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2) = M(\tilde{X}_1) + M(\tilde{X}_2)$ $\forall \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 \in \mathfrak{X}$*;*

(3) *нечеткое ожидание* $M\colon \mathfrak{X} \to J$ *однородно, т. е.* $M(C\tilde{X}) = CM(\tilde{X})$ $\forall \tilde{X} \in \mathfrak{X}$ $\forall C \in R$*;*

(4) *нечеткое ожидание* $M\colon \mathfrak{X} \to J$ *непрерывно как отображение из* $\mathfrak{X}$ *с метрикой* (1.1) *в* J *с метрикой* (0.1).

Рассмотрим вопрос о дефазификации нечеткого ожидания.

Как известно, среднее нечеткого числа $\tilde{z}$ при интервальном подходе определяется равенством [28]

$$z_{\text{ср}} = \frac{1}{2}\int_0^1 (z^-(\alpha) + z^+(\alpha))\, d\alpha, \tag{1.3}$$

где $z^{\pm}(\alpha)$ — индексы нечеткого числа $\tilde{z}$.

В связи с (1.3) ожидание $m(\tilde{X})$ Н. С. В. $\tilde{X} \in \mathfrak{X}$ определяют как усредняющий функционал посредством формулы

$$m(\tilde{X}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \big([M(\tilde{X})]^-(\alpha) + [M(\tilde{X})]^+(\alpha)\big)\, d\alpha, \tag{1.4}$$

где $M^{\pm}(\alpha)$ — индексы нечеткого ожидания $M(\tilde{X})$, задаваемые формулами (1.2). По существу, это один из способов дефазификации нечеткого ожидания.

Из определения (1.4) и утверждения 1.1 вытекает следующее утверждение [25, 27].

Утверждение 1.2. *Ожидание Н. С. В.* (1.4) *обладает следующими свойствами:*

(1) *если* $\tilde{X}(\omega) = \tilde{X}$ (*п. в.* $\omega \in \Omega$), *то* $m(\tilde{X}) = X_{cp}$ (*идемпотентность*);

(2) *ожидание* $m\colon \mathfrak{X} \to R$ *аддитивно, т. е.* $m(\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2) = m(\tilde{X}_1) + m(\tilde{X}_2)\ \forall \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 \in \mathfrak{X}$*;*

(3) *ожидание* $m\colon \mathfrak{X} \to R$ *однородно, т. е.* $m(C\tilde{X}) = Cm(\tilde{X})\ \forall \tilde{X} \in \mathfrak{X}\ \forall C \in R$*;*

(4) *ожидание* $m\colon \mathfrak{X} \to R$ *непрерывно.*

Для Н. С. В. $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ ковариацию определяют формулой [10]

$$\operatorname{cov}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \big(\operatorname{cov}(X_\alpha^-, Y_\alpha^-) + \operatorname{cov}(X_\alpha^+, Y_\alpha^+)\big)\, d\alpha, \tag{1.5}$$

а дисперсию $D(\tilde{X}) = \operatorname{cov}(\tilde{X}, \tilde{X})$. В (1.5) ковариации вещественных случайных величин $X_\alpha^{\pm}$ и $Y_\alpha^{\pm}$ определены стандартной формулой [7, гл. I]:

$$\operatorname{cov}(X_\alpha^{\pm}, Y_\alpha^{\pm}) = E\left(X_\alpha^{\pm} - E(X_\alpha^{\pm})\right)\left(Y_\alpha^{\pm} - E(X_\alpha^{\pm})\right).$$

Здесь и ниже символ E обозначает математическое ожидание случайной величины, то есть для вещественной случайной величины $\xi(\omega)$ полагаем $E\xi = \int_\Omega \xi(\omega)\, dP$.

Имеет место следующее утверждение (например, [10], [26, гл. 6]).

Утверждение 1.3. *Справедливы следующие свойства ковариации* (1.5) *нечетко-случайных величин:*

(1) *симметричность:* $\operatorname{cov}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \operatorname{cov}(\tilde{Y}, \tilde{X})\ \forall \tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}$*;*

(2) *аддитивность:* $\operatorname{cov}(\tilde{X} + \tilde{Z}, \tilde{Y}) = \operatorname{cov}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \operatorname{cov}(\tilde{Y}, \tilde{Z})\ \forall \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \mathfrak{X}$*;*

(3) *положительная однородность:* $\operatorname{cov}(C_1\tilde{X}, C_2\tilde{Y}) = C_1C_2 \operatorname{cov}(\tilde{Y}, \tilde{X})\ \forall \tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}$ $\forall C_1, C_2 \in R\colon C_1C_2 > 0$*;*

(4) $D(C\tilde{X}) = C^2 D(\tilde{X})\ \forall \tilde{X} \in \mathfrak{X}\ \forall C \in R$*;*

(5) $D(\tilde{X} + \tilde{Y}) = D(\tilde{X}) + D(\tilde{Y}) + 2\operatorname{cov}(\tilde{X}, \tilde{Y})\ \forall \tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}$.

§ 2. Непрерывные случайные процессы с нечеткими состояниями

В этом параграфе и ниже будет использовано понятие предела, непрерывности и интегрируемости вещественных случайных процессов в среднем квадратичном (с. к.). А именно, рассмотрим гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ вещественных случайных величин ξ с конечным вторым моментом, т. е. $E\xi^2 < \infty$. Скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$ вводят равенствами

$(\xi, \eta) = E\xi\eta$, $||\xi|| = (\xi, \xi)^{1/2}$. Пусть $\xi(t)$ — вещественный случайный процесс такой, что $\xi(t) \in \mathfrak{H}$ при $\forall t \in [t_0, T]$. Для него понятия с. к.-предела, с. к.-непрерывности и с. к.-интегрируемости определяются как соответствующие понятия для функций со значениями в $\mathfrak{H}$ [7, гл. II].

Пусть $[t_0, T]$ — расширенный отрезок числовой оси. Ниже, как и в § 1, (Ω, Σ, P) — вероятностное пространство, $\mathfrak{X}$ — совокупность нечетко-случайных величин с квадратично суммируемыми на $\Omega \times [0, 1]$ индексами.

Непрерывным случайным процессом с нечеткими состояниями или нечетко-случайным процессом (Н. С. П.) будем называть отображение $\tilde{X}\colon [t_0, T] \to \mathfrak{X}$, т. е. функцию $\tilde{X}(\omega, t)$, значениями которой при $\forall t \in [t_0, T]$ являются нечетко-случайные величины из $\mathfrak{X}$. Обозначим α-индексы Н. С. П. $\tilde{X}(\omega, t)$ через $X_\alpha^\pm(\omega, t)$.

Ниже будем рассматривать Н. С. П. $\tilde{X}(t)$, для которых вещественные функции $X_\alpha^\pm(\omega, t)$ квадратично суммируемы по совокупности переменных на $\Omega \times [0, 1] \times [t_0, T]$ и непрерывны по α при $\forall t \in [t_0, T]$ в среднем квадратичном.

Определим нечеткое ожидание $M(\tilde{X}(\omega, t))$ Н. С. П. $\tilde{X}(\omega, t)$ при каждом $t \in [t_0, T]$ как нечеткое ожидание соответствующей нечетко-случайной величины, т. е. нечеткозначную функцию, имеющую α-индексы

$$\Big[M(\tilde{X}(\omega, t))\Big]_\alpha^\pm = \int_\Omega X_\alpha^\pm(\omega, t)\, dP \quad (\forall \alpha \in [0, 1]). \tag{2.1}$$

Из определения нечеткого ожидания Н. С. П. (2.1) и свойств нечетких ожиданий Н. С. В. вытекает следующее.

Утверждение 2.1. *Справедливы следующие свойства нечетких ожиданий Н. С. П.:*

(1) *нечеткое ожидание от неслучайной функции $\tilde{z}\colon [t_0, T] \to J$ равно самой этой функции $M(\tilde{z}(t)) = \tilde{z}(t)$;*

(2) *неслучайный скалярный множитель $\phi\colon [t_0, T] \to R$ можно выносить за знак нечеткого ожидания*

$$M\big(\phi(t)\tilde{X}(t)\big) = \phi(t) M\big(\tilde{X}(t)\big),$$

где $\tilde{X}(t)$ — нечетко-случайный процесс;

(3) *нечеткое ожидание суммы двух Н. С. П. $\tilde{X}(t)$ и $\tilde{Y}$ равно сумме нечетких ожиданий слагаемых $M\big(\tilde{X}(t) + \tilde{Y}(t)\big) = M\big(\tilde{X}(t)\big) + M\big(\tilde{Y}(t)\big)$.*

Ожидание $m\big(\tilde{X}(t)\big)$ Н. С. П. $\tilde{X}(t)$ определим при каждом $t \in [t_0, T]$ как ожидание соответствующей Н. С. В. $\tilde{X}(t)$. Ожидание $m\big(\tilde{X}(t)\big)$ при любом $t \in [t_0, T]$ обладает свойствами ожиданий Н. С. В., приведенными в утверждении 1.2.

Интегралом по промежутку $[t_0, T]$ от Н. С. П. $\tilde{X}(t)$ назовем нечетко-случайную величину $\tilde{Y}(\omega) = \int_{t_0}^T \tilde{X}(\omega, t) dt$ с интервалами α-уровня $[Y_\alpha^-(\omega), Y_\alpha^+(\omega)]$, определяемыми формулами

$$Y_\alpha^\pm(\omega) = \int_{t_0}^T X_\alpha^\pm(\omega, t)\, dt.$$

Здесь $X_\alpha^\pm$ — соответствующие α-индексы Н. С. В. $\tilde{X}$, а интегрирование понимается в среднем квадратичном (сравни с [29, 30] для нечеткозначных функций).

Если такой интеграл существует, то Н. С. П. $\tilde{X}(t)$ назовем интегрируемым на $[t_0, T]$.

Теорема 2.1. *Пусть $\tilde{X}(\omega, t)$ — интегрируемый на $[t_0, T]$ Н. С. П. Тогда*

$$M\left(\int_{t_0}^T \tilde{X}(\omega, t) dt\right) = \int_{t_0}^T M\left(\tilde{X}(\omega, t)\right) dt. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению нечеткого ожидания левая часть (2.2) имеет α-индексы

$$\left[M\left(\int_{t_0}^{T}\tilde{X}(\omega,t)dt\right)\right]_\alpha^\pm = \int_\Omega\left[\int_{t_0}^{T}\tilde{X}(\omega,t)dt\right]_\alpha^\pm dP = \int_\Omega\left(\int_{t_0}^{T}\tilde{X}_\alpha^\pm(\omega,t)dt\right)dP.$$

Меняя в последнем выражении порядок интегрирования, на основании теоремы Фубини, получим

$$\left[M\left(\int_{t_0}^{T}\tilde{X}(\omega,t)dt\right)\right]_\alpha^\pm = \int_{t_0}^{T}\left(\int_\Omega\tilde{X}_\alpha^\pm(\omega,t)dP\right)dt =$$
$$= \int_{t_0}^{T}\left[M(\tilde{X}(\omega,t))\right]_\alpha^\pm dt = \left[\int_{t_0}^{T}M(\tilde{X}(\omega,t))dt\right]_\alpha^\pm.$$

Здесь мы воспользовались определением нечеткого ожидания. Тогда формула (2.2) следует из равенства соответствующих индексов при $\forall\alpha\in[0,1]$. □

Пример 2.1. Пусть вещественные случайные процессы $\xi_i(\omega,t)$ ($i=1,2,3$; $\omega\in\Omega$, $t\in[t_0,T]$) квадратично суммируемы на $\Omega\times[t_0,T]$ и таковы, что $\xi_1(\omega,t)<\xi_2(\omega,t)<\xi_3(\omega,t)$ при всех $\omega\in\Omega$, $t\in[t_0,T]$.

Рассмотрим Н. С. П. $\tilde{X}(t)$, для которого при всех $\omega\in\Omega$, $t\in[t_0,T]$ нечеткое число $\tilde{X}(\omega,t)$ имеет треугольный вид $(\xi_1(\omega,t),\xi_2(\omega,t),\xi_3(\omega,t))$. То есть функция принадлежности $\tilde{X}(\omega,t)$ при любом $\omega\in\Omega$, $t\in[t_0,T]$ описывается формулой (например, [1, гл. 5])

$$\mu_{\omega,t}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\xi_1(\omega,t)}{\xi_2(\omega,t)-\xi_1(\omega,t)}, & \text{если } x\in[\xi_1(\omega,t),\xi_2(\omega,t)];\\[2mm] \dfrac{x-\xi_3(\omega,t)}{\xi_2(\omega,t)-\xi_3(\omega,t)}, & \text{если } x\in[\xi_2(\omega,t),\xi_3(\omega,t)];\\[2mm] 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

В этом случае справедливы соотношения для α-индексов

$$X^-(\omega,t)=(1-\alpha)\xi_1(\omega,t)+\alpha\xi_2(\omega,t),\quad X^+(\omega,t)=(1-\alpha)\xi_3(\omega,t)+\alpha\xi_2(\omega,t). \tag{2.3}$$

Тогда нечеткое ожидание $M(\tilde{X}(t))$ определяется формулами для α-индексов

$$[M(\tilde{X})]_\alpha^-(t)=(1-\alpha)E\xi_1(t)+\alpha E\xi_2(t)\quad(\forall\alpha\in[0,1])$$

и

$$[M(\tilde{X})]_\alpha^+(t)=(1-\alpha)E\xi_3(t)+\alpha E\xi_2(t)\quad(\forall\alpha\in[0,1]).$$

Пример 2.2. Пусть в условиях примера 2.1 случайные процессы $\xi_i(\omega,t)$ интегрируемы по t на промежутке $[t_0,T]$. Тогда $\int_{t_0}^{T}\tilde{X}(t)\,dt$ имеет треугольный вид

$$\left(\int_{t_0}^{T}\xi_1(\omega,t)\,dt,\int_{t_0}^{T}\xi_2(\omega,t)\,dt,\int_{t_0}^{T}\xi_3(\omega,t)\,dt\right).$$

Ниже рассмотрим понятие ковариационной функции Н. С. П. и ее свойства. Ковариационной функцией Н. С. П. $\tilde{X}(t)$ в соответствии с (1.5) назовем величину

$$K_{\tilde{X}}(t,s)=\operatorname{cov}(\tilde{X}(t),\tilde{X}(s))=\frac{1}{2}\int_0^1\left(K_{X_\alpha^-}(t,s)+K_{X_\alpha^+}(t,s)\right)d\alpha. \tag{2.4}$$

Здесь $K_{X_\alpha^-}(t,s)$ и $K_{X_\alpha^+}(t,s)$ — ковариационные функции случайных процессов $X_\alpha^-(\omega,t)$ и $X_\alpha^+(\omega,t)$ соответственно, равные

$$K_{X_\alpha^\pm}(t,s)=E\left[(X_\alpha^\pm(\omega,t)-EX_\alpha^\pm(\omega,t))(X_\alpha^\pm(\omega,s)-EX_\alpha^\pm(\omega,s))\right]. \tag{2.5}$$

Дисперсия Н. С. П. $\tilde X(t)$ определяется равенством $D_{\tilde X}(t)=K_{\tilde X}(t,t)$.

Замечание 2.1. В сделанных в начале параграфа предположениях на α-индексы Н. С. П. $\tilde X(t)$ ковариационная функция (2.4) существует.

В самом деле, как известно, существование ковариационных функций $K_{X_\alpha^\pm}(t,s)$ при каждом $\alpha\in[0,1]$ обеспечивается условием $E|X_\alpha^\pm(t)|^2<\infty$ при $\forall t\in[t_0,T]$. Кроме того, непрерывность ковариационных функций $K_{X_\alpha^\pm}(t,s)$ по α, а значит, и существование $K_{\tilde X}(t,s)$ обеспечивается предположением о непрерывности случайных процессов $X_\alpha^\pm(\omega,t)$ по α в среднем квадратичном при $\forall t\in[t_0,T]$.

А именно, покажем вначале непрерывность по α математического ожидания $E(X_\alpha^\pm(\omega,t))$. Фиксируем $t\in[t_0,T]$ и $\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$ и рассмотрим выражение

$$E(X_{\alpha_1}^\pm(\omega,t))-E(X_{\alpha_2}^\pm(\omega,t))=\int_\Omega\big(X_{\alpha_1}^\pm(\omega,t)-X_{\alpha_2}^\pm(\omega,t)\big)\,dP.$$

Следовательно,

$$|E(X_{\alpha_1}^\pm(\omega,t))-E(X_{\alpha_2}^\pm(\omega,t))|\leqslant\int_\Omega\big|X_{\alpha_1}^\pm(\omega,t)-X_{\alpha_2}^\pm(\omega,t)\big|\,dP\leqslant||X_{\alpha_1}^\pm(t)-X_{\alpha_2}^\pm(t)||,$$

где $||\cdot||$ — норма Н. С. В. в пространстве $\mathfrak{H}$ с конечным вторым моментом. Отсюда следует непрерывность математического ожидания по α.

Тогда выражение $E\big(X_{\alpha_1}^\pm(t)\big)E\big(X_{\alpha_2}^\pm(s)\big)$ непрерывно по α. Аналогично устанавливается непрерывность по α выражения $E\big(X_{\alpha_1}^\pm(t)X_{\alpha_2}^\pm(s)\big)$ и, следовательно, непрерывность по α ковариационных функций $K_{X_\alpha^\pm}(t,s)$.

Пример 2.3. Пусть выполнены условия примера 2.1 и дополнительно случайные процессы $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, а также $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$ попарно некоррелированны. Тогда ковариационная функция $K_{\tilde X}(t_1,t_2)$ Н. С. П. $\tilde X(t)$ треугольного вида $(\xi_1(t),\xi_2(t),\xi_3(t))$ выражается через корреляционные функции $K_{\xi_1}(t_1,t_2)$, $K_{\xi_2}(t_1,t_2)$, $K_{\xi_3}(t_1,t_2)$ случайных процессов $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ и $\xi_3(t)$ формулой

$$K_{\tilde X}(t_1,t_2)=\frac{1}{6}\left\{K_{\xi_1}(t_1,t_2)+2K_{\xi_2}(t_1,t_2)+K_{\xi_3}(t_1,t_2)\right\}. \tag{2.6}$$

Действительно, для ковариационной функции $K_{X_\alpha^-}(t_1,t_2)$ согласно формуле (2.3) для левого индекса $X_\alpha^-(t)$ треугольного Н. С. П. и предположению о некоррелированности ξ_1 и ξ_2 имеем $K_{X_\alpha^-}(t_1,t_2)=(1-\alpha)^2K_{\xi_1}(t_1,t_2)+\alpha^2K_{\xi_2}(t_1,t_2)$. Аналогично

$$K_{X_\alpha^+}(t_1,t_2)=(1-\alpha)^2K_{\xi_3}(t_1,t_2)+\alpha^2K_{\xi_2}(t_1,t_2).$$

Тогда по определению (2.4) ковариационной функции Н. С. П. получим формулу (2.6).

Согласно (2.4), (2.5) и свойствам ковариации нечетко-случайных величин (утверждение 1.3) имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2.2. *Ковариационная функция Н. С. П. (2.4) обладает следующими свойствами:*

(1) *симметричность; для Н. С. П.* $\tilde{X}(t)$ *при* $\forall t_1, t_2 \in [t_0, T]$ *имеет место равенство*

$$K_{\tilde{X}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{X}}(t_2, t_1);$$

(2) *если* $\tilde{X}(t)$ — *Н. С. П. и* $\phi(t)$ — *неслучайная числовая функция, то для Н. С. П.* $\tilde{Y}(t) = \phi(t)\tilde{X}(t)$ *ковариационная функция* $K_{\tilde{Y}}(t_1, t_2)$ *имеет вид*

$$K_{\tilde{Y}}(t_1, t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2)K_{\tilde{X}}(t_1, t_2);$$

(3) *если* $\tilde{Y}(t) = \tilde{X}(t) + \phi(t)$, *то* $K_{\tilde{Y}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)$*;*

(4) *справедливо соотношение* $|K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)| \leqslant \sqrt{D_{\tilde{X}}(t_1)D_{\tilde{X}}(t_2)}$.

Отметим еще одно характерное свойство ковариационной функции Н.С.П.

Утверждение 2.3. *Ковариационная функция* $K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)$ *Н. С. П.* $\tilde{X}(t)$ *является неотрицательно определенной. А именно, для любого натурального* n *и вещественных постоянных* c_k, t_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *имеет место соотношение* $\sum\limits_{k,j=1}^{n} c_k c_j K_{\tilde{X}}(t_k, t_j) \geqslant 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждой ковариационной функции $K_{X_\alpha^\pm}$, определяемой формулой (2.5), в силу известного результата [7, гл. V] имеем $\sum\limits_{k,j=1}^{n} c_k c_j K_{X_\alpha^\pm}(t_k, t_j) \geqslant 0$. Тогда, согласно (2.4),

$$\sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j K_{\tilde{X}}(t_k, t_j) = \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j \int_0^1 \big(K_{X_\alpha^-}(t_k, t_j) + K_{X_\alpha^+}(t_k, t_j)\big)\, d\alpha =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j K_{X_\alpha^-}(t_k, t_j) + \sum_{k,j=1}^{n} c_k c_j K_{X_\alpha^+}(t_k, t_j)\right) d\alpha \geqslant 0.$$

□

Рассмотрим теперь интеграл с переменным верхним пределом $\tilde{Y}(t) = \int_{t_0}^{t} \tilde{X}(s)\, ds$ от Н. С. П. $\tilde{X}(t)$.

Теорема 2.2. *Пусть* $\tilde{X}(t)$ — *интегрируемый на* $[t_0, T]$ *Н. С. П. Пусть, кроме того, ковариационные функции* α*-индексов* $K_{X_\alpha^-}(\tau_1, \tau_2)$ *и* $K_{X_\alpha^+}(\tau_1, \tau_2)$*, определяемые формулами (2.5), суммируемы по совокупности переменных* τ_1, τ_2, α *на* $[t_0, T] \times [t_0, T] \times [0, 1]$. *Тогда ковариационная функция интеграла* $\tilde{Y}(t)$ *равна*

$$K_{\tilde{Y}}(t, s) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} K_{\tilde{X}}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 \quad (\forall t, s \in [t_0, T]). \tag{2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению (2.4) $K_{\tilde{Y}}(t, s) = \int_{t_0}^{t}\big(K_{Y_\alpha^-}(t, s) + K_{Y_\alpha^+}(t, s)\big)\, d\alpha$. При этом на основании определения нечеткого интеграла $Y_\alpha^\pm(t) = \int_{t_0}^{t} X_\alpha^\pm(\tau)\, d\tau$. Тогда в силу известного свойства интеграла от скалярного случайного процесса (например, [7, гл. II]) получим

$$K_{Y_\alpha^-}(t, s) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} K_{X_\alpha^-}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2, \qquad K_{Y_\alpha^+}(t, s) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} K_{X_\alpha^+}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2.$$

Следовательно, $K_{\tilde{Y}}(t, s) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\big(K_{X_\alpha^-}(\tau_1, \tau_2) + K_{X_\alpha^+}(\tau_1, \tau_2)\big)\, d\tau_1 d\tau_2\right) d\alpha$. Меняя в правой части порядок интегрирования и используя (2.4), установим (2.7). □

Отметим, что законность последней операции обеспечивается суммируемостью $K_{X_\alpha^-}(\tau_1, \tau_2)$ и $K_{X_\alpha^+}(\tau_1, \tau_2)$ по совокупности переменных τ_1, τ_2, α.

§ 3. Стационарные нечетко-случайные процессы

Как известно, вещественный случайный процесс $\xi(t)$ с $E|\xi(t)|^2 < \infty$ при $t \in (-\infty, \infty)$ называют стационарным в широком смысле (коротко, стационарным), если он имеет постоянное математическое ожидание $E\xi(t) = a$ и ковариационную функцию

$$E[\xi(t) - a][\xi(s) - a] = K_\xi(t - s),$$

зависящую лишь от разности аргументов [7, гл. VI].

Назовем Н. С. П. $\tilde{X}(t)$ стационарным, если его α-индексы при $\forall\alpha \in [0,1]$ являются стационарными случайными процессами.

Пример 3.1. Пусть выполнены условия примера 2.3 и дополнительно все случайные процессы $\xi_j(t)$ $(j = 1,2,3)$ являются стационарными. Тогда треугольный Н. С. П. $\tilde{X}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ является стационарным.

Это следует из формул, полученных в примерах 2.1, 2.3 для α-индексов и, соответственно, ковариационных функций треугольного Н. С. П. $\tilde{X}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть $\tilde{X}(t)$ — стационарный Н. С. П. Тогда его нечеткое ожидание $M(\tilde{X}(t))$ и ожидание $m(\tilde{X}(t))$ постоянны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\tilde{X}(t)$ — стационарный Н. С. П. Обозначим постоянные математические ожидания α-индексов $X_\alpha^\pm(t)$ Н. С. П. $\tilde{X}(t)$ при $\alpha \in [0,1]$ через $m_\alpha^\pm$. Согласно определению (1.2) они являются α-индексами нечеткого ожидания $M_\alpha^\pm = m_\alpha^\pm$. Тогда нечеткое ожидание $M(\tilde{X}(t))$ постоянно, а ожидание $m(\tilde{X}(t)) = \frac{1}{2}\int_0^1 (m_\alpha^+ + m_\alpha^-)\,d\alpha$ также постоянно. □

Рассмотрим свойства ковариационной функции стационарного Н. С. П. $\tilde{X}(t)$.

Теорема 3.2. *Пусть $\tilde{X}(t)$ — стационарный Н. С. П. Тогда его ковариационная функция $K_{\tilde{X}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{X}}(t_2 - t_1)$ зависит от разности аргументов $t_2 - t_1 = \tau$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим ковариационные функции α-индексов, т. е. случайных процессов $X_\alpha^\pm(t)$ через $K_{X_\alpha^\pm}(t_1, t_2)$. По предположению $X_\alpha^\pm(t)$ — стационарный случайный процесс, следовательно, $K_{X_\alpha^\pm}(t_1, t_2) = K_{X_\alpha^\pm}(t_2 - t_1)$. Тогда согласно определению (2.4) и ковариационная функция $K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)$ Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ зависит от разности аргументов $t_2 - t_1 = \tau$. □

Кроме того, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3. *Ковариационная функция $K_{\tilde{X}}(\tau)$ стационарного Н. С. П. $\tilde{X}(t)$ обладает свойствами:*

(1) *ковариационная функция стационарного Н. С. П. $\tilde{X}(t)$ является четной, т. е.*

$$K_{\tilde{X}}(\tau) = K_{\tilde{X}}(-\tau) \quad \forall\tau \in R;$$

(2) *дисперсия стационарного Н. С. П. $\tilde{X}(t)$ постоянна и равна $D_{\tilde{X}} = K_{\tilde{X}}(0)$;*

(3) *справедливо неравенство $|K_{\tilde{X}}(\tau)| \leqslant K_{\tilde{X}}(0)$ $\forall\tau \in R$.*

Теорема 3.3 следует из выполнения соответствующих свойств для ковариационных функций α-индексов $K_{X_\alpha^-}(\tau)$, $K_{X_\alpha^-}(\tau)$ (например, [31, гл. 23]) и представления (2.4).

Для ковариационной функции интеграла от стационарного Н. С. П. справедливо следующее уточнение теоремы 2.2.

Теорема 3.4. *В условиях теоремы 2.2 ковариационная функция интеграла* $\tilde{Y}(t) = \int_0^t \tilde{X}(s)ds$ *от стационарного Н. С. П.* $\tilde{X}(t)$ *с ковариационной функцией* $K_{\tilde{X}}(\tau)$ *равна*

$$K_{\tilde{Y}}(t_1,t_2) = \int_0^{t_2} (t_2-\tau)K_{\tilde{X}}(\tau)\,d\tau - \int_0^{t_2-t_1} (t_2-t_1-\tau)K_{\tilde{X}}(\tau)\,d\tau + \int_0^{t_1} (t_1-\tau)K_{\tilde{X}}(\tau)\,d\tau.$$

Доказательство. Согласно теореме 2.2

$$K_{\tilde{Y}}(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_{\tilde{X}}(s_1,s_2)\,ds_1\,ds_2.$$

Поскольку $\tilde{X}(t)$ — стационарный Н. С. П., то $K_{\tilde{X}}(s_1,s_2) = K_{\tilde{X}}(s_2-s_1)$. Тогда

$$K_{\tilde{Y}}(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_{\tilde{X}}(s_2-s_1)\,ds_1\,ds_2.$$

Вычисление этого интеграла (например, [31, гл. 23, § 6]) приводит к результату теоремы 3.4. □

Следствие 3.1. *Дисперсия интеграла* $\tilde{Y}(t) = \int_0^t \tilde{X}(s)\,ds$ *от стационарного Н. С. П.* $\tilde{X}(t)$ *равна удвоенной свертке функций* $K_{\tilde{X}}(t)$ *и* t

$$D_{\tilde{Y}}(t) = 2\int_0^t (t-\tau)K_{\tilde{X}}(\tau)\,d\tau.$$

Приведенные факты развивают соответствующие результаты для вещественных стационарных процессов на случай Н. С. П.

Обсудим, какой вид принимает свойство эргодичности для стационарных Н. С. П. Как известно для вещественных стационарных процессов имеет место свойство эргодичности [7, гл. VI], [8, гл. VII].

Лемма 3.1. *Для с. к.-непрерывного по* $t \in (-\infty,\infty)$ *стационарного (в широком смысле) вещественного случайного процесса* $\xi(t)$ *существует среднее*

$$\text{с. к.-}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt = \bar{\xi},$$

представляющее собой случайную величину.

Теорема 3.5. *Пусть* $\tilde{X}(t)$ *— стационарный Н. С. П., все* α*-индексы* $X_\alpha^\pm(t)$ $(\alpha\in[0,1])$ *которого с. к.-непрерывны по* t *при* $t\in(-\infty,\infty)$ *и с. к.-непрерывны по* α *равномерно при* $t \geqslant 0$. *Тогда существует предел*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \tilde{X}(t)\,dt = \bar{X}. \tag{3.1}$$

Здесь среднее $\bar{X}$ *есть нечетко-случайная величина, предел понимается в смысле сходимости по метрике (1.1), а интеграл понимается как интеграл от Н. С. П.*

Доказательство. В условиях теоремы 3.5 по лемме 3.1 для каждого α-индекса $X_\alpha^\pm(t)$, являющегося стационарным случайным процессом, справедливо соотношение

$$\text{с. к.-}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X_\alpha^\pm(t)\,dt = \bar{X}_\alpha^\pm. \tag{3.2}$$

Покажем, что случайные величины $\bar{X}_\alpha^\pm$, определяемые формулами (3.2), являются α-индексами некоторой Н. С. В. $\bar{X}$. Заметим, что $\bar{X}_\alpha^- \leqslant \bar{X}_\alpha^+$, поскольку $X_\alpha^-(\omega,t) \leqslant X_\alpha^+(\omega,t)$ для $\forall t \in (-\infty,\infty)$ и п. в. $\omega \in \Omega$.

Кроме того, функция $\bar{X}_\alpha^-$ не убывает, а $\bar{X}_\alpha^+$ не возрастает по $\alpha \in [0,1]$. Действительно, зафиксируем значения $\omega \in \Omega$ и $t \in (-\infty,\infty)$. Пусть $\alpha_1,\alpha_2 \in [0,1]$ и $\alpha_1 > \alpha_2$. Тогда, поскольку $X_\alpha^-(t)$ — левый индекс нечеткого числа $\tilde{X}(t)$, то [1, гл. V] $X_{\alpha_1}^-(t) \geqslant X_{\alpha_2}^-(t)$. Следовательно,

$$\frac{1}{T}\int_0^T X_{\alpha_1}^-(t)\,dt \geqslant \frac{1}{T}\int_0^T X_{\alpha_2}^-(t)\,dt.$$

Переходя в этом соотношении к с. к.-пределу при $T \to \infty$ на основании леммы 3.1 и (3.2), получим $\bar{X}_{\alpha_1}^- \geqslant \bar{X}_{\alpha_2}^-$. Аналогично для правых индексов $\bar{X}_\alpha^+$ показывается, что они не возрастают по α.

При этом каждая из величин $\bar{X}_\alpha^\pm$, определяемых формулами (3.2), непрерывна по α в условиях теоремы. В самом деле, для $\alpha_1,\alpha_2 \in [0,1]$ можем записать

$$||\bar{X}_{\alpha_1}^\pm - \bar{X}_{\alpha_2}^\pm|| = \left\|\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (X_{\alpha_1}^\pm(t) - X_{\alpha_2}^\pm(t))\,dt\right\| \leqslant \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T ||X_{\alpha_1}^\pm(t) - X_{\alpha_2}^\pm(t)||\,dt.$$

Здесь нормы рассматриваются в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ случайных величин с конечным вторым моментом.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. По условию теоремы найдется $\delta > 0$ такое, что $\|X_{\alpha_1}^\pm(t) - X_{\alpha_2}^\pm(t)\| < \varepsilon$ при $|\alpha_1 - \alpha_2| < \delta$ равномерно по $t \in [0,+\infty)$. Тогда $\frac{1}{T}\int_0^T ||X_{\alpha_1}^\pm(t) - X_{\alpha_2}^\pm(t)||\,dt < \varepsilon$. Следовательно $||\bar{X}_{\alpha_1}^\pm - \bar{X}_{\alpha_2}^\pm|| < \varepsilon$ при $|\alpha_1-\alpha_2| < \delta$, что и означает указанную непрерывность.

Обозначим Н. С. В. с индексами $\bar{X}_\alpha^\pm$, определяемыми формулами (3.2), через $\bar{X}$. Введем в рассмотрение случайные величины

$$\bar{X}_\alpha^\pm(T) = \frac{1}{T}\int_0^T X_\alpha^\pm(t)\,dt \quad (\alpha \in [0,1]). \tag{3.3}$$

По определению нечеткого интеграла случайные величины $\bar{X}_\alpha^\pm(T)$, определяемые формулами (3.3), являются α-индексами Н. С. В. $\bar{X}(T) = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{X}(t)dt$. Рассмотрим расстояние между Н. С. В. $\bar{X} = \bar{X}(\omega)$ и $\bar{X}(T) = \bar{X}(T,\omega)$. Согласно (1.1), имеем

$$\rho(\bar{X}(T),\bar{X}) = \left(\int_0^1\int_\Omega ((\bar{X}_\alpha^-(T,\omega) - \bar{X}_\alpha^-(\omega))^2 + (\bar{X}_\alpha^+(T,\omega) - \bar{X}_\alpha^+(\omega))^2)\,dP\,d\alpha\right)^{1/2}. \tag{3.4}$$

Переходя к пределу при $T \to \infty$ в правой части (3.4) на основании (3.2), (3.3) получим, что $\rho(\bar{X}(T),\bar{X}) \to 0$ при $T \to \infty$. Тогда справедливо утверждение теоремы 3.5, причем в правой части формулы (3.1) фигурирует Н. С. В. $\bar{X}$ с α-индексами $\bar{X}_\alpha^\pm$, определяемыми формулами (3.2). □

Пример 3.2. Пусть выполнены условия примера 3.1 и дополнительно случайные процессы $\xi_i(t)$ $(i = 1,2,3)$ с. к.-непрерывны и равномерно ограничены по $t \geqslant 0$ в норме пространства случайных величин с конечным вторым моментом $\mathfrak{H}$. Тогда треугольный Н. С. П. $\tilde{X}(t) = (\xi_1(t),\xi_2(t),\xi_3(t))$ удовлетворяет условиям теоремы 3.5, т. е. для него выполнено свойство эргодичности.

Это следует из примера 3.1 с учетом представления (2.3) для α-индексов. При этом среднее $\bar{X}$, согласно (2.3), (3.2) имеет α-индексы

$$\bar{X}_\alpha^- = (1-\alpha)\bar{\xi}_1 + \alpha\bar{\xi}_2, \quad \bar{X}_\alpha^+ = (1-\alpha)\bar{\xi}_3 + \alpha\bar{\xi}_2.$$

Здесь случайные величины $\bar{\xi}_i$ — средние вещественных случайных процессов $\xi_i(t)$ ($i = 1$, 2, 3), т. е.

$$\bar{\xi}_i = \text{с. к.-}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \xi_i(t)\,dt.$$

Рассмотрим задачу о спектральном представлении ковариационной функции стационарного Н. С. П.

Как известно, для вещественного стационарного случайного процесса $\xi(t)$, определенного на бесконечном интервале времени $(-\infty,\infty)$ имеет место следующее утверждение (например, [31, гл. 25])

Лемма 3.2 (теорема Винера–Хинчина). *Ковариационная функция $K_\xi(\tau)$ и спектральная плотность $S_\xi(\omega)$ вещественного стационарного случайного процесса $\xi(t)$ связаны между собой взаимно обратными косинус-преобразованиями Фурье*

$$K_\xi(\tau) = \int_0^\infty S_\xi(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega, \quad S_\xi(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty K_\xi(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau.$$

Пусть стационарный Н. С. П. $\tilde{X}(t)$, заданный на $(-\infty,\infty)$, имеет α-индексы $X_\alpha^\pm(t)$ и пусть $S_{X_\alpha^\pm}(\omega)$ — спектральные плотности стационарных случайных процессов $X_\alpha^\pm(t)$ ($\forall\alpha\in[0,1]$), причем функции $S_{X_\alpha^\pm}(\omega)$ суммируемы по α на $[0,1]$.

Спектральной плотностью стационарного Н. С. П. $\tilde{X}(t)$ назовем функцию

$$S_{\tilde{X}}(\omega) = \frac{1}{2}\int_0^1 (S_{X_\alpha^+}(\omega) + S_{X_\alpha^-}(\omega))\,d\alpha. \tag{3.5}$$

Целесообразность данного определения (3.5) подтверждается приводимой ниже обобщенной теоремой Винера–Хинчина.

Теорема 3.6. *Пусть $\tilde{X}(t)$ — стационарный Н. С. П. и для его α-индексов $X_\alpha^\pm(t)$ при любом $\alpha\in[0,1]$ определены ковариационная функция $K_{X_\alpha^\pm}(\tau)$ и спектральная плотность $S_{X_\alpha^\pm}(\omega)$, причем они суммируемы по совокупности переменных на $[0,\infty)\times[0,1]$. Тогда ковариационная функция и спектральная плотность стационарного Н. С. П. $\tilde{X}(t)$ связаны между собой взаимно обратными косинус-преобразованиями Фурье:*

$$K_{\tilde{X}}(\tau) = \int_0^\infty S_{\tilde{X}}(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega, \quad S_{\tilde{X}}(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty K_{\tilde{X}}(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau. \tag{3.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем первую из формул (3.6). Для вещественных стационарных процессов $X_\alpha^\pm(t)$ по лемме 3.2 имеем

$$K_{X_\alpha^-}(\tau) = \int_0^\infty (S_{X_\alpha^-}(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega \;\text{ и }\; K_{X_\alpha^+}(\tau) = \int_0^\infty (S_{X_\alpha^+}(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega.$$

Сложим обе части этих равенств, а затем проинтегрируем полученные результаты по α от 0 до 1. Тогда

$$\int_0^1 (K_{X_\alpha^-}(\tau) + K_{X_\alpha^+}(\tau))\,d\alpha = \int_0^1\int_0^\infty (S_{X_\alpha^-}(\omega) + S_{X_\alpha^+}(\omega))\cos\omega\tau\,d\omega\,d\alpha.$$

Меняя в правой части порядок интегрирования на основании теоремы Фубини и используя (2.4), (3.5), установим формулу для $K_{\tilde{X}}(\tau)$.

Кроме того, по лемме 3.2

$$S_{X_\alpha^\pm}(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty K_{X_\alpha^\pm}(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau.$$

Откуда, аналогично предыдущему, с учетом (2.4), (3.5) следует вторая из формул (3.6). □

Заключение

Свойства нечетких ожиданий Н. С. П. (утверждение 2.1) и ковариационных функций (утверждение 2.2) естественным образом вытекают из соответствующих свойств нечетких ожиданий и ковариаций для нечетко-случайных величин (утверждения 1.1–1.3). Отметим утверждение 2.3, представляющее, на взгляд автора, определенный интерес.

Существенное содержание и научную новизну данной работы составляют теоремы 2.1–3.6. При этом теоремы 2.1, 2.2 являются развитием на случай Н. С. П. известных утверждений для вещественных интегрируемых случайных процессов. Теоремы 3.1–3.4 уточняют результаты о нечетких ожиданиях и корреляционных функциях для случая стационарных Н. С. П. Теорема 3.5 развивает подход, связанный с эргодичностью вещественных стационарных случайных процессов на случай Н. С. П. Теорема 3.6 есть обобщение теоремы Винера–Хинчина на случай стационарных Н. С. П. Наиболее значимыми на взгляд автора являются теоремы 3.5, 3.6. Особо отметим понятие спектральной плотности стационарного Н. С. П., введенное автором. В целом, все теоремы 2.1–3.6 представляются новыми и актуальными для задач математического моделирования динамических процессов в стохастических нечетких системах.

Примеры 2.1–3.2 показывают возможности применения развитой теории к треугольным нечетко-случайным процессам. Аналогичные результаты могут быть установлены для трапецеидальных и других Н. С. П.

Укажем возможные приложения установленных в данной статье результатов. В частности, теорема 3.5 (об эргодичности) позволяет обосновать (аналогично случаю вещественных стационарных случайных процессов [7, гл. VI]) приближенное вычисление нечеткого ожидания, а также ожидания стационарного Н. С. П. $\tilde{X}(\omega, t)$ как соответствующее среднее по одной из реализаций $X(\omega_0, t) = X_0(t)$ достаточно большой продолжительности. А именно, в качестве нечеткого ожидания и, соответственно, ожидания рекомендуется принять выражения

$$M\big(\tilde{X}(t)\big) \sim M_0 = \frac{1}{T}\int_0^T X_0(t)\,dt, \qquad m\big(\tilde{X}(t)\big) \sim m_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 (M_{0,\alpha}^+ + M_{0,\alpha}^-)\,d\alpha.$$

Здесь реализация $X_0(t)$ — нечетко-значная функция, полученная при фиксированном значении ω_0; M_0 — нечеткое число с α-индексами $M_{0,\alpha}^{\pm}$; m_0 — среднее нечеткого числа M_0; $T > 0$ — достаточно большое число.

Теорема 3.6 позволяет распространить известный для вещественных стационарных случайных процессов алгоритм вычисления ковариационной функции на выходе линейной стационарной динамической системы по ковариационной функции на входе на случай стационарных нечетко-случайных процессов.

А именно, стандартный алгоритм состоит из следующих этапов (см., напр., [22, гл. 7]):

(1) по ковариационной функции стационарного случайного процесса на входе системы, согласно лемме 3.2, вычисляется его спектральная плотность;

(2) по дифференциальному уравнению динамической системы находят частотную характеристику;

(3) по спектральной плотности на входе системы с помощью частотной характеристики находят спектральную плотность случайного процесса на выходе системы;

(4) по спектральной плотности на выходе системы с помощью леммы 3.2 вычисляют ковариационную функцию стационарного случайного процесса на выходе системы.

Модификация этого алгоритма на случай нечетко-случайных стационарных входных и выходных сигналов состоит в использовании вместо классического результата Винера–Хинчина (лемма 3.2) на этапах (1), (4) теоремы 3.6.

В заключение отметим недавние работы автора [32, 33], в которых рассмотрено применение метода функций Грина в задаче об ограниченных решениях для динамических систем с нечетко-случайными и, соответственно, нечеткими входными характеристиками.

Основным в этих работах является установление взаимосвязи между ожиданиями, а также ковариационными функциями входных и, соответственно, выходных сигналов.

При этом стационарность входных либо выходных сигналов не предполагается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аверкин А. Н., Батыршин И. З., Блишун А. Ф., Силов В. Б., Тарасов В. Б. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука, 1986.
2. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013.
3. Ahmad L., Farooq M., Abdullah S. Solving nth order fuzzy differential equation by fuzzy Laplace transform // arXiv:1403.0242v1 [math.GM]. 2014. https://doi.org/10.48550/arXiv.1403.0242
4. Hua Changchun, Wu Shuangshuang, Guan Xinping. Stabilization of T-S fuzzy system with time delay under sampled-data control using a new looped-functional // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2020. Vol. 28. Issue 2. P. 400–407. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2019.2906040
5. Ma Weiwei, Jia Xin-Chun, Yang Fuwen, Chi Xiaobo. Fuzzy dynamic output feedback control for nonlinear networked multirate sampled-data systems: An integral inequality method // Fuzzy Sets and Systems. 2023. Vol. 452. P. 110–130. https://doi.org/10.1016/j.fss.2022.05.012
6. Cao Liang, Yao Deyin, Li Hongyi, Meng Wei, Lu Renquan. Fuzzy-based dynamic event triggering formation control for nonstrict-feedback nonlinear MASs // Fuzzy Sets and Systems. 2023. Vol. 452. P. 1–22. https://doi.org/10.1016/j.fss.2022.03.005
7. Розанов Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1985.
8. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.
9. Puri M. L., Ralesku D. A. Fuzzy random variables // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1986. Vol. 114. Issue 2. P. 409–422. https://doi.org/10.1016/0022-247X(86)90093-4
10. Feng Yuhu, Hu Liangjian, Shu Huisheng. The variance and covariance of fuzzy random variables and their applications // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 120. Issue 3. P. 487–497. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(99)00060-3
11. Nguyen H. T., Wu B. Fundamentals of statistics with fuzzy data. Berlin–Heidelberg: Springer, 2006. https://doi.org/10.1007/11353492
12. de la Rosa de Sáa S., Gil M. Á., González-Rodriguez G., López M. T., Lubiano M. A. Fuzzy rating scale-based questionnaires and their statistical analysis // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2015. Vol. 23. Issue 1. P. 111–126. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2014.2307895
13. Деменков Н. П., Микрин Е. А., Мочалов И. А. Марковские и полумарковские процессы с нечеткими состояниями. Часть 1. Марковские процессы // Информационные технологии. 2020. Т. 26. № 6. Р. 323–334. https://doi.org/10.17587/it.26.323-334
14. Вилков В. Б., Кальницкий В. С., Молоков И. Е. Нечеткие системы массового обслуживания. СПб.: Астерион, 2022. https://elibrary.ru/item.asp?id=49841309
15. Zaki Noor Hidayah Mohd, Saliman Aqilah Nadirah, Abdullah Nur Atikah, Hussain Nur Su Ain Abu, Amit Norani. Comparison of queuing performance using queuing theory model and fuzzy queuing model at check-in counter in airport // Mathematics and Statistics. 2019. Vol. 7. No. 4A. P. 17–23. https://doi.org/10.13189/ms.2019.070703
16. Karupothu U. P., Wurmbrand R., Jayakar R. P. S. An interpretation of non-preemptive priority fuzzy queuing model with asymmetrical service rates // Pakistan Journal of Statistics and Operation Research. 2021. Vol. 17. No. 4. P. 791–797. https://doi.org/10.18187/pjsor.v17i4.3878
17. Liu Yongchao, Zhu Qidan, Fan Xing. Event-triggered adaptive fuzzy control for stochastic nonlinear time-delay systems // Fuzzy Sets and Systems. 2023. Vol. 452. P. 42–60. https://doi.org/10.1016/j.fss.2022.07.005

18. Shen Hao, Wu Jiacheng, Li Feng, Chen Xiangyong, Wang Jing. Fuzzy multi-objective fault-tolerant control for nonlinear Markov jump singularly perturbed systems with persistent dwell-time switched transition probabilities // Fuzzy Sets and Systems. 2023. Vol. 452. P. 131–148. https://doi.org/10.1016/j.fss.2022.03.020
19. Liu Xikui, Ge Yingying, Li Yan. Adaptive fuzzy control for stochastic pure-feedback nonlinear systems with unknown hysteresis and external disturbance // Complexity. 2018. Vol. 2018. Article ID: 1487134. https://doi.org/10.1155/2018/1487134
20. Yang Hong, Zhang Yu, Zhang Le. Novel robust control of stochastic nonlinear switched fuzzy systems // Mathematical Problems in Engineering. 2021. Vol. 2021. Article ID: 9743351. https://doi.org/10.1155/2021/9743351
21. Luo Honglin, Zheng Jiali. Dissipativity-based fuzzy integral sliding mode control of nonlinear stochastic systems // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2021. Vol. 2021. Article ID: 6650516. https://doi.org/10.1155/2021/6650516
22. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория случайных процессов и их инженерные приложения. М.: Кнорус, 2014.
23. Diamond P., Kloeden P. Metric spaces of fuzzy sets // Fuzzy Sets and Systems. 1990. Vol. 35. Issue 2. P. 241–249. https://doi.org/10.1016/0165-0114(90)90197-E
24. Körner R. On the variance of fuzzy random variables // Fuzzy Sets and Systems. 1997. Vol. 92. Issue 1. P. 83–93. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(96)00169-8
25. Шведов А. С. Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин // Прикладная эконометрика. 2016. Т. 42. С. 121–138. https://cyberleninka.ru/article/n/otsenivanie-srednih-i-kovariatsiy-nechetko-sluchaynyh-velichin
26. Язенин А. В. Основные понятия теории возможностей. М.: Физматлит, 2016.
27. Хацкевич В. Л. О некоторых свойствах нечетких ожиданий и нелинейных нечетких ожиданий нечетко-случайных величин // Известия вузов. Математика. 2022. № 11. С. 97–109. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-11-97-109
28. Dubois D., Prade H. The mean value of fuzzy number // Fuzzy Sets and Systems. 1987. Vol. 24. Issue 3. P. 279–300. https://doi.org/10.1016/0165-0114(87)90028-5
29. Aumann R. J. Integrals of set-valued functions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1965. Vol. 12. Issue 1. P. 1–12. https://doi.org/10.1016/0022-247X(65)90049-1
30. Kaleva O. Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. 1987. Vol. 24. Issue 3. P. 301–317. https://doi.org/10.1016/0165-0114(87)90029-7
31. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2003.
32. Хацкевич В. Л. О непрерывных случайных процессах с нечеткими состояниями // Автоматика и телемеханика. 2023. Вып. 7. С. 23–40. https://doi.org/10.31857/S0005231023070024
33. Хацкевич В. Л. Непрерывные процессы с нечеткими состояниями и их приложения // Автоматика и телемеханика. 2023. Вып. 8. С. 43–60. https://doi.org/10.31857/S0005231023080032

Поступила в редакцию 03.06.2023

Принята к публикации 30.01.2024

Хацкевич Владимир Львович, д. т. н., профессор, кафедра математики, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», 394052, Россия, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, д. 54а.
E-mail: vlkhats@mail.ru

Цитирование: В. Л. Хацкевич. О стационарных случайных процессах с нечеткими состояниями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 1. С. 91–108.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI

MATHEMATICS 2024. Vol. 34. Issue 1. Pp. 91–108.

V. L. Khatskevich

On stationary random processes with fuzzy states

Keywords: continuous random processes with fuzzy states, fuzzy expectations, covariance functions, stationary fuzzy-random processes, ergodicity property, spectral decomposition.

MSC2020: 60G10

DOI: 10.35634/vm240107

In this paper, continuous random processes with fuzzy states are studied. The properties of their numerical characteristics — fuzzy expectations, expected values and covariance functions – are established. The main attention is paid to the class of stationary fuzzy-random processes. For them, the ergodicity property and the spectral representation of covariance function (generalized Wiener–Khinchin theorem) are substantiated. The results obtained are based on the properties of fuzzy-random variables and numerical random processes. Triangular fuzzy-random processes are considered as examples.

REFERENCES

1. Averkin A. N., Batyrshin I. Z., Blishun A. F., Silov V. B., Tarasov V. B. *Nechetkie mnozhestva v modelyakh upravleniya i iskusstvennogo intellekta* (Fuzzy sets in control models and artificial intelligence), Moscow: Nauka, 1986.
2. Piegat A. *Fuzzy modeling and control*, Physica Heidelberg, 2001. https://doi.org/10.1007/978-3-7908-1824-6
3. Ahmad L., Farooq M., Abdullah S. Solving nth order fuzzy differential equation by fuzzy Laplace transform, *arXiv:1403.0242v1 [math.GM]*, 2014. https://doi.org/10.48550/arXiv.1403.0242
4. Hua Changchun, Wu Shuangshuang, Guan Xinping. Stabilization of T-S fuzzy system with time delay under sampled-data control using a new looped-functional, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2020, vol. 28, issue 2, pp. 400–407. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2019.2906040
5. Ma Weiwei, Jia Xin-Chun, Yang Fuwen, Chi Xiaobo. Fuzzy dynamic output feedback control for nonlinear networked multirate sampled-data systems: An integral inequality method, *Fuzzy Sets and Systems*, 2023, vol. 452, pp. 110–130. https://doi.org/10.1016/j.fss.2022.05.012
6. Cao Liang, Yao Deyin, Li Hongyi, Meng Wei, Lu Renquan. Fuzzy-based dynamic event triggering formation control for nonstrict-feedback nonlinear MASs, *Fuzzy Sets and Systems*, 2023, vol. 452, pp. 1–22. https://doi.org/10.1016/j.fss.2022.03.005
7. Rozanov Yu. A. *Teoriya veroyatnostei, sluchainye protsessy i matematicheskaya statistika* (Probability theory, random processes and mathematical statistics), Moscow: Nauka, 1985.
8. Bulinskii A. V., Shiryaev A. N. *Teoriya sluchainykh protsessov* (Theory of random processes), Moscow: Fizmatlit, 2005.
9. Puri M. L., Ralesku D. A. Fuzzy random variables, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1986, vol. 114, issue 2, pp. 409–422. https://doi.org/10.1016/0022-247X(86)90093-4
10. Feng Yuhu, Hu Liangjian, Shu Huisheng. The variance and covariance of fuzzy random variables and their applications, *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, vol. 120, issue 3, pp. 487–497. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(99)00060-3
11. Nguyen H. T., Wu B. *Fundamentals of statistics with fuzzy data*, Berlin–Heidelberg: Springer, 2006. https://doi.org/10.1007/11353492
12. de la Rosa de Sáa S., Gil M. Á., González-Rodriguez G., López M. T., Lubiano M. A. Fuzzy rating scale-based questionnaires and their statistical analysis, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2015, vol. 23, issue 1, pp. 111–126. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2014.2307895
13. Demenkov N. P., Mikrin E. A., Mochalov I. A. Markov and semi-Markov processes with fuzzy states. Part 1. Markov processes, *Informacionnye Tehnologii*, 2020, vol. 26, no. 6, pp. 323–334 (in Russian). https://doi.org/10.17587/it.26.323-334

14. Vilkov V. B., Kal'nitskii V. S., Molokov I. E. *Nechetkie sistemy massovogo obsluzhivaniya* (Fuzzy queueing theory), Saint Petersburg: Asterion, 2022. https://elibrary.ru/item.asp?id=49841309
15. Zaki Noor Hidayah Mohd, Saliman Aqilah Nadirah, Abdullah Nur Atikah, Hussain Nur Su Ain Abu, Amit Norani. Comparison of queuing performance using queuing theory model and fuzzy queuing model at check-in counter in airport, *Mathematics and Statistics*, 2019, vol. 7, no. 4A, pp. 17–23. https://doi.org/10.13189/ms.2019.070703
16. Karupothu U. P., Wurmbrand R., Jayakar R. P. S. An interpretation of non-preemptive priority fuzzy queuing model with asymmetrical service rates, *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 2021, vol. 17, no. 4, pp. 791–797. https://doi.org/10.18187/pjsor.v17i4.3878
17. Liu Yongchao, Zhu Qidan, Fan Xing. Event-triggered adaptive fuzzy control for stochastic nonlinear time-delay systems, *Fuzzy Sets and Systems*, 2023, vol. 452, pp. 42–60. https://doi.org/10.1016/j.fss.2022.07.005
18. Shen Hao, Wu Jiacheng, Li Feng, Chen Xiangyong, Wang Jing. Fuzzy multi-objective fault-tolerant control for nonlinear Markov jump singularly perturbed systems with persistent dwell-time switched transition probabilities, *Fuzzy Sets and Systems*, 2023, vol. 452, pp. 131–148. https://doi.org/10.1016/j.fss.2022.03.020
19. Liu Xikui, Ge Yingying, Li Yan. Adaptive fuzzy control for stochastic pure-feedback nonlinear systems with unknown hysteresis and external disturbance, *Complexity*, 2018, vol. 2018, article ID: 1487134. https://doi.org/10.1155/2018/1487134
20. Yang Hong, Zhang Yu, Zhang Le. Novel robust control of stochastic nonlinear switched fuzzy systems, *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, vol. 2021, article ID: 9743351. https://doi.org/10.1155/2021/9743351
21. Luo Honglin, Zheng Jiali. Dissipativity-based fuzzy integral sliding mode control of nonlinear stochastic systems, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2021, vol. 2021, article ID: 6650516. https://doi.org/10.1155/2021/6650516
22. Venttsel' E. S., Ovcharov L. A. *Teoriya sluchainykh protsessov i ikh inzhenernye prilozheniya* (Theory of random processes and their engineering applications), Moscow: Knorus, 2014.
23. Diamond P., Kloeden P. Metric spaces of fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 1990, vol. 35, issue 2, pp. 241–249. https://doi.org/10.1016/0165-0114(90)90197-E
24. Körner R. On the variance of fuzzy random variables, *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, vol. 92, issue 1, pp. 83–93. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(96)00169-8
25. Shvedov A. S. Estimating the means and the covariances of fuzzy random variables, *Applied Econometrics*, 2016, vol. 42, pp. 121–138. https://cyberleninka.ru/article/n/otsenivanie-srednih-i-kovariatsiy-nechetkosluchaynyh-velichin
26. Yazenin A. V. *Osnovnye ponyatiya teorii vozmozhnostei* (Basic concepts of possibility theory), Moscow: Fizmatlit, 2016.
27. Khatskevich V. L. On some properties of fuzzy expectations and nonlinear fuzzy expectations of fuzzy-random variables, *Russian Mathematics*, 2022, vol. 66, issue 11, pp. 86–96. https://doi.org/10.3103/S1066369X22110032
28. Dubois D., Prade H. The mean value of fuzzy number, *Fuzzy Sets and Systems*, 1987, vol. 24, issue 3, pp. 279–300. https://doi.org/10.1016/0165-0114(87)90028-5
29. Aumann R. J. Integrals of set-valued functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1965, vol. 12, issue 1, pp. 1–12. https://doi.org/10.1016/0022-247X(65)90049-1
30. Kaleva O. Fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 1987, vol. 24, issue 3, pp. 301–317. https://doi.org/10.1016/0165-0114(87)90029-7
31. Gmurman V. E. *Teoriya veroyatnostei i matematicheskaya statistika* (Theory of probability and mathematical statistics), Moscow: Vysshaya Shkola, 2003.
32. Khatskevich V. L. On continuous random processes with fuzzy states, *Automation and Remote Control*, 2023, vol. 84, issue 7, pp. 778–790. https://doi.org/10.1134/S0005117923070081
33. Khatskevich V. L. Continuous processes with fuzzy states and their applications, *Automation and Remote Control*, 2023, vol. 84, issue 8, pp. 827–839. https://doi.org/10.1134/S0005117923080040

Received 03.06.2023

Accepted 30.01.2024

Vladimir L'vovich Khatskevich, Doctor of Engineering, Professor, Department of Mathematics, Air Force Academy named after Professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin, ul. Old Bolsheviks, 54a, Voronezh, 394052, Russia.
E-mail: vlkhats@mail.ru

Citation: V. L. Khatskevich. On stationary random processes with fuzzy states, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 1, pp. 91–108.